# Задачи

22 августа 2018 г.

## Язык теории множеств

1. Приведите пример непустого множества, каждый элемент которого является некоторым подмножеством этого множества.

2. Для каждого целого $n > 0$ постройте множество $_n$, состоящее ровно из $n$ элементов, такое, что для любых $\in {}_n$, $' \in {}_n$ либо $\in '$, либо $' \in$ .

3. Докажите, что для любого множества $A$ выполняются следующие свойства:

   (a) $A \cap A = A$,

   (b) $A \cup A = A$,

   (c) $A \cup \emptyset = A$,

   (d) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4. Докажите, что для любых множеств $A$ и $B$ включение $A \subset B$ выполняется тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$ или когда $A \cup B = B$.

5. Докажите, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, и $A \cup B = B$.

6. Докажите, что для подмножеств $A, B \subset X$ включение $A \subset B$ эквивалентно включению $(X \setminus B) \subset (X \setminus A)$.

7. Для любых двух множеств $A$ и $B$ имеет место следующее несвязное объединение

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A).$$

8. Для любых двух множеств $A$ и $B$ имеет место следующее несвязное объединение

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

9. Для любых двух множеств $A$ и $B$ условие $A \subset B$ эквивалентно условию $A \setminus B = \emptyset$.

10. Докажите, что $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

11. Докажите, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

12. Обозначим через $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Докажите, что

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

13. Доказать, что если множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равномощны, то и множества $A$ и$B$ равномощны.

14. Пусть мощность конечного множества $A$ равна $n$. Какова мощность множества $2^A$ всех его подмножеств (включая само множество $A$ и пустое множество)?

15. Доказать, что множество $X$ конечно в том и только в том случае, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству.

16. Доказать, что всякое подмножество счетного множества является счетным множеством.

17. Доказать, что в каждом бесконечном множестве существует бесконечное счетное подмножество.

18. Доказать, что Каждое бесконечное счетное множество можно представить как несвязное объединение двух непересекающихся бесконечных (тоже счетных) подмножеств.

19. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

20. Доказать, что если  и  — счетные множества, то их объединение $A \cup$ — счетное множество.

21. Доказать, что объединение счетного семейства счетных множеств есть множество счетное.

22. Доказать, что если множества $X$ и $Y$ счетны, то декартово произведение $X \times Y$ тоже счетно.

23. Доказать, что множество многочленов с рациональными коэффициентами не более чем счетно.

24. Доказать, что множество алгебраических чисел не более чем счетно.

25. Показать, что если отображение $f : X \longrightarrow Y$ сюръективно, а множество $X$ счетно, то $Y$ не более чем счетно.

26. Показать, что если отображение $f: X \longrightarrow Y$ инъективно, а множество $Y$ счетно, то $X$ не более чем счетно.

27. Показать, что если множество $X$ счетно, то множество всех конечных подмножеств в $X$ тоже счетно.

28. Показать, что множество вещественных чисел несчетно.

29. Доказать, что если $X$ — несчетное множество, а $A$ — его счетное подмножество, то $\#(X \setminus A) = \#(X)$.

30. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассыпаны "кнопки"без пересечений, т.е. такие подмножества, каждое из которых состоит из объединения трех отрезков с общим началом. Доказать, что семейство таких "кнопок"не более чем счетно.

31. Показать, что множество иррациональных чисел несчетно.

32. Показать, что множество трансцендентных чисел несчетно.

## Метрические и Топологические пространства

33. Пусть $X$ — бесконечное множество и $\mathcal{T} = \{ \subset : \setminus$ конечно или $A = \emptyset\}$. Докажите, что $\mathcal{T}$ является топологией на $X$.

34. Показать, что на бесконечном полуинтервале $X = (0, +\infty)$ семейство подмножеств $\{\emptyset, (a, +\infty), 0 \leq a < +\infty\}$ образует некоторую топологию.

35. Показать, что полуинтервал $[a, b) \subset \mathbf{R}$ представим как объединение замкнутых подмножеств и как пересечение открытых подмножеств не вещественной прямой $\mathbf{R}$.

36. Показать что множество $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ замкнуто на вещественной прямой $\mathbf{R}$.

37. Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, образуют базу некоторой топологии в $\mathbf{N}$.

38. Показать, что если множество $U$ открыто, а множество $F$ замкнуто, то $U \setminus F$ открыто, а $F \setminus U$ замкнуто.

39. Докажите, что для любых двух непересекающихся открытых множеств замыкание любого из них не пересекается с другим.

40. Доказать, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

41. Докажите, что если множества $U$ и $V$ открыты и не пересекаются, то $\mathbf{Int}\,(\overline{U}) \cap \mathbf{Int}\,(\overline{V}) = \emptyset$.

42. Приведите пример пространства, в котором все одноточечные множества замкнуты и одновременно любые два непустых открытых множества пересекаются).

43. Докажите, что, если каждая отдельная точка является замкнутым множеством, то каждое множество является пересечением некоторого семейства открытых множеств.

44. На вещественной прямой $\mathbf{R}^1$ построить три попарно различных открытых множества, имеющих общую границу

45. Докажите, что если в топологическом пространстве $X$ нет других плотных подмножеств кроме самого $X$, то пространство $X$ дискретно.

46. Приведите пример топологического пространства, в котором имеется одноточечное плотное подмножество, а само пространство состоит более чем из одной точки.

47. Верно ли, что объединение плотных подмножеств плотно?

48. Верно ли, что пересечение плотных подмножеств плотно?

49. Покажите, что пересечение двух (конечного семейства) плотных открытых подмножеств плотно.

50. Докажите, что пересечение счетного семейства плотных открытых подмножеств на вещественной прямой $\mathbf{R}^1$ плотно.

## Метрические пространства

51. Пусть $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1$ – окружность в комплексной плоскости с метрикой $\rho(z; w) = |z - w|$. Доказать, что $\mathbf{S}^1, \rho$ является метрическим пространством.

52. Пусть $C[0,1]$ – пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Доказать, что функция

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$$

задает метрику на пространстве $C[0,1]$.

53. Пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ две метрики на множестве $X$. Показать, что $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$ тоже является метрикой.

54. Пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ две метрики на множестве $X$. Показать, что $\rho_3 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ тоже является метрикой.

55. Пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ две метрики на множестве $X$. Является ли метрикой функция $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ ?

56. Пусть $\rho_1$ – метрика на множестве $X$. Показать, что $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики $\rho_1$ и $\rho_2$ эквивалентными?

57. Пусть $\rho_1$ – метрика на множестве $X$. Показать, что $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1\}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики $\rho_1$ и $\rho_2$ эквивалентными?

58. Пусть $\rho_1$ – метрика на множестве $X$. Показать, что $\rho_2 = f(\rho_1)$ тоже является метрикой, если $f$ – монотонно неубывающая функция. причем $f(0) = 0$ и $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

59. Обобщить предыдущую задачу на случай двух метрик: Пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ две метрики на множестве $X$. Показать, что $\rho_3 = f(\rho_1, \rho_2)$ тоже является метрикой, если функция $f$ – является монотонно неубывающая функцией относительно пары переменных, причем $f(0,0) = 0$ и $f(x+y, u+v) \leq f(x,u) + f(y,v)$.

60. Приведите пример такого метрического пространства, в котором имеется два шара, причем шар с большим радиусом содержится в шаре с меньшим радиусом. Покажите, что в этом случае больший радиус не превышает удвоенного меньшего радиуса.

61. Покажите, что отрезок $[a,b]$ в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ задается условием
$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(a,x) + \rho(x,b) = \rho(a,b).$$

Описать аналогичные "отрезки"в метрике $\rho_p$.

62. Показать, что все метрики $\rho_p$ в пространстве $\mathbf{R}^n$ задают одну и ту же топологию.

63. Показать, что в пространстве непрерывных функций на отрезке $C[0,1]$ две метрики, задаваемые формулами
$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt,$$
$$\rho_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt},$$
задают неэквивалентные топологии.

## Непрерывные отображения

64. Покажите, что отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого подмножества $A \subset Y$ выполнено включение $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

65. Непрерывно ли отображение $f : [0,2] \longrightarrow \mathbf{R}^1$, задаваемое формулой

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ x-2, & x \in [1,2] \end{cases} \quad ?$$

66. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

является непрерывным.

67. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

является непрерывным.

68. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

является непрерывным.

69. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = |f(x)|$$

является непрерывным.

70. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

является непрерывным.

71. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

является непрерывным.

72. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения, причем $0 \notin g(X)$. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

является непрерывным.

73. Доказать, что функции $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ непрерывны тогда и только тогда, когда совместное отображение $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ является непрерывным.

74. Пусть $\mathbf{Mat}\ (p \times q, \mathbb{R})$ — пространство матриц размера $p \times q$ с вещественными коэффициентами. Показать, что отображение

$$\mathbf{Mat}\ (p \times q, \mathbb{R}) \times \mathbf{Mat}\ (q \times r, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{Mat}\ (p \times r, \mathbb{R}), \quad (A, B) \to AB,$$

является непрерывным.

75. Пусть $GL(n; \mathbb{R}) \subset \mathbf{Mat}\ (p \times n, \mathbb{R})$ — пространство обратимых матриц. Показать, что отображение $f : GL(n; \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n; \mathbb{R}), \quad f(A) = A^{-1}$ является непрерывным.

76. Пусть $X$, $Y$ - два топологических пространства, причем первое пространство есть объединение двух замкнутых подмножеств: $X = A \cup B$, $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$. Показать, что отображение $f \colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда сужения $f|_A : A \longrightarrow Y$ и $f|_B : B \longrightarrow Y$ непрерывны. Если же подмножество $A$ не замкнуто, $A \neq \bar{A}$ то это, вообще говоря, неверно. Привести пример.

    Указание:

    Проверка непрерывности отображения отображения $f$ сводится к тому, что если подмножество $F \subset Y$ замкнуто, $\bar{F} = F$, то его прообраз $f^{-1}(F)$ должен быть замкнут, т.е. $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$. Имеем:

$$f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = f_A^{-1}(F) \cup f_B^{-1}(F) =$$

$$= \overline{f_A^{-1}(F)} \cup \overline{f_B^{-1}(F)}.$$

    Другими словами, множество $f^{-1}(F)$ есть объединение двух замкнутых подмножеств, т.е. замкнуто.

77. Докажите, что образ плотного множества при непрерывном сюръективном отображении плотен.

78. Привести пример последовательности непрерывных функций $f_i : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad i \in \mathbf{N}$ , для которой функция $f(x) = \sup\{f_i(x) : i \in \mathbf{N}\}$ не является непрерывной.

79. У метрического пространства $X$ и его подмножеств $A$ функция $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывна. Доказать.

80. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — отображение метрических пространств, причем существует такая константа $C > 0$, для которой выполнено неравенство $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$. Доказать, что отображение $f$ непрерывно.

81. Пусть функции $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ непрерывны. Показать, что множество всех решений системы уравнений $f_1(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$, является замкнутым.

82. Пусть функции $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ непрерывны. Показать, что множество всех решений системы неравенств $f_1(x) \geq 0, \ldots, f_n(x) \geq 0$, является замкнутым. Можно ли конечную систему заменить на бесконечную?

83. Пусть функции $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ непрерывны. Показать, что множество всех решений системы строгих неравенств $f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0$, является замкнутым. Можно ли конечную систему заменить на бесконечную?

84. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества на отрезок $[0, 1]$ .

85. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества $K$ на его квадрат $K \times K$.

86. Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}^2$, у которого образ $f(\mathbf{I}) \subset \mathbf{I}^2$ всюду плотен, является сюръекцией.

## Вещественная прямая

87. Пусть $G \subset \mathbf{R}^1$ — открытое множество на на вещественной прямой. Доказать, что $G$ есть объединение непересекающихся интервалов.

88. Докажите, что следующая функция есть метрика:

$$\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

89. Докажите, что следующая функция есть метрика:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

90. Показать, что в эвклидовом пространстве функция

$$\rho_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает некоторую метрику.

91. Показать, что в эвклидовом пространстве имеет место предел

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_i |x_i - y_i|.$$

## Гомеоморфизмы

92. Привести пример двух гомеоморфных пространств $X$ и $Y$ и биекции $f : X \longrightarrow Y$, которая не является гомеоморфизмом.

    Решение:

    Несвязное объединение полуинтервалов, скажем $[0, 1) \sqcup [2, 3)$ допускает биекцию на один полуинтервал $[0, 1)$ . Значит нужно добавить счетное несвязное объединение полуинтервалов к обеим пространствам, чтобы они стали гомеоморфными.

93. Пусть $K$ – канторово совершенное множество. Доказать, что пространство $K \times K$ гомеоморфно $K$.

94. Привести пример двух метрических пространств $X$ и $Y$ и таких отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ , что $f$ и $g$ взаимно однозначны и непрерывны, и, тем не менее, пространства $X$ и $Y$ не гомеоморфны.

95. Докажите, что $[0; 1)$, $[a; b)$, $(0; 1]$ $(a; b]$ гомеоморфны для любых $a < b$.

96. Докажите, что $[0; 1)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; a]$ гомеоморфны для любых $a$.

97. Докажите, что $(0; 1)$ и $(a; b)$ гомеоморфны для любых $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

98. Показать, что всякая изометрия есть гомеоморфизм.

99. Показать, что всякая сюръективная строго монотонная функция $f : [a; b] \longrightarrow [c; d]$ является гомеоморфизмом.

100. Показать, что всякое невырожденное аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ есть гомеоморфизм.

101. Докажите, что инверсия

$$f(x) = \frac{x}{|x|^2}, \quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

есть гомеоморфизм.

102. Пусть $\mathbb{C}^{+} = \{z \in \mathbb{C} : \mathbf{Im}\, z > 0\}$ верхняя полуплоскость комплексных чисел. Показать, что отображение $f : \mathbb{C}^{+} \longrightarrow \mathbb{C}^{+}$,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

является гомеоморфизмом, если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$.

103. Докажите, что если биекция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ является монотонной функцией, то она есть гомеоморфизм.

104. Пусть $\mathbf{S}^1$ – окружность и $s_0 \in \mathbf{S}^1$ –точка на окружности. Доказать, что пространство $\mathbf{S}^1 \setminus \{s_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}$.

105. Показать, что график непрерывной функции, заданной на некотором промежутке, гомеоморфен этому промежутку.

106. Пусть $\mathbf{S}^n$ – $n$–мерная сфера и $s_0 \in \mathbf{S}^n$ –точка на сфере. Доказать, что пространство $\mathbf{S}^n \setminus \{s_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

107. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу.

   (a) вся плоскость $\mathbb{R}^2$ ;
   (b) открытый квадрат;
   (c) открытая полуплоскость $\mathbb{C}^{+}$;
   (d) открытый круг;
   (e) открытый прямоугольник;
   (f) открытый квадрант;
   (g) открытый угол;
   (h) открытый полукруг;
   (i) открытый сектор;
   (j) плоскость с вырезанным лучом $\{y = 0, x \geq 0\}$;

108. Докажите, что окружность $\mathbf{S}^1$ гомеоморфна границе квадрата $\partial \mathbf{I}^2$.

109. Докажите, что замкнутый круг $\mathbf{D}^2$ гомеоморфен квадрату $\mathbf{I}^2$.

110. Докажите, что открытый круг $\mathbf{Int}\ \mathbf{D}^2$ гомеоморфен открытому квадрату $\mathbf{Int}\ \mathbf{I}^2$.

111. Докажите, что всякая замкнутая ломаная в $\mathbb{R}^2$ без самопересечений гомеоморфна окружности $\mathbf{S}^1$.

112.

113. Докажите, что всякая незамкнутая ломаная в $\mathbb{R}^2$ без самопересечений гомеоморфна отрезку $[0, 1]$.

114. Докажите, что подпространство $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1, |y| > 1\}$ гомеоморфно квадрату без вершин, $\mathbf{I}^2 \setminus \{(+1,+1),(+1,-1),(-1,+1),(-1,-1),\}$.

115. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу.

(a) Полуплоскость $\{x \geq 0\}$;

(b) квадрант $\{x, y \geq 0\}$;

(c) угол $\{x \geq y \geq 0\}$;

(d) полуоткрытая полоса $\{(x,y) : y \in [0,1)\}$;

(e) квадрат без трёх сторон (и всех вершин) $\{(x,y) : 0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$;

(f) квадрат без двух смежных сторон (и трех вершин) $\{(x,y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$;

(g) квадрат без стороны (и двух вершин) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$;

(h) квадрат без одной вершины $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\, xy < 1\}$;

(i) круг без одной граничной точки $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y < 1\}$;

(j) полукруг без диаметра $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$

(k) круг без радиуса;

116. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу.

(a) плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$;

(b) открытый круг без точки $\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

(c) кольцо $\{(x,y) : a < x^2 + y^2 < b\}$;

(d) плоскость без круга $\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\}$;

(e) плоскость без квадрата $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{I}^2$

(f) плоскость без отрезка $\mathbb{R}^2 \setminus [0,1]$

(g) дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где $X$ есть объединение нескольких отрезков с общим концом;

(h) дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где $X$ есть незамкнутая конечнозвенная ломаная без самопересечений;

117. Докажите, что если $K$ и $L$ — конечные множества точек плоскости, состоящие из одинакового числа точек, то их дополнения гомеоморфны.

118. Показать, что каждая точка содержится в некоторой компоненте связности, причём только в одной: ею является объединение всех связных множеств, содержащих эту точку.

119. Показать, что две компоненты связности либо не пересекаются, либо совпадают.

120. Показать, что пространство связно, тогда и только тогда, когда любая пара его точек лежит в некотором связном подмножестве.

121. Показать, что компоненты связности замкнуты.

122. Показать, что если у каждой точки пространства $X$ имеется связная окрестность, то каждая его компонента связности открыта.

## Метрики

123. Пространство $l_p$ с метрикой

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

является полным метрическим пространством.

124. Существует ли изометрия эвклидова пространства на свою собственную часть?

125. Существует ли изометрия конечного метрического пространства в некоторое эвклидово пространство?

## Сжимающие отображения

Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства $X$ в себя называется *сжимающим*, если существует вещественная постоянная $\lambda < l$, такая, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda\rho(x, y)$ для любых двух точек $x, y \in X$.

126. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства непрерывно.

127. Доказать, что любое сжимающее отображения полного метрического пространства в себя всегда имеет неподвижную точку, причем эта точка единственна.

128. Привести пример, показывающий, что от условия полноты метрического пространства в предыдущей задаче отказаться нельзя.

129. Верно ли, что расстояние между двумя непересекающимися, замкнутыми подмножествами на плоскости (на прямой) всегда больше 0?

## Расстояние от точки до подмножества

130. Показать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \overline{A}$.

131. Докажите, что для любого множества $A$ и точек $x$, $y$ выполнено неравенство $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$.

### Расстояние Хаусдорфа

132. Доказать, что метрика Хаусдорфа определяет метрику в пространстве всех ограниченных замкнутых подмножеств некоторого метрического пространства.

## Аксиомы отделимости

133. Доказать, что метрическое топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа ($T_2$).

134. Пусть $X$ — метрическое пространство. Доказать, что каждое одноточечное множество замкнуто.

135. Является ли отрезок $[0;1]$ с индуцированной из $\mathbb{R}$ топологией хаусдорфовым? Обладают ли в нём непересекающимися окрестностями точки 0 и 1? Какими?

136. Пространство X является хаусдорфовым, тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ имеет место равенство $\{x\} = \bigcap\limits_{U \ni x} \overline{U}$.

137. Показать, что в хаусдорфовом пространстве сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

138. Показать, что множество совпадения двух непрерывных отображений произвольного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.

139. Показать, что множество неподвижных точек непрерывного отображения хаусдорфова пространства в себя является замкнутым.

140. Показать, что любое подпространство хаусдорфова пространства тоже хаусдорфово.

141. Показать, что аксиома отделимости $T_1$ выполняется тогда и только тогда, когда любое одноточечное подмножество замкнуто.

142. Пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости $T_1$, тогда и только тогда, когда любая его точка совпадает с пересечением всех своих окрестностей.

143. Показать, что из хаусдорфовости следует $T_1$. Приведите пример, когда из $T_1$ не следует хаусдорфовость.

144. Показать, что первая аксиома отделимости наследственна.

145. В каждом множестве существует самая слабая топология, удовлетворяющая первой аксиоме отделимости. Какова она?

146. Всякое нормальное пространство регулярно (и, значит, хаусдорфово).

147. Пространство нормально, тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет второй и четвёртой аксиомам отделимости.

148. Докажите, что всякое замкнутое подпространство нормального пространства нормально.

149. Постройте два замкнутых непересекающихся подмножества некоторого метрического пространства, расстояние между которыми равно нулю.

150. Пусть $X$ — пространство, удовлетворяющее аксиоме $T_4$, пусть $F_1$, $F_2$ и $F_3$ его замкнутые подмножества с пустым пересечением, т.е. $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$. Доказать, что найдутся такие окрестности $U_i \supset F_i, \quad i = 1, 2, 3,$ что $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$.

## Лемма Урысона, теорема Титце, разбиение единицы

151. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция $f$, такая, что $K = f^{-1}(0)$.

152. Выведите лемму Урысона из теоремы Титце.

### 0.0.1 Вторая аксиома счетности

153. Постройте метрическое пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счётности.

154. Докажите, что в сепарабельном пространстве всякая совокупность попарно непересекающихся открытых множеств счётна.

155. Докажите, что непрерывный образ сепарабельного пространства сепарабелен.

156. Докажите теорему Линделёфа: если пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности, то из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить счётный набор множеств, также являющийся покрытием.

157. Показать, что у метрического пространства следующие условия эквивалентны:

    (a) Пространство сепарабельно;

    (b) Пространство имеет счетную базу;

    (c) Пространство финально компактно

**Первая аксиома счетности.**

158. Доказать, что всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности.

159. Доказать, что из второй аксиомы счётности следует первая.

## Компактные пространства

160. Пусть отображение $f : E \to F$ является непрерывным отображением и пусть пространство $E$ компактно. Доказать, что подпространство $f(E) \subset F$ компактно.

161. Доказать, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ не компактно.

162. Показать, что подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, $A$ замкнуто и ограничено.

163. Показать, что в компактном пространстве $X$ любая убывающая последовательность замкнутых непустых подмножеств $\{F_n : F_n \supset F_{n+1}\}$ имеет непустое пересечение: $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.

164. Показать, что если подмножество $A \subset X$ компактно, а $X$ хаусдорфово, то $A$ замкнуто.

165. Пусть $A$ и $B$ — компактные подмножества хаусдорфова пространства $X$. Верно ли, что множество $A \cup B$ компактно? Верно ли, что множество $A \cap B$ компактно?

166. Показать, что компактное хаусдорфово пространство нормально.

167. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция $f$, такая, что $K = f^{-1}(0)$.

### Связность и линейная связность. Компоненты связности.

168. Показать, что пространство $X$ несвязно тогда и только тогда, когда существует непрерывное сюръективное отображения пространства $X$ на дискретное двоеточие (нульмерную сферу $\mathbf{S}^0$).

Решение: Пусть $f : X \longrightarrow \mathbf{S}^0$ — непрерывное сюръективное отображение, $\mathbf{S}^0 = \{-1, 1\}$. Одноточечные подпространства $\{-1\}, \{1\} \subset \mathbf{S}^0$ не пересекаются и открыты (и замкнуты). Поскольку отображение $f$ непрерывно, то прообразы $f^{-1}(-1)$ и $f^{-1}(1)$ непусты, открыты и не пересекаются, причем $X = f^{-1}(-1) \sqcup f^{-1}(1)$. Значит пространство

$X$ несвязно. Обратно, если $X$ несвязно, то оно представимо в виде объединения двух открытых подмножеств $X = A \sqcup B$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in A; \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Очевидно, что отображение $f$ непрерывно и сюръективно.

169. Связно ли пространство $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$)?

170. Связно ли пространство иррациональных чисел (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$)?

171. Покажите, что множество $[0,1] \sqcup (2,3]$ несвязно в $\mathbb{R}$.

172. Показать, что замыкание связного множества связно.

173. Доказать, что объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.

174. Доказать, что отрезок $\mathbf{I} = [0;1]$ связен.

175. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ связно.

176. Пусть $X$ — связное пространство и $f : \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция. Доказать, что множество $f(X)$ является промежутком в $\mathbb{R}$ (т.е. интервалом, отрезком или полуинтервалом).

177. Докажите, что всякое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ связно.

178. Докажите, что открытое подмножество прямой $\mathbb{R}$ имеет счётное число компонент связности.

179. Докажите, что $n$-мерная сфера $\mathbb{S}^n$ связна.

180. Докажите, что если пространство снабжено структурой группы и умножение на любой элемент группы является непрерывным отображением, то связная компонента единицы является нормальной подгруппой.

     Решение:

     Пусть $M$ — компонента единицы. Для каждой точки $x \in M$ множество $xM$ связно и содержит точку $x = xe$. Таким образом, множества $xM$ и $M$ пересекаются, следовательно, $xM \subset M$, т. е. $M$ является подгруппой $X$. Далее, для каждой точки $x \in X$ множество $x^{-1}Mx$ связно и содержит единицу. Следовательно, $x^{-1}Mx \subset M$, так что $M$ — нормальная подгруппа.

181. Показать, что отрезок $[0,1]$ связен.

     Решение:

     Если бы отрезок $[0,1]$ был несвязен, то существовала бы непрерывная сюръекция $[0,1] \longrightarrow \mathbf{S}^0$, что противоречит теореме Больцано о промежуточном значении.

182. Рассмотрим подмножество плоскости, являющееся объединением спирали, записанной уравнением в полярных координатах $(r,\varphi)$

$$r = e^{\frac{1}{1+\varphi^2}}, \quad \varphi \geq 0,$$

и окружности $x^2+y^2=1$. Является ли это множество связным?

183. Связны ли следующие подмножества плоскости:

1) составленное из точек, у которых обе координаты рациональны;

2) составленное из точек, у которых хотя бы одна из координат рациональна;

3) составленное из точек, у которых либо обе координаты рациональны, либо обе — иррациональны?

184. Пусть $X$ связное пространство. Верно ли, что у каждой точки $x \in$ найдется связная окрестность?

185. Докажите, что любой многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами обладает вещественным корнем.

186. Показать, что пространства $I$,$\mathbb{R}$, $\mathbf{S}^1$ попарно не гомеоморфны.

187. Докажите, что квадрат и отрезок не гомеоморфны.

### Линейная связность.

188. Показать, что следующие топологические пространства являются линейно связными:

(a) Отрезок;

(b) Интервал;

(c) Евклидово пространство любой размерности;

(d) Сферы ненулевой размерности;

(e) Выпуклое подмножество евклидова пространства;

(f) Звездное подмножество евклидова пространства;

(g) Объединение любой совокупности попарно пересекающихся линейно связных множеств;

(h)

189. Докажите, что если множества $A$ и $B$ оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то $A$ и $B$ тоже линейно связны.

190. Доказать, что если граница множества $A \subset \mathbb{R}^n$ линейно связна, то замыкание этого множества тоже линейно связно.

191. Доказать, что непрерывный образ линейно связного пространства линейно связен.

192. Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.

193. Показать, что если в пространстве каждая точка обладает линейно связной окрестностью, то компоненты линейной связности открыты.

194. Показать, что если в пространстве каждая точка обладает линейно связной окрестностью, то связность и линейная связность равносильны.

195. Показать что для открытых подмножеств евклидова пространства связность и линейная связность равносильны.

196. Рассмотрим на плоскости замыкание $\overline{\Gamma} \subset \mathbb{R}^2$ графика функции $\Gamma = \{(x, y) : y = \sin\frac{1}{x}, \quad x > 0\}$. Является ли это множество связным? Линейно связным?

197. Показать, что дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Gamma}$ к множеству из предыдущей задачи линейно связно.

## Гомотопии

198. Докажите, что для любого топологического пространства $X$ множество $\pi(X, \mathbb{I})$ состоит из одного элемента.

199. Докажите, что два постоянных отображения гомотопны, тогда и только тогда, когда их образы лежат в одной компоненте линейной связности пространства $Y$ .

200. Докажите, что число элементов множества $\pi(\mathbb{I}, Y)$ совпадает с числом компонент линейной связности пространства $Y$.

201. Любые два непрерывных отображения $f, g : \longrightarrow \mathbb{R}^n$ гомотопны.

202. Показать, что для непрерывных отображений $f, g : \longrightarrow \mathbb{R}^n$ формула $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ задает гомотопию между отображениями $f$ и $g$.

203. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ непрерывное отображение. Доказать, что если два отображения $g_0, g_1 : Z \longrightarrow X$ гомотопны, то гомотопны композиции

$$f \cdot g_0, f \cdot g_1 : Z \longrightarrow Y.$$

204. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ непрерывное отображение, являющееся гомотопической эквивалентностью. Доказать, что два отображения $g_0, g_1 : Z \longrightarrow X$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны композиции

$$f \cdot g_0, f \cdot g_1 : Z \longrightarrow Y.$$

205. Показать, что всякое выпуклое подмножество евклидова пространства линейно связно.

206. Показать, что два любых непрерывных отображения произвольного пространства в выпуклое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ гомотопны.

207. Показать, что образ пути является линейно связным множеством.

208. Докажите, что если множества $A$ и $B$ оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то $A$ и $B$ тоже линейно связны.

209. Докажите, что всякое непрерывное отображение в звёздное множество гомотопно постоянному отображению, образом которого является центр звезды.

210. Докажите, что любые два непрерывных отображения в звёздное множество гомотопны.

211. Докажите, что всякое непрерывное отображение звездного множества в произвольное пространство гомотопно постоянному отображению.

212. Докажите, что два любых отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad n > 1$, гомотопны.

213. Найдите два негомотопных отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$.

214. Вычислите, при различных значениях $m$, $n$ и $k$, число гомотопических классов отображений

$$\{1, 2, \ldots, m\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\},$$

считая, что топология в множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$ дискретна.

215. Докажите, что всякое несюръективное непрерывное отображение произвольного топологического пространства в сферу $\mathbb{S}^n$ гомотопно постоянному отображению.

216. Пусть отображения $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в сферу радиуса 1 удовлетворяют неравенству

$$|f(x) - g(x)) < 2.$$

Доказать, что отображения $f$ и $g$ гомотопны.

217. Пусть отображения $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n \subset \{0\}$ удовлетворяют неравенству

$$|f(x) - g(x)) < |f(x)|.$$

Доказать, что отображения $f$ и $g$ гомотопны.

218. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$ и двоеточие на ней $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^2$. Доказать, что фактор пространство $\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^0$ и букет $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ гомотопически эквивалентны.

219. Показать, что если у тора стянуть в точку конечное число меридиан, то получится букет некоторого числа сфер и окружности.

220. Построить деформационную ретракцию тора с выколотой точкой на букет меридиана и параллели.

221. Построить деформационную ретракцию $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$.

222. Доказать, что пара $(X, A)$ симплициальных пространств удовлетворяет аксиоме продолжения гомотопии (т.е. является парой Борсука).

223. Доказать, что для пары Борсука $(X, A)$ подпространство

$$X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$$

является ретрактом в $X \times I$. И обратно, если подпространство $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$ является ретрактом в $X \times I$, то пара $(X, A)$ удовлетворяет аксиоме продолжения гомотопии.

224. Доказать, что пара $(X, A)$ клеточных пространств удовлетворяет аксиоме продолжения гомотопии (т.е. является парой Борсука).

225. Проверить, что пара $(I, A)$, $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ не является парой Борсука.

226. Если $(X; A)$ есть клеточная пара и $A$ есть стягиваемый подкомплекс, то фактор пространство $X/A$ и $X$ гомотопически эквивалентны, а отображение $q : X \longrightarrow X/A$ есть гомотопическая эквивалентность.

    Доказательство. Если $A$ – стягиваемое пространство, то имеется гомотопия $h_t : A \longrightarrow A$, $t \in [0, 1]$, такая, что $h_0(x) \equiv x, \quad x \in A$, $h_1(x) \equiv x_0 \in A$. Пусть $f_0 : X \longrightarrow X$, $f_0(x) \equiv x, \quad x \in X$ — продолжение отображения $h_0 : A \longrightarrow X$. Значит имеется продолжение гомотопии $h_t : A \longrightarrow X$, скажем, до гомотопии $f_t : X \longrightarrow X$. Гомотопия $f_t : X \longrightarrow X$ переводит $A$ в $A$, есть гомотопия фактор-пространства $\bar{f}_t : X/A \longrightarrow X/A$, тождественная при $t = 0$. При $t = 1$ получаем отображение $f_1 : X \longrightarrow X$, которое продолжает отображение $h_1 : A \longrightarrow X$. Это значит, что $f_1(A) = x_0$, т.е. отображение $f_1$ расщепляется в композицию $f_1 = g \cdot q$, как показано на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[dr, "q"] & \\
& X/A \arrow[ur, "g"'] \arrow[rr, "\bar{f}_1"'] & & X/A
\end{tikzcd}$$

Две возможные композиции $g \cdot q$ и $q \cdot g$ гомотопны тождественным отображениям. ■

227. Пусть $Z = X_0 \cup_f X_1$ — фактор пространство, полученное приклеиванием пространства $X_0$ к пространству $X_1$ вдоль отображения $f : A \longrightarrow X_0$, $A \subset X_1$. Пусть $g : A \longrightarrow X_0$ другое отображение, гомотопное $f$, $W = X_0 \cup_g X_1$. Доказать, что пространства $Z$ и $W$ гомотопически эквивалентны.

Доказательство. (см. [**?**], стр.91) Поскольку имеется гомотопия $H : A \times I \longrightarrow X_0$, то при ее помощи можно приклеить к пространству $X_0$ декартово произведение $X_1 \times I$ вдоль отображения $H$ и получить пространство $W = X_0 \cup_H (X_1 \times I)$

Строим отображения $F : Z \longrightarrow W$ и $G : Y \longrightarrow Z$ следующим образом

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, hook] & = & X_0 & A \times \{0\} \arrow[l, "f"] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & X_1 \times \{0\} \arrow[d, hook] \\
W & = & X_0 & A \times I \arrow[l, "H"] \arrow[r, hook] & X_1 \times I
\end{tikzcd}$$

Пространство $Z$ является деформационным ретрактом пространства $W$, т.е. они гомотопически эквивалентны.

228. Показать, что у стягиваемого пространства ретракт тоже стягиваемый. Но если ретракт есть стягиваемое пространство, но само пространство не обязано быть стягиваемым.

229. Показать, что две деформационных ретракции гомотопны.

230. Пусть дано три натуральных числа $v$, $r$, $k$, удовлетворяющих условию $v+k-r = 2$. Показать, что двумерную сферу можно разбить на клетки так, чтобы число вершин, ребер и клеток равнялось, соответственно, $v$, $r$ и $k$.

231. Доказать, что для пары Борсука $(X, A)$ два пространства $x/A$ и $X \cup CA$ гомотопически эквивалентны.

232. Пусть у пары Борсука $(X, A)$ вложение $A \hookrightarrow X$ гомотопно постоянному отображению. Доказать, что фактор пространство $X/A$ гомотопически эквивалентно букету $X \vee \mathbb{S}A$.

Доказательство. Пространство $X/A$ гомотопически эквивалентно $Z = X \cup CA$, которое можно понимать, как приклейку пространства $CA$ к пространству $X$ по вложению $\varphi : A \hookrightarrow X$, $Z = X \cup_\varphi CA$. Поскольку отображение $\varphi$ гомотопно постоянному отображению $\varphi_0$, то пространство $Z$ гомотопически эквивалентно пространству $z' = X \cup_{\varphi_0} CA$, т.е пространству $X \vee \mathbb{S}A$.

233. Доказать, что $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^k$ гомотопически эквивалентно $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{k+1}$ .

234. Если отображение $f : X \longrightarrow Y$ есть гомотопическая эквивалентность, то $X$ является деформационным ретрактом цилиндра отображения $f$, т.е. пространства $Y \cup_f (X \times I)$. М обратно.

235. Показать, что пространство $X$ стягиваемо тогда и только тогда когда любое непрерывное отображение $f : X \longrightarrow Y$ гомотопно постоянному отображению.

236. Показать, что пространство $X$ стягиваемо тогда и только тогда когда любое непрерывное отображение $f : Y \longrightarrow X$ гомотопно постоянному отображению.

237. Показать, что бесконечномерная сфера, т.е. $\mathbb{S}^\infty = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{S}^n$ стягиваемая.

238. Показать, что отображение $f : X \longrightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью, если существуют такие отображения $g, h : Y \longrightarrow X$, что композиции $fg$ и $hf$ гомотопны тождественным отображениям. Показать, что при этом отображения $g$ и $h$ гомотопны.

239. Показать, что отображение $f : X \longrightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью, если существуют такие отображения $g, h : Y \longrightarrow X$, что композиции $fg$ и $hf$ являются гомотопическими эквивалентностями.