Введение в топологию

$\boxed{\text{Виталий Витальевич Федорчук}}$

декабрь 2012

Оглавление

Лекция 1

Метрические пространства. Канторово совершенное множество.

Предполагаются известными понятия множества, основных операций над множествами (объединения, пересечения, дополнения) и их свойств, отображений множеств. Эти понятия излагаются в курсах высшей алгебры и математического анализа в первом семестре. Через $\mathbb{R}_+$ будем обозначать множество всех неотрицательных вещественных чисел.

1.1. Определение. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), где X - множество, а ρ - *метрика* на X, т.е. такая функция

$\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$,

что выполнены следующие условия:

1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (аксиома *тождества*);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома *симметрии*);

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома *треугольника*).

Часто для краткости метрическое пространство (X, ρ) обозначается одной буквой X. Элементы метрического пространства называются *точками.* Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

1.1 Примеры метрических пространств.

1. Простейшими примерами являются пустое множество и множество X, состоящее из одной точки. На каждом из этих множеств существует единственная метрика.

2. Из школы известны *эвклидовы пространства* E^n, $n = 1, 2, 3$,

(прямая, плоскость, пространство). В этих пространствах a priori определено расстояние между точками x и y - это длина отрезка, соединяющего точки x и y.

После введения прямоугольных координат пространства E^n превращаются в *арифметические n-мерные пространства* $\mathbb{R}^n$, в которых расстояние между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ вычисляется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum \big\{(x_i - y_i)^2;\ i = 1, \ldots, n\big\}}, \tag{1.1}$$

вытекающей из теоремы Пифагора.

3. Всякое множество X превращается в метрическое пространство, если положить $\rho(x, y) = 1$ для любых различных точек $x, y \in X$.

4. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство и $Y \subset X$. Определим на Y метрику $\rho|Y$ как ограничение метрики ρ на Y, т.е.

$\big(\rho|Y\big)(x, y) = \rho(x, y) \quad$ для любых $\quad x, y \in Y$.

Ясно, что так определённая функция расстояния $\rho|Y$ удовлетворяет аксиомам метрики. Формально надо писать не „$\rho|Y$“, а „$\rho|Y \times Y$“, но мы для удобства используем более короткое обозначение.

Пара $(Y, \rho|Y)$ называется *подпространством* метрического пространства (X, ρ). Подпространства дают нам большой запас метрических пространств: множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел, отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, интервал $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, квадрат на плоскости и т.д.

Следующие примеры метрических пространств связаны с понятием *нормированного* пространства, известным из курса "Линейная алгебра и геометрия". Напомним определение в простейшем случае.

1.3. Определение. Пусть V - вещественное векторное пространство. *Нормой* в пространстве V называется отображение

$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_+$,

ставящее в соответствие вектору $\mathbf{x} \in V$ неотрицательное число $||\mathbf{x}||$ и удовлетворяющее аксиомам

1) если $||\mathbf{x}|| = 0$, то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

2) $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||$ для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leqslant ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ (аксиома треугольника).

Из 2) вытекает, что $||\mathbf{0}|| = 0$.

Векторное пространство V с заданной на нём нормой $||\cdot||$ называется *нормированным (векторным) пространством.*

1.2 Примеры нормированных пространств.

1. Простейшим примером является *нульмерное пространство* $V = \{\mathbf{0}\}$, на котором существует единственная норма.

2. Естественная норма на $\mathbb{R}$ определяется следующим образом: $||\mathbf{x}|| = |\mathbf{x}|$.

3. Одним из обобщений предыдущего примера является следующая норма на арифметическом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются последовательности $(x_1, \ldots, x_n)$ вещественных чисел:

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\}. \tag{1.2}$$

Аксиомы нормы проверяются поточечно с использованием свойств модуля (вещественного) числа.

4. Норма из примера 3 обобщается до нормы на пространстве $C\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ непрерывных вещественных функций на отрезке $[0,1] \subset \mathbb{R}$:
$||f|| = \sup\big\{|f(t)| : t \in [0,1]\big\}$.

Проверим аксиому треугольника. Пусть $f = g + h$. Тогда для всякого $t \in [0,1]$ имеем $|f(t)| \leqslant |g(t)| + |h(t)|$. Отсюда вытекает, что
$|f(t)| \leqslant \sup\big\{|g(t')| : t' \in [0,1]\big\} + \sup\big\{|g(t')| : t' \in [0,1]\big\}$,
откуда и получаем неравенство $||f|| \leqslant ||g|| + ||h||$.

5. Определим ещё одну норму на $\mathbb{R}^n$. Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum\big\{x_i^2 : i = 1, \ldots, n\big\}}. \tag{1.3}$$

В курсе Линейной алгебры и геометрии доказано, что функция из (1.3) удовлетворяет всем аксиомам нормы.

1.5. Предложение. *Пусть* $(V, ||\cdot||)$ *- нормированное пространство. Для* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *положим*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||. \tag{1.4}$$

Тогда ρ *является метрикой на множестве* V.

Доказательство. Ясно, что достаточно проверить аксиому 1.1.3 треугольника. Имеем
$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (1.4) = ||\mathbf{x} - \mathbf{z}|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z}|| \leqslant (1.3.3) \leqslant ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| + ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. $\square$

Таким образом, Предложение 1.5 даёт нам новые примеры метрических пространств: пространства $\mathbb{R}^n$ с двумя различными метриками (нормы из (1.2) и (1.3) различны при $n \geqslant 2$ и, следовательно, приводят к различным метрикам).

1.6. Канторово совершенное множество. Это замечательное множество имеет большое принципиальное значение и многочисленные применения.

Возьмём отрезок $I = [0,1]$ числовой прямой и назовём его отрезком нулевого ранга. На нём возьмём два отрезка $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ и $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ и назовём их отрезками первого ранга. Интервал $J = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ назовём интервалом первого ранга. С каждым из отрезков I_0 и I_1 поступим так же, как и с отрезком I, а именно на I_0 и I_1 возьмём по два отрезка второго ранга, т.е.

$I_{00} = [0, \frac{1}{9}], \quad I_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}],$
$I_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], \quad I_{11} = [\frac{8}{9}, 1].$

Между ними лежат интервалы второго ранга

$J_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), \quad J_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}).$

Продолжаем это построение. Пусть построены 2^n отрезков n-го ранга $I_{i_1 \ldots i_n}$ (каждый из индексов принимает значения 0 или 1). Каждый из отрезков $I_{i_1 \ldots i_n}$ разделим на три равные по длине части: два крайних отрезка $I_{i_1 \ldots i_n 0}$ и $I_{i_1 \ldots i_n 1}$ (первая и третья трети отрезка $I_{i_1 \ldots i_n}$) и лежащий между ними интервал $J_{i_1 \ldots i_n}$.

Объединение всех отрезков n-го ранга обозначим через C_n. Это - подмножество отрезка I, дополнение к которому состоит из всех интервалов ранга $\leqslant n$. Поэтому пересечение

$C = \bigcap \{C_n : n = 1, 2 \ldots\}$

имеет своим дополнением (в отрезке I) объединение всех интервалов $J_{i_1 \ldots i_n}$ всевозможных рангов. Различные интервалы этого семейства попарно не пересекаются. Отсюда, в частности, следует, что концы всех интервалов $J_{i_1 \ldots i_n}$ принадлежат множеству C. Кроме того, C содержит точки 0 и 1. Множество C и называется *канторовым совершенным множеством* или *канторовым дисконтинуумом.*

Топологические свойства канторова множества C, связанные со словами „совершенное“ и „дисконтинуум“, мы обсудим после того, как познакомимся с элементами топологии. А сейчас мы докажем, что множество C имеет *мощность континуума.*

Для этого сначала познакомимся с элементами теории множеств, связанными с понятием *мощность множества.* Это делается в курсе „Математический анализ“, но кое-что мы напомним.

Мощность множества - это в некотором смысле „количество“ его элементов. Для конечного множества с понятием количества его элементов не возникает никаких вопросов. С бесконечными множествами ситуация сложнее. Например, совпадает ли количество элементов множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел и множества $\mathbb{Z}$ всех целых чисел?

1.6.1. Определение. Множества A и B называются *эквивалентными* или *равномощными* (обозначение: $A \sim B$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие или, другими словами, если существует биективное отображение $f : A \to B$. Если A и B равномощны, то говорят, что они имеют одинаковую мощность.

1.6.2. Определение. Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Таким образом, хотя понятие счётности множества связано с возможностью его пересчёта, мы различаем конечные и бесконечные множества.

Задача. Доказать, что множество $\mathbb{Z}$ счётно.

1.6.3. Определение. Мощностью *континуума* называется мощность отрезка $I = [0, 1]$.

1.7. Предложение. *Множество $2^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей, составленных из нулей и единиц, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Двоичная запись

$t = 0, i_1 i_2 \dots i_k \dots$

произвольного числа $t \in I = [0, 1]$ даёт нам отображение $f : I \to 2^{\mathbb{N}}$. Это - отображение „на“, но не взаимно однозначно. Числам вида

$$n/2^k, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant n \leqslant 2^k, \tag{1.5}$$

соответствуют в точности две записи: у одной, начиная с некоторого номера, все цифры равны 0, а другой - все единицы. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество двоично-рациональных чисел на отрезке I, т.е. множество чисел вида (1.5). На множестве $I \setminus \mathcal{D}$ отображение f инъективно, т.е. переводит разные точки в разные. Но множества $\mathcal{D}$ и $f(\mathcal{D})$ счётны. Значит, существует биекция $g : \mathcal{D} \to f(\mathcal{D})$. Тогда отображение $h : I \to 2^{\mathbb{N}}$, определяемое следующим образом:

$h|\mathcal{D} = g, \quad h|(I \setminus \mathcal{D}) = f|((I \setminus \mathcal{D}),$

является биекцией. $\square$

1.8. Предложение. *Канторово множество C имеет мощность континуума.*

Доказательство. Если точки $x, y \in C_n$ принадлежат различным отрезкам n-го ранга, то расстояние между ними $\geqslant 1/3^n$. Поэтому каждая точка $x \in C$ принадлежит единственному отрезку $I_{i_1 \dots i_n}$ n-го ранга. Следовательно, каждой точке $x \in C$ однозначно соответствует последовательность отрезков

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset \dots \supset I_{i_1 i_2 \dots i_n} \supset \dots, \tag{1.6}$$

значит, и последовательность индексов

$$i_1, i_2, \dots, i_n, \dots . \tag{1.7}$$

Таким образом, сопоставляя каждой точке $x \in C$ последовательность (1.7), получаем отображение, которое, как только что показано, инъективно, а по лемме о последовательности вложенных стягивающих отрезков сюръективно, т.е. является отображением „на“. Следовательно f есть биекция. Применение Предложения 1.7 завершает доказательство. $\square$

1.9. Замечание. Напомним, что по теореме Кантора мощность континуума несчётна.

Лекция 2

Непрерывные отображения метрических пространств. Кривая Пеано.

2.1. Прежде, чем говорить о непрерывных отображениях, поговорим об отображениях вообще. Пусть $f : X \to Y$ - отображение множества X в множество Y и $M \subset X$. Множество

$f(M) = \big\{f(x) : x \in M\big\}$

называется *образом* M при f.

Справедливы следующие свойства:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2); \tag{2.1}$$

$$f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2). \tag{2.2}$$

В то же время не всегда имеет место равенство

$f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$.

В качестве примера можно взять множество X, состоящее из двух различных точек a_1 и a_2, и положить $M_i = \{a_i\},\ i = 1, 2$. Пусть Y состоит из одной точки b. Отображение $f : X \to Y$ определено однозначно: $f(a_i) = b$. Тогда $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ и $f(M_1 \cap M_2) = \varnothing$. В то же время $f(M_1) \cap f(M_2) = Y \neq \varnothing$.

2.2. Пусть теперь $M \subset Y$. Множество $f^{-1}(M) = \big\{x \in X : f(x) \in M\big\}$

называется (полным) *прообразом* множества M при f. Переход к прообразу сохраняет основные теоретико-множественные операции:

$$f^{-1}(M_1 \setminus M_2) = f^{-1}(M_1) \setminus f^{-1}(M_2); \tag{2.3}$$

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2); \tag{2.4}$$

$$f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2). \tag{2.5}$$

2.3. Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ - отображения, то определена их *композиция*

$g \circ f : X \to Z$

по правилу : $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *обратимым*, если существует такое отображение $g : Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$, где id_X - тождественное отображение множества X на себя, и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Отображение g называется *обратным* к f и обозначается f^{-1}.

2.4. Отображение $f : X \to Y$ называется

1) *инъекцией*, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

2) *сюръекцией* или „отображением на“, если для любого $y \in Y$ существует такой $x \in X$, что $f(x) = y$;

3) *биекцией* (или „взаимно однозначным отображением“), если f одновременно является инъекцией и сюръекцией.

Предложение. *Отображение $f : X \to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда оно является биекцией.*

Доказательство достаточно просто и предоставляется читателю.

2.6. Пусть $f : X \to Y$ - отображение и $M \subset X$. Отображение f, рассматриваемое только на M, называется *сужением* (*ограничением*) отображения f на M и обозначается $f|M$. Получаем отображение $f|M : M \to Y$, где $(f|M)(x) = f(x)$.

2.7. Пусть(X, ρ) - метрическое пространство, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Множество

$O_\varepsilon(x) = \big\{x' \in X : \rho(x, x') < \varepsilon\big\}$

называется *ε-окрестностью* точки x (или *ε-шаром* с центром в точке x) в метрическом пространстве X.

2.8. Определение. Пусть (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) - метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Понятие окрестности позволяет дать более короткое определение непрерывности отображения.

2.9. Определение. Пусть X и Y - метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$f\big(O_\delta(x_0)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(x_0)\big). \tag{2.7}$$

Ясно, что Определения 2.8 и 2.9 равносильны, поскольку условия (2.6) и (2.7) совпадают.

2.10. Замечание. Определение 2.9 непрерывности отображения f называется *определением непрерывности по Коши.*

Определим теперь непрерывность по Гейне. Для этого нам потребуется

2.11. Определение. Пусть X - метрическое пространство и $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ - последовательность точек $x_n \in X$. Говорят, что последовательность ξ *сходится* к точке $x \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$x_n \in O_\varepsilon(x) \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0. \tag{2.8}$$

2.12. Определение непрерывности по Гейне. Пусть X и Y - метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для всякой последовательности $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(\xi) = \big(f(x_n) : n \in \mathbb{N}\big)$ сходится к точке $f(x_0)$.

2.13. Теорема. *Непрерывности отображения* $f : X \to Y$ *в точке* $x_0 \in X$ *по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Пусть f непрерывно в точке x_0 по Коши и пусть $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ - последовательность, сходящаяся к точке x_0. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое $\delta > 0$, что выполнено свойство (2.7). Поскольку ξ сходится к x_0, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$x_n \in O_\delta(x_0) \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0.$$

Но тогда

$$f(x_n) \in f\big(O_\delta(x_0)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0.$$

Следовательно, $f(\xi)$ сходится к $f(x_0)$.

Наоборот, пусть f непрерывно в точке x_0 по Гейне. Возьмём $\delta_n = 1/n$. Если f не является непрерывным в точке x_0 по Коши, то для некоторого $\varepsilon > 0$ и для каждого n существует такая точка $x_n \in O_{\delta_n}(x_0)$, что $f(x_n) \notin O_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$. Тогда последовательность $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к x_0, но последовательность $f(\xi) = \big(f(x_n) : n \in \mathbb{N}\big)$ не сходится к $f(x_n)$, поскольку $f(\xi) \cap O_\varepsilon\big(f(x_0)\big) = \varnothing$. Получили противоречие. $\square$

2.14. Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

2.15. Определение. Пусть (X, ρ) -метрическое пространство и $M \subset X$. Если

$$\sup\big\{\rho(x, y) : x, y \in M\big\} = d < \infty,$$

то множество M называется *ограниченным*, а число d называется его *диаметром* и обозначается через $\operatorname{diam}(M)$.

2.16. Кривая Пеано. *Существует непрерывное отображение отрезка I на треугольник T.*

Доказательство. Пусть $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. В качестве T возьмём какой-нибудь равнобедренный прямоугольный треугольник. Разобьём отрезок I на две его половины: $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$ и $I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$. Это разбиение назовём разбиением первого ранга, а отрезки I_0 и I_1 - отрезками первого ранга. Разбивая каждый отрезок первого ранга на две половины, получим четыре отрезка $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$ второго ранга, образующие разбиение отрезка I второго ранга и т.д. Разбиение n-го ранга состоит из 2^n отрезков $I_{i_1 i_2 \dots i_n},\ i_k \in \{0,1\}$, длина каждого из которых равна $1/2^n$.

Аналогичным образом, опуская в треугольнике T высоту из прямого угла, разобьём его на два равных равнобедренных треугольника T_0 и T_1. Это - треугольники первого ранга, они образуют разбиение первого ранга исходного треугольника T. Разбивая каждый треугольник первого ранга его высотой, получим четыре треугольника $T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$ второго ранга.

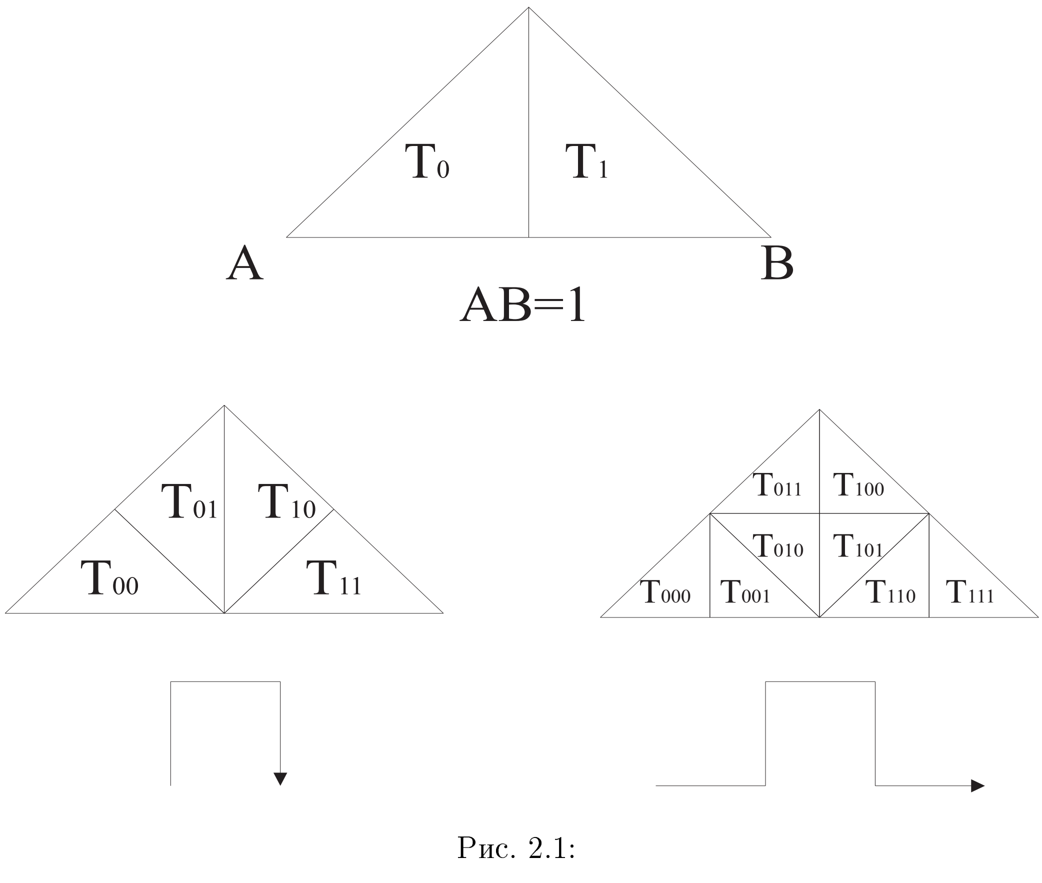

Рис. 2.1:

Вообще, при любом n получаем 2^n треугольников $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $i_k \in \{0,1\}$, ранга n.

Из нашей конструкции вытекает, что

$$I_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}} \subset I_{i_1 \ldots i_n}, \quad T_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}} \subset T_{i_1 \ldots i_n}. \tag{2.9}$$

Далее, имеем

$$\operatorname{diam}(I_{i_1 \ldots i_n}) = 1/2^n. \tag{2.10}$$

Если считать длину основания треугольника T равной единице, то

$$\operatorname{diam}(T_{i_1 \ldots i_n}) = 1/(\sqrt{2})^n. \tag{2.11}$$

Из (2.11) вытекает свойство

а) Если для любого n мы обозначим через P_n либо один треугольник ранга n, либо объединение двух прилегающих друг к другу треугольников ранга n, то

$$\operatorname{diam}(P_n) \leqslant 1/(\sqrt{2})^{n-1}. \tag{2.12}$$

Далее, из рисунка видно следующее: треугольники ранга n можно упорядочить так, что выполняется свойство

б) Если два отрезка $I_{i_1 \ldots i_n}$ и $I_{j_1 \ldots j_n}$ ранга n имеют общий конец, то треугольники $T_{i_1 \ldots i_n}$ и $T_{j_1 \ldots j_n}$ прилегают друг к другу по общей стороне.

Пусть теперь t - какая-нибудь точка отрезка $I = [0,1]$. Для каждого n точка t принадлежит либо единственному отрезку $I_{i_1 \ldots i_n}$ ранга n, либо двум отрезкам $I_{i_1 \ldots i_n}$ и $I_{j_1 \ldots j_n}$, имеющим точку t своим общим концом.

в) Обозначим через $P_n(t)$ в первом случае треугольник $T_{i_1 \ldots i_n}$, а во втором - объединение двух треугольников $T_{i_1 \ldots i_n}$ и $T_{j_1 \ldots j_n}$, которые в этом случае прилегают друг к другу по общей стороне, в силу свойства б).

Легко видеть, что

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \ldots \supset P_n(t) \supset \ldots, \tag{2.13}$$

причём вследствие (2.12) пересечение всех $P_n(t)$ состоит из единственной точки, которую мы и обозначим через $f(t)$.

Замечание. Обобщением леммы о последовательности вложенных стягивающихся отрезков является следующее

2.17. Утверждение. *Убывающая последовательность непустых компактов имеет непустое пересечение.* $\square$

Утверждение 2.17. будет доказано в § 8. Следовательно, пересечение $\bigcap \{P_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ не пусто и состоит из одной точки.

Продолжение доказательства. Итак, соответствие $t \to f(t)$ определяет отображение $f : I \to T$. Покажем прежде всего, что отображение

f является сюръекцией. Пусть $x \in T$ - произвольная точка. Возьмём какую-нибудь такую последовательность треугольников

$$T_{i_1} \supset T_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots, \tag{2.14}$$

что x содержится в каждом элементе $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ этой последовательности (для некоторых x такая последовательность определена однозначно, для других - нет). Последовательности (2.14) соответствует последовательность отрезков

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots, \tag{2.15}$$

пересечение элементов которой состоит из единственной точки $t \in [0,1]$.

Из нашего построения следует, что

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset P_n(t) \tag{2.16}$$

для произвольного элемента $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ последовательности (2.14). Поэтому из равенств

$\bigcap\big\{T_{i_1 i_2 \ldots i_n} : n \in \mathbb{N}\big\} = \{x\}, \quad \bigcap\big\{P_n(t) : n \in \mathbb{N}\big\} = \big\{f(t)\big\}$

и условия (2.16) вытекает, что $x = f(t)$.

Докажем, наконец, что отображение f непрерывно в произвольной точке $t_0 \in [0,1]$. Пусть

$$\bigcap\big\{P_n(t_0) : n \in \mathbb{N}\big\} = \big\{f(t_0)\big\} = \{x_0\}. \tag{2.17}$$

Берем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (2.12) и (2.17) следует существование такого n, что

$$P_n(t_0) \subset O_\varepsilon(x_0). \tag{2.18}$$

Точка t_0 принадлежит либо единственному отрезку $I_{i_1 \ldots i_n}$, либо двум отрезкам $I_{i_1 \ldots i_n}$ и $I_{j_1 \ldots j_n}$. В первом случае полагаем $I'_n = I_{i_1 \ldots i_n}$, а во втором - $I'_n = I_{i_1 \ldots i_n} \cup I_{j_1 \ldots i_n}$. Обозначим через δ расстояние от t_0 до ближайшего конца отрезка I'_n. Тогда для всех $t \in [0,1] \cap O_\delta(t_0)$ имеем $P_n(t) \subset \big($по определению в$\big) \subset P_n(t_0)$. Следовательно, $f(t) \in P_n(t) \subset P_n(t_0) \subset (2.18) \subset O_\varepsilon(x_0)$, что и требовалось доказать. $\square$

Лекция 3

Топологические пространства

Для множества X через 2^X обозначается множество всех его подмножеств.

3.1. Определение. Пара $(X, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T} \subset 2^X$, называется *топологическим пространством*, если $\mathcal{T}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

2) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$;

3) объединение произвольного семейства $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Говорят, что $\mathcal{T}$ - это топология на множестве X. Обычно топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ обозначается через X. Из тех же соображений краткости мы будем говорить „пространство" вместо „топологическое пространство". Элементы множества X называются *точками* пространства X.

3.2. Элементы топологии $\mathcal{T}$ называются *открытыми множествами* пространства X, а дополнения к ним - *замкнутыми* множествами.

Из свойств 1), 2) и 3) вытекают свойства:

1') $\varnothing$ и X - замкнутые множества пространства X;

2') объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;

3') пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

3.3. Семейство всех топологий на множестве X упорядочено отношением включения. Это означает, что

$\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, т.е. всякое множество U, открытое в топологии $\mathcal{T}_1$, открыто и в топологии $\mathcal{T}_2$.

При этом говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ *слабее* топологии $\mathcal{T}_2$, а топология $\mathcal{T}_2$ *сильнее* топологии $\mathcal{T}_1$. Из Определения 1.1 вытекает, что пара $\{\varnothing, X\}$ содержится в любой топологии $\mathcal{T}$ на X. Ясно также, что эта пара является топологией на X, следовательно, $\{\varnothing, X\}$ - *слабейшая* на X топология.

Семейство 2^X всех подмножеств множества X также является топологией на X. Из Определения 3.1 вытекает, что это - *наибольшая* или сильнейшая топология на X. Эта топология называется *дискретной*. В дискретном пространстве всякое множество одновременно открыто и замкнуто.

3.4. Подпространства. Пусть $\mathcal{T}$ - топология на X и $Y \subset X$. Тогда, как легко видеть, семейство

$$\mathcal{T}|Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

является топологией на множестве Y. Пространство $(Y, \mathcal{T}|Y)$ называется *подпространством* пространства $(X, \mathcal{T})$. Обычно говорят: „Y есть подпространство пространства X“.

3.5. Окрестности. Произвольное открытое множество, содержащее множество $M \subset X$, называется *окрестностью* множества M в пространстве X. Окрестности множества M обычно обозначаются символом OM (иногда UM). Из Определения 3.1.2 вытекает, что пересечение конечного числа окрестностей множества M является его окрестностью.

3.6. Предложение. *Множество M открыто в X тогда и только тогда, когда для всякой точки $x \in M$ существует окрестность $Ox \subset M$.*

Доказательство. Пусть M открыто и $x \in M$. Тогда $Ox = M \subset M$. Наоборот, пусть для любой точки $x \in M$ существует $Ox \subset M$. В этом случае множество

$$M = \bigcup\{Ox : x \in M\}$$

открыто согласно Определению 3.1.3. $\square$

3.7. Если точка $x \in X$ имеет окрестность, состоящую из одной точки, то x называется *изолированной* точкой пространства X. Пространство X дискретно тогда и только тогда, когда все его точки изолированы.

3.8. Определение. Пусть X - пространство и $M \subset X$. Множество

$$\bigcap\{F : F \quad \text{замкнуто в} \quad X \quad \text{и} \quad M \subset F\},$$

замкнутое согласно 3.2.3', называется *замыканием* множества M в X и обозначается через $\mathrm{Cl}_X(M) = \mathrm{Cl}(M)$.

Таким образом, $\mathrm{Cl}(M)$ - это наименьшее замкнутое подмножество пространства X, содержащее M.

Множество

$$\bigcup\{U : U \quad \text{открыто в} \quad X \quad \text{и} \quad U \subset M\},$$

открытое согласно 3.1.3, называется *внутренностью* множества M в X и обозначается через $\mathrm{Int}_X(M) = \mathrm{Int}(M)$.

Ясно, что $\mathrm{Int}(M)$ - это наибольшее открытое подмножество пространства X, содержащееся в M.

3.9. Предложение. *Пусть X - пространство и $M \subset X$. Тогда*

$$\mathrm{Cl}(M) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus M). \quad \square$$

3.10. Предложение. *Пусть F - замкнутое подмножество пространства X. Тогда* $\mathrm{Cl}(F) = F$. $\square$

3.11. Предложение. *Пусть U - открытое подмножество пространства X. Тогда* $\mathrm{Int}(U) = U$. $\square$

Из Предложений 3.10 и 3.11 вытекает

3.12. Предложение. *Пусть $M \subset X$. Тогда*

$\mathrm{Cl}\big(\mathrm{Cl}(M)\big) = \mathrm{Cl}(M)$, $\mathrm{Int}\big(\mathrm{Int}(M)\big) = \mathrm{Int}(M)$. $\square$

Следующее утверждение также очевидно.

3.13. Предложение. *Если M и N - такие подмножества пространства X, что $M \subset N$, то*

$\mathrm{Cl}(M) \subset \mathrm{Cl}(N)$, $\mathrm{Int}(M) \subset \mathrm{Int}(N)$. $\square$

3.14. Определение. Точка $x \in M$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset X$, если существует окрестность $Ox \subset M$. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset X$, если $Ox \cap M \neq \varnothing$ для всякой окрестности Ox точки x. Точка $x \in X$ называется *граничной точкой* множества M, если она - его точка прикосновения, но не внутренняя точка. Множество граничных точек называется *границей* множества M и обозначается символом $\mathrm{Bd}(M)$.

3.15. Предложение. *Множество всех внутренних точек множества $M \subset X$ совпадает с* $\mathrm{Int}(M)$.

Доказательство. Из Определения 3.8 вытекает, что всякая внутренняя точка множества M принадлежит $\mathrm{Int}(M)$. Наоборот, если $x \in \mathrm{Int}(M)$, то $Ox = \mathrm{Int}(M) \subset M$. $\square$

Предложения 3.9 и 3.15 влекут

3.16. Предложение. *Множество всех точек прикосновения множества $M \subset X$ совпадает с* $\mathrm{Cl}(M)$. $\square$

Из Предложений 3.15 и 3.16 вытекает, что

$$\mathrm{Bd}(M) = \mathrm{Cl}(M) \setminus \mathrm{Int}(M). \tag{3.1}$$

3.17. Определение. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X называется открытой *базой* X, если всякое открытое множество пространства X является объединением некоторых элементов из $\mathcal{B}$.

3.18. Предложение. *Пусть $\mathcal{B}$ - семейство подмножеств множества X, удовлетворяющее условиям:*

1) *всякая точка $x \in X$ принадлежит некоторому элементу $U \in \mathcal{B}$;*

2) *если $x \in U_1 \cap U_2$ и $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, то существует такой элемент $U_3 \in \mathcal{B}$, что $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$.*

Тогда $\mathcal{B}$ является базой некоторой (однозначно определённой) топологии на множестве X

Доказательство. Положим

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{B}_0 : \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B} \right\} \tag{3.2}$$

и покажем, что $\mathcal{T}$ является топологией на X. Пустое множество принадлежит $\mathcal{T}$, поскольку $\varnothing = \bigcup \mathcal{B}_0$ для $\mathcal{B}_0 = \varnothing \subset \mathcal{B}$. Далее, $X \in \mathcal{T}$ согласно 3.18.1. Условие 3.1.3 выполнено автоматически. Теперь покажем, что пересечение двух элементов U_1 и U_2 из $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Пусть $U_i = \bigcup \mathcal{B}_i,\ i = 1, 2$. Тогда

$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup \mathcal{B}_1\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{B}_2\right) = \bigcup \left\{ V \cap V', \text{ где } V \in \mathcal{B}_1,\ V' \in \mathcal{B}_2 \right\}$.
Но каждое множество вида $V \cap V'$ согласно 3.18.2 является объединением множеств $W \in \mathcal{B}$. Таким образом, и пересечение $U_1 \cap U_2$ является объединением множеств $W \in \mathcal{B}$. Следовательно, $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию 3.1.2.

Наконец, если семейство $\mathcal{B}$ является базой некоторой топологии, то эта топология определена однозначно. Но мы сейчас доказали, что семейство $\mathcal{T}$ из (3.2) является топологией с базой $\mathcal{B}$. $\square$

3.19. Определение. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X называется его открытой *предбазой*, если множество всевозможных конечных пересечений $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ элементов $U_i \in \mathcal{B}$ является базой пространства X.

3.20. Определение. Семейство v подмножеств множества X называется *покрытием* множества X, если $X = \bigcup \left\{ V : V \in v \right\}$.

Покрытие v пространства X называется *открытым*, если оно состоит из открытых множеств. Множество всех открытых покрытий пространства X обозначается через $\operatorname{cov}(X)$.

3.21. Предложение. *Пусть X - множество и v - произвольное его покрытие. Тогда v является предбазой некоторой однозначно определённой топологии на множестве X.*

Доказательство предоставляется читателю. Оно сводится к тому, что семейство $\mathcal{B}$ всевозможных конечных пересечений элементов из v удовлетворяет условиям Предложения 3.18.

3.1 Некоторые примеры.

1) Простейшими примерами топологических пространств являются $X = \varnothing$ и множество X, состоящее из одной точки a. Единственной топологией на этих множествах являются пары $(\varnothing, X)$.

2) Сложнее дело обстоит с множеством X, состоящим из двух различных точек a и b. На этом множестве имеется четыре различные топологии. Перечислим их.

$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}$;

$\mathcal{T}_2 = \big\{\varnothing, \{a\}, X\big\}$;

$\mathcal{T}_3 = \big\{\varnothing, \{b\}, X\big\}$;

$\mathcal{T}_4 = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\big\}$.

3) Более сложную ситуацию мы получаем в случае множества X, состоящего из n различных точек. Из Определения 3.1 вытекает, что число различных топологий на этом множестве не превосходит 2^{2^n}.

3.2 Топология метрического пространства.

3.23.1. Предложение. *Множество всех ε-окрестностей $O_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, точек x метрического пространства (X, ρ) образует базу некоторой топологии на X.*

Доказательство. Достаточно показать, что множество

$\mathcal{B} = \big\{O_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0, x \in X\big\}$

удовлетворяет условиям Предложения 3.18. Условие 3.18.1 выполнено очевидным образом. Пусть теперь

$$x \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2). \tag{3.3}$$

Из (3.3) вытекает, что

$$r_i = \rho(x, x_i) < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.4}$$

Положим

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - r_1, \quad \varepsilon_2 - r_2\}. \tag{3.5}$$

Условие (3.4) влечёт, что $\varepsilon > 0$, а из аксиомы треугольника получаем

$O_\varepsilon(x) \subset O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2)$.

Таким образом, условие 3.18.2 также выполнено. $\square$

Топологию из Предложения 3.23.1 будем обозначать через $\mathcal{T}_\rho$ и будем называть топологией, *порожденной метрикой* ρ, или *метрической топологией.*

Таким образом, Предложение 3.23.1 можно перефразировать следующим образом.

3.23.2. Предложение. *Множество U открыто в метрической топологии $\mathcal{T}_\rho$, если для всякой точки $x \in U$ найдётся открытый ε-шар $O_\varepsilon(x)$ с центром в x, содержащийся в U.* $\square$

3.23.3. Замечание. Если мы наделяем эвклидово пространство E^n метрикой ρ, определяемой формулой (1.1), то базу топологии $\mathcal{T}_\rho$ образуют:

1) ε-интервалы, т.е. интервалы радиуса $\varepsilon > 0$ с центрами в точках x прямой $\mathbb{R} = E^1$;

2) ε-круги плоскости E^2;

3) ε-шары пространства E^3.

3.23.4. Предложение. *Если (X, ρ) - метрическое пространство и $Y \subset X$, то топологии $\mathcal{T}_\rho|Y$ и $\mathcal{T}_{\rho|Y}$ на Y совпадают.*

Доказательство сводится к рутинной проверке того, что для всякой точки $y \in Y$ множество $O_\varepsilon(y) \cap Y$ совпадает с ε-окрестностью точки y в метрике $\rho|Y$. $\square$

Метрические пространства дают нам большой запас топологических пространств, но не всякая топология порождается метрикой.

3.23.5. Задача. Доказать, что топологии $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ из Примера 3.22.2 не являются метрическими топологиями.

Лекция 4

Непрерывные отображения топологических пространств.

4.1. Определение. Отображение $f : X \to Y$ пространства X в пространство Y называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности Oy точки $y = f(x)$ найдётся такая окрестность Ox, что $f(Ox) \subset Oy$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

4.2. Предложение. *Для отображения $f : X \to Y$ следующие условия равносильны*:

1) *f непрерывно*;

2) *прообраз $f^{-1}(U)$ всякого открытого в Y множества U открыт в X*;

3) *прообраз $f^{-1}(F)$ всякого замкнутого в Y множества F замкнут в X*;

4) $f\big(\mathrm{Cl}(Z)\big) \subset \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$ *для всякого множества $Z \subset X$*.

Доказательство. Проверим последовательность импликаций: 1) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 4). Возьмём $x \in \mathrm{Cl}(Z)$. Надо показать, что $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$, т.е. что $f(x)$ является точкой прикосновения множества $f(Z)$. В силу непрерывности f, для произвольной окрестности $Of(x)$ существует такая окрестность Ox, что $f(Ox) \subset Of(x)$. Поскольку $x \in \mathrm{Cl}(Z)$, имеем $Ox \cap Z \neq \varnothing$. Возьмём точку $z \in Ox \cap Z$. Тогда $f(z) \in f(Ox \cap Z) \subset f(Ox) \cap f(Z) \subset Of(x) \cap f(Z)$. Следовательно, $Of(x) \cap f(Z) \neq \varnothing$, т.е. $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$.

4) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что существует замкнутое множество $F \subset$

Y, прообраз $f^{-1}(F)$ которого не замкнут в X. Существует точка

$$x \in \mathrm{Cl}\big(f^{-1}(F)\big) \setminus f^{-1}(F). \tag{4.1}$$

Из 4) вытекает, что $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f\big(f^{-1}(F)\big)\big) = \mathrm{Cl}(F) = F$. С другой стороны, $f(x) \notin F$ согласно (4.1). Получили противоречие.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) вытекает из равенства (2.3). Наконец, 2) $\Rightarrow$ 1). Берем точку $x \in X$ и окрестность $Of(x)$. Множество $f^{-1}\big(Of(x)\big)$ открыто согласно 2). Поскольку $x \in f^{-1}\big(Of(x)\big)$, множество $f^{-1}\big(Of(x)\big)$ и является окрестностью Ox, для которой $f(Ox) = f\big(f^{-1}\big(Of(x)\big)\big) = Of(x)$. $\square$

Следующее утверждение дополняет Предложение 4.2.

4.3. Предложение. *Для непрерывности отображения $f : X \to Y$ достаточно, чтобы были открыты прообразы $f^{-1}(U)$ элементов U некоторой предбазы $\mathcal{B}$ пространства Y.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, а $Of(x)$ - произвольная окрестность. Существуют такие элементы $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{B}$, что $f(x) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \subset Of(x)$. Множества $f^{-1}(U_i)$ открыты по условию. Полагая $Ox = \bigcap\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)$, имеем $f(Ox) \subset Of(x)$. $\square$

4.1 Примеры непрерывных отображений.

1. Постоянное отображение $f = \mathrm{const}_{y_0} : X \to Y$, переводящее всё пространство X в точку $y_0 \in Y$. Прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества $U \subset Y$ либо пуст, либо равен X.

2. Проектирование $pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие точке (x_1, x_2) её первую координату.

3. Любое непрерывное отображение метрических пространств.

4. Произвольному топологическому пространству X можно сопоставить его дискретный дубликат X_d, т.е. пространство на том же множестве X, наделенное дискретной топологией (см. п. 3.3). Тогда тождественное отображение $\mathrm{id} : X_d \to X$ непрерывно.

Топология пространства X_d порождается метрикой примера 1.2.3 ($x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) = 1$).

Таким образом, имеет место

4.5. Предложение. *Всякое топологическое пространство X является непрерывным образом метрического пространства.* $\square$

Из условия 2) Предложения 4.2 непосредственно вытекает

4.6. Предложение (теорема о сложной функции). *Если отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ непрерывны, то непрерывна и их композиция $g \circ f : X \to Z$.* $\square$

Пусть Z - подпространство пространства X. Обозначим через $i_Z : Z \to X$ отображение вложения, т.е. отображение, ставящее в соответствие точке $z \in Z$ её саму. Из определения подпространства (п.3.4) вытекает

4.7. Предложение. *Отображение вложения $i_Z : Z \to X$ непрерывно.* $\square$

4.8. Предложение. *Ограничение $f|Z$ непрерывного отображения $f : X \to Y$ на подпространство $Z \subset X$ непрерывно.*

Утверждение вытекает из Предложения 4.6 и равенства $f|Z = f \circ i_Z$. $\square$

4.9. Предложение. *Пусть пространство X является объединением конечного числа своих замкнутых подмножеств $F_i,\ i = 1, \dots, k$, и пусть $f : X \to Y$ - такое отображение, что $f|F_i$ непрерывно для каждого i. Тогда отображение f непрерывно.*

Доказательство. Возьмём произвольное замкнутое множество $\Phi \subset Y$. Тогда

$$f^{-1}(\Phi) = \bigcup_{i=1}^{k} \big(f|F_i\big)^{-1}(\Phi).$$

В самом деле, включение $\supset$ очевидно. Пусть теперь $x \in f^{-1}(\Phi)$. Тогда x принадлежит некоторому F_i и, значит, $x \in \big(f|F_i\big)^{-1}(\Phi)$. Из условия 3) Предложения 4.2 и непрерывности отображений $f|F_i$ вытекает замкнутость множеств $\big(f|F_i\big)^{-1}(\Phi)$. Поэтому замкнуто и $f^{-1}(\Phi)$. Значит, f непрерывно согласно Предложению 4.2. $\square$

Предложение 4.9 можно переформулировать как теорему о *склейке отображений.*

4.10. Теорема. *Пусть пространство X является объединением своих замкнутых подпространств F_1 и F_2. Предположим, что даны непрерывные отображения $f_i : F_i \to Y,\ i = 1, 2$, удовлетворяющее условию $f_1|F_1 \cap F_2 = f_2|F_1 \cap F_2$. Тогда отображение $f : X \to Y$, определённое равенством*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } x \in F_1; \\ f_2(x), & \text{если } x \in F_2; \end{cases}$$

непрерывно. $\square$

4.11. Определение. Пусть $f : X \to Y$ - взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y. Пусть, кроме того, непрерывны отображение f и обратное к нему отображение f^{-1}. Тогда f называется *гомеоморфизмом,* а пространства X и Y - *гомеоморфными.*

Из Предложения 4.3 вытекает

4.12. Предложение. *Для того, чтобы взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$ было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы некоторая предбаза $\mathcal{B}$ пространства X отображалась на предбазу пространства Y.* $\square$

4.2 Примеры гомеоморфных пространств.

1. Все отрезки числовой прямой гомеоморфны отрезку $[0, 1]$.

2. Все интервалы числовой прямой гомеоморфны интервалу $(0, 1)$.

3. *Открытым диском* в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ радиуса r_0 называется множество

$$D^n_{\mathbf{x}_0, r_0} = \Big\{ \mathbf{x} = \big(x_1, \dots, x_n\big) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \big(x_i - x_i^0\big)^2 < r_0^2 \Big\}.$$

Открытый диск с центром в начале координат и радиуса 1 будем обозначать через D^n.

Доказать, что все открытые диски в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны диску D^n.

4. Пусть S^{n-1} – сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1 с центром в начале координат, т.е.

$$S^{n-1} = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\big\}.$$

Множество $E_{n-1} = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} : x_n = 0\big\}$ назовём *экватором* сферы S^{n-1}. Экватор разбивает сферу S^{n-1} на две полусферы S^{n-1}_+ и S^{n-1}_-:

$$S^{n-1}_+ = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} : x_n > 0\big\};$$
$$S^{n-1}_- = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} : x_n < 0\big\}.$$

Эти полусферы гомеоморфны.

5. Диск D^{n-1} гомеоморфен полусфере S^{n-1}_+. Гомеоморфизм $h : D^{n-1} \to S^{n-1}_+$ определяется равенством

$$h\big(x_1, \dots, x_{n-1}\big) = \Big(x_1 \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}\Big).$$

Обратное отображение h^{-1} задаётся равенством

$$h^{-1}\big(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\big) = \big(x_1, \dots, x_{n-1}\big).$$

6. *Диск D^n гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D^n$ положим

$$f(\mathbf{x}) = \operatorname{tg}\big(\tfrac{\pi}{2}\|\mathbf{x}\|\big) \cdot \mathbf{x}.$$

Ясно, что $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ - биекция. Непрерывность f вытекает из непрерывности функции tg и непрерывности умножения $(t, \mathbf{x}) \to t\mathbf{x}$.

Обратное отображение $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to D^n$ задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} f^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}; \\ \text{если} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \text{то} \quad f^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{2}}{\pi\|\mathbf{x}\|} \operatorname{arctg}\big(\frac{\pi}{\mathbf{2}}\|\mathbf{x}\|\big)\mathbf{x}. \end{cases} \quad \square$$

Непрерывность отображений f и f^{-1} доказывается с помощью следующего утверждения:

4.14. Предложение. *Пусть* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *- непрерывная функция. Тогда отображение* $f = f_g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, задаваемое формулой*

$$f(\mathbf{x}) = g\big(||\mathbf{x}||\big) \cdot \mathbf{x}, \tag{4.2}$$

непрерывно.

Доказательство. Проверим непрерывность отображения f в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Введём для краткости следующие обозначения: $||x_i|| = y_i$, $g\big(||x_i||\big) = z_i$. Пусть последовательность $\mathbf{x}_i$, $i \in \mathbb{N}$, сходится к $\mathbf{x}_0$. Следовательно, $y_i \to y_0$. Это означает, что $y_i = y_0 + a_i$, где a_i - бесконечно малая последовательность (бмп).

Из непрерывности функции g вытекает, что $z_i \to z_0$. Следовательно, $z_i = z_0 + b_i$, где b_i - бмп. Тогда $z_i \cdot y_i = (z_0 + b_i)(y_0 + a_i) = z_0y_0 + z_0 \cdot a_i + b_iy_0 + b_ia_i = z_0y_0 + c_i$. Последовательность c_i есть бмп как сумма трёх бмп.

Значит, последовательность z_iy_i сходится к z_0y_0. А отсюда вытекает, что последовательность $g\big(||\mathbf{x}_i||\big) \cdot \mathbf{x}_i$ сходится к $g\big(||\mathbf{x}_0||\big) \cdot \mathbf{x}_0$. $\square$

4.15. Определение. Непрерывное отображение $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной (вещественной) функцией.*

Множество $U \subset X$ называется *функционально открытым* (соответственно *функционально замкнутым*), если существует такая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, что

$U = f^{-1}(0, +\infty)$ $\big($соответственно $U = f^{-1}[0, +\infty)\big)$.

4.16. Предложение. *Функционально открытое множество открыто. Функционально замкнутое множество замкнуто. Дополнение до функционально открытого множества функционально замкнуто.*

Доказательство. В силу Предложения 4.2, в доказательстве нуждается только третье утверждение. Пусть $U = f^{-1}(0, +\infty)$ для некоторой непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда $X \setminus U = f^{-1}(-\infty, 0]$. Функция $g = -f$ непрерывна и $X \setminus U = g^{-1}[0, +\infty)$. $\square$

Из Теоремы 4.10 и Предложения 4.16 вытекает

4.17. Предложение. *Если* $f : X \to \mathbb{R}$ *и* $g : X \to \mathbb{R}$ *- непрерывные функции, то функции* $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ *и* $|f| = \max\{f, -f\}$ *также непрерывны.* $\square$

4.18. Определение. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ называется *сходящейся* к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если для каждой точки $x \in X$ последовательность $\big(f_n(x) : n \in \mathbb{N}\big)$ сходится к $f(x)$.

Сходящаяся последовательность непрерывных функций не обязана сходиться к функции непрерывной. В качестве примера можно рассмотреть следующую последовательность функций $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : f_n(x) =$

x^n. Последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к функции f, равной нулю на полуинтервале $[0,1)$ и единице в точке $x = 1$.

4.19. Определение. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *равномерно сходится к функции* $f : X \to \mathbb{R}$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\big|f(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0 \quad \text{и} \quad x \in X. \tag{4.3}$$

4.20. Теорема. *Если последовательность непрерывных функций* $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *равномерно сходится к функции* $f : X \to \mathbb{R}$, *то* f *непрерывна.*

Доказательство. Для произвольной точки $x_0 \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ надо найти такую окрестность Ox_0, что

$$x \in Ox_0 \Rightarrow \big|f(x_0) - f(x)\big| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

В силу равномерной сходимости последовательности (f_n), существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\big|f(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon/3 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0 \quad \text{и} \quad x \in X. \tag{4.5}$$

Поскольку функция f_{n_0} непрерывна, существует окрестность O_{x_0}, обладающая свойством

$$x \in Ox_0 \Rightarrow \big|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)\big| < \varepsilon/3. \tag{4.6}$$

Тогда для $x \in Ox_0$ имеем

$\big|f(x_0) - f(x)\big| = \big|f(x_0) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f(x)\big| \leqslant \big|f(x_0) - f_{n_0}(x_0)\big| + \big|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)\big| + \big|f_{n_0}(x) - f(x)\big| <$ (согласно (4.5) и (4.6)) $< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Таким образом, свойство (4.4) проверено. □

Для дальнейшего нам потребуется утверждение, относящееся к сходимости последовательностей в метрических пространствах.

4.21. Предложение. *Пусть* X *- метрическое пространство и* $M \subset X$. *Предположим, что последовательность* $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к точке* $x \in X$. *Тогда* $x \in \mathrm{Cl}(M)$.

Доказательство. Если $x \notin \mathrm{Cl}(M)$, то x принадлежит открытому множеству $X \setminus \mathrm{Cl}(M)$. Следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(x) \subset X \setminus \mathrm{Cl}(M)$, т.е. $O_\varepsilon(x) \cap \mathrm{Cl}(M) = \varnothing$. Но тогда $O_\varepsilon(x)$ не содержит ни одного элемента x_n нашей последовательности, что противоречит сходимости этой последовательности к точке x. □

4.22. Следствие. *Предположим, что* $x_n \in O_\varepsilon(x_0)$ *и последовательность* x_n, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к точке* x. *Тогда* $\rho(x_0, x) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Предположим, что $\rho(x_0, x) > \varepsilon$. Положив $\delta = \rho(x_0, x) - \varepsilon$, согласно аксиоме треугольника получаем $O_\varepsilon(x_0) \cap O_\delta(x) = \varnothing$, что противоречит Предложению 4.21. $\square$

Дадим внутренний критерий равномерной сходимости.

4.23. Определение. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$, называется *фундаментальной*, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\bigl|f_m(x) - f_n(x)\bigr| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad m, n \geqslant n_0, \quad n < m, \quad x \in X. \tag{4.7}$$

4.24. Теорема. *Всякая фундаментальная последовательность непрерывных функций* $f_n : X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, *равномерно сходится к непрерывной функции* f.

Доказательство. При фиксированном $x \in X$ свойство (4.7) является условием фундаментальности числовой последовательности $f_n(x),\ n \in \mathbb{N}$. По критерию Коши эта последовательность сходится к некоторой точке $f(x)$. Итак, функцию f мы определили.

Согласно Теореме 4.20 остаётся проверить, что последовательность $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится к f. Возьмём ε' под условием $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Тогда выполняется условие (4.7'), получающееся из (4.7) заменой ε на ε'. Для $m > n_0$ положим $a_m(x) = \bigl|f_m(x) - f_{n_0}(x)\bigr|$. Последовательность $\bigl(a_m(x),\ m \geqslant n_0\bigr)$ сходится к $\bigl|f(x) - f_{n_0}(x)\bigr|$, поскольку $f_m(x)$ сходится к $f(x)$. Тогда из (4.7') и Следствия 4.22 вытекает, что

$\bigl|f(x) - f_{n_0}(x)\bigr| \leqslant \varepsilon' < \varepsilon.$

Итак, условие (4.3) равномерной сходимости проверено. $\square$

4.25. Определение. Пусть $f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in A$, - семейство отображений множества X в пространства Y_α. Тогда семейство

$$\bigl\{f_\alpha^{-1}(U) : U \quad \text{открыто в} \quad Y_\alpha, \ \ \alpha \in A\bigr\} \tag{4.8}$$

является покрытием множества X и согласно Предложению 3.22 - предбазой некоторой топологии $\mathcal{T}$ на X. Относительно этой топологии все отображения f_α непрерывны, в силу Предложения 4.3. При этом, $\mathcal{T}$ - наименьшая (слабейшая) топология на X, обладающая этим свойством. Назовём $\mathcal{T}$ *слабой топологией относительно семейства* $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Легко видеть, что в определении (4.8) достаточно ограничиться открытыми множествами $U \subset Y_\alpha$ из некоторой базы пространства Y_α.

4.26. Определение. Пусть $f : X \to Y$ - отображение пространства X на множество Y. Тогда семейство

$\mathcal{T} = \bigl\{U \subset Y : f^{-1}(U) \quad \text{открыто}\bigr\}$

является топологией на Y, очевидно, сильнейшей среди всех, для которых отображение $f : X \to Y$ непрерывно. Назовём $\mathcal{T}$ *факторной то-*

пологией (или *фактортопологией*), $(Y, \mathcal{T})$ - *факторпространством* пространства X, а f - *факторным отображением.*

4.27. Факторные отображения естественно возникают при разбиениях пространства X на непересекающиеся множества. В связи с этим напомним определение отношения эквивалентности, известное читателю из курса Высшей алгебры.

Пусть X - множество и $\mathcal{R} \subset X \times X$. Множество $\mathcal{R}$ называется *бинарным отношением* на множестве X. Две точки $x, y \in X$ находятся в отношении $\mathcal{R}$ (обозначение: $x\mathcal{R}y$), если $(x, y) \in \mathcal{R}$. Предположим, что отношение $\mathcal{R}$ обладает следующими свойствами:

1) $x\mathcal{R}x$ для любого $x \in X$ (*рефлексивность*);

2) $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ (*симметричность*);

3) $x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (*транзитивность*).

Тогда оно называется отношением *эквивалентности.* Отношение эквивалентности часто обозначается символом $\sim$.

Множество X распадается на попарно непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов - *классы эквивалентности.*

Если $\mathcal{R}$ - отношение эквивалентности на X, то класс эквивалентности элемента $x \in X$ будем обозначать через $\mathcal{R}(x)$. Множество всех классов эквивалентности отношения $\mathcal{R}$ обозначается через $X/\mathcal{R}$ и называется *фактормножеством* пространства X относительно $\mathcal{R}$. Фактормножество $X/\mathcal{R}$ является дизъюнктным покрытием (разбиением) множества X. Наоборот, всякое разбиение множества X определяет на нём отношение эквивалентности.

Факторотображение $f : X \to X/\mathcal{R}$ переводит элемент $x \in X$ в множество $f(x) = \mathcal{R}(x)$, а фактортопология определяется следующим образом: множество $U \subset X/\mathcal{R}$ открыто тогда и только тогда, когда объединение

$\bigcup\{\mathcal{R}(x) \in X/\mathcal{R} : \mathcal{R}(x) \in U\}$

является открытым подмножеством пространства X.

4.3 Примеры факторпространств.

1. Возьмём разбиения $\mathcal{R}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ на два множества $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ иррациональных и рациональных чисел соответственно. Тогда фактормножество $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ состоит из двух точек a и b. Что касается фактортопологии, это топология „слипшегося двоеточия“, т.е. слабейшая топология $\{\varnothing,\ \mathbb{R}/\mathcal{R}\}$ на фактормножестве.

2. Разобьём квадрат $Q \subset \mathbb{R}$ с вершинами $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ и $(1, 1)$ на вертикальные отрезки. Получающееся факторпространство гомеоморф-

но отрезку $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

3. Разбиение $\mathcal{R}$ отрезка $[0,1]$ состоит из одноточечных множеств интервала $(0,1)$ и двухточечного множества $\{0,1\}$. Тогда факторпространство $[0,1]/\mathcal{R}$ гомеоморфно окружности S^1.

4. Разбиение $\mathcal{R}$ замкнутого круга

$B^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\}$

состоит из одноточечных множеств диска $D^2 \subset B^2$ и бесконечного множества $S^1 = B^2 \setminus D^2$.

Доказать, что факторпространство $B^2/\mathcal{R}$ гомеоморфно сфере S^2.

Лекция 5

Аксиомы отделимости.

5.1. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет *аксиоме отделимости Колмогорова* или является T_0-*пространством*, если для любых двух различных точек x и y пространства X по крайней мере одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

T_0-пространства играют большую роль в алгебраической геометрии.

Слипшееся двоеточие (пример 3.22.2.1) является простейшим примером пространства, не удовлетворяющего аксиоме T_0.

5.2. Пространство X называется T_1-*пространством*, если для любых различных точек x и y пространства X существуют окрестность Ox, не содержащая точки y, и окрестность Oy, не содержащая точки x.

Из Определения 3.2.3' вытекает, что пространство X есть T_1-пространство тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества X замкнуты.

„Связное двоеточие", т.е. пространство $X = \{a, b\}$, в котором открыты множества $\varnothing$, $\{a\}$, X (пример 3.22.2.2), есть T_0-пространство, не являющееся T_1-пространством.

5.3. Пространство X называется *хаусдорфовым* или T_2-*пространством*, если для всякой пары различных точек из X существуют непересекающиеся их окрестности.

Бесконечное множество, снабженное топологией, в которой замкнуты лишь конечные подмножества (минимальной T_1-топологией), является нехаусдорфовым T_1-пространством.

5.4. Пространство X называется T_3-*пространством*, если для всякой точки $x \in X$ и всякого не содержащего её замкнутого множества F существуют непересекающиеся окрестности Ox и OF.

Аксиомы T_0, T_1, T_2 идут в порядке усиления и дают всё более узкие, как показывают приведённые примеры, классы пространств. В то же время аксиома T_3 не влечёт даже T_0. Это показывает пример „слипшегося двоеточия" - двухточечного пространства с наименьшей топологией.

5.5. Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_3, называется *регулярным.*

Всякое регулярное пространство X хаусдорфово. В самом деле, пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Для одной из точек, допустим, для x, существует окрестность Ox, не содержащая y. Взяв непересекающиеся окрестности точки x и замкнутого множества $X \setminus Ox$, мы заключим x и y в непересекающиеся окрестности.

Пример хаусдорфова нерегулярного пространства - числовая прямая, базу топологии которой образуют всевозможные множества вида $U \setminus \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, где U - интервал числовой прямой. Множество $F = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ замкнуто в этом пространстве и не отделимо от нуля непересекающимися окрестностями.

Следующее утверждение достаточно очевидно.

5.6. Предложение. *Всякое подпространство регулярного пространства регулярно.* $\square$

5.7. Пространство X называется T_4-*пространством*, если любую дизъюнктную пару замкнутых в X множеств можно заключить в непересекающиеся окрестности.

Легко проверить, что это условие эквивалентно следующему: для всякого замкнутого множества F и всякой его окрестности OF существует такая окрестность O_1F, что $\mathrm{Cl}(O_1F) \subset OF$.

Другое равносильное условие: любую дизъюнктную пару замкнутых множеств можно заключить в окрестности с непересекающимися замыканиями.

Пример "слипшегося двоеточия" показывает, что T_4 не влечет T_0. Числовая прямая, на которой открыты лишь бесконечные интервалы вида $(-\infty,\ a)$, показывает, что аксиома T_4 не влечет и T_3.

5.8. Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, называется *нормальным.*

Всякое нормальное пространство регулярно, поскольку из T_1 и T_4 вытекает T_3. В то же время, как показывает связное двоеточие, из T_0 плюс T_4 не вытекает T_3.

В § 8 мы приведём пример регулярного пространства, не являющегося нормальным.

5.9. Определение. Подмножество Z топологического пространства X называется *всюду плотным* в X, если $\mathrm{Cl}(Z) = X$.

5.10. Предложение. *Пусть $f_i : X \to Y,\ i = 1, 2,$ - непрерывные отображения пространства X в хаусдорфово пространство Y. Предпо-*

ложим, что $f_1\big|Z = f_2\big|Z$ *для некоторого всюду плотного в* X *множества* Z. *Тогда* $f_1 = f_2$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой точки $x \in X$ точки $f_1(x)$ и $f_2(x)$ различны. Поскольку пространство Y хаусдорфово, существуют непересекающиеся окрестности $Of_i(x)$, $i = 1, 2$. Из непрерывности f_i вытекает существование таких окрестностей $O_i x$, $i = 1, 2$, что $f_i\big(O_i x\big) \subset Of_i(x)$.

Положим $Ox = O_1 x \cap O_2 x$. Поскольку Z всюду плотно в X, существует точка $z \in Z \cap Ox$. Тогда $f_1(z) = f_2(z) \in Of_1(x) \cap Of_2(x)$. Но это противоречит тому, что множества $Of_1(x)$ и $Of_2(x)$ не пересекаются. □

Следующее утверждение имеет многочисленные применения.

5.11. Лемма об ужатии. *Пусть* $u = (U_1, \ldots, U_k)$ - *открытое покрытие нормального пространства* X. *Тогда существует такое открытое покрытие* $v = (V_1, \ldots, V_k)$ *пространства* X, *что* $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Множества V_i строим по индукции. Пусть $F_1 = X \setminus \bigcup\{U_i : i \geqslant 2\}$. Тогда $F_1 \subset U_1$. В силу нормальности пространства X существует такая окрестность OF_1, что $\mathrm{Cl}(OF_1) \subset U_1$. Положим $V_1 = OF_1$. Из построения вытекает, что семейство

$v_1 = (V_1, U_2, \ldots U_k) \in \mathrm{cov}(X)$.

Предположим, что мы построили открытые множества $V_1, \ldots, V_m$, $1 \leqslant m < k$, подчинённые условиям

$$\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{5.1}$$

$$v_m = (V_1, \ldots, V_m, U_{m+1}, \ldots, U_k) \in \mathrm{cov}(X). \tag{5.2}$$

Положим

$F_{m+1} = X \setminus V_1 \cup \ldots \cup V_m \cup U_{m+2} \cup \ldots \cup U_k$.

Тогда множество F_{m+1} замкнуто в X и лежит в U_{m+1}. Существует такая окрестность OF_{m+1}, что $\mathrm{Cl}(OF_{m+1}) \subset U_{m+1}$. Полагая $V_{m+1} = OF_{m+1}$, получаем открытое покрытие $v_{m+1} = (V_1, \ldots, V_m, V_{m+1}, U_{m+2}, \ldots, U_k)$ пространства X. Покрытие $v_k = (V_1, \ldots, V_k)$ и является искомым. □

Лекция 6

Лемма Урысона. Разбиение единицы. Теорема Брауэра-Титце-Урысона о продолжении функций

6.1. Лемма Урысона. *Для любых непересекающихся подмножеств F_0 и F_1 нормального пространства X существует такая непрерывная функция $f : X \to I$, что*

$f(x) = 0$ *для* $x \in F_0$ *и* $f(x) = 1$ *для* $x \in B$.

Доказательство. Для каждого двоично-рационального числа $r \in [0, 1]$ мы определим открытое множество Γ_r так, что

$$r < r' \Longrightarrow \mathrm{Cl}(\Gamma_r) \subset \Gamma_{r'}, \tag{6.1}$$

$$F_0 \subset \Gamma_0, \quad F_1 \subset X \setminus \Gamma_1. \tag{6.2}$$

Существует такая окрестность OF_0, что $\mathrm{Cl}(OF_0) \cap F_1 = \varnothing$. Полагаем $\Gamma_0 = OF_0$ и $\Gamma_1 = X \setminus F_1$. Далее, существует такая окрестность $O\Gamma_0$, что $\mathrm{Cl}(O\Gamma_0) \subset \Gamma_1$. Полагаем $\Gamma_{\frac{1}{2}} = O\Gamma_0$. Аналогичным образом строим множества $\Gamma_{\frac{1}{4}}$ и $\Gamma_{\frac{3}{4}}$ так, что

$$\mathrm{Cl}(\Gamma_0) \subset \Gamma_{\frac{1}{4}} \subset \mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{1}{4}}\right) \subset \Gamma_{\frac{1}{2}};$$

$$\mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right) \subset \Gamma_{\frac{3}{4}} \subset \mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{3}{4}}\right) \subset \Gamma_1.$$

Продолжая этот процесс, мы строим искомое семейство множеств Γ_r. Определим функцию $f : X \to I$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in \Gamma_r\} & \text{для} \quad x \in \Gamma_1, \\ 1 & \text{для} \quad x \in X \setminus \Gamma_1. \end{cases}$$

Возьмем числа a, b из интервала $(0,1)$. Покажем, что

$$f^{-1}\big([0,a)\big) = \bigcup\big\{\Gamma_r : r < a\big\}; \tag{6.3}$$

$$f^{-1}\big((b,1]\big) = \bigcup\big\{X \setminus \mathrm{Cl}(\Gamma_r) : r > b\big\}. \tag{6.4}$$

Равенство (6.3) вытекает из следующего свойства:

$f(x) < a \Longleftrightarrow$ существует такое $r < a$, что $x \in \Gamma_r$.

Далее,

$$f(x) > b \Longleftrightarrow \quad \text{существует такое} \quad r' > b, \quad \text{что} \quad x \notin \Gamma_{r'}. \tag{6.5}$$

Условия (6.1) и (6.5) влекут, что

$f(x) > 0 \Longleftrightarrow$ существует такое $r > b$, что $x \notin \mathrm{Cl}(\Gamma_r)$.

Таким образом, равенство (6.4) также проверено. Из (6.3) и (6.4) вытекает непрерывность функции f. $\square$

6.2. Замечание. Ясно, что вместо отрезка $[0,1]$ числовой прямой в формулировке леммы Урысона можно взять произвольный отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

6.3. Определение. Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Функционально открытое множество

$U_\varphi = \big\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\big\}$

будем называть *носителем* функции φ и обозначать через $\mathrm{supp}(\varphi)$.

6.4. Определение. Пусть $u = (U_1, \dots, U_k) \in \mathrm{cov}(X)$. Семейство непрерывных функций $\varphi_i : X \to [0,1]$, $i = 1, \dots, k$, называется *разбиением единицы, подчинённым покрытию* u, если

$$\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset U_i, \quad i = 1, \dots, k, \tag{6.6}$$

и

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1. \tag{6.7}$$

6.5. Предложение. *Для всякого конечного открытого покрытия $u = (U_1, \dots, U_k)$ нормального пространства X существует разбиение единицы $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, подчинённое покрытию u.*

Доказательство. По Лемме 5.11 об ужатии существует покрытие $v = (V_1, \dots, V_k) \in \mathrm{cov}(X)$ со свойством $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i$. Согласно лемме Урысона существуют такие непрерывные функции $\psi_i : X \to [0,1]$, что

$\psi_i\big(\mathrm{Cl}(V_i)\big) = 1, \quad \psi_i(X \setminus U_i) = 0.$

Тогда семейство функций

$$\varphi_i = \frac{\psi_i}{\sum\{\psi_j : j = 1, \dots, k\}}$$

будет искомым разбиением единицы. $\square$

6.6. Теорема Брауэра-Титце-Урысона. *Пусть F -замкнутое подмножество нормального пространства X и $\varphi : F \to \mathbb{R}$ - непрерывная ограниченная функция. Тогда существует такая непрерывная функция $\psi : X \to \mathbb{R}$, что*

$$\psi|F = \varphi \quad \text{и} \quad \sup|\psi| = \sup|\varphi|.$$

Доказательство. Положим $\varphi_0 = \varphi$ и $\mu = \mu_0 = \sup\big\{|\varphi_0(x)| : x \in F\big\}$.
Считаем, что $\mu_0 > 0$. В противном случае полагаем $\psi \equiv 0$. Пусть

$$P_0 = \big\{x \in F : \varphi_0(x) \leqslant -\mu_0/3\big\}, \quad Q_0 = \big\{x \in F : \varphi_0(x) \geqslant \mu_0/3\big\}.$$

Множества P_0 и Q_0 (функционально) замкнуты и не пересекаются. По лемме Урысона и Замечанию 6.2 существует такая непрерывная функция $\psi_0 : X \to [-\mu_0/3,\ \mu_0/3]$, что

$$\psi_0(P_0) = -\mu_0/3, \quad \psi_0(Q_0) = \mu_0/3.$$

Положим $\varphi_1 = \varphi_0 - \psi_0 : F \to \mathbb{R}$. Функция φ_1 непрерывна и $\sup|\varphi_1| = \mu_1 \leqslant 2\mu_0/3$.

Теперь полагаем

$$P_1 = \big\{x \in F : \varphi_1(x) \leqslant -\mu_1/3\big\}, \quad Q_1 = \big\{x \in F : \varphi_1(x) \geqslant \mu_1/3\big\}.$$

Строим непрерывную функцию $\psi_1 : X \to [-\mu_1/3,\ \mu_1/3]$ так, что

$$\psi_1(P_1) = -\mu_1/3, \quad \psi_1(Q_1) = \mu_1/3.$$

Полагаем $\varphi_2 = \varphi_1 - \psi_1$ и т.д.

Получаем последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ непрерывных функций на F и последовательность $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ непрерывных функций на X таких, что $\varphi_{n+1} = \varphi_n - \psi_n$, $|\psi_n| \leqslant \mu_n/3$, $\sup|\varphi_{n+1}| \equiv \mu_{n+1} \leqslant 2\mu_n/3$. Следовательно,

$$|\varphi_n| \leqslant (2/3)^n\mu_0, \quad |\psi_n| \leqslant (2/3)^n\mu_0/3.$$

Положим $s_n = \psi_0 + \ldots + \psi_n$. Последовательность непрерывных на X функций s_n является равномерно сходящейся. В самом деле, при $m > n$ имеем

$$|s_m - s_n| = |\psi_{n+1} + \ldots + \psi_m| \leqslant |\psi_{n+1}| + \ldots + |\psi_m| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \tfrac{\mu_0}{3} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \tfrac{\mu_0}{3} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} \tfrac{\mu_0}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}\mu_0.$$

Согласно Теореме 4.24 последовательность s_n сходится к непрерывной функции $\psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n$. Имеем $|\psi| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3} = \mu_0$. Далее,

$$\varphi - s_n = \varphi_0 - \psi_0 - \psi_1 - \ldots - \psi_n = \varphi_1 - \psi_1 - \ldots - \psi_n = \varphi_n - \psi_n = \varphi_{n+1}.$$

Значит, $|\varphi - s_n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\mu_0$. Поэтому $\psi|F = \varphi$. $\square$

6.7. Замечание. Утверждение теоремы 6.6 имеет место и для неограниченных функций. В самом деле, пусть $\varphi : F \to \mathbb{R}$ - неограниченная функция. Рассмотрим функцию $\varphi_0 : F \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, определяемую следующим образом:

$$\varphi_0(x) = \operatorname{arctg}\bigl(\varphi(x)\bigr).$$

Согласно Теореме 6.6 функция φ_0 продолжается до непрерывной функции $\psi_0 : X \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Положим $F_0 = \psi_0^{-1}\bigl(\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\bigr)$. По лемме Урысона существует такая функция $\psi_1 : X \to [0, 1]$, что $\psi_1(F_0) = 0$ и $\psi_1(F) = 1$. Определим функцию $\psi : X \to \mathbb{R}$, полагая

$$\psi(x) = \operatorname{tg}\bigl(\psi_1(x) \cdot \psi_0(x)\bigr).$$

Это и будет искомым продолжением функции φ.

Лекция 7

Операции над топологическими пространствами и отображениями.

Мы уже знакомы с операциями перехода к подпространству (§3) и факторпространству (§4). Продолжим изучение операций.

7.1 Суммы топологических пространств.

Предположим, что дано дизъюнктное семейство $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$ топологических пространств. Рассмотрим множество $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и семейство $\mathcal{T}$ всех таких множеств $U \subset X$, что $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для всякого $\alpha \in A$. Семейство $\mathcal{T}$ удовлетворяет условиям Определения 3.1 топологии. Множество X с этой топологией называется *суммой пространств* $X_\alpha, \alpha \in A$, и обозначается через $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ или через $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k$, если $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ конечно.

Из определения топологии $\mathcal{T}$ на $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ вытекает

7.1.1. Предложение. *Множество $F \subset \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $F \cap X_\alpha$ замкнуто в X_α для каждого $\alpha \in A$.* $\square$

7.1.2. Следствие. *Все множества X_α открыто-замкнуты в $\oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.* $\square$

Непосредственно из определений вытекает

7.1.3. Предложение. *Любая сумма T_i-пространств является T_i-пространством.* $\square$

7.2 Суммы непрерывных отображений.

7.2.1. Пусть даны суммы $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и $Y = \oplus\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических пространств X_α и Y_α и отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$. Тогда существует единственное отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее соотношениям

$f \circ i_{X_\alpha} = i_{Y_\alpha} \circ f_\alpha, \quad \alpha \in A,$

где $i_{X_\alpha} : X_\alpha \to X,\ i_{Y_\alpha} : Y_\alpha \to Y$ - отображения вложения. Отображение f называется *прямой суммой* отображений f_α и обозначается через $\oplus\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Непосредственно из определений вытекает

7.2.2. Предложение. *Прямая сумма f непрерывных отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha,\ \alpha \in A$, непрерывна.* □

7.2.3. Для семейства пространств $X_\alpha,\ \alpha \in A$, и семейства отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y,\ \alpha \in A$, в пространство Y существует единственное отображение $f : \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\} \to Y$, удовлетворяющее соотношениям

$$f \circ i_{X_\alpha} = f_\alpha, \quad \alpha \in A. \tag{7.1}$$

Отображение f называется *суммой отображений* f_α и обозначается через $\sum\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

7.2.4. Предложение. *Отображение $f = \sum\limits_{\alpha\in A}\{f_\alpha : X_\alpha \to Y\}$ непрерывно тогда и только тогда, когда всякое отображение f_α непрерывно.*

Доказательство. Если отображение f непрерывно, то согласно (7.1) каждое отображение f_α непрерывно как композиция непрерывных отображений i_{X_α} и f.

Пусть теперь все f_α непрерывны. Из (7.1) вытекает, что

$f^{-1}(U) = \bigcup\left\{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A\right\}.$

Значит, если множество $U \subset Y$ открыто, то $f^{-1}(U)$ открыто по определению топологии на $\oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Следовательно, f непрерывно. □

7.3 Произведения пространств.

7.3.1. Пусть дано некоторое семейство множеств $X_\alpha, \alpha \in A$. Обозначим через $\prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *декартово произведение* этих множеств, т.е. множество всех таких отображений

$x : A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, что $x(\alpha) \in X_\alpha$.

Для конечного $A = \{1, \ldots, k\}$ произведение пространств $X_1, \ldots X_k$ обозначается через $X_1 \times \ldots \times X_k$.

Если $B \subset A$, то определено естественное проектирование (проекция)

$p_B : \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\} \to \prod\{X_\alpha : \alpha \in B\}$,

ставящее в соответствие точке x произведения (отображению $x : A \to \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$), её ограничение на множество B. Если B состоит из одного индекса α, то p_B будем обозначать через p_α.

Точку $x(\alpha) \in X_\alpha$ будем называть *α-координатой* точки $x \in \prod\{X_{\alpha'} : \alpha' \in A\}$ и, как правило, будем обозначать её через x_α.

7.3.2. Пусть теперь сомножители X_α произведения $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ являются топологическими пространствами. Тогда на множестве X можно рассмотреть слабейшую топологию, относительно которой все проекции непрерывны (см. 4.25). Топология эта называется *тихоновской* топологией произведения. Множество X с этой топологией называется *топологическим*, или *тихоновским*, или просто произведением пространств X_α.

Согласно 4.25 предбазу пространства X образуют всевозможные множества вида $p_\alpha^{-1}(U)$, где U берётся из некоторой базы пространства X_α, а базу, следовательно, - всевозможные их конечные пересечения

$p_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_k)$.

Из определения топологии произведения непосредственно вытекает

7.3.3. Предложение. *Все проекции $p_\alpha : \prod\{X_{\alpha'} : \alpha' \in A\} \to X_\alpha$ непрерывны.* □

7.3.4. Примеры. 1. *Плоскость* $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна произведению $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ числовых прямых.

В случае $\mathbb{R}^2$ базу образуют круги $O_\varepsilon(x)$, а в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ - прямоугольники вида $(a,b)\times(c,d)$. Читателю предлагается доказать, что эти базы образуют одну и ту же топологию.

2. Рассмотрим в пространстве E^3 прямоугольную систему координат $Oxyz$ и определим *тор* T^2 как поверхность вращения окружности

$$\begin{cases} (x-2)^2 + z^2 = 1 \\ \qquad y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Oz.

Докажите, что тор T^2 гомеоморфен произведению $S^1 \times S^1$ окружностей.

7.3.5. Предложение. *Пусть X - произведение пространств $X_\alpha, \alpha \in A$, и пусть $f : Z \to X$ - такое отображение, что все композиции $p_\alpha \circ f : Z \to X_\alpha$ непрерывны. Тогда отображение f также непрерывно.*

Доказательство. Согласно Предложению 4.3 достаточно проверить открытость прообразов $f^{-1}(V)$ элементов V некоторой предбазы

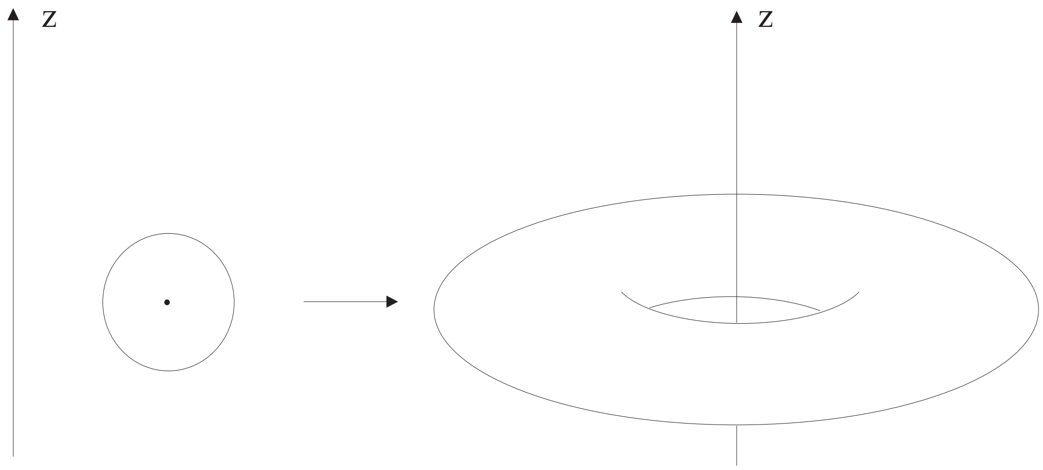

Рис. 7.1:

пространства X. В качестве такой предбазы можно взять семейство $\{p_\alpha^{-1}(U) : U$ открыто в $X_\alpha, \alpha \in A\}$. $\square$

7.3.6. Предложение. *Произведение подпространств $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$, совпадает с подпространством $\bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\}$ произведения $X = \prod\big\{X_\alpha : \alpha \in A\big\}$.*

Доказательство. Имеем

$Y = \prod\big\{Y_\alpha : \alpha \in A\big\} = \{x \in X : x(\alpha) \in Y_\alpha\} = \bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\}$.
Поскольку ограничение $q_\alpha = p_\alpha|Y : Y \to Y_\alpha$ проекции p_α непрерывно, тождественное отображение $\mathrm{id} : \bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\} \to Y$ непрерывно согласно Предложению 7.3.5. С другой стороны, предбазу топологии подпространства $\bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\}$ образуют множества $Y \cap p_\alpha^{-1}(U)$, где U открыто в X_α. Но $Y \cap p_\alpha^{-1}(U) = q_\alpha^{-1}(U \cap Y_\alpha)$ открыто в Y. Следовательно, тождественное отображение $Y \to \bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\}$ непрерывно. $\square$

7.4 Произведения отображений.

7.4.1. Определение. Пусть $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, - отображения. Тогда отображение $f : \prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha\big(x(\alpha)\big), \alpha \in A$, называется *произведением отображений* f_α и обозначается через $\prod\big\{f_\alpha : \alpha \in A\big\}$.

Если множество индексов конечно: $A = \{1, \ldots, k\}$, то произведение отображений обозначается через $f_1 \times \ldots \times f_k$.

7.4.2. Предложение. *Произведение f непрерывных отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, непрерывно.*

Доказательство. Обозначим через q_α проекцию произведения $Y = \prod\{Y_{\alpha'} : \alpha' \in A\}$ на сомножитель Y_α. Из Определения 7.4.1 вытекает равенство

$$q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha. \tag{7.2}$$

Отображение $f_\alpha \circ p_\alpha$ непрерывно как композиция непрерывных отображений. Тогда непрерывность отображения f вытекает из (7.2) и Предложения 7.3.5. $\square$

7.4.3. Определение. Пусть $f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in A$, - отображения. Тогда отображение $f : X \to \prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$, называется *диагональным произведением отображений* f_α и обозначается через $\Delta\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

В случае конечного множества индексов пишем $f = f_1\Delta \ldots \Delta f_k$.

7.4.4. Предложение. *Диагональное произведение f непрерывных отображений непрерывно.*

Доказательство. Как и в случае произведения отображений, применяем Предложение 7.3.5, поскольку $q_\alpha \circ f = f_\alpha$. $\square$

7.5 Склеивание пространств.

Мы коснёмся этой темы в самом простом случае. Пусть даны две пары (X_1, F_1) и (X_2, F_2) пространств X_i и их замкнутых подмножеств $F_i, i = 1, 2$. Предполагаем, что множества F_1 и F_2 гомеоморфны и зафиксирован гомеоморфизм $f : F_1 \to F_2$.

Пусть $X = X_1 \oplus X_2$. Определим на X отношение эквивалентности $\mathcal{R}$ посредством задания на X классов эквивалетности. Все одноточечные множества $\{x\},\ x \in X_1 \cup X_2 \setminus F_1 \cup F_2$ являются классами эквивалентности. Также классами эквивалентности являются двухточечные множества $\{x, f(x)\}$, где $x \in F_1$. Факторпространство $X/\mathcal{R}$ называется *склеиванием* пространств X_1 и X_2 посредством гомеоморфизма $f : F_1 \to F_2$.

7.5.1. Пример. Доказать, что склеивая круг B_2 и лист Мёбиуса по окружности S^1, являющейся границей каждого из них, получаем проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$.

7.6. Приклеивание пространств. Пусть X, Y - топологические пространства, A - подмножество пространства Y, $f : A \to X$ - непрерывное отображение. Возьмём дискретную сумму $X \oplus Y$ и произведём в ней отождествления: всякую точку $a \in A$ отождествим с точкой $f(a) \in X$. Тем самым на пространстве $X \oplus Y$ возникает разбиение $\mathcal{R}$. Факторпространство $X \oplus Y/\mathcal{R}$ обозначается через $X \cup_f Y$, а описанная процедура его построения называется *приклеиванием* Y *к* X *посредством* отображения f.

7.6.1. Замечание. Множество $f(A)$ естественно вкладывается в $X \cup_f Y$, но топология, индуцируемая на нём пространством $X \cup_f Y$, вообще говоря, сильнее топологии $f(A) \subset X$.

В качестве примера возьмём $Y = A = [0,1] \times [0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $X = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0, x_1)\big\} \cup \big\{(0,0)\big\}$. Отображение $f : Y \to X$ определим следующим образом:

$f\big(\{0\} \times [0,1)\big) = \big\{(0,0)\big\}$;

$f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2)$, если $x_1 > 0$.

Пространство X метрическое, а топология пространства $X \cup_f Y$ не порождается никакой метрикой, поскольку точка $(0,0)$ не имеет в $X \cup_f Y$ счетной базы окрестностей.

7.7. Цилиндры пространств и отображений. Произведение $X \times I$ пространства X на отрезок I называется *цилиндром* пространства X.

Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Результат приклеивания цилиндра $X \times I$ к Y посредством отображения $f \times 0 : X \times 0 \to Y$ называется *цилиндром отображения* f и обозначается через $\mathrm{Cyl}(f)$.

Как и в п. 7.6.1., топология $f(X) \subset Y$, вообще говоря, отличается от топологии, индуцируемой на X пространством $\mathrm{Cyl}(f)$.

7.8. Конусы над пространствами и отображениями. Пусть X - пространство. Если отождествить между собой все точки верхнего основания $X \times 1$ цилиндра $X \times I$ (*профакторизовать* $X \times I$ по $X \times 1$), то получится *конус* $\mathrm{Con}(X)$ *над* X.

Конусы над некомпактными метрическими пространствами неметризуемы.

7.8.1. Задача. Доказать, что конус над интервалом $(0,1)$ неметризуем.

Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное отображение. Результат приклеивания конуса $\mathrm{Con}(X)$ к Y посредством отображения $f \times 0 : X \times 0 \to Y$ называется *конусом отображения* f и обозначается через $\mathrm{Con}(f)$.

7.8.2. Задача. Пусть $f : S^1 \to S^1$ - двукратное накручивание окружности на себя, задаваемое в полярных координатах формулой $(1, \varphi) \to (1, 2\varphi)$. Доказать, что $\mathrm{Con}(f)$ гомеоморфен $\mathbb{R}P^2$.

Лекция 8

Компактные и паракомпактные пространства.

8.1. Определение. Пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Покрытие *u вписано* в покрытие v, если каждый элемент $U \in u$ содержится в некотором множестве $V \in v$.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из Определения 8.1.

8.2. Предложение. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда в любое его открытое покрытие можно вписать конечное открытое покрытие.* $\square$

8.3. Определение. Семейство подмножеств множества X называется *центрированным*, если пересечение любого конечного числа его элементов не пусто.

8.4. Теорема. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система замкнутых подмножеств X имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть X - компактное пространство и Φ - центрированная система его замкнутых подмножеств. Если пересечение всех элементов Φ пусто, то множество $\{X \setminus F : F \in \Phi\}$ является открытым покрытием пространства X. Из него можно выделить конечное подпокрытие $\{X \setminus F_i,\ i = 1, \ldots, k\}$. Тогда $F_1 \cap \ldots \cap F_k = \varnothing$, что противоречит центрированности семейства Φ.

Наоборот, пусть в пространстве X всякая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Возьмём произвольное открытое покрытие u пространства X. Предположим, что покрытие u не содержит конечного подпокрытия. Тогда семейство

$\{X \setminus U_1 \cup \ldots \cup U_k : U_i \in u\}$
центрировано и имеет пустое пересечение. Это противоречие и завершает доказательство. $\square$

Из Теоремы 8.4 вытекает

8.5. Следствие. *Если X - компактное пространство и F_i, $i \in \mathbb{N}$, - такое семейство непустых замкнутых его подмножеств, что* $F_{i+1} \subset F_i$, $i \in \mathbb{N}$, *то* $\bigcap\{F_i : i \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$. $\square$

Это утверждение было использовано при построении кривой Пеано.

8.6. Определение. Пространство X называется *локально компактным*, если для произвольной точки x и её окрестности Ox существует такая окрестность O_1x, что $\mathrm{Cl}(O_1x) \subset Ox$ и пространство $\mathrm{Cl}(O_1x)$ компактно.

8.7. Определение. Семейство u подмножеств пространства X называется *локально конечным*, если для всякой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов семейства u.

8.8. Определение. Пространство X называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Следующее простое утверждение предлагается доказать самим.

8.9. Предложение. *Свойства компактности, локальной компактности, паракомпактности наследуются при переходе к замкнутому подпространству.* $\square$

8.10. Задача. *Пусть F - замкнутое подмножество паракомпактного пространства X и пусть u такое семейство открытых подмножеств пространства X, что $F \subset \bigcup u$. Тогда существует такое локально конечное семейство u_0 открытых подмножеств X, что u_0 вписано в u и $F \subset \bigcup u_0$.*

8.11. Определение. Семейство u подмножеств пространства X называется *консервативным*, если

$$\mathrm{Cl}\Big(\bigcup\{U \in u_0\}\Big) = \bigcup\Big\{\mathrm{Cl}(U) : U \in u_0\Big\} \tag{8.1}$$

для всякого подсемейства $u_0 \subset u$.

8.12. Предложение. *Всякое локально конечное семейство консервативно.*

Доказательство. Равенство (8.1) складывается из двух включений $\supset$ и $\subset$. Включение $\supset$ вытекает из монотонности операции замыкания. Проверим, что выполнено включение $\subset$. Пусть $x \in \mathrm{Cl}\big(\bigcup\{U \in u_0\}\big)$. Существует окрестность Ox, пересекающаяся с конечным семейством элементов u_0, а именно, с $U_1, \ldots, U_k$. Тогда $x \in \mathrm{Cl}(U_1 \cup \ldots \cup U_k) = \mathrm{Cl}(U_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Cl}(U_k) \subset \bigcup\big\{\mathrm{Cl}(U) : U \in u_0\big\}$. $\square$

8.13. Теорема. *Всякое хаусдорфово паракомпактное пространство X нормально.*

Доказательство. Сначала покажем, что X регулярно. Пусть даны замкнутое множество $F \subset X$ и точка $x_0 \in X \setminus F$. Для каждой точки $x \in F$ существуют непересекающиеся окрестности $O_x x_0$ и $O_{x_0} x$ точки x_0 и точки x соответственно. В покрытие $\big\{O_{x_0} x\big\}$ замкнутого множества F, в силу 8.9 и 8.10, можно вписать локально конечное открытое в X покрытие $v = \{V_\lambda\}$.

Но v - локально конечная и согласно Предложению 8.12 консервативная система множеств. Поэтому

$$\mathrm{Cl}\big(\bigcup_\lambda V_\lambda\big) = \bigcup_\lambda \mathrm{Cl}(V_\lambda) \subset X \setminus \{x_0\},$$

так что $Ox_0 = X \setminus \mathrm{Cl}\big(\bigcup\limits_\lambda V_\lambda\big)$ есть окрестность точки x_0, а с другой стороны $OF = \bigcup\limits_\lambda V_\lambda$ есть окрестность множества F и, очевидно, $Ox_0 \cap OF = \varnothing$. Регулярность пространства X доказана.

Заменяя пару (F, x_0) парой непересекающихся замкнутых множеств (F_1, F_2) и применяя аналогичную процедуру, доказываем нормальность нерегулярного паракомпактного пространства X. $\square$

8.14. Следствие. *Всякое хаусдорфово компактное пространство X нормально.* $\square$

8.15. Предложение. *Если F - компактное подпространство хаусдорфова пространства X, то F замкнуто в X.*

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x_0 \in X \setminus F$. Применяя процедуру первой части доказательства теоремы 8.13, находим непересекающиеся окрестности Ox_0 и OF. В частности, $Ox_0 \cap F = \varnothing$, т.е. x_0 является внутренней точкой множества $X \setminus F$. $\square$

8.16. Предложение. *Если подмножество X эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$ компактно, то оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Замкнутость X вытекает из Предложения 8.15. Если бы X было не ограничено, то из покрытия X открытыми дисками $\mathcal{D}^n_m$, $m \in \mathbb{N}$, радиуса m с центром в начале координат нельзя было бы выделить конечного подпокрытия. $\square$

8.17. Предложение. *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть X компактно и $f : X \to Y$ – непрерывное отображение на Y. Покажем, что Y компактно. Пусть $u \in \mathrm{cov}(Y)$. В силу непрерывности f, семейство $f^{-1}(u) = \big\{f^{-1}(U) : U \in u\big\}$ является открытым покрытием пространства X. Выделим из него конечное подпокрытие $f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_k)$. Тогда семейство $\{U_1, \ldots, U_k\}$ будет конечным покрытием, выделенным из покрытия u. $\square$

Из Предложений 8.16 и 8.17 вытекает

8.18. Следствие. *Всякая непрерывная на компактном пространстве функция ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.* $\square$

8.19. Определение. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *замкнутым (открытым)*, если образ $f(A)$ всякого замкнутого (открытого) в X множества A замкнут (открыт) в Y.

8.20. Предложение. *Непрерывное взаимно однозначное отображение f компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Из Предложений 8.15 и 8.17 вытекает замкнутость отображения f, что влечёт непрерывность обратного отображения f^{-1} (см. Предложение 4.2). $\square$

8.21. Определение. Пространство X называется *финально компактным*, если из всякого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.

8.22. Теорема. *Всякое регулярное финально компактное пространство X паракомпактно.*

Доказательство. Пусть $u \in \operatorname{cov}(X)$. Для произвольного множества $U \in u$ и точки $x \in U$ согласно регулярности X существует такая окрестность $O^U x$ точки x, что

$$\operatorname{Cl}\big(O^U x\big) \subset U. \tag{8.2}$$

В силу финальной компактности X из покрытия

$$\Omega = \big\{O^U x : U \in u, x \in X\big\} \in \operatorname{cov}(X) \tag{8.3}$$

можно выделить счётное подпокрытие

$$\Omega_1 = \big\{O^{U_i} x_i : i \in \mathbb{N}\big\}. \tag{8.4}$$

Из (8.2) и (8.4) вытекает, что семейство

$$u_0 = \{U_i, \quad i \in \mathbb{N}\} \tag{8.5}$$

является покрытием пространства X. Определим множества $V_i,\ i \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$V_1 = U_1, \quad V_{j+1} = U_{j+1} \setminus \bigcup\big\{\operatorname{Cl}\big(O^{U_i} x_i\big) : i \leqslant j\big\}. \tag{8.6}$$

Мы утверждаем, что $v = \{V_j : j \in \mathbb{N}\}$ является открытым локально конечным покрытием, вписанным в покрытие u_0 и, следовательно, в покрытие u.

Начнём с того, что согласно (8.6) семейство v состоит из открытых множеств и вписано в покрытие u_0. Остаётся проверить, что v является локально конечным покрытием пространства X.

Докажем сначала, что $v \in \operatorname{cov}(X)$. Возьмём произвольную точку $x \in X$. Существует наименьшее такое j, что $x = U_j$. Тогда $x \notin \mathrm{Cl}\big(O^{U_i}x_i\big)$ при $i < j$ и, следовательно, $x \in V_j$ согласно (8.6). Итак, v - покрытие. Осталось проверить локальную конечность v. Поскольку Ω_1 – покрытие, x принадлежит некоторому множеству $O^{U_i}x_i$. Тогда из (8.6) вытекает, что $O^{U_i}x_i$ является окрестностью точки x, не пересекающейся с множеством V_j при $j > i$. Значит, покрытие v локально конечно. $\square$

Из Теоремы 8.22 вытекает

8.23. Теорема. *Метрическое пространство со счётной базой, в частности, всякое эвклидово пространство $\mathbb{R}^n$, паракомпактно.*

Доказательство. Всякое пространство со счётной базой финально компактно. Поэтому для применения Теоремы 8.22 достаточно показать, что всякое метрическое пространство X регулярно. Пусть F - замкнутое подмножество пространства X и пусть $x_0 \in X \setminus F$. Поскольку множество $X \setminus F$ открыто, существует такое $\varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus F$. Возьмём такое ε', что $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Тогда

$$\mathrm{Cl}\big(O'_\varepsilon(x_0)\big) \subset \big\{x : \rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon'\big\} \subset O_\varepsilon(x). \tag{8.7}$$

Из (8.7) вытекает регулярность X. $\square$

8.24. Замечание. Имеет место и более общее утверждение: *всякое метрическое пространство паракомпактно.*

Лекция 9

Сохранение компактности и аксиом отделимости декартовыми произведениями.

9.1. Аксиома выбора. *Для каждого множества* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *непустых множеств существует такая функция* $f : A \to \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$*, что* $f(\alpha) \in X_\alpha$ *для каждого* $\alpha \in A$.

9.2. Определение. Пусть X - множество и $\leqslant$ - бинарное отношение на X. Говорят, что $\leqslant$ *упорядочивает* X или что $\leqslant$ является *порядком* на X, если отношение $\leqslant$ удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (*транзитивность*).

(2) $x \leqslant x$ для всякого $x \in X$ (*рефлексивность*).

(3) Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$ (*антисимметричность*).

Множество X вместе с порядком $\leqslant$ на нём называется *упорядоченным множеством.* Два элемента X и Y упорядоченного множества X называются *несравнимыми*, если никакое из неравенств $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ не выполняется. Упорядоченное множество $(X, \leqslant)$ называется *линейно упорядоченным*, если оно не содержит несравнимых элементов, т.е. для $x,\ y \in X$ всегда $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

9.3. Предложение. *Пусть* $(X, \leqslant)$ *- упорядоченное множество и* $Y \subset X$*. Тогда отношение* $\leqslant |Y$ *есть отношение порядка на* Y*. Если* $\leqslant$ *есть линейный порядок на* X*, то* $\leqslant |Y$ *является линейным порядком на* Y*.* $\square$

9.4. Определение. Говорят, что подмножество Y упорядоченного множества X имеет *верхнюю грань* в X, если существует элемент $x \in X$, для которого $y \leqslant x$ для всех $y \in Y$.

9.5. Определение. Элемент x упорядоченного множества X называется *максимальным*, если для любого другого элемента $y \in X$ либо

$y \leqslant x$, либо y несравним с x. Элемент $x \in X$ называется *наибольшим*, если $y \leqslant x$ для всех $y \in X$.

9.6. Пример. В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим следующее отношение $\leqslant$:

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \iff x_1 \leqslant y_1 \quad \text{и} \quad x_2 \leqslant y_2. \tag{9.1}$$

Легко видеть, что $\leqslant$ есть порядок на $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}^2$, определяемое следующим образом:

$$X = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leqslant -x_1\big\}. \tag{9.2}$$

Пусть $Y = \big\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\big\}$. Согласно (9.1) и (9.2) $Y \subset X$. Ограничение $\leqslant |X$ порядка (9.1) является порядком на X согласно Предложению 9.3.

9.7. Задача. Доказать, что Y является множеством всех максимальных элементов упорядоченного множества X и ни один из элементов Y не является наибольшим в X.

9.8. Лемма Куратовского - Цорна. *Пусть $(X, \leqslant)$ - упорядоченное множество. Предположим, что каждое линейно упорядоченное множество $Y \subset X$ имеет верхнюю грань в X. Тогда X имеет максимальный элемент.* $\square$

Лемма Куратовского-Цорна вытекает из аксиомы выбора (и даже эквивалентна ей). Доказательство можно найти в любом учебнике по теории множеств, а также в монографии Келли „Общая топология“ (Москва, „Наука“, 1968).

9.9. Лемма Александера. *Если в пространстве X существует такая предбаза $\mathcal{B}$, что из любого покрытия пространства X её элементами можно выделить конечное подпокрытие, то X компактно.*

Доказательство. Предположим, что существует покрытие $u_0 \in \operatorname{cov}(X)$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Положим

$$\mathcal{U} = \{u \in \operatorname{cov}(X) : u_0 \subset u, \quad u \text{ не содержит конечного } \quad u' \in \operatorname{cov}(X)\big\}. \tag{9.3}$$

Множество $\mathcal{U}$ упорядочено отношением включения.

Пусть $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ - линейно упорядоченное подмножество. Если $\mathcal{U}_0$ имеет максимальный элемент, то он и является верхней гранью множества $\mathcal{U}_0$ в $\mathcal{U}$. Если же $\mathcal{U}_0$ не имеет максимального элемента, то положим

$$v = \bigcup\big\{u : u \in \mathcal{U}_0\big\}. \tag{9.4}$$

Возьмём произвольное конечное множество $v' = \{V_1, \ldots, V_n\} \subset v$. Из (9.4) вытекает, что каждое $V_i \in v'$ является элементом некоторого $u_i \in \mathcal{U}_0$. Следовательно, $v' \subset u_1 \cup \ldots \cup u_n \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. Из определения (9.3) вытекает, что v' не является покрытием. Значит, $v \in \mathcal{U}$ и является верхней гранью множества $\mathcal{U}_0$ в $\mathcal{U}$. Таким образом, множество $\mathcal{U}$ удовлетворяет условиям Леммы Куратовского-Цорна и, следовательно, имеет максимальный элемент v_0.

Покажем, что $v_0 \cap \mathcal{B}$ - покрытие X. Для произвольной точки $x \in X$ существует содержащий её элемент V покрытия v_0. Существуют такие элементы $G_1, \ldots, G_n$ предбазы $\mathcal{B}$, что

$$x \in G_1 \cap \ldots \cap G_n \subset V. \tag{9.5}$$

Если $G_i \in v_0$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$, то по крайней мере один из элементов семейства $v_0 \cap \mathcal{B}$, а именно G_i, содержит точку x и, в силу её произвольности, $v_0 \cap \mathcal{B} \in \operatorname{cov}(X)$.

Предположим, что никакое из множеств G_i не принадлежит v_0. Тогда, в силу максимальности семейства v_0 в $\mathcal{U}$,

$v_0 \cup \{G_i\} \notin \mathcal{U}, \quad i = 1, \ldots, n.$

Значит, $v_0 \cup \{G_i\}$ содержит конечное подпокрытие. Следовательно, для каждого $i = 1, \ldots, n$ существуют такие множества

$V_1^i, \ldots, V_{j(i)}^i \in v_0,$

что

$$G_i \cup \Big(\bigcup \big\{V_k^i, \quad k = 1, \ldots, j(i)\big\}\Big) = X. \tag{9.6}$$

Из (9.6) вытекает

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i,k} V_k^i\Big) = X. \tag{9.7}$$

Значит, в силу (9.5) и (9.7), семейство v_0 содержит конечное подпокрытие $\{V, V_k^i : i, k\}$. Это противоречие показывает, что $v_0 \cap \mathcal{B}$ - покрытие. Из него по свойству предбазы $\mathcal{B}$ можно выделить конечное подпокрытие. Тем более конечное подпокрытие можно выделить из покрытия v_0. Это противоречие и заканчивает доказательство. $\square$

9.10. Первая теорема Тихонова. *Произведение компактных пространств компактно.*

Доказательство. Пусть $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Согласно лемме Александера достаточно показать, что из покрытия u пространства X, состоящего из множеств вида $p_\alpha^{-1}(V)$, где V открыто в X_α, можно выделить конечное подпокрытие. Для этого, в силу компактности сомножителей X_α, достаточно найти такой индекс α, что для всякой точки $x \in X_\alpha$ имеем

$$p_\alpha^{-1}(x) \subset U \in u.$$

Пусть этого сделать нельзя. Тогда для всякого $\alpha \in A$ найдётся такая точка $x_\alpha \in X_\alpha$, что множество $p_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ не лежит ни в одном из элементов покрытия u. Отсюда вытекает, что точка $x = (x_\alpha : \alpha \in A)$ не лежит ни в одном из элементов покрытия u. В самом деле, если $x \in p_\beta^{-1}(V) \in u$, где V открыто в X_β, то $p_\beta(x) \in V$ и $p_\beta^{-1}(p_\beta(x)) \subset p_\beta^{-1}(V)$. Это противоречие и завершает доказательство. $\square$

Теперь мы можем обратить Предложение 8.16. А именно, имеет место

9.11. Теорема. *Подмножество X эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Необходимость составляет содержание Предложения 8.16. Проверим достаточность. Пусть X замкнуто и ограничено. Из ограниченности X вытекает существование такого замкнутого шара B_m^n радиуса m с центром в начале координат, что $X \subset B_m^n$. Но B_m^n лежит в произведении отрезков $[-m, m]^n$, которое компактно по Теореме 9.10. Тогда X компактно как замкнутое подмножество компактного куба $[-m, m]^n$ (см. Предложение 8.9). $\square$

9.12. Предложение. *Произведение T_i-пространств, $i = 0, 1, 2, 3,$ есть T_i-пространство. В частности, произведение регулярных пространств регулярно.*

Доказательство. Проверим последнее утверждение. Известно, что регулярные пространства - это пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам T_0 и T_3. Пусть $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и сомножители X_α регулярны. Возьмём различные точки $x, y \in X$. Существует такое α, что $p_\alpha(x) \neq p_\alpha(y)$. Поскольку $X_\alpha \in T_0$, одна из точек $p_\alpha(x)$ и $p_\alpha(y)$ имеет окрестность, не содержащую другую точку. Предположим, что открытое множество $V \subset X_\alpha$ содержит $p_\alpha(x)$ и не содержит $p_\alpha(y)$. Тогда $x \in p_\alpha^{-1}(V)$ и $y \notin p_\alpha^{-1}(V)$. Таким образом, X является T_0-пространством.

Чтобы проверить аксиому T_3, надо для произвольной окрестности Ox точки $x \in X$ найти такую окрестность O_1x, что $\mathrm{Cl}(O_1x) \subset Ox$. По определению топологии произведения существуют такой конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и такие открытые множества $V_i \subset X_\alpha$, что

$$x \in \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(V_i) : i = 1, \ldots, k\} \subset Ox. \tag{9.8}$$

Имеем $x_{\alpha_i} = p_{\alpha_i}(x) \in V_i$. Поскольку X_{α_i} удовлетворяет T_3, существует такая окрестность Ox_{α_i}, что $\mathrm{Cl}(Ox_{\alpha_i}) \subset V_i$. Положим

$$O_1x = \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(Ox_{\alpha_i}) : i = 1, \ldots, k\}.$$

Тогда $\mathrm{Cl}(O_1x) \subset \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(\mathrm{Cl}(Ox_{\alpha_i})) : i = 1, \ldots, k\} \subset \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(V_i) : i = 1, \ldots, k\} \subset (9.8) \subset Ox$. $\square$

9.13. Пример *нормального финально-компактного пространства X, квадрат которого не нормален.*

На полуинтервале $[0,1)$ рассмотрим топологию, базу которой образуют всевозможные интервалы $[a,b)$. Семейство таких полуинтервалов образует базу топологии, поскольку оно содержит все конечные непустые пересечения своих элементов и является покрытием. Полуинтервал $[0,1)$ с такой топологией и обозначим через X. Это пространство называется „стрелкой“.

1. Пространство X регулярно, поскольку всякий интервал $[a,b)$ одновременно открыт и замкнут в X.

2. Пространство X финально-компактно. В самом деле, предположим, что из некоторого открытого покрытия u пространства X нельзя выбрать счётного подпокрытия. Пусть a - точная нижняя грань таких чисел $b<1$, что отрезок $[0,b]$ нельзя покрыть счётным числом элементов покрытия u. Тогда полуинтервал $[0,a)$ как сумма счётного числа отрезков $[0,r]$ ($r<a$ и r рационально) покрывается счётным подсемейством v покрытия u. Но точка a лежит в каком-нибудь элементе $U\in u$ вместе с некоторым полуинтервалом $[a,c)$. Тогда при любом $d, a<d<c$, отрезок $[0,d]$ покрывается счётным семейством $v\cup\{U\}\subset u$, что противоречит определению a.

3. Пространство X, будучи регулярным и финально-компактным, паракомпактно (Теорема 8.22) и, следовательно, нормально (Теорема 8.13).

4. Квадрат $X\times X$ не нормален. В самом деле, рассмотрим побочную диагональ в квадрате, т.е. множество Yвсех точек вида $(a,1-a), 0<a<1$. Поскольку полуоткрытые прямоугольники вида $[a,b)\times[1-a,c)$ образуют базу окрестностей точки $(a,1-a)$ в $X\times X$, всякая точка $y\in Y$ изолирована в Y, т.е. Y - дискретное подпространство произведения $X\times X$. В то же время, Y замкнуто в $X\times X$. Поэтому всякое множество $Z\subset Y$ замкнуто в $X\times X$.

Множество Y равномощно интервалу $(0,1)$ и, следовательно, имеет мощность континуума, которую обозначим через $\mathfrak{c}$. Для каждого множества $Z\in 2^Y$ рассмотрим непрерывную функцию $\varphi_Z: Y\to[0,1]$, равную 0 на Z и 1 на $Y\setminus Z$. Количество таких функций равномощно множеству 2^Y, т.е. имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$. Если бы пространство $X\times X$ было нормально, то всякую функцию φ_Z можно было бы продолжить до непрерывной функции $f_Z: X\times X\to[0,1]$ по теореме Брауэра - Титце - Урысона. Но пространство $X\times X$ имеет счётное плотное множество D точек вида (x_1,x_2), где $x_i\in(0,1)$ - рациональные числа. Согласно Предложению 5.10 всякое непрерывное отображение $f: X\times X\to[0,1]$ однозначно определяется своими значениями на счётном плотном множестве D. Но множество

$[0,1]^D$ всех (не только непрерывных) отображений $g : D \to [0,1]$ имеет мощность $\mathfrak{c}^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega\cdot\omega} = 2^\omega = \mathfrak{c}$. Это противоречие показывает, что квадрат "стрелки" не нормален.

5. Замечание. Напомним, что ω – мощность множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Равенства $\mathfrak{c}^\omega = (2^\omega)^\omega$ и $2^\omega = \mathfrak{c}$ вытекают из Предложения 1.7. Равенство $(2^\omega)^\omega = 2^{\omega\cdot\omega}$, являющееся утверждением арифметики кардинальных чисел, принимаем без доказательства. Наконец, равенство $2^{\omega\cdot\omega} = 2^\omega$ вытекает из простого утверждения: квадрат счетного множества счетен.

6. Пространство X является также примером финально-компактного пространства, квадрат которого не финально-компактен. В самом деле, финальная компактность, как и компактность, наследуется при переходе к замкнутым подмножествам. Но $X \times X$ содержит замкнутое множество Y, которое не финально-компактно, будучи дискретным и несчётным.

7. Согласно Теоремам 8.13 и 8.22 пространство X является примером паракомпакта (хаусдорфова паракомпактного пространства), квадрат которого не паракомпактен.

8. Отметим также, что "стрелка" сепарабельна: всюду плотное множество образуют рациональные числа.

Лекция 10

Метризуемые пространства

10.1. Определение. Топологическое пространство X называется *метризуемым*, если на X существует такая метрика ρ, что топология метрического пространства (X, ρ) совпадает с топологией пространства X.

10.2. Пример метризуемого пространства. Дискретное пространство X, т.е. пространство, в котором всякое множество $Y \subset X$ открыто, метризуемо. В самом деле, топология пространства X порождается метрикой ρ из Примера 1.2.3, т.е. такой метрикой, что $\rho(x, y) = 1$ для любых различных точек $x, y \in X$.

10.3. Определение. Пусть даны две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X. Они называются *топологически эквивалентными*, если метрические пространства (X, ρ_1) и (X, ρ_2) гомеоморфны.

10.4. Предложение. *Всякая метрика ρ_1 на множестве X топологически эквивалентна метрике ρ_2 диаметра $\leqslant 1$.*

При этом, мы пишем $\mathrm{diam}\rho \leqslant d$, если $\mathrm{diam}(X, \rho) \leqslant d$.

Доказательство. Можно положить, например, $\rho_2(x, y) = \min\{\rho_1(x, y), 1\}$. Читателю предлагается проверить, что ρ_2 - метрика, топологически эквивалентная метрике ρ_1. $\square$

Следующее утверждение обобщает Пример 10.2.

10.5. Предложение. *Сумма $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ метризуемых пространств X_α метризуема.*

Доказательство. Пусть ρ_α - метрика на X_α, порождающая топологию пространства X_α. Согласно Предложению 10.4 можно считать, что $\mathrm{diam}\rho_\alpha \leqslant 1$. Определим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ следующим образом:

$\rho(x, y) = \rho_\alpha(x, y)$, если $x, y \in X_\alpha$;

$\rho(x, y) = 1$, если x и y лежат в разных слагаемых.

Легко проверить,что ρ - это метрика на X (здесь важно, что $\mathrm{diam}\rho_\alpha \leqslant 1$). Поскольку $\rho|X_\alpha = \rho_\alpha$, метрика ρ порождает на X_α исходную топологию. Каждое слагаемое X_α открыто в топологии, порождаемой метрикой ρ. В самом деле, если $x \in X_\alpha$ и $\varepsilon < 1$, то $O^\rho_\varepsilon(x) \subset X_\alpha$. Из дизъюнктности слагаемых X_α вытекает, что они открыто-замкнуты в топологии $\mathcal{T}_\rho$. $\square$

10.6. Теорема. *Счётное произведение X метризуемых пространств метризуемо.*

Доказательство. Пусть $X = \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Согласно Предложению 10.4 пространства X_n можно наделить такими метриками ρ_n, что

$$\mathrm{diam}X_n \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наделим X метрикой ρ, принимающей на произвольной паре точек $x = (x_n)$ и $y = (y_n)$ из X значения

$$\rho(x,y) = \Big[\sum\Big\{\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n \in \mathbb{N}\Big\}\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{10.1}$$

Метрическое пространство (X,ρ) обозначим через X_M. Надо доказать, что тождественное отображение $h : X \to X_M$ является гомеоморфизмом.

Докажем сначала, что h непрерывно. Возьмём произвольно точку $x = (x_n) \in X$ и её ε-окрестность $O_\varepsilon(x), \varepsilon > 0$, относительно метрики ρ. Выберем номер N так, чтобы

$$\sum\Big\{\frac{1}{2^n} : n > N\Big\} < \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{10.2}$$

Окрестность $Ox \subset X$ точки x определим следующим образом:

$$Ox = \Big\{y = (y_n) \in X : \rho_n(x_n,y_n) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}},\ n = 1,\dots,N\Big\}. \tag{10.3}$$

Тогда $\rho^2(x,y) = (10.1) = \sum\big\{\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n \in \mathbb{N}\big\} = \sum\limits_{n\leqslant N}\big\{\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n \leqslant N\big\} + \sum\limits_{n>N}\big\{\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n > N\big\} < (10.2) < \sum\limits_{n\leqslant N}\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n \leqslant N\big\} + \frac{\varepsilon^2}{2} < (10.3) < \sum\limits_{n\leqslant N}\big\{\frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon^2}{2N} : n \leqslant N\big\} + \frac{\varepsilon^2}{2} < N\frac{\varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2$.

Таким образом, $Ox \subset O_\varepsilon(x)$, т.е. отображение h непрерывно.

Теперь докажем непрерывность отображения h^{-1}. Возьмём окрестность $Ox \subset X$ точки x. При необходимости уменьшая её, можно считать, что окрестность Ox элементарна, т.е.

$$Ox = \big\{y = (y_n) \in X : \rho_n(y_n,x_n) < \varepsilon_n, n = 1,\dots,s\big\}. \tag{10.4}$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2^s}} \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s\}. \tag{10.5}$$

Пусть $y \in O_\varepsilon(x)$. Тогда из (10.1) получаем

$$\frac{1}{2^n}\rho_n^2(y_n, x_n) < \varepsilon^2$$

или

$$\rho_n(y_n, x_n) < \varepsilon\sqrt{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.6}$$

Условия (10.5) и (10.6) влекут

$$\rho_n(y_n, x_n) < \frac{\varepsilon_n\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^s}} \leqslant \varepsilon_n, \quad n = 1, \ldots, s.$$

Следовательно, $O_\varepsilon(x) \subset Ox$ согласно (10.4), т.е. отображение h^{-1} непрерывно. $\square$

10.7. Теорема Урысона. *Всякое нормальное пространство X со счётной базой метризуемо.*

Доказательство. Поскольку подпространство метризуемого пространства метризуемо (см. 1.2.4), достаточно, в силу Теоремы 10.6, построить гомеоморфное вложение $f : X \to I^\omega$ пространства X в гильбертов куб (счётное произведение отрезков). Пусть $\mathcal{B}$ - счётная база пространства X. Пару элементов $\pi = (U, V)$ базы $\mathcal{B}$ назовём *нормальной*, если

$$\mathrm{Cl}(V) \subset U.$$

Множество всех нормальных пар, как и множество всех пар элементов базы $\mathcal{B}$ счётно. Занумеруем их натуральными числами:

$$\pi_n = (U_n, V_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

По лемме Урысона для каждой нормальной пары π_n существует такая непрерывная функция

$\varphi_n : X \to I_n = [0, 1]$,

что

$$\varphi_n(V_n) = 1, \quad \varphi_n(X \setminus U_n) = 0. \tag{10.7}$$

Положим

$$f = \mathop{\Delta}_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n = I^\omega. \tag{10.8}$$

Отображение f непрерывно как диагональное произведение непрерывных отображений (см. Предложение 7.4.4).

Докажем инъективность отображения f. Пусть $x, y \in X$ - различные точки. Поскольку X - T_1-пространство, существует такой элемент $U \in \mathcal{B}$, что

$x \in U, \quad y \in X \setminus U.$

В силу регулярности X существует такая окрестность Ox, что $\mathrm{Cl}(Ox) \subset U$. Далее, существует такое $V \in \mathcal{B}$, что

$x \in V \subset Ox \subset \mathrm{Cl}(Ox) \subset U.$

Ясно, что (U, V) - нормальная пара. Следовательно, $(U, V) = (U_n, V_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (10.7) вытекает, что $\varphi_n(x) = 1 \neq 0 = \varphi_n(y)$. Значит, $f(x) \neq f(y)$ согласно (10.8).

Остаётся показать, что отображение

$f^{-1} : f(X) \to X$

непрерывно. Пусть $y = (y_n) \in f(X)$ и $f^{-1}(y) = x$. Берём произвольную окрестность Ox точки x. Следуя процедуре доказательства инъективности отображения f, находим такую нормальную пару $\pi_n = (U_n, V_n)$, что

$x \in V_n \subset U_n \subset Ox.$

Согласно (10.7) функция $\varphi_n : X \to [0, 1]$ обладает свойствами

$$\varphi_n(x) = 1, \quad \varphi_n(x') = 0 \quad \text{для всякого} \quad x' \in X \setminus Ox. \tag{10.9}$$

Пусть $p_n : I^\omega \to I_n$ - проектирование. Тогда, в силу (10.8), коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi_n"'] & I^\omega \arrow[d, "p_n"] \\ & I_n. \end{tikzcd}$$

Из коммутативности этой диаграммы вытекает, что множество $p_n^{-1}(0, 1]$ является окрестностью Oy точки y, поскольку $p_n(y) = \varphi_n(x) = (10.9) = 1$. Пусть теперь $z \in f^{-1}\big(Oy \cap f(X)\big)$. Тогда

$$\varphi_n(z) = p_n\big(f(z)\big) > 0, \tag{10.10}$$

так как $f(z) \in Oy$. Следовательно, $z \in Ox$ согласно (10.9) и (10.10). Поэтому $f^{-1}(Oy) \subset Ox$ и, значит, отображение f^{-1} непрерывно. $\square$

Лекция 11

Связность и линейная связность. Компоненты связности.

11.1. Определение. Пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых открытых непересекающихся множеств. В противном случае пространство X называется *несвязным*.

11.2. Предложение. *Пространство X несвязно тогда и только тогда, когда X представляется в виде*

$X = A \sqcup B$

объединения непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств A и B. $\square$

Доказательство предоставляется читателю.

11.3. Примеры. 1. Пустое множество и пространство, состоящее из одной точки, связны.

2. Если пространство X состоит из двух различных точек a и b (Пример 3.22), то топологии $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}$ („слипшееся двоеточие“), $\mathcal{T}_2 = \big\{\varnothing, \{a\}, X\big\}$, $\mathcal{T}_3 = \big\{\varnothing, \{b\}, X\big\}$ („связные двоеточия“) связны.

3. Конечное T_1-пространство, содержащее не менее двух точек, несвязно.

4. Подпространства $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$) рациональных (соответственно иррациональных) чисел числовой прямой $\mathbb{R}$ несвязны.

11.4. Определение. Пространство X называется *вполне несвязным*, если несвязно всякое его подпространство, содержащее более одной точки.

11.5. Определение. Пространство X называется *индуктивно-нульмерным*, если оно имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств.

11.6. Предложение. *Индуктивно-нульмерное T_0-пространство X регулярно.*

Доказательство. Всякое индуктивно-нульмерное пространство удовлетворяет аксиоме T_3. Поэтому регулярность X вытекает из определения 5.5. $\square$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определения подпространства.

11.7. Предложение. *Подпространство индуктивно-нульмерного пространства индуктивно-нульмерно.* $\square$

Из Предложения 11.7 вытекает

11.8. Предложение. *Индуктивно-нульмерное пространство вполне несвязно.* $\square$

11.9. Замечание. Не всякое вполне несвязное пространство индуктивно-нульмерно. Контрпримером является „веер Кнастера-Куратовского“ (см. ПСА и БАП, стр. 184-187).

Из Предложения 11.2 вытекает

11.10. Предложение. *Если связное подпространство X_0 пространства X пересекается с открыто-замкнутым множеством $U \subset X$, то $X_0 \subset U$.* $\square$

11.11. Предложение. *Пусть в пространстве X имеется такая точка x_0, что для всякой точки $x \in X$ множество $\{x_0, x\}$ содержится в связном множестве $Z_{x_0,x} \subset X$. Тогда X связно.*

Доказательство. Если наше утверждение не верно, то согласно Предложению 11.2 пространство X представляется в виде объединения непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств A и B. Точка x_0 принадлежит одному из этих множеств, например, $x_0 \in A$. Тогда для любой точки $x \in X$ связное множество $Z_{x_0,x} \subset A$ согласно Предложению 11.10. Следовательно, $B = \varnothing$. Получили противоречие. $\square$

Из Предложения 11.11 вытекает

11.12. Предложение. *Пусть Z_α - связное подмножество пространства X, $\alpha \in A$. Если $\bigcap\{Z_\alpha : \alpha \in A\} \neq \varnothing$, то множество $Z = \bigcup\{Z_\alpha : \alpha \in A\}$ связно.* $\square$

11.13. Предложение. *Замыкание связного множества связно.*

Доказательство. Пусть Z - связное подмножество пространства X. Возьмём непустое открыто-замкнутое подмножество U множества $\mathrm{Cl}(Z)$. Тогда $U \cap Z \neq \varnothing$, так как Z всюду плотно в $\mathrm{Cl}(Z)$. Значит, $U \cap Z$ есть непустое открыто-замкнутое подмножество Z. Из связности Z вытекает, что $U \cap Z = Z$. Следовательно, $U \supset Z$. Поэтому $\mathrm{Cl}(U) \supset \mathrm{Cl}(Z)$. Но U замкнуто в $\mathrm{Cl}(Z)$ и, следовательно, U замкнуто в X. Значит, $U \supset \mathrm{Cl}(Z)$ и поэтому $U = \mathrm{Cl}(Z)$, т.е. $\mathrm{Cl}(Z)$ связно. $\square$

11.14. Определение. Непустое связное множество Z в пространстве X называется *максимальным связным множеством* или *компонентой связности* пространства X, если всякое связное множество Z_1, удовлетворяющее условию

$Z \subset Z_1 \subset X$,

совпадает с Z.

Из Предложения 11.13 вытекает

11.15. Предложение. *Всякая компонента связности пространства X замкнута в X.* $\square$

11.16. Предложение. *Всякое пространство X является дизъюнктной суммой своих компонент связности.*

Доказательство. Две различные компоненты связности пространства X не пересекаются согласно Предложению 11.12. Из этого же утверждения вытекает, что всякая точка $x \in X$ лежит в некоторой компоненте связности. $\square$

11.17. Примеры. 1. Из Определения 11.4 вытекает, что во всяком вполне несвязном пространстве компоненты связности совпадают с точками этого пространства.

2. В произведении $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ компонентами связности являются вертикальные прямые, задаваемые уравнениями $x = r$, где r - рациональное число.

Из Предложения 11.16 вытекает, что всякая точка $x \in X$ содержится в единственной компоненте связности пространства X. Обозначим её через C_x и назовём *компонентой связности точки x*.

11.18. Определение. Из Предложения 11.16 вытекает, что всякая точка x пространства X лежит в единственной компоненте связности, которая обозначается через C_x.

11.19. Определение. Пространство X называется *локально связным*, если во всякой окрестности произвольной точки $x \in X$ содержится связная окрестность.

Предложения 11.15 и 11.16 влекут

11.20. Предложение. *Компоненты связности локально связного пространства открыто-замкнуты.* $\square$

11.21. Определение. Пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X, содержащих точку $x \in X$, называется *квазикомпонентой точки x* и обозначается через Q_x.

11.22. Предложение. *Для всякой точки $x \in X$ её компонента связности C_x содержится в квазикомпоненте Q_x.*

Доказательство. Пусть U_α - какое-нибудь открыто-замкнутое множество, содержащее точку x. Из Предложения 11.10 получаем, что $C_x \subset U_\alpha$. Тогда $C_x \subset \bigcap\{U_\alpha : x \in U_\alpha\} = Q_x$. $\square$

11.23. Пример *пространства, в котором квазикомпонента не совпадает с компонентой.*

Рассмотрим плоское множество X, которое есть объединение двух вертикальных прямых α и β, задаваемых соответственно уравнениями $x = 0, x = 1$, и контуров прямоугольников q_n, две стороны которых имеют уравнения $x = \frac{1}{n}, x = \frac{1}{n-1}$, а две другие лежат на горизонтальных прямых $y = n, y = -n$.

Докажем, что объединение двух прямых α и β является квазикомпонентой в пространстве X. В самом деле, всякое открыто-замкнутое множество U, пересекающееся с прямой α, содержит всю эту прямую и контуры всех прямоугольников q_n, начиная с некоторого N. Таким образом, квазикомпонента любой точки прямой α содержит всю эту прямую. Но если открыто-замкнутое множество U содержит прямую α, то оно содержит и прямую β. В самом деле, содержа прямую α, множество U содержит контуры q_n со сколь угодно большими номерами и, следовательно, будучи замкнутым, содержит прямую β. Таким образом, квазикомпонента произвольной точки $a \in \alpha$ содержит множество $\alpha \cup \beta$. Но Q_a является пересечением всех открыто-замкнутых множеств, содержащих точку a. Поэтому эта квазикомпонента не может пересекаться ни с одним из контуров q_n, т.е. $Q_a = \alpha \cup \beta$. Но это множество несвязно и, значит, не является компонентой.

11.24. Теорема. *В компакте X компонента C_x любой точки $x \in X$ совпадает с её квазикомпонентой Q_x.*

Доказательство. Согласно Предложению 11.22 достаточно проверить, что

$$C_x \supset Q_x = \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in A\}, \tag{11.2}$$

а для этого достаточно показать, что множество Q_x связно. Если это не так, то Q_x представляется в виде дизъюнктной суммы непустых замкнутых множеств F_1 и F_2. В силу нормальности компакта X, существуют непересекающиеся окрестности OF_1 и OF_2, которые в своей сумме образуют окрестность $OQ_x = OF_1 \cup OF_2$.

Покажем, что в ней содержится открыто-замкнутая окрестность U. Предположим, что это не так. Тогда семейство

$v = \{V_\alpha = U_\alpha \setminus OQ_x : \alpha \in A\}$

состоит из непустых замкнутых подмножеств компакта $X \setminus OQ_x$. Это семейство центрировано, так как пересечение конечного числа открыто-замкнутых множеств открыто-замкнуто. Тогда $\bigcap v \neq \varnothing$ согласно Теореме 8.4. Но это противоречит равенству из (11.2). Итак, окрестность U существует.

Положим $W_i = U \cap OF_i$, $i = 1, 2$. Из условия $U \subset OF_1 \cup OF_2$ вытекает, что множества W_1 и W_2 открыто-замкнуты. Точка x лежит в одном из этих множеств, например, в W_1. Тогда и квазикомпонента Q_x лежит в W_1. Следовательно, $Q_x \cap W_2 = \varnothing$ и поэтому $Q_x \cap F_2 = \varnothing$, поскольку $F_2 \subset U \cap OF_2 = W_2$. Полученное противоречие доказывает связность Q_x. $\square$

11.25. Определение. Непрерывное отображение $\varphi : I \to X$ называется *путём* в пространстве X. Точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются соответственно *началом* и *концом* пути φ. Если начало и конец пути φ совпадают, то путь φ называется *петлёй*.

11.26. Определение. Пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путём.

11.27. Предложение. *Всякое линейно связное пространство связно.* $\square$

Доказать самим.

Обратить утверждение Предложения 11.27 нельзя, что показывает следующий

11.28. Пример. Возьмём плоский компакт X, являющийся объединением вертикального отрезка $X_1 = \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и графика X_2 функции $\sin\frac{1}{x} : 0 < x \leqslant 1$.

Это пространство, очевидно, связно. Но оно не линейно связно: никакие две точки a_1 и a_2, $a_i \in X_i$, не соединяются путём.

11.29. Определение. Максимальное (по включению) линейно связное подмножество пространства X называется *компонентой линейной связности* пространства X.

11.30. Предложение. *Если Z_1 и Z_2 - пересекающиеся линейно связные подмножества пространства X, то их объединение линейно связно.* $\square$

С применением Леммы Куратовского-Цорна и Предложения 11.30 доказывается

11.31. Предложение. *Всякая точка $x \in X$ содержится в компоненте линейной связности пространства X.* $\square$

Из Предложений 11.30 и 11.31 вытекает

11.32. Предложение. *Пространство X является дизъюнктной суммой своих компонент линейной связности.* $\square$

11.33. Замечание. В отличие от компонент связности компоненты линейной связности не обязаны быть замкнутыми. Так, компакт X из Примера 11.28 имеет две компоненты линейной связности: замкнутую X_1 и незамкнутую X_2.

11.35. Замечание. Теперь мы можем расшифровать названия „канторов дисконтинуум“ и „канторово совершенное множество“. *Дисконтинуум* означает разрывное множество, т.е. в нашей терминологии - вполне несвязное множество.

Канторов дисконтинуум вполне несвязен, так как никакие две его различные точки не содержатся в связном множестве. В самом деле, если $x_0, x_1 \in C$ и $x_0 \neq x_1$ то $\rho(x_0, x_1) > \frac{1}{3^n}$ для некоторого n. Тогда между точками x_0 и x_1 лежит некоторый интервал $J_{i_1 \dots i_n}$ (см. 1.6). Значит, точки x_0 и x_1 лежат в разных компонентах связности множества C_n, тем более, они лежат в разных компонентах связности множества $C = \bigcap\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Канторово множество „совершенно“ означает, что оно не содержит изолированных точек. Это так, поскольку из построения (см. 1.6) вытекает, что во всякой окрестности точки $x \in C$ содержится окрестность вида $I_{i_1 \dots i_n} \cap C$, гомеоморфная C и, следовательно, имеющая мощность континуума.

Лекция 12

Пространства непрерывных отображений

12.1. Топология на $C(X,Y)$. Множество $C(X,Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y наделяется компактно-открытой топологией. Предбазу открытых множеств этой топологии образуют множества вида

$$[K,U] = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subset U\},$$

где K - компактное множество в X, а U - открытое множество в Y.

12.2. Примеры. 1. Если X - точка, то $C(X,Y) = Y$.

2. Если X состоит из n изолированных точек, то $C(X,Y) = Y^n$. Последнее равенство служит основанием для того, чтобы обозначать пространство $C(X,Y)$ через Y^X.

3. Если Y - точка, то $C(X,Y)$ - также точка.

4. Если Y состоит из двух изолированных точек ($Y = 2$), а X связно, то $C(X,Y) = 2$.

5. Чему равна мощность пространства $C(X,Y)$, если X - канторово множество, а $Y = 2$?

12.3. Предложение. *Если пространство Y хаусдорфово, то пространство $C(X,Y)$ также хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $f_i : X \to Y$ - различные отображения, $i = 1, 2$. Существует точка $x \in X$, для которой $f_1(x) \neq f_2(x)$. Возьмём непересекающиеся окрестности U_1 и U_2 точек $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда множества $V_i = \big[\{x\}, U_i\big]$, $i = 1, 2$, не пересекаются и $f_i \in V_i$. $\square$

12.4. Отображения $X \times Y \to Z$ и $X \to C(Y,Z)$. Пусть даны пространства X, Y, Z и непрерывное отображение $f : X \times Y \to Z$. Тогда определено отображение $\langle f \rangle : X \to C(Y,Z)$. Оно задаётся формулой

$$\big(\langle f \rangle (x)\big)(y) = f(x,y). \tag{12.1}$$

Теперь пусть дано непрерывное отображение $g : X \to C(Y,Z)$. Тогда определено отображение $)g(: X \times Y \to Z$, задаваемое формулой

$$)g((x,y) = \big(g(x)\big)(y). \tag{12.2}$$

12.5. Предложение. *Отображение* $\langle f\rangle$ *из* (12.1) *непрерывно.*

Доказательство. Согласно Предложению 4.3 достаточно для точки $x_0 \in X$ и предбазисной окрестности G функции $\langle f\rangle(x_0)$ найти такую окрестность Ox_0, что $\langle f\rangle(Ox_0) \subset G$. По определению компактно-открытой топологии (см. 12.3) в качестве множества G можно взять $[K,U]$ при условии

$$\big(\langle f\rangle(x_0)\big)(K) \subset U. \tag{12.3}$$

Для каждой точки $y \in K$ фиксируем такие окрестности V_y и W_y точек x_0 и y, что

$$f(V_y \times W_y) \subset U. \tag{12.4}$$

Это возможно, в силу (12.1) и (12.3). Из семейства $\{W_y : y \in K\}$ выделим конечное покрытие $W_{y_1}, \ldots, W_{y_k}$ множества K. Тогда $V = \bigcap\big\{V_{y_i} : i = 1,\ldots,k\big\}$ является окрестностью точки x_0 и

$$f(V \times K) \subset \bigcup\Big\{f\big(V_{y_i} \times W_{y_i}\big) : i = 1,\ldots,k\Big\} \subset (12.4) \subset U. \tag{12.5}$$

Из (12.5) вытекает, что $\langle f\rangle(V) \subset [K,U] = G$. Итак, мы нашли такую окрестность $V = Ox_0$, что $\langle f\rangle(Ox_0) \subset G$. $\square$

Ниже нам потребуется следующее вспомогательное утверждение

12.6. Предложение. *Пусть Ox - окрестность точки x локально компактного хаусдорфова пространства X. Тогда x обладает окрестностью, замыкание которой компактно и содержится в Ox.*

Доказательство. Пространство Ox локально компактно как открытое подмножество локально компактного пространства. Поэтому x обладает в нём окрестностью U с компактным замыканием. Поскольку Ox открыто, множество U открыто в X. Компактное множество $\mathrm{Cl}_{Ox}(U)$ замкнуто в хаусдорфовом пространстве X (см. § 8). Следовательно, $\mathrm{Cl}_{Ox}(U) = \mathrm{Cl}(U)$. Значит, U - искомая окрестность. $\square$

12.7. Предложение. *Если пространство Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение $)g($ из* (12.2) *непрерывно.*

Доказательство. Для точки $(x_0,y_0) \in X \times Y$ и окрестности W точки $)g((x_0,y_0)$ найдём окрестность V точки y_0 с компактным замыканием $\mathrm{Cl}(V)$, содержащимся в $\big(g(x_0)\big)^{-1}(W)$ (см. Предложение 12.6). В силу непрерывности отображения g, существует такая окрестность U точки x_0, что $g(U) \subset \big[\mathrm{Cl}(U), W\big]$. Тогда $U \times W$ - окрестность точки (x_0,y_0), обладающая свойством $)g((U \times V) \subset W$ согласно определению (12.2) и свойству $g(U) \subset \big[\mathrm{Cl}(V), W\big]$. $\square$

12.8. Теорема. *Отображение*

$F : C(X \times Y, Z) \to C\big(X, C(Y, Z)\big)$,

определяемое условием $F(f) = \langle f \rangle$*, непрерывно для любых* X, Y, Z*. Если же* Y *хаусдорфово и локально компактно, то это отображение является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть A и B - компактные подмножества X и Y соответственно, а U открыто в Z. Тогда непрерывность отображения F вытекает из легко проверяемого равенства

$$F^{-1}\big([A, [B, U]]\big) = [A \times B, U]. \tag{12.6}$$

Пусть теперь Y хаусдорфово и локально компактно. Тогда из Предложения 12.7 вытекает, что соответствие $g \to)g($ определяет отображение

$G : C\big(X, C(Y, Z)\big) \to C(X \times Y, Z)$.

Это отображение непрерывно. Для этого покажем сначала, что

$$G \circ F = \mathrm{id}_{C(X \times Y, Z)}. \tag{12.7}$$

Пусть $f \in C(X \times Y, Z)$. Тогда

$(G \circ F)(f) =) \langle f \rangle (= f$.

В самом деле, $) \langle f \rangle ((x, y) = (12.2) = \langle f(x) \rangle (y) = (12.1) = f(x, y)$. Итак, (12.7) проверено.

Далее,

$$F \circ G = \mathrm{id}_{C\big(X, C(Y, Z)\big)}. \tag{12.9}$$

В самом деле, пусть $g \in C\big(X, C(Y, Z)\big)$. Тогда $(F \circ G)(g) = \langle)g(\rangle$. Чтобы установить (12.9), надо показать, что

$$\langle)g(\rangle = g. \tag{12.10}$$

Имеем $\big(\langle)g(\rangle (x)\big)(y) = (12.1) =)g((x, y) = \big(g(x)\big)(y)$, откуда (12.10) и вытекает.

Итак, равенства (12.7) и (12.9) показывают, что отображения F и G взаимно обратны. В частности, $G^{-1} = F$. Возьмём предбазисное открытое множество $[A \times B, U] \subset C(X \times Y, Z)$. Тогда $G^{-1}\big([A \times B, U]\big) = F\big([A \times B, U]\big) = (12.6) = \big[A, [B, U]\big]$.

Тем самым, непрерывность отображения G доказана. Таким образом, мы показали, что F и G являются взаимно обратными непрерывными отображениями. Значит, каждое из них является гомеоморфизмом. $\square$

Лекция 13

Гомотопия. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства.

13.1. Определение гомотопии. Непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ называются *гомотопными*, ($f \sim_h g$) если существует такое непрерывное отображение $\Phi : X \times I \to Y$, что $\Phi(x, 0) = f(x)$, $\Phi(x, 1) = g(x)$ для каждого $x \in X$. Всякое такое отображение Φ называется *гомотопией*, связывающей f с g. Оно называется также *гомотопией отображения* f.

Иногда отображение Φ заменяется семейством отображений

$$f_t : X \to Y, \ t \in I, \ f_t(x) = \Phi(x, t) \qquad (13.1).$$

Семейство $\{f_t : X \to Y, t \in T\}$ можно рассматривать как оотбражение

$$F : I \to C(X, Y) \qquad (13.2).$$

13.2. Предложение. *Если отображение $\Phi : X \times I \to Y$ непрерывно, то непрерывно и отображение $F : I \to C(X, Y)$.*

Доказательство. Из непрерывности Φ вытекает непрерывность отображения $\Phi' : I \times X \to Y$, задаваемого равенством

$$\Phi'(t, x) = \Phi(x, t) \qquad (13.3).$$

По Предложению 12.5 непрерывно отображение $\langle \Phi' \rangle : I \to C(X, Y)$, определяемое равенством (12.1):

$$(\langle \Phi' \rangle(t))(x) = \Phi'(t, x).$$

Но $\langle \Phi' \rangle = F$, так как

$(\langle \Phi' \rangle(t))(x) = \Phi'(t,x) = (13.3) = \Phi(x,t) = (13.1) = f_t(x) = (F(t))(x)$.

Таким образом, отображение F непрерывно. □

13.3. Предложенние. *Если отображение $F : I \to C(X,Y)$ непрерывно и пространство X хаусдорфово и локально компактно, то непрерывно отображение*

$$\Phi : X \times I \to Y, \quad \Phi(x,t) = f_t(x).$$

Доказательство. Согласно Предложению 12.7 непрерывно отображение $)F(: I \times X \to Y$, определяемое равенством (12.2), т.е.

$()F()(t,x) = (F(t))(x) = f_t(x) = (13.1) = \Phi(x,t)$. □

13.4. Теорема. *Отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве $C(X,Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y.*

Доказательство. Рефлексивность. Надо доказать, что всякое отображение $f : X \to Y$ гомотопно самому себе. Рассмотрим *постоянную гомотопию* отображения f, т.е. такое отображение $\Phi_f : X \times I \to Y$, что $\Phi_f(x,t) = f(x)$ для любых $x \in X$, $t \in I$. Покажем, что отображение Φ_f непрерывно. Пусть $a = (x_0, t_0) \in X \times I$ и $b = \Phi_f(a)$. Тогда по определению $b = f(x_0)$. Возьмём произвольную окрестность Ob. Поскольку отображение f непрерывно, существует такая окрестность $Ox_0 \subset X$, что $f(Ox_0) \subset Ob$. Мы утверждает, что $\Phi_f(Ox_0 \times I) \subset Ob$. В самом деле, пусть $(x,t) \in Ox_0 \times I$. Тогда $\Phi_f(x,t) = f(x) \in f(Ox_0) \subset Ob$ по определению окрестности Ox_0. Итак, непрерывность отображения Φ_f доказана и, следовательно, отношение $\sim_h$ рефлексивно.

Симметричность. Пусть отображение $\Phi : X \times I \to Y$ - гомотопия, связывающая отображения f и g. Рассмотрим отображение $\Gamma : X \times I \to Y$, определяемое формулой $\Gamma(x,t) = \Phi(x, 1-t)$. Это отображение,очевидно, непрерывно и является гомотопией, связывающей отображение g и f. Следовательно, отношение $\sim_h$ симметрично.

Транзитивность. Пусть даны отображения $f_i : X \to Y$, $i = 1,2,3$. При этом, f_1 гомотопно f_2, а f_2 гомотопно f_3. Надо показать, что f_1 гомотопно f_3. Пусть гомотопия Φ_1 связывает f_1 с f_2, а гомотопия Φ_2 связывает f_2 с f_3. Определим гомотопию $\Phi : X \times I \to Y$ следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi(x,t) = F_1(x,2t) & \text{при} \quad t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \Phi(x,t) = F_2(x,2t-1) & \text{при} \quad t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Имеем $\Phi\big(x, \frac{1}{2}\big) = F_1(x,1) = f_2(x)$. С другой стороны $\Phi\big(x, \frac{1}{2}\big) = F_2(x,0) = f_2(x)$. Значит, отображение Φ определено корректно. Оно непрерывно, будучи непрерывным на замкнутых слагаемых $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Наконец, $\Phi(x,0) = F_1(x,0) = f_1(x,0)$ $\Phi(x,1) = F_2(x,1) = f_3(x)$. Таким образом, гомотопия Φ связывает f_1 с f_3. $\square$

Классы эквивалентности гомотопных отображений называются *гомотопическими классами.* В дальнейшем мы вместо $\sim_h$ будем писать $\sim$.

13.5. Пример. Все отображения $X \to I$ гомомотопны между собой. В самом деле, пусть $f_0, f_1 : X \to I$ - два непрерывных отображения. Рассмотрим гомотопию $\Phi : X \times I \to I$, определяемую следующим образом:

$$\Phi(x,t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x). \tag{13.4}$$

Ясно, что отображение из (13.4) соединяет f_0 с f_1. Докажем, что отображение Φ непрерывно. Пусть $\Phi(x_0, t_0) = a \in I$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и найдём такую окрестность $Ox_0 \subset X$ и такое $\delta > 0$, что

$$F\big(Ox_0 \times (t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)\big) \subset (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon). \tag{13.5}$$

Предположим, что

$$f_i(x_0) = a_i,\ i = 0, 1. \tag{13.6}$$

Тогда из (13.4) получаем

$$a = \Phi(x_0, t_0) = (1 - t_0)a_0 + t_0 a_1. \tag{13.7}$$

Из непрерывности отображений f_0 и f_1 вытекает существование такой окрестности $Ox_0 \subset X$, что для $x \in Ox_0$ имеем

$$f_i(x) \subset \Big(-\frac{\varepsilon}{2} + a_i,\ \frac{\varepsilon}{2} + a_i\Big),\ i = 1, 2, \tag{13.8}$$

Тогда $|F(x,t) - a| = (13.4) = |(1-t)f_0(x) + tf_1(x) - a| = (13.7) = |(1-t)f_0(x) + tf_1(x) - (1-t_0)a_0 - t_0a_1| = |(1-t)f_0(x) + tf_1(x) - (1-t)a_0 - ta_1 + (t-t_0)a_0 + (t-t_0)a_1| \leqslant (1-t)|f_0(x) - a_0| + t|f_1(x) - a_1| + |t - t_0|(a_0 + a_1) \leqslant (13.8) \leqslant (1-t)\frac{\varepsilon}{2} + t\frac{\varepsilon}{2} + |t - t_0|2 = \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta$. Поэтому при $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ получаем $F(Ox_0 \times (t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)) \subset (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.
Непрерывность отображения (13.4) доказана. $\square$

13.6. Определение. Классы эквивалентности гомотопных отображений называется *гомотопическими классами.* Множество гомотопических классов отображений $X \to Y$ обозначается через $\pi(X,Y)$. Гомотопический класс отображения $f : X \to Y$ будем обозначать через $[f]$. А вообще, элементы множества $\pi(X,Y)$ будут обозначаться греческими буквами α, β и т.д. Отображение f, для которого $\alpha = [f]$ или $f \in \alpha$, называется *представителем* класса α в $C(X,Y)$. Как правило представитель определён неоднозначно.

13.7. Примеры. 1. $\pi(X, I)$ состоит из одной точки.

2. Рассуждения из Примера 13.5 показывают, что $\pi(X, V)$ состоит из одной точки для любого выпуклого подмножества $\mathbb{R}^n$, в частности $\pi(X, \mathbb{R}^n) = *$, где $*$ - множество, состоящее из одной точки.

3. Множество $\pi(*, Y)$ есть множество компонент линейной связности пространства Y.

13.7. Определение. Пусть X, Y_1, Y_2 - пространства и $h : Y_1 \to Y_2$ - непрерывное отображение. Классу $\alpha \in \pi(X, Y_1)$ поставим в соответствие класс $h_*(\alpha) = [h \circ f] \in \pi(X, Y_2)$, где f - какой-нибудь представитель класса α, т.е. $[f] = \alpha$. Тем самым определено отображение $h_* : \pi(X, Y_1) \to \pi(X, Y_2)$.

13.8. Лемма. *Отображение h_* определено корректно, т.е. класс $h_*(\alpha) = [h \circ f]$ не зависит от выбора представителя $f \in \alpha$.*

Доказательство. Пусть $f_0, f_1 \in \alpha$. Существует гомотопия $\Phi : X \times I \to Y_1$, соединяющая f_0 с f_1. Рассмотрим композицию $G = h \circ \Phi : X \times I \to Y_2$. Отображение G непрерывно и $G(x, 0) = h\big(F(x, 0)\big) = hf_0(x)$, а $G(x, 1) = hF(x, 1) = hf_1(x)$. Следовательно, G является гомотопией, соединяющей $h \circ f_0$ и $h \circ f_1$. Таким образом $[h \circ f_0] = [h \circ f_1]$. $\square$

13.9. Теорема. *Пусть даны пространства X, Y_1, Y_2, Y_3 и непрерывные отображения $g : Y_1 \to Y_2,\ \ h : Y_2 \to Y_3$. Тогда следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \pi(X,Y_1) \arrow[r, "g_*"] \arrow[dr, "(h\circ g)_*"'] & \pi(X,Y_2) \arrow[d, "h_*"] \\ & \pi(X,Y_3). \end{tikzcd} \tag{13.9}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть $\alpha = [f] \in \pi(X, Y_1)$. Тогда согласно Определению 13.7 имеем

$(h \circ g)_*(\alpha) = \big[(h \circ g) \circ f\big]$,

$g_*(\alpha) = [g \circ f], \quad h_*\big(g_*(\alpha)\big) = \big[h \circ (g \circ f)\big]$.

Равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ завершает доказательство. $\square$

Из теоремы 13.9 вытекает, что

$$\big(h_k \circ \ldots \circ h_1\big)_* = (h_k)_* \circ \ldots \circ (h_1)_* \tag{13.10}$$

для любых отображений $h_i : Y_i \to Y_{i+1}$.

13.10. Определение. Пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными* ($X_1 \sim X_2$), если существуют такие непрерывные отображения $f : X_1 \to X_2,\ \ g : X_2 \to X_1$, что композиции $g \circ f : X_1 \to X_1,\ \ f \circ g : X_2 \to X_2$ гомотопны тождественным отображениям $X_1 \to X_1,\ \ X_2 \to X_2$.

Отображения f и g называются *гомотопически взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями.*

13.11. Замечание. Если отображения $g \circ f$ и $f \circ g$ не просто гомотопны тождественным отображениям, но и являются таковыми, то f и g - взаимно обратные гомеоморфизмы. Таким образом, отношение гомотопической эквивалентности является обобщением отношения гомеоморфности.

13.12. Теорема. *Отношение гомотопической эквивалентности является отношением эквивалентности на классе Top всех топологических пространств.*

Доказательство. Фактически в проверке нуждается только транзитивность. Пусть $X_1 \sim X_2$ и $X_2 \sim X_3$. Существуют такие отображения $f_1 : X_1 \to X_2,\ \ g_1 : X_2 \to X_1,\ \ f_2 : X_2 \to X_3,\ \ g_2 : X_3 \to X_2$, что

$$g_1 \circ f_1 \sim \mathrm{id}_{X_1}, \quad f_1 \circ g_1 \sim \mathrm{id}_{X_2}; \tag{13.11}$$

$$g_2 \circ f_2 \sim \mathrm{id}_{X_2}, \quad f_2 \circ g_2 \sim \mathrm{id}_{X_3}. \tag{13.12}$$

Положим

$f = f_2 \circ f_1, \quad g = g_1 \circ g_2.$

Тогда $g \circ f = g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 = g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \sim \big((13.10)\ \text{и}\ (13.12)\big) \sim g_1 \circ \mathrm{id}_{X_2} \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \sim (13.11) \sim \mathrm{id}_{X_1}$. Таким же образом показываем, что $f \circ g \sim \mathrm{id}_{X_3}$. Значит, отображения f и g гомотопически взаимно обратны и $X_1 \sim X_3$. $\square$

13.13. Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом.*

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ гомотопно постоянному отображению $\mathrm{const}_{x_0} : X \to X$, переводящему все X в точку $x_0 \in X$.

13.14. Упражнения. 1. Пространство стягиваемо тогда и только тогда когда оно имеет гомотопический тип точки.

2. Конус над любым пространством стягиваем.

3. Цилиндр отображения $X \to Y$ гомотопически эквивалентен пространству Y.

13.15. Замечание. Гомотопически эквивалентные пространства не обязаны быть гомеоморфными.

Примеры. 1. Шары B^n имеют гомотопический тип точки, но B^{n_1} не гомеоморфно B^{n_2} при $n_1 \neq n_2$. Например, $n_1 = 0, n_2 > 0$.

2. Доказать, что отрезок I не гомеоморфен кругу B^2.

3. Диск D^n, $n > 0$, имеет гомотопический тип точки, но D^n не гомеоморфно B^n, поскольку шар B^n компактен, а диск D^n - нет.

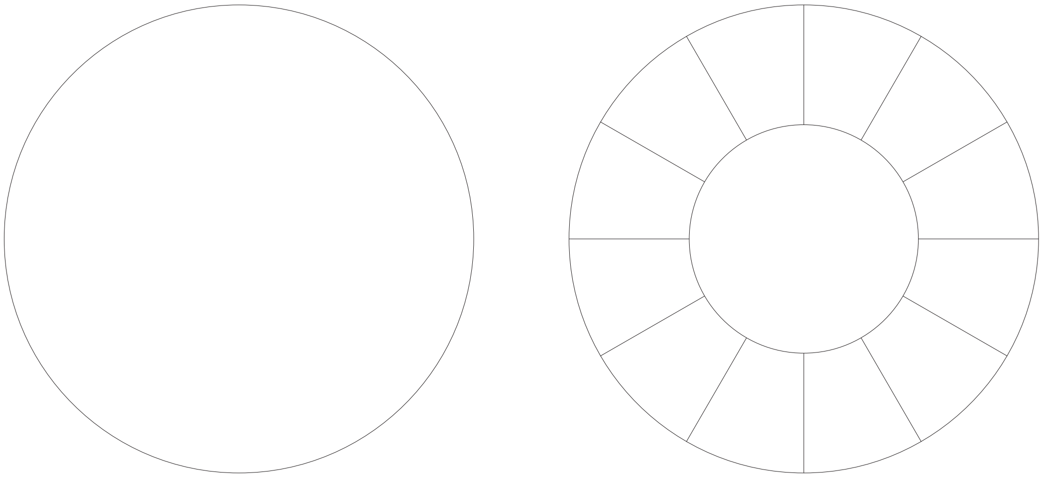

Рис. 13.1:

4. Докажите, что окружность S^1 и кольцо K имеют одинаковый гомотопический тип, но не гомеоморфны (см. Рис. 13.1).

Лекция 14

Фундаментальная группа

14.1. Пространства с отмеченной точкой. В топологии часто приходится рассматривать пространства с *отмеченной точкой*, т.е. считать, что во всех пространствах выделены отмеченные точки и все отображения переводят отмеченные точки в отмеченные. Одинаковые пространства с разными отмеченными точками считаются разными пространствами. Класс топологических пространств с отмеченными точками и их непрерывных отображений будет обозначаться через Top_b (b - это „base-point“ - отмеченная точка).

14.2.Операции над пространствами с отмеченной точкой. Переход к пространствам с отмеченной точкой в той или иной степени сказывается на рассмотренных выше топологических операциях. Для некоторых из них изменение сводится к тому, что пространство - результат операции - наделяется отмеченной точкой. Например, в произведении $X \times Y$ отмечается точка (x_0, y_0), где x_0, y_0 - отмеченные точки сомножителей.

Некоторые операции модифицируются более серьёзным образом. Так, в конусе $\mathrm{Con}(X)$ отождествляются между собой точки образующей, соответствующей неподвижной точке. При этом, иногда обычный конус $\mathrm{Con}(X)$ не гомеоморфен конусу $\mathrm{Con}_b(X)$ с отмеченной точкой. Например, если X состоит из трёх точек ($X = 3$), то $\mathrm{Con}(X)$ - это триод, а $\mathrm{Con}_b(X)$ гомеоморфно отрезку. Но оба эти пространства имеют один гомотопический тип - тип точки.

14.3. Букет пространств X и Y с отмеченными точками x_0 и y_0, получается из суммы этих пространств посредством отождествления их отмеченных точек. Эта операция есть частный случай склеивания пространств (см. § 7). Букет пространств X и Y обозначается через $X \vee Y$. Например, букет двух окружностей - „восьмёрка“ (см. Рис. 14.1).

14.4. Упражнение. Приведите пример, когда топологический тип

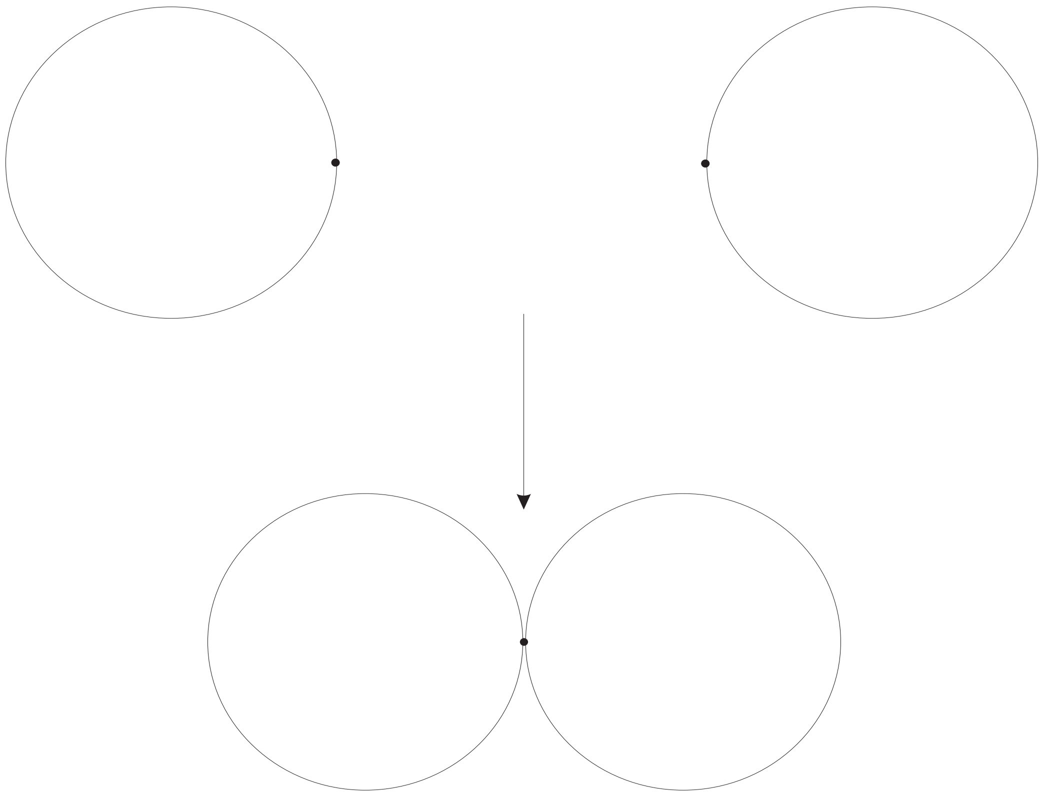

Рис. 14.1:

букета $X \vee Y$ зависит от выбора отмеченных точек.

14.5. Связанные гомотопии. Пусть A - подмножество пространства X. Гомотопия $F : X \times I \to Y$ называется *связанной на* A, или A-*гомотопией*, если $F(x, t) = F(x, 0)$ при $x \in A$, $t \in I$. Два отображения, которые можно соединить A-гомотопией называются A-*гомотопными*.

Как и обычная гомотопность, A-гомотопность является эквивалентностью. Как правило, мы будем иметь дело лишь с одноточечными и двухточечными A. Множество гомотопических классов отображений пространств X с отмеченной точкой в пространство Y с отмеченной точкой будет обозначаться как через $\pi(X, Y)$, так и через $\pi_b(X, Y)$.

14.6. Определение множества $\pi_1(X, x_0)$. Рассматриваются петли пространства X, т.е. такие отображения φ, что $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, где x_0 - отмеченная точка. Петли φ_0 и φ_1 называются *гомотопными*, если существует гомотопия $F : I \times I \to X$, связанная на $A = \{0, 1\} \subset I$, такая, что $F(x, 0) = \varphi_0(x)$, $F(x, 1) = \varphi_1(x)$.

Множество гомотопических классов петель $\varphi : I \to (X, x_0)$ обозначается через $\pi_1(X, x_0)$.

Петля, рассматриваемая как отображение $\varphi : I \to X$ с условием $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, равносильна отображению $\widehat{\varphi} : S_1 \to X$, переводящему точку $0 = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ в отмеченную точку $x_0 \in X$. При этом, мы отождествляем точку $\varphi(t)$ с точкой $\widehat{\varphi}(2\pi t)$. Поэтому множество $\pi_1(X, x_0)$ можно рассматривать как множество гомотопических классов $\pi_b(S^1, X, x_0)$ с фиксированной отмеченной точкой $0 \in S^1$.

14.7. Умножение в $\pi_1(X, x_0)$. Произведение $\varphi\psi$ петель φ и ψ - это петля χ, определяемая следующим образом:

$$\chi(s) = \begin{cases} \varphi(2s) & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ \psi(2s-1) & \text{при} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} \tag{14.1}$$

Другими словами, произведение двух петель - это петля, составленная из этих двух петель, которые проходятся последовательно.

Это умножение порождает умножение и в множестве $\pi_1(X, x_0)$:

$$[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi\psi]. \tag{14.2}$$

Надо проверить только, что равенство (14.2) не зависит от выбора представителей в гомотопических классах $[\varphi]$ и $[\psi]$.

14.8. Лемма. *Если $\varphi_0 \sim \varphi_1$ и $\psi_0 \sim \psi_1$, то $\varphi_0\psi_0 \sim \varphi_1\psi_1$.*

Доказательство. Пусть $F : S^1 \times I \to X$ - связанная гомотопия, соединяющая φ_0 и φ_1, а $G : S^1 \times I \to X$ - связанная гомотопия, соединяющая ψ_0 и ψ_1. Для удобства записи будем считать, что окружность S^1 имеет длину 1 и отождествляется с факторпространством $[0,1]/\{0,1\}$. Пусть

$$F(s,t) = \varphi_t(s), \quad G(s,t) = \psi_t(s). \tag{14.3}$$

Определим гомотопию $\Phi : S \times I \to X$ следующим образом:

$$\Phi(s,t) = \begin{cases} \psi_0(s) \cdot \varphi_{2t}(s) & : \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \psi_{2t-1}(s) \cdot \varphi_1(s) & : \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{14.4}$$

Ясно, что эта гомотопия соединяет $\psi_0\varphi_0$ с $\psi_1\varphi_1$. Надо проверить только её непрерывность. Пусть $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ и $(s_0, t_0) \in [0,1] \times [0, 1/2]$. По определению умножения петель имеем

$$\psi_0(s)\varphi_{2t}(s) = \begin{cases} \varphi_{2t}(2s) & : \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ \psi_0(2t-1) & : \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} \tag{14.5}$$

Если $s_0 \leqslant \frac{1}{2}$, то непрерывность Φ в точке (s_0, t_0) вытекает из непрерывности F. Аналогичным образом непрерывность G влечёт непрерывность

Φ при $s \geqslant \frac{1}{2}$. Пусть теперь $s_0 = \frac{1}{2}$ и $x_0 = \Phi(1/2, t_0)$. Из (14.5) и непрерывности F вытекает существование таких окрестностей $Os_0 \subset S^1$ и $Ot_0 \subset [0, 1/2]$, что

$$\varphi_{2t}(2s) \in Ox_0 \quad \text{при} \quad (s,t) \in Os_0 \times Ot_0. \tag{14.6}$$

В силу непрерывности ψ_0 находим такую окрестность $O_1 s_0$, что $\psi(O_1 s_0) \subset Ox_0$. Тогда из (14.4) и (14.5) вытекает, что

$\Phi\big((Os_0 \cap O_1 s_0) \times Ot_0\big) \subset Ox_0$.

Таким образом, непрерывность отображения Φ при $t \leqslant 1/2$ доказана. Аналогичным образом доказывается непрерывность Φ при $t \geqslant 1/2$. □

Итак, формула (14.1) вместе с Леммой 14.8 определяет умножение в множестве $\pi_1(X, x_0)$, удовлетворяющее равенству (14.2).

14.9. Группа $\pi_1(X, x_0)$. 1. Для отображения $\mathrm{const} : S^1 \to \{x_0\} \in X$ имеют место равенства

$$\mathrm{const} \circ \varphi = \varphi, \quad \varphi \circ \mathrm{const} = \varphi$$

для любой петли $\varphi : S^1 \to (X, x_0)$. Поэтому из (14.2) вытекает, что гомотопический класс [Const] является левой и правой *единицей* в множестве $\pi_1(X, x_0)$.

2. *Обратным* к элементу $[\varphi]$ является элемент $[\varphi^{-1}]$, где петля φ^{-1} определяется следующим образом:

$\varphi^{-1}(t) = \varphi(1-t)$.

Действительно, переводя точку $(s,t) \in S^1 \times I$, где длина S^1 равна 1, в точку

$$\begin{cases} \varphi(2s), & \text{если} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1-t}{2}, \\ \varphi(1-t), & \text{если} \quad \frac{1-t}{2} \leqslant s \leqslant \frac{1+t}{2}, \\ \varphi(2-2s), & \text{если} \quad \frac{1+t}{2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

получаем гомотопию, связывающую петлю $\varphi\varphi^{-1}$ с постоянной петлёй const.

3. Наконец, умножение в $\pi_1(X, x_0)$ *ассоциативно*. В самом деле, пусть $\varphi, \psi, \chi \in \pi_1(X, x_0)$. Тогда, переводя точку $(s,t) \in S^1 \times I$ в точку

$$\begin{cases} \varphi\big(\frac{4s}{t+1}\big), & \text{если} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{t+1}{4}, \\ \psi(4s-t-1), & \text{если} \quad \frac{t+1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{t+2}{4}, \\ \chi\big(\frac{4s-t-2}{2-t}\big), & \text{если} \quad \frac{t+2}{4} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

получаем гомотопию, соединяющую петлю $(\varphi\psi)\chi$ с петлёй $\varphi(\psi\chi)$.

Зависимость от отмеченной точки

14.10. Теорема. *Если пространство X линейно связно, то группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны для любых точек $x_0, x_1 \in X$.*

Доказательство. Поскольку X линейно связно, существует путь $\alpha : I \to X$, для которого $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$. Кроме того, имеется тождественный путь, обратный путь и верен закон ассоциативности для перемножения путей. Положим

$$\alpha_\#[\varphi] = \big[(\alpha\varphi)\alpha^{-1}\big]. \tag{14.7}$$

Можно перемножать не только петли, но и пути, лишь бы только второй путь начинался там где кончается первый. Путь α определяет отображение $\alpha' : \Omega_{x_0}(X) \to \Omega_{x_1}(X)$, где $\Omega_x(X)$ - множество всех петель, начинающихся и заканчивающихся в точке x, по следующему правилу $\alpha'(\varphi) = \alpha\varphi\alpha^{-1}$. Стоит отметить, что в последнем равенстве, как и в равенстве (14.7), пути α, φ и α^{-1} рассматриваются как отображения. Поэтому их композиция выполняется справа налево. Петля $\alpha'(\varphi)$ начинается и заканчивается в точке x_1. Так же, как Лемма 14.8, доказывается, что при замене пути α в (14.7) гомотопным путём β (подразумеваются гомотопии с закреплёнными концами) равенство (14.7) остаётся верным, т.е. $\beta_\#(\varphi) = \alpha_\#(\varphi)$. Поэтому оно определяет отображение

$\alpha_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$.

Равенство

$$\alpha_\#^{-1}[\psi] = [\alpha^{-1}\psi\alpha] \tag{14.8}$$

определяет отображение

$\alpha_\#^{-1} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$,

являющееся обратным к отображению $\alpha_\#$. В самом деле,

$\alpha_\#^{-1}\big(\alpha_\#[\varphi]\big) = \alpha_\#^{-1}\big[(\alpha\varphi)\alpha^{-1}\big] = \big[\alpha^{-1}(\alpha\varphi)\alpha^{-1}\alpha\big] = [\varphi]$,

поскольку путь $\alpha^{-1}\alpha$ гомотопен постоянному пути. Аналогичным образом доказывается, что композиция $\alpha_\#\alpha_\#^{-1}$ является тождественным отображением группы $\pi_1(X, x_1)$.

Покажем, что $\alpha_\#$ - гомоморфизм. Возьмём элементы $[\varphi_1], [\varphi_2] \in \pi_1(X, x_0)$. Тогда

$\alpha_\#\big([\varphi_1]\cdot[\varphi_2]\big) = (14.2) = \alpha_\#[\varphi_1\varphi_2] = [\alpha\varphi_1\varphi_2\alpha^{-1}] = [\alpha\varphi_1\alpha^{-1}\cdot\alpha\varphi_2\alpha^{-1}] = (14.2) = [\alpha\varphi_1\alpha^{-1}] \cdot [\alpha\varphi_2\alpha^{-1}] = \alpha_\#[\varphi_1] \cdot \alpha_\#[\varphi_2]$.

Для единичного элемента $e_{x_0} = [\varphi_0]$, где φ_0 - постоянная петля, имеем $\alpha_\#(e_{x_0}) = [\alpha\varphi_0\alpha^{-1}] = [\alpha\alpha^{-1}] = e_{x_1}$, поскольку путь $\alpha\alpha^{-1}$ гомотопен постоянному пути в точке x_1.

Итак, $\alpha_\#$ - гомоморфизм, для которого имеется обратное отображение. Следовательно, $\alpha_\#$ - изоморфизм. $\square$

14.11. Замечание. Из Теоремы 14.10 следует, что для линейно связного пространства X группы $\pi_1(X, x_0)$ в различных точках $x_0 \in$

X изоморфны между собой и могут рассматриваться как одна группа $\pi_1(X)$, которая называется *фундаментальной группой* линейно связного пространства X.

14.12. Определение. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если любые два такие пути $\alpha_1 : I \to X$ и $\alpha_2 : I \to X$, что $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = x_0,\ \ \alpha_1(1) = \alpha_2(1) = x_1$, принадлежат одному гомотопическому классу путей с закреплёнными концами.

14.13. Теорема. *Линейно связное пространство X односвязно тогда и только тогда, когда $\pi_1(X) = 0$.*

Доказательство. Пусть X односвязно. Возьмём произвольный класс $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ и единичный класс $e = [\varphi_0]$, где φ_0 - тождественная петля в точке x_0. Рассмотрим два пути $\alpha_1 = \varphi : I \to (X, x_0),\ \ \alpha_2 = \varphi_0 I \to (X, x_0)$. Эти пути имеют совпадающие начало и конец: $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi_0(0) = \varphi_0(1) = x_0$. Следовательно, петля φ гомотопна петле φ_0; откуда следует, что $[\varphi] = e$. Ввиду произвольности $[\varphi]$ получаем, что $\pi_1(X, x_0) = 0$ и, следовательно, $\pi_1(X) = 0$.

Пусть теперь $\pi_1(X, x) = 0$ в точке $x \in X$, которую можно считать произвольной в силу Теоремы 14.10. Рассмотрим два пути α_1 и α_2 в X с общими началом x_0 и концом x_1. Покажем, что эти пути гомотопны как отображения $\alpha_i : I \to X$ с закреплёнными концами. Образуем петлю $\varphi = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$ в точке x_0. По определению произведения двух путей (мы их, как и раньше, рассматриваем как композицию отображений) с учётом равенства $\alpha_2^{-1}(s) = \alpha(1-s)$, получаем, что

$$\varphi(t) = \big(\alpha_2^{-1} \cdot \alpha_1\big)(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \alpha_2(2-2t), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Полагая $x = x_0$, имеем $\pi_1(X, x_0) = 0$ по условию. Следовательно, петля φ гомотопна постоянной петле φ_0 в точке x_0. Гомотопию представим в виде

$$\Phi(t,\tau) = \begin{cases} A_1(2t,\tau), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ A_2(2-2t,\tau), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $A_1(2t,\tau),\ A_2(2-2t,\tau)$ - гомотопии путей $\alpha_1,\ \alpha_2$ в постоянный путь в точке x_0, а τ - параметр гомотопии, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\Phi(t,1) = \varphi(t),\ \Phi(t,0) = \varphi_0$. Фиксируем точки $\alpha_1(s),\ \alpha_2(s)$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$. Этим точкам на петле φ соответствуют значения параметра $t = s/2 \leqslant 1/2$ и $t = 1 - s/2 \geqslant 1/2$. Зададим путь $\psi(t)$ движением точки $\alpha_1(s)$ в точку $\alpha_2(s)$ следующим образом:

$$\psi_s(\tau) = \begin{cases} \Phi(s/2, 1-2\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant 1/2, \\ \Phi(1-s/2, 2\tau-1), & 1/2 \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases} \tag{14.9}$$

Геометрически это означает, что точка $\alpha_1(s)$ движется по траектории, задаваемой гомотопией $\Phi(t, \tau)$ в точку x_0 и далее - в точку $\alpha_2(s)$. Поскольку выбор $s \in [0, 1]$ произволен, формула (14.9) задаёт гомотопию пути α_1 в α_2. Функция ψ непрерывна по совокупности аргументов. Следовательно, ψ - непрерывная гомотопия, и пути α_1 и α_2 принадлежат одному гомотопическому классу закреплённых путей. $\square$

Лекция 15

Вычисление фундаментальных групп

15.1. Теорема. *Группа* $\pi_1(S^1)$ *изоморфна группе* $\mathbb{Z}$ *целых чисел.*

Доказательство. Каждой точке окружности S^1 мы обычным образом сопоставим вещественное число, определённое с точностью до слагаемого $2\pi k$. Отмеченной точкой считаем 0. Петля $f : I \to S^1$ превращается в многозначную функцию на отрезке I, значение которой в каждой точке определено с точностью до слагаемого $2\pi k$ и $f(0) = f(1) = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

У этой многозначной функции имеется непрерывная однозначная ветвь - непрерывная функция на отрезке I, значение которой в каждой точке принадлежит множеству значений в этой точке функции f. Такая однозначная функция $f^{\#}$ будет определена однозначно, если наложить на неё дополнительное условие $f^{\#}(0) = 0$. Приведём детали построения функции $f^{\#}$. Разобьём отрезок I на n отрезков $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad k = 0, \dots, n-1$. Выберем n так, чтобы никакое множество $f(I_k)$ не покрывало всю окружность S^1. Как было отмечено выше, мы полагаем $f^{\#}(0) = 0$. При $x \in I_0$ мы берём в качестве $f^{\#}(x)$ то из значений функции f в точке x, которое отличается от 0 меньше, чем на 2π. Такой выбор однозначен. Далее, при $x \in I_1$ берём в качестве $f^{\#}(x)$ то из значений функции f, которое меньше, чем на 2π, отличается от $f^{\#}(1/n)$. И т.д. (см. Рис. 15.1).

Выделим два важных свойства функции $f^{\#}$: её значение в точке 1 кратно 2π и она непрерывно зависит от f в том смысле, что если $\{f_t\}$ - гомотопия, то $\{f_t^{\#}\}$ - также гомотопия. Заметим ещё, что всякая непрерывная функция F на отрезке I, такая, что $F(0) = 0$ и $F(1)$ кратно 2π служит функцией $f^{\#}$ для некоторой петли f.

Для завершения доказательства Теоремы 15.1 осталось сделать несколько простых замечаний. Во-первых, число $k = f^{\#}(1)/2\pi$ не меняется при

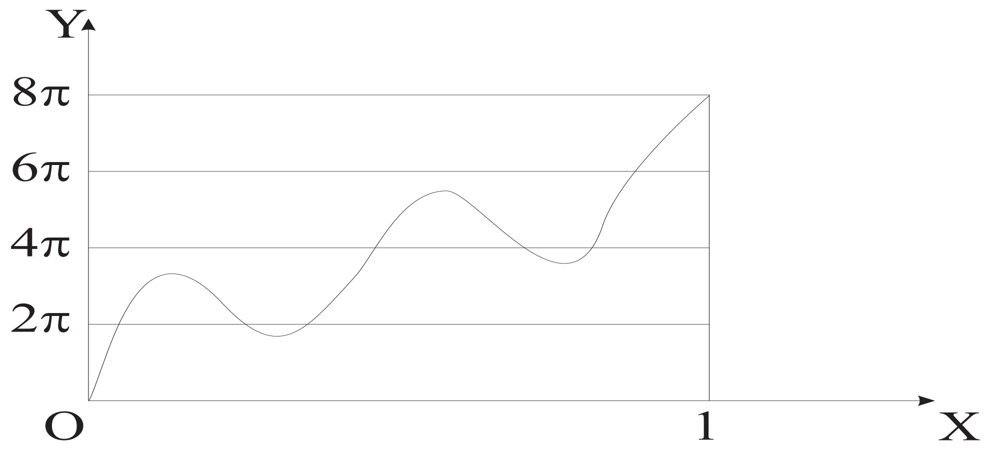

Рис. 15.1:

гомотопии, поскольку область возможных значений $f^{\#}(1)$ дискретна. Таким образом, это число зависит от элемента $[f]$ группы $\pi_1(S^1)$. Во-вторых, всякое число $k \in \mathbb{Z}$ может быть получено таким образом: достаточно взять $f = h_k$, где $h_k^{\#}(x) = 2\pi kx$ (см. Рис. 15.2)

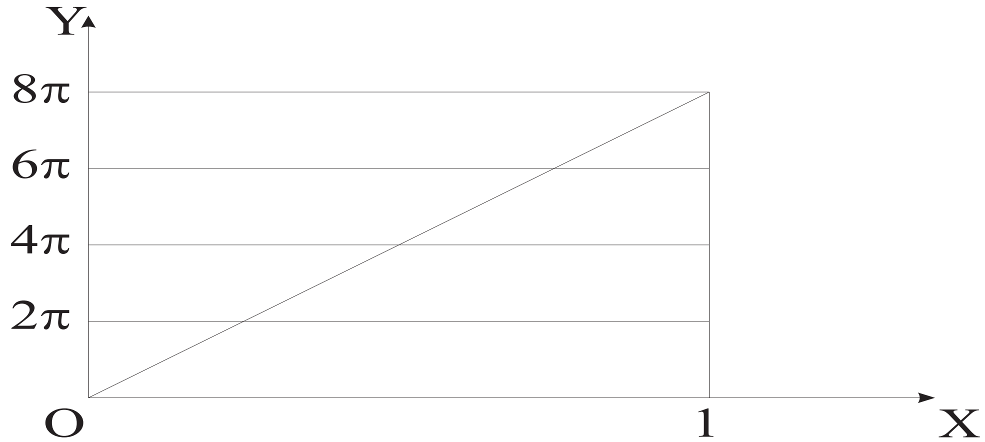

Рис. 15.2:

В-третьих, если $f_1^{\#}(1) = f_2^{\#}(1)$, то $f_1 \sim f_2$: функции $f_1^{\#}$ и $f_2^{\#}$ гомотопны в классе функций с заданными значениями в 0 и 1. Так, функции изображённые на Рис. 15.1 и Рис. 15.2, соединяются вертикальной гомотопией:

$$f_t(x) = (1-t)f^{\#}(x) + th_4^{\#}.$$

Наконец, в-четвёртых, произведение $h_k h_l$ петель h_k и h_l гомотопно петле h_{k+l}, так как $\big(h_k h_l\big)^{\#}(1) = h^{\#}_{k+l}(1)$. Итак, ставя в соответствие числу $k = f^{\#}(1)/2\pi$ элемент $[f]$ группы $\pi_1(S^1)$, получаем отображение $H : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$. Согласно второму замечанию отображение H сюръективно. По третьему замечанию H инъективно. В силу четвёртого замечания, отображение $H^{-1} : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ является гомоморфизмом. Теорема доказана. $\square$