"Введение в топологию", 2-й курс, осень 2018-2019 уч.год. 16 лекций

А.С.Мищенко

25 августа 2018 г.

1 Программа

1.1 Язык теории множеств

1.2 Метрические и топологические пространства.

Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

1.3 Непрерывные отображения

1.4 Конструкции топологических пространств.

1.5 Аксиомы отделимости

1.6 Компактные пространства

1.7 Теория гомотопий

1.8 Теория гомологий

2 Подробная программа (по лекциям)

2.1 Лекция 1.
Язык теории множеств.

1. **Множество.** Подмножество. Пустое множество. Одноэлементное множество.

2. **Теоретико множественные операции с подмножестами.** Объединение. Пересечение. Разность. Непересекающиеся множества.

3. **Отображения множеств.** Область определения отображения. Область значений отображения. Тождественное отображение. Образ подмножества. Прообраз подмножества. Прообраз элемента. Сужения отображений.

4. **Композиция отображений.** Инъективное отображение. Сюръективное отображение. Взаимно однозначное отображение. Обратное отображение.
   Равномощные множества.

5. **Соотношения операций с множествами.** Коммутативность. Ассоциативность. Дистрибутивность пересечения относительно объединения. Дистрибутивность объединения относительно пересечения. Двойственность объединения и пересечения (законы де Моргана).

6. **Конструкции множеств.** Несвязное объединение. Категорное свойство универсальности. Декартово произведение. Координаты декартова произведения. Декартово произведения семейства множеств. Векторное пространство $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение. График отображения. Фактор множество.

7. **Мощность множества.** Равномощные множества. Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах. Терема Кантора о мощности множества всех подмножеств.

8. **Упорядоченные множества.** Частично упорядоченное множество. Линейно упорядоченное множество. Направленное множество. Направленность. Последовательность элементов. Частичный порядок на арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$. Конфинальность. Поднаправленность. Подпоследовательность.

9. **Прямой и обратный пределы.** Прямой и обратный спектры множеств.

10. **Вполне упорядоченные множества.** Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества. Конечные, счетные и несчетные

множества. Кардинальные и порядковые числа. Любой отрезок кардинальных чисел вполне упорядочен. Кардиналы $\aleph_0$, $\aleph_1$, $c = 2^{\aleph_0}$. Континуум гипотеза. Аскиома выбора. Аксиома выбора vs непустота тихоновского произведения. Сравнение ординалов.

11. **Лемма Цорна.** Вывод из аксиомы выбора.

12. **Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества.** Вывод из леммы Цорна.

2.2 Лекции 2-3. Метрические и топологические пространства.

1. **Топологические пространства.** Топологии. Сравнение топологий.

   (A) Более тонкая (сильная) топология.

   (B) Более грубая (слабая) топология.Простейшие примеры

2. **Открытые множества.** Простейшие примеры: тривиальная (антидискреная), дискретная, метрическая (в частности, в евклидовом пространстве), Зарисского (на прямой). Замкнутые множества. Эквивалентное определение топологии.

3. **Структура** открытых множеств на прямой линии.

4. **Экзотические** примеры топологических пространств.

   (A) Топология линейно упорядоченного пространства.

   (B) Топология частично упорядоченного пространства.

   (C) Канторово совершенное множество.

   (D) Трансфинитная прямая.

5. **База** открытых множеств. Предбаза. **Теорема** о существовании счетной базы на прямой и в R^n .

6. **Замыкание и внутренность подмножества.** Окрестность точки. Точки прикосновения. Внутренние, внешние, граничные, предельные, изолированные точки подмножества. Всюду плотные и нигде не плотные множества.

7. **Замыкание** подмножества $X \subset [X]$. Замкнутость замыкания: [[X]]=[X].

8. **Теорема:** $X \subset Y \Rightarrow [X] \subset [Y]$.

9. **Теорема:** $[X] = \{Y : Y \supset X, [Y] = Y\}$.

10. **Другой способ** определения топологии при помощи операции замыкания $[\bullet]$(Куратовский, 1922).

11. **Непрерывные отображения.** эквивалентность определения непрерывности при помощи открытых или замкнутых подмножеств. Непрерывность композиций отображений. Гомеоморфизм. Категорная точка зрения на гомеоморфизм.

12. **Фактортопология.** Связь с индуцированной топологией и фактортопологией.

13. **Подпространства.** Индуцированная топология.

14. **Метрические пространства.** Метрика. Симметричность, неотрицательность, невырожденность метрики. Неравенство треугольника. Шаровая окрестность. Открытость шаровой окрестности. Эвклидово пространство.

15. **Метризуемые пространства,** эквивалентные метрики. Диаметр множества. Расстояние между множеством и точкой. Расстояние между множествами. Точки прикосновения. Точка прикосновения в терминах метрики. Замыкание множества. $X \subset [X]$. Замкнутое множество. Диаметр множества и его замыкания. Внутренняя точка. Окрестность точки. Замыкание является замкнутым множеством. Дополнение к открытому множеству. Дополнение к замкнутому множеству.

16. **Предел** последовательности $lim x_n = x_0$. Единственность предела последовательности. Предельная точка последовательности. Сходящаяся подпоследовательность.

    Изометрии, сжимающие отображения. Нормированные векторные пространства.

17. **Вещественная прямая.** Интервал. Структура открытого множества на прямой. Отрезок. Пространство рациональных чисел. Канторово совершенное множество.

18. **Топология на упорядоченных множествах**

2.3 Лекция 4. Непрерывность отображений.

1. **Непрерывность отображения в точке.** Эквивалентность непрерывности и непрерывности во всех точках.

2. **Предел отображения по Коши.** Сходимость по направленному множеству.

3. **Предел отображения в предельной точке по Гейне.** Предел отображения в предельной точке по Гейне для метрических пространств.

4. **Непрерывность по Коши и по Гейне.**

5. **Свойства непрерывных отображений.** Сужение непрерывного отображения. Непрерывность объединения отображений. Замкнутость графика непрерывного отображения.

6. **Кривая Пеано.**

2.4 Лекции 5-6. Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

1. **Конечные** топологические пространства в дискретной топологии гомеоморфны, если они равномощны.

2. **Отрезки** вещественных числе $[a, b]$ гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.

3. **Интервалы** вещественных чисел (a, b) гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.

4. **Полуинтервалы** вещественных чисел $(a, b]$ и $[a, b)$ гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.

5. **Открытый диск** $\overset{\circ}{D}{}^n$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен $\mathbf{R}^n$.

6. **Открытый куб** $\overset{\circ}{I}{}^n = \prod_1^n (0, 1)$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен $\mathbf{R}^n$.

7. **Замкнутый куб** $I^n = \prod_1^n [0, 1]$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен замкнутому диску D^n.

Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. вся плоскость $\mathbb{R}^2$;

2. открытый квадрат;

3. открытая полуплоскость $\mathbb{C}^+$;

4. открытый круг;

5. открытый прямоугольник;

6. открытый квадрант;

7. открытый угол;

8. открытый полукруг;

9. открытый сектор;

10. плоскость с вырезанным лучом $\{y = 0, x \geq 0\}$;

Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. Полуплоскость $\{x \geq 0\}$;
2. квадрант $\{x, y \geq 0\}$;
3. угол $\{x \geq y \geq 0\}$;
4. полуоткрытая полоса $\{(x, y) : y \in [0, 1)\}$;
5. квадрат без трёх сторон (и всех вершин) $\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
6. квадрат без двух смежных сторон (и трех вершин) $\{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
7. квадрат без стороны (и двух вершин) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$;
8. квадрат без одной вершины $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\, xy < 1\}$;
9. круг без одной граничной точки $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y < 1\}$;
10. полукруг без диаметра $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$
11. круг без радиуса;

Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$;
2. открытый круг без точки $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
3. кольцо $\{(x, y) : a < x^2 + y^2 < b\}$;
4. плоскость без круга $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$;
5. плоскость без квадрата $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{I}^2$
6. плоскость без отрезка $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1]$
7. дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где X есть объединение нескольких отрезков с общим концом;
8. дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где X есть незамкнутая конечнозвенная ломаная без самопересечений;

Еще свойства:

1. Структура открытого множества на прямой.
2. Открытость шаровой окрестности.
3. Счетная база подмножестве евклидового пространства.

4. Плотность подмножества рациональных чисел на вещественной прямой.
5. Непрерывность композиции непрерывных отображений.
6. Непрерывность сужения непрерывного отображения.
7. Непрерывность объединения непрерывных отображений.
8. Эквивалентность определений непрерывности по Коши и по Гейне.
9. Гомеоморфность интервалов различной длины.
10. Гомеоморфность открытого диска и евклидового пространства.
11. Гомеоморфность открытого диска и открытого куба.
12. Гомеоморфность замкнутого диска и замкнутого куба.
13. Гомеоморфность плоскости без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ и открытого круга без точки $\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
14. Гомеоморфность двумерного тора $\mathbb{T}^2$ и декартового произведения окружностей $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
15. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц $\mathbb{SO}(3)$ и трехмерного вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}_3$.

2.5 Леция 7. Конструкции топологических пространств.

1. **Несвязное объединение.**
2. **Декартово произведение.** Тихоновское произведение.
3. Декартово произведение эвклидовых пространств.
4. Сходимость в декартовых произведениях.
5. **График непрерывного отображения.** Замкнутость графика непрерывного отображения.
6. **Хаусдорфовость тихоновского произведения.**
7. **Фактор топология.** Конусы и цилиндры отображений.
8. **Примеры:** Вещественное проективное пространство.

   Лента Мебиуса.

   Тор.

   Бутылка Клейна.

   Надстройка.

   $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{RP}_3$.

2.6 Лекции 8-9. Аксиомы отделимости

1. **Аксиомы отделимости.**

   T_0,T_1,T_2,T_3,T_4. Регулярность (T_0+T_3). Полная регулярность. Нормальность ($T_1 + T_4$).

2. $T_1 + T_4 \Rightarrow T_0 + T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

3. **Наследственность** T_0.

4. Четыре различных топологии на множестве из двух точек.

5. **Наследственность** T_1.

6. Пространство X есть T_1 -пространство тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества X замкнуты.

7. **Хаусдорфовы пространства.** Единственность предела в хаусдорфовом пространстве. Замкнутость множества совпадения отображений в хаусдорфово пространство. Хаусдорфовость подпространство хаусдорфова пространства и произведения хаусдорфовых пространств.

8. **Нормальность** замкнутого подпространств нормального пространства

9. Бесконечное множество, снабженное топологией, в которой замкнуты лишь конечные подмножества и само множество(минимальной T_1 -топологией), является нехаусдорфовым T_1 -пространством.

10. **Примеры:**

    (A) T_4 не T_3;

    (B) T_1 не T_2;

    (C) Хаусдорфовость не регулярность (Енгелькинг, [4], Пример 1.5.7, стр.73);

    (D) $T_0 + T_3 \Rightarrow T_2$;

    (E) Регулярность, но не нормальность. Плоскость Немыцкого (Енгелькинг [4]), пример 1.2.4, стр 47, пример 1.5.9, стр.74).

11. T_3. Бывают пространства T_3 , но не T_0 : слипшееся двоеточие. Наследственность T_3.

12. Всякое регулярное пространство хаусдорфово.

13. **Аксиома отделимости** T_3 . Регулярные пространства. Регулярность подпространства регулярного пространства и произведения регулярных пространств.

14. **Различные определения** нормальности. $F \Subset U$.

15. **Аксиомы отделимости в метрических пространствах.**

    (A) $x \neq y \Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x, y) > 0 \Rightarrow O_\varepsilon(x) \cap O_\varepsilon(y) = \emptyset \Rightarrow T_2$.

    (B) $\{x\} \cap F = \emptyset \Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x, F) > 0 \Rightarrow O_\varepsilon(x) \cap O_\varepsilon(F) = \emptyset \Rightarrow T_3$.

    (C) $H \cap F = \emptyset \Rightarrow f(x) = \frac{\rho(x,F)}{\rho(x,F)+\rho(x,Y)} \Rightarrow f|_F = 0 \& f|_H = 1 \Rightarrow T_4$.

    Нормальность метрического пространства.

16. **Функциональная отделимость** Лемма Урысона, теорема Титца, разбиение единицы.

17. **Вторая аксиома** счетности. Теорема Тихонова о нормальности пространства со второй аксиомой счетности.

18. Выполнение аксиом отделимости в метрических пространствах. Теорема Урысона о метризуемости.

19. **Вторая аксиома** счетности. Сепарабельность. Их равносильность для метрических пространств.

20. **Теорема Урысона** о метризуемости нормального пространства со второй аксиомой счетности.

21. **Связность** и линейная связность. Компоненты связности.

22. **Связное** топологическое пространство. Связное подмножество. Связные объединения связных подмножеств. Связность непрерывного образа связного подмножества. Связность произведения связных пространств.

23. **Связность** замыкания связного подмножества. Связные компоненты. Замкнутость связных компонент. Вполне несвязные пространства.

24. **Локально связные** пространства. Открытость связных компонент локально связного пространства. Связность и линейная связность.

25. **Локальная база.** Первая аксиома счетности. Вывод первой аксиомы счетности из метризуемости и из второй аксиомы счетности.

2.7 Лекции 10-11. Компактные пространства

1. **Компактные** топологические пространства. Непрерывный образ компактного пространство.

2. **Компактность** замкнутого подмножества компактного пространства.

3. **Замкнутость** компактного подмножества хаусдофова пространства.

4. **Критерий компактности** подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

5. **Нормальность** хаусдорфова компактного пространства.

6. **Компактность** декартового произведения компактных пространств.

7. **Гомеоморфность** инъективного отображения компактного пространства.

8. **Центрированные** системы замкнутых множеств.

9. **Достижение** максимума функции на компакте.

10. **Лемма Александера** о предбазе. Теорема Тихонова о произведении компактных пространств.

11. **Секвенциальная** компактность и ее связь с компактностью для пространств, удовлетворяющих первой или второй аксиоме счетности.

12. **Равносильность** компактности и секвенциальной компактности для метрических пространств.

13. **Локальная компактность.** Ее сохранение при переходе к замкнутому подпространству. Одноточечная компактификация некомпактных локально компактных хаусдорфовых пространств.

2.8 Лекции 12-13. Теория гомотопий.

1. **Что такое категория.**Примеры категорий, функтор, гомотопический функтор. Категория гомотопических типов.

2. **Пунктированные пространства.** Категория пунктированных пространств. Морфизмы пунктированных пространств.

3. **Пары топологических пространств.** Тройки, n–ады.

4. **Ретракция.** Ретракт, деформационная ретракция, деформационный ретракт. Стягиваемость. Окрестностный ретракт.

5. **Пара Борсука.**(Постников, стр.83; Клеточные пространства.стр.15)

6. **Фундаментальная группа.** $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Перемена отмеченной точки. Фундаментальная группа декартового произведения. Теорема ван Кампена.

7. **Гомотопия непрерывного отображения.** Категорные свойства гомотопии.

8. **Гомотопическая эквивалентность** топологических пространств. Категорные свойства.

Подробности теории гомотопий:

1. Гомотопия отображений. Гомотопическая эквивалентность пространств. Стягиваемые топологические пространства. Теорема о клеточной аппроксимации.

2. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный непрерывным отображением. Гомоморфизмы, индуцированные гомотопными отображениями.

3. Теорема о том, что гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

4. Накрытия: определение и примеры. Лемма о поднятии пути.

5. Теорема о накрывающей гомотопии. Фундаментальная группа накрывающего пространства.

6. Существование универсального накрытия «хорошего» топологического пространства.

7. Эквивалентность накрытий. Автоморфизмы накрытия. Группа автоморфизмов универсального накрытия.

8. Классификация накрытий над «хорошим» топологическим пространством.

9. Вычисление фундаментальной группы окружности.

10. Стягиваемость евклидового пространства.

11. Ретракция, деформационная ретракция.

12. Гомотопическая эквивалентность окружности и $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

13. Гомотопическая эквивалентность одномерного графа и букета окружностей.

14. Аксиома о продолжении гомотопии, ее эквивалентная формулировки в виде ретракции.

15. Факторпространство по стягиваемому подмножеству.

16. Накрытия. Аксиома о накрывающей гомотопии.

17. Фундаментальная группа пунктированного топологического пространства. Корректность определения групповой структуры.

18. Функториальные свойства фундаментальных групп.

19. Поведение фундаментальной группы при перемене отмеченной точки.

20. Связь фундаментальных групп пространства и его накрытия.

21. Универсальное накрытие окружности.

22. Вычисление фундаментальной группы окружности.
23. Фундаментальная группа декартового произведения пространств.
24. Теорема ван Кампена.
25. Построение универсального накрытия.
26. Построение накрытия по подгруппе фундаментальной группы.
27. Теорема Нильсена-Шрайера о свободности подгруппы свободной группы.
28. Свободные гомотопии замкнутых путей и их связь с фундаментальной группой.

2.9 Лекции 14-15 Теория гомологий.

1. **Симплициальные комплексы.** Барицентрическое подразделение.
2. **Цепные комплексы.** Гомологии симплициального комплекса. Топологический смысл нулевых гомологий.
3. **Гомоморфизмы** цепных комплексов. Гомоморфизм измельчения. Симплициальные отображения.
4. **Симплициальная аппроксимация** непрерывного отображения. Существование симплициальной аппроксимации после подразделения.
5. **Цепная гомотопия.** Цилиндр над симплициальным комплексом.
6. **Описание фундаментальной группы** в терминах системы образующих и систему определяющих соотношений.
7. **Гомоморфизм прямого образа** в гомологиях для произвольного непрерывного отображения симплициальных комплексов. Гомотопическая инвариантность групп гомологий.
8. **Гомологии** n-мерного шара и n-мерной сферы. Негомеоморфность евклидовых пространств разной размерности.
9. **Теорема Брауэра** о неподвижной точке. Теорема о барабане.
10. **Отсутствие ретракции** двумерного диска на его граничную окружность.
11. **Отсутствие** на двумерном диске векторного поля без особых точек, направленного наружу на границе.
12. **Гомотопическое доказательство** основной теоремы алгебры о корнях комплексного многочлена.
13. **Теорема** о причесывании ежа.

Список литературы

[1] В.В.Федорчук, *Введение в топологию,* М., МГУ, 2012

[2] О.Я.Виро и др. *Элементарная топология,* М., Изд. МЦНМО, 2008

[3] Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию,* "Наука Москва, 1977

[4] Р.Энгелькинг, *Общая топология,* М., "МИР 1966

[5] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии,* Москва, 2000

[6] Allen Hatcher, *Algebraic Topology,* 2000.

[7] Постников, М.М. *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий,* М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984.