"Введение в топологию",
Задачи, второй курс,
осень 2017-2018 уч.год.
8 занятий (начальная)

А.С.Мищенко

2 сентября 2017 г.

1 Программа по разделам

1.1 Язык теории множеств

1.2 Метрические и топологические пространства. Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

1.3 Непрерывные отображения

1.4 Конструкции топологических пространств.

1.5 Аксиомы отделимости

1.6 Компактные пространства

1.7 Теория гомотопий

1.8 Теория гомологий

Задачи составлены при использовании списков задач лекторов в различные годы:

1. Профессор И.А.Дынников,
2. Профессор К.Л.Козлов,
3. Профессор А.С.Мищенко.
4. Профессор Б.А.Пасынков,
5. Профессор В.В.Федорчук,

2 Программа в деталях

2.1 Язык теории множеств

1. Приведите пример непустого множества, каждый элемент которого является некоторым подмножеством этого множества.

2. Для каждого целого $n > 0$ постройте множество A_n, состоящее ровно из n элементов, такое, что для любых $a \in A_n$, $a' \in A_n$ либо $a \in a'$, либо $a' \in a$.

3. Постройте такие множества A, B и C, что $A \in B$ и $B \in C$, но $A \notin C$.

2.1.1 Законы де Моргана

4. Докажите, что для любого множества A выполняются следующие свойства:

   (A) $A \cap A = A$,

   (B) $A \cup A = A$,

   (C) $A \cup \emptyset = A$,

   (D) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

5. Докажите, что для любых множеств A и B включение $A \subset B$ выполняется тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$ или когда $A \cup B = B$.

6. Докажите, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, и $A \cup B = B$.

7. Докажите, что для подмножеств $A, B \subset X$ включение $A \subset B$ эквивалентно включению $(X \setminus B) \subset (X \setminus A)$.

8. Для любых двух множеств A и B имеет место следующее несвязное объединение

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A).$$

9. Для любых двух множеств A и B имеет место следующее несвязное объединение

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

10. Для любых двух множеств A и B условие $A \subset B$ эквивалентно условию $A \setminus B = \emptyset$.

11. Докажите, что $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

12. Докажите, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

13. Обозначим через $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Докажите, что
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

2.1.2 Мощность множества

14. Доказать, что если множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равномощны, то и множества A иB равномощны.

15. Пусть мощность конечного множества A равна n. Какова мощность множества 2^A всех его подмножеств (включая само множество A и пустое множество)?

16. Доказать, что множество X конечно в том и только в том случае, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству.

17. Пусть множество A состоит из n элементов, а множество B — из m элементов. Если $A \subset B$, то $n \leq m$.

18. Доказать, что всякое подмножество счетного множества является счетным множеством.

19. Доказать, что в каждом бесконечном множестве существует бесконечное счетное подмножество.

20. Доказать, что каждое бесконечное счетное множество можно представить как несвязное объединение двух непересекающихся бесконечных (тоже счетных) подмножеств.

21. Доказать, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счётно.

22. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

23. Доказать, что если и — счетные множества, то их объединение $A \cup$ — счетное множество.

24. Доказать, что объединение счетного семейства счетных множеств есть множество счетное.

25. Доказать, что если множества X и Y счетны, то декартово произведение $X \times Y$ тоже счетно.

26. Доказать, что множество многочленов с рациональными коэффициентами не более чем счетно.

27. Доказать, что множество алгебраических чисел не более чем счетно.

28. Показать, что если отображение $f : X \longrightarrow Y$ сюръективно, а множество X счетно, то Y не более чем счетно.

29. Показать, что если отображение $f : X \longrightarrow Y$ инъективно, а множество Y счетно, то X не более чем счетно.

30. Показать, что если множество X счетно, то множество всех конечных подмножеств в X тоже счетно.

31. Показать, что множество вещественных чисел несчетно.

32. Канторово множество С имеет мощность континуума, т.е. равномощно отрезку.

33. Доказать, что если X — несчетное множество, а A — его счетное подмножество, то $\#(X \setminus A) = \#(X)$.

34. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассыпаны "кнопки"без пересечений, т.е. такие подмножества, каждое из которых состоит из объединения трех отрезков с общим началом. Доказать, что семейство таких "кнопок"не более чем счетно.

35. Показать, что множество иррациональных чисел несчетно.

36. Показать, что множество трансцендентных чисел несчетно.

2.2 Метрические и топологические пространства. Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств.

2.2.1 Метрические пространства.

1. Может ли шар большего радиуса содержаться в шаре меньшего радиуса?

2. Доказать, что в метрическом пространстве любая последовательность точек не может иметь более одного предела.

3. Построить непрерывное отображение канторова множества на отрезок.

4. Докажите, что для любого подмножества A метрического пространства (X, ρ) функция $f_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_A(x) = \mathbf{inf}\{\rho(x, a) : a \in A\}$, непрерывна. Всегда ли существует точка $a \in A$ такая, что $f_A(x) = \rho(x, a)$?

5. Отображение метрических пространств $f : X \longrightarrow Y$ называется изометрическим вложением, если для любых точек $x, y \in X$ выполнено условие $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y))$. Доказать, что любое изометрическое вложение непрерывно.

6. Отображение f метрического пространств X в себя называется сжимающим, если существует α, $0 < \alpha < 1$, такое, что для любых точек $x, y \in X$ выполнено неравенство $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства X непрерывно.

7. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя имеет неподвижную точку.

8. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не изометрично $\mathbb{R}^m$ при $n \neq m$.

9. Доказать, что для любое пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) может быть изометрично вложено в $\lessdot_2$.

10. Любое ли конечное метрическое пространство изометрически вложимо в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой)? в $\lessdot_2$?

11. Для всякой ли изометрии f пространства $\lessdot_2$ существует точка p такая, что $f(p) = p$?

12. Доказать, что канторовы множества, получаемые выкидыванием "интервалов различной длины не изометричны.

13. Может ли пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) быть изометрично своему собственному подмножеству? А пространство l_2?

2.2.2 Метрики.

1. Рассмотрим на плоскости две точки $s = (x_s, y_s)$, $q = (x_q, y_q)$. Определим функции:

   (ρ_d): $\rho_d(s, q) = 1,$ если $s \neq q$, $\rho_d(s, q) = 0,$ если $s = q$;

   (ρ_p): $\rho_p(s, q) = (|x_s - x_q|^p + |y_s - y_q|^p)^{1/p} \quad , p > 1;$

   (ρ_∞): $\rho_\infty(s, q) = \mathbf{max}|x_s - x_q|, |y_s - y_q|;$

   (ρ_j): $\rho_j(s, q) = |y_s - y_q|$, если $x_s = x_q$, $\rho_j(s, q) = |x_s - x_q| + |x_s - x_q|$, если $x_s \neq x_q$.

   Проверить, что они являются метриками.

2. Докажите, что в множестве $C[0, 1]$ всех непрерывных отображений $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ следующие функции

   (ρ_p): $\rho_p(f, g) = \left(\int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1;$

   (ρ_∞): $\rho_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \quad x \in [0, 1]\}$

   являются метриками.

3. Пусть $f : X \longrightarrow R$ — произвольная инъективная функция на множестве X. Докажите, что отображение $\rho : X \times X \longrightarrow R$, $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$, является метрикой на X.

4. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ заданные формулами

$$\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$$

и

$$\rho_2(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

являются метриками на множестве X. Сравнить открытые и замкнутые шары метрик ρ, ρ_1 и ρ_2.

2.2.3 Сравнения топологических операций.

1. Доказать, что любое открытое подмножество прямой является объединением счетного числа интервалов.

2. Могут ли различные топологии на множестве X индуцировать одинаковые топологии на подмножестве $A \subset X$?

3. Сравнить на $\mathbb{R}$ евклидову топологию; топологию, базой которой являются множества $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$ (прямая Зоргенфрея); и топологию, замкнутыми множествами которой являются $\mathbb{R}$ и множества корней многочленов одной переменной (топология Зарисского).

4. Доказать:

   - $\mathbf{Cl}A = A \cup \mathbf{Bd}A$;
   - $\mathbf{Int}\ A = A \setminus \mathbf{Bd}A$;
   - $\mathbf{Bd}A = \mathbf{Cl}A \setminus \mathbf{Int}\ A$;
   - $X \setminus \mathbf{Bd}A = \mathbf{Int}\ A \cup \mathbf{Int}\ (X \setminus A)$;
   - A замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathbf{Bd}A \subset A$;
   - A открыто тогда и только тогда, когда $\mathbf{Bd}A \cap A = \emptyset$;
   - $A^d \setminus A = \mathbf{Bd}A \setminus A$, где A^d — предельные точки A (точка x подмножества A называется предельной, если для ее любой окрестности Ox имеем $(Ox \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$;
   - A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^d \subset A$.

5. Выяснить, справедливы ли следующие соотношения:

   - если $A \subset B$, то $\mathbf{Int}\ A \subset \mathbf{Int}\ B (\mathbf{Cl}A \subset \mathbf{Cl}B)$;
   - $\mathbf{Int}\ (A \cap B) = \mathbf{Int}\ A \cap \mathbf{Int}\ B$,
     $\mathbf{Cl}(A \cap B) = \mathbf{Cl}A \cap \mathbf{Cl}B$,
     $\mathbf{Bd}(A \cap B) = \mathbf{Bd}A \cap \mathbf{Bd}B)$;

- $\mathbf{Int}\ (A \cup B) = \mathbf{Int}\ A \cup \mathbf{Int}\ B$,
  $\mathbf{Cl}(A \cup B) = \mathbf{Cl}A \cup \mathbf{Cl}B$,
  $\mathbf{Bd}(A \cup B) = \mathbf{Bd}A \cup \mathbf{Bd}B)$;
- $\mathbf{Cl}A = \mathbf{Cl}(\mathbf{Cl}A)$,
  $\mathbf{Int}\ A = \mathbf{Int}\ (\mathbf{Int}\ A)$;
- $\mathbf{Bd}(X \setminus A) = \mathbf{Bd}A$,
  $\mathbf{Bd}(\mathbf{Cl}A) \subset \mathbf{Bd}A$,
  $\mathbf{Bd}(\mathbf{Int}\ A) \subset \mathbf{Bd}A$;
- $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

6. Привести пример метрического пространства и открытого шара в нем таких, что замыкание шара не совпадает с замкнутым шаром того же радиуса.

7. Доказать, что подмножество A метрического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда предел всякой сходящейся последовательности точек из множества A принадлежит также множеству A (т.е. точка x принадлежит замыканию множества A в том и только том случае, когда $\mathbf{inf}\{\rho(x, y) : y \in A\} = 0$).

8. Доказать, что конечномерное подпространство нормируемого линейного пространства замкнуто.

9. Для каких $n \in \mathbb{N}$ на прямой можно построить n открытых множеств, имеющих одну и ту же границу.

2.2.4 Сравнения топологий.

1. Рассмотрим множество V , полученное из счетного дизъюнктного объединения отрезков $[0, 1]$ отождествлением всех их начальных точек. Иначе говоря, V есть фактормножество множества $N \times [0, 1]$ по следующему отношению эквивалентности: $(k, x) \sim (l, y)$, если и только если $(k, x) = (l, y)$ или $x = y = 0$. На множестве V рассмотрим следующие топологии:

   - T^1 — фактортопология, на каждом экземпляре отрезка топология стандартная;
   - T^2 — индуцированная топология при следующем вложении в бесконечное произведение $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \ldots$:
   $$(k, x) \mapsto \underbrace{0 \times 0 \times \cdots \times 0}_{k-1} \times x \times 0 \times 0 \times \ldots;$$
   - T^3 — индуцированная топология при следующем вложении в $\mathbb{R}^2$
   :
   $$(k, x) \mapsto \left(xcos\frac{2\pi}{k}, xsin\frac{2\pi}{k} \right);$$

- T^4 — индуцированная топология при следующем вложении в $\mathbb{R}^2$:

$$(k, x) \mapsto \left(x cos \frac{\pi}{k}, x sin \frac{\pi}{k} \right);$$

- T^5 — индуцированная топология при следующем вложении в $\mathbb{R}^2$:

$$(k, x) \mapsto \left(\frac{x}{k} cos \frac{2\pi}{k}, \frac{x}{k} sin \frac{2\pi}{k} \right);$$

- T^6 — индуцированная топология при следующем вложении в $\mathbb{R}^2$:

$$(k, x) \mapsto \left(\frac{x}{k} cos \frac{\pi}{k}, \frac{x}{k} sin \frac{\pi}{k} \right);$$

- T^7 — метрическая топология для метрики

$$\rho\left((k, x), (l, y)\right) = \begin{cases} |x - y|, & \text{если} \quad k = l, \\ x + y, & \text{если} \quad k \neq l; \end{cases}$$

Для каждой пары топологий из этого списка выяснить, какой из случаев имеет место: (а) топологии совпадают; (б) одна из топологий сильнее (какая?); (в) топологии несравнимы.

2. Показать, что топология T^1 из предыдущей задачи неметризуема, т.е. не является метрической топологией ни для какой метрики на V.

3. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Доказать, что каждая из функций

$$\rho_s\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt[s]{\rho_X(x_1, x_2)^s + \rho_Y(y_1, y_2)^s}$$

при $s \geq 1$ и

$$\rho_\infty\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \mathbf{max}\left(\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\right)$$

задает метрику на $X \times Y$, метрическая топология которой совпадает с топологией произведения.

4. Доказать, что топология бесконечного произведения $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \ldots$ совпадает с метрической топологией для метрики, в которой расстояние между двумя точками $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ задается формулой

$$\rho_s(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|^s}{i^2} \right)^{1/s},$$

где $s \geq 1$. Верно ли то же самое для метрики

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|?$$

2.2.5 Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств.

1. Отрезки вещественных числе $[a, b]$ гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.
2. Интервалы вещественных чисел (a, b) гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.
3. Полуинтервалы вещественных чисел $(a, b]$ и $[a, b)$ гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.
4. Открытый диск $\overset{\circ}{D^n}$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен $\mathbf{R}^n$.
5. Открытый куб $\overset{\circ}{I^n}= \prod_1^n (0, 1)$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен $\mathbf{R}^n$.
6. Замкнутый куб $I^n = \prod_1^n [0, 1]$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен замкнутому диску D^n.

2.2.6 Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. вся плоскость $\mathbb{R}^2$;
2. открытый квадрат;
3. открытая полуплоскость $\mathbb{C}^+$;
4. открытый круг;
5. открытый прямоугольник;
6. открытый квадрант;
7. открытый угол;
8. открытый полукруг;
9. открытый сектор;
10. плоскость с вырезанным лучом $\{y = 0, x \geq 0\}$;

Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. Полуплоскость $\{x \geq 0\}$;
2. квадрант $\{x, y \geq 0\}$;
3. угол $\{x \geq y \geq 0\}$;
4. полуоткрытая полоса $\{(x, y) : y \in [0, 1)\}$;
5. квадрат без трёх сторон (и всех вершин) $\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$;

6. квадрат без двух смежных сторон (и трех вершин) $\{(x,y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
7. квадрат без стороны (и двух вершин) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$;
8. квадрат без одной вершины $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\, xy < 1\}$;
9. круг без одной граничной точки $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y < 1\}$;
10. полукруг без диаметра $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$
11. круг без радиуса;

Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$;
2. открытый круг без точки $\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
3. кольцо $\{(x,y) : a < x^2 + y^2 < b\}$;
4. плоскость без круга $\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\}$;
5. плоскость без квадрата $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{I}^2$
6. плоскость без отрезка $\mathbb{R}^2 \setminus [0,1]$
7. дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где X есть объединение нескольких отрезков с общим концом;
8. дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где X есть незамкнутая конечнозвенная ломаная без самопересечений;

2.3 Непрерывные отображения

1. Построить непрерывное отображение канторова множества на отрезок.
2. Построить непрерывное отображения канторова множества на квадрат.
3. Постоянное отображение $f = \mathbf{const}_{\ y_0} : X \longrightarrow Y$, переводящее всё пространство X в точку $y_0 \in Y$.
4. Проектирование $\mathbf{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow R$, ставящее в соответствие точке (x_1, x_2) её первую координату.
5. Произвольному топологическому пространству X можно сопоставить его дискретный дубликат X_d , т.е. пространство на том же множестве X, наделенное дискретной топологией (см. п. 3.3). Тогда тождественное отображение $\mathbf{Id} : X_d \longrightarrow X$ непрерывно.

6. Топология пространства X_d порождается метрикой ($x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) = 1$).

7. Предложение (теорема о сложной функции). Если отображения $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow Z$ непрерывны, то непрерывна и их композиция $g \circ f : X \longrightarrow Z$.

8. **Следующие условия** на отображение $f : X \longrightarrow Y$ эквивалентны:

   (a) отображение f — непрерывно;

   (b) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено условие $\mathbf{Cl}(f^{-1}B) \subset f^{-1}(\mathbf{Cl}B)$;

   (c) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено условие $f^{-1}(\mathbf{Int}\ B) \subset \mathbf{Int}\ (f^{-1}B)$.

9. Привести пример непрерывного биективного отображения $f : X \longrightarrow Y$ пространств X и Y , не являющегося гомеоморфизмом. Можно ли считать $X = Y$?

10. Постройте гомеоморфизмы:

    (a) [0,1] на [a,b], a < b;

    (b) (0,1] на [0,1);

    (c) (0,1) на R

11. **Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:**

    (a) $\mathbb{R}^2$;

    (b) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1), y \in (0,1)\big\}$;

    (c) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\big\}$;

    (d) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\big\}$;

    (e) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\big\}$;

    (f) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 > x\big\}$;

    (g) $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\} \setminus (0,0,1)$ (сфера S^2 без точки).

12. Докажите, что всякая незамкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости гомеоморфна отрезку [0,1]. Докажите, что всякая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на плоскости гомеоморфна окружности S^1.

13. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

    (a) $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;

    (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

    (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;

    (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \in [0,1]\}$;

    (e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y = 0\}$.

14. Докажите, что сфера S^n с выкинутой точкой гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

15. Докажите, что квадрат $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ гомеоморфен кругу $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

16. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus \cap\{x_k : k = 1, ..., n\}$ (все точки различны) гомеоморфно $\mathbb{R}2 \setminus \cap\{D_k : k = 1, ..., n\}$, где D_k — попарно дизъюнктные замкнутые круги.

17. В шаровом слое просверлили цилиндрическое отверстие, соединяющее граничные сферы. Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару в пространстве.

18. Докажите, что пространства $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ попарно не гомеоморфны.

Пасынков еще

2.4 Конструкции топологических пространств.

2.5 Аксиомы отделимости

2.6 Компактные пространства

2.7 Теория гомотопий

2.8 Теория гомологий

Список литературы

[1] Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию,* "Наука Москва, 1977

[2] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии,* Москва, 2000

[3] О.Я.Виро и др. *Элементарная топология,*

[4] Allen Hatcher, *Algebraic Topology,* 2000.

[5] Постников, М.М. *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий,* М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

[6] Натансон, И.П. *Теория фунций вещественной переменной,* М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1974.

[7] Хаусдорф, Ф. *Теория множеств,* М.-Л., Главная редакция научно-технической литературы, 1937.