Вопросы:

1. Мощность множества. Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах.
2. Терема Кантора о множестве всех подмножеств.
3. Вполне упорядоченные множества. Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества.
4. Структура открытого множества на прямой.
5. Открытость шаровой окрестности.
6. Счетная база подмножеств евклидового пространства.
7. Плотность подмножества рациональных чисел на вещественной прямой.
8. Непрерывность композиции непрерывных отображений.
9. Непрерывность сужения непрерывного отображения.
10. Непрерывность объединения непрерывных отображений.
11. Эквивалентность определений непрерывности по Коши и по Гейне.
12. Гомеоморфность интервалов различной длины.
13. Гомеоморфность открытого диска и евклидового пространства.
14. Гомеоморфность открытого диска и открытого куба.
15. Гомеоморфность замкнутого диска и замкнутого куба.
16. Гомеоморфность плоскости без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ и открытого круга без точки $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
17. Гомеоморфность двумерного тора $\mathbb{T}^2$ и декартового произведения окружностей $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
18. Замкнутость графика непрерывного отображения.
19. Аксиомы отделимости:
    T^0, T^1, T^2, T^3, T^4, регулярные, нормальные пространства.
20. Пример хаусдорфова нерегулярного пространства.
21. Пример регулярного ненормального пространста (плоскость Немыцкого)
22. Хаусдорфовость тихоновского произведения.
23. Хаусдорфовость метрического пространства.
24. Нормальность метрического пространства.
25. Лемма Урысона.
26. Теорема Титце-Урысона.
27. Разбиение единицы.

28. Теорема Урысона о метризуемости нормального пространства со второй аксиомой счетности.

29. Компактные топологические пространства. Непрерывный образ компактного пространство.

30. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства.

31. Критерий компактности подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

32. Нормальность хаусдорфова компактного пространства.

33. Компактность декартового произведения компактных пространств.

34. Равносильность компактности и секвенциальной компактности метрических пространств

35. Теорема Стоуна-Вейерштрасса о подалгебре функций, разделяющей точки.

36. Гомотопия непрерывного отображения. Категорные свойства гомотопии.

37. Гомотопическая эквивалентность топологических пространств. Категорные свойства.

38. Стягиваемость евклидового пространства.

39. Гомотопическая эквивалентность окружности и $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

40. Накрытия. Аксиома о накрывающей гомотопии.

41. Фундаментальная группа пунктированного топологического пространства. Корректность определения групповой структуры.

42. Функториальные свойства фундаментальных групп.

43. Поведение фундаментальной группы при перемене отмеченной точки.

44. Связь фундаментальных групп пространства и его накрытия.

45. Универсальное накрытие окружности.

46. Вычисление фундаментальной группы окружности.

47. Фундаментальная группа декартового произведения пространств.

48. Теорема ван Кампена (для букета двух пространств).

49. Построение универсального накрытия.

50. Построение накрытия по подгруппе фундаментальной группы.

51. Теорема Нильсена-Шрайера о свободности подгруппы свободной группы.

52. Гомотопическое доказательство основной теоремы алгебры о корнях комплексного многочлена.

53. Теорема об отсутствии ретракции двумерного диска на окружность.

54. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

55. Симплекс, симплициальные пространства, кусочно линейные отображения, барицентрические координаты, барицентрическое подразделение

56. Теорема о симплициальной аппроксимации.

57. Фундаментальная группа графа

58. Конечная порожденность фундаментальной группы конечного симплициального пространства.

59. Конечная представимость фундаментальной группы конечного симплициального пространства.

60. Зависимость фундаментальной группы от двумерного остова симплициального пространства.

Задачи:

1. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ тоже является метрикой.

2. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентными?

3. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1\}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентными?

4. Докажите, что следующая функция в $\mathbb{R}^n$ есть метрика: $\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$.

5. Докажите, что следующая функция в $\mathbb{R}^n$ есть метрика: $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

6. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ является непрерывной.

7. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения, причем $0 \notin g(X)$. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ является непрерывной.

8. Пусть $GL(n; \mathbb{R}) \subset \mathbf{Mat}\ (p \times n, \mathbb{R})$ — пространство обратимых матриц. Показать, что отображение $f : GL(n; \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n; \mathbb{R}), \quad f(A) = A^{-1}$ является непрерывным.

9. Привести пример последовательности непрерывных функций $f_i : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i \in \mathbf{N}$, для которой функция $f(x) = \mathsf{sup}\ \{f_i(x) : i \in \mathbf{N}\}$ не является непрерывной.

10. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества на отрезок $[0, 1]$.

11. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества K на его квадрат $K \times K$.

12. Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}^2$, у которого образ $f(\mathbf{I}) \subset \mathbf{I}^2$ всюду плотен, является сюръекцией.

13. Привести пример двух гомеоморфных пространств X и Y и биекции $f : X \longrightarrow Y$, которая не является гомеоморфизмом.

14. Пусть $\mathbf{S}^1$ – окружность и $s_0 \in \mathbf{S}^1$ –точка на окружности. Доказать, что пространство $\mathbf{S}^1 \setminus \{s_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}$.

15. Доказать, что если множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равномощны, то и множества A иB равномощны.

16. Доказать, что всякое подмножество счетного множества является счетным множеством.

17. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

18. Доказать, что если A и B — счетные множества, то их объединение $A \cup B$ — счетное множество.

19. Доказать, что объединение счетного семейства счетных множеств есть множество счетное.

20. Показать, что множество вещественных чисел несчетно.

21. Показать, что на бесконечном полуинтервале $X = (0, +\infty)$ семейство подмножеств $\{\emptyset, (a, +\infty), 0 \le a < +\infty\}$ образует некоторую топологию.

22. Показать что множество $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ замкнуто на вещественной прямой $\mathbf{R}$.

23. Показать, что если множество U открыто, а множество F замкнуто, то $U \setminus F$ открыто, а $F \setminus U$ замкнуто.

24. Приведите пример пространства, в котором все одноточечные множества замкнуты и одновременно любые два непустых открытых множества пересекаются).

25. Верно ли, что объединение плотных подмножеств плотно?

    Верно ли, что пересечение плотных подмножеств плотно?

26. Покажите, что пересечение двух (конечного семейства) плотных открытых подмножеств плотно.

27. Пусть $C[0,1]$ – пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Доказать, что функция $\rho(f,g) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ задает метрику на пространстве $C[0,1]$.

28. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$ тоже является метрикой.

29. Докажите, что для любого топологического пространства X множество $\pi(X, \mathbb{I})$ состоит из одного элемента.

30. Докажите, что число элементов множества $\pi(\mathbb{I}, Y)$ совпадает с числом компонент линейной связности пространства Y.

31. Показать, что любые два непрерывных отображения $f, g : \longrightarrow \mathbb{R}^n$ гомотопны.

32. Пусть $\mathbf{S}^n$ – n–мерная сфера и $s_0 \in \mathbf{S}^n$ –точка на сфере. Доказать, что пространство $\mathbf{S}^n \setminus \{s_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

33. Докажите, что вся плоскость $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна открытой полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

34. Докажите, что замкнутый круг $\mathbf{D}^2$ гомеоморфен квадрату $\mathbf{I}^2$.

35. Докажите, что полуплоскость $\{x \ge 0\}$ гомеоморфна квадранту $\{x, y \ge 0\}$.

36. Пусть отображения $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в сферу радиуса 1 удовлетворяют неравенству $|f(x) - g(x)) < 2$. Доказать, что отображения f и g гомотопны.

37. Докажите, что полуплоскость $\{x \ge 0\}$ гомеоморфна квадранту $\{x, y \ge 0\}$.

38. Докажите, что плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ гомеоморфна плоскости без круга $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$.

39. Показать, что подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, A замкнуто и ограничено.

40. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция f, такая, что $K = f^{-1}(0)$.

41. Связно ли пространство $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$)? Связно ли пространство иррациональных чисел?

42. Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.

43. Связно ли подмножество плоскости, составленное из точек, у которых хотя бы одна из координат рациональна?

44. Показать, что компоненты связности замкнуты.

45. Найдите два негомотопных отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$.

46. Докажите, что если множества A и B оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то A и B тоже линейно связны.

47. Пусть отображения $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n \subset \{0\}$ удовлетворяют неравенству $|f(x) - g(x)) < |f(x)|$. Доказать, что отображения f и g гомотопны.

48. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$ и двоеточие на ней $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^2$. Доказать, что фактор пространство $\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^0$ и букет $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ гомотопически эквивалентны.

49. Показать, что если у тора стянуть в точку конечное число меридиан, то получится букет некоторого числа сфер и окружности.

50. Построить деформационную ретракцию тора с выколотой точкой на букет меридиана и параллели.

51. Построить деформационную ретракцию $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$.

52. Показать, что у стягиваемого пространства ретракт тоже стягиваемый. Но если ретракт есть стягиваемое пространство, но само пространство не обязано быть стягиваемым.

53. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ непрерывное отображение, являющееся гомотопической эквивалентностью. Доказать, что два отображения $g_0, g_1 : Z \longrightarrow X$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны композиции $f \cdot g_0, f \cdot g_1 : Z \longrightarrow Y$.

54. Показать, что два любых непрерывных отображения произвольного пространства в выпуклое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ гомотопны.

55. Показать, что если у каждой точки пространства X имеется связная окрестность, то каждая его компонента связности открыта.

56. Докажите, что всякое несюръективное непрерывное отображение произвольного топологического пространства в сферу $\mathbb{S}^n$ гомотопно постоянному отображению.

57. Докажите, что если пространство снабжено структурой группы и умножение на любой элемент группы является непрерывным отображением, то связная компонента единицы является нормальной подгруппой.

58. Докажите гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц $\mathbb{SO}(3)$ и трехмерного вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}_3$.

59. Докажите, что если у пространства имеется счетная база, то имеется счетное плотное подмножество.

60. Докажите, что одномерный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.