Задачи 02-11-2017 - 1

1 ноября 2017 г.   14:24

8.1. Докажите, что в регулярном пространстве для любых дизъюнктных замкнутого и компактного подмножеств существуют их дизъюнктные окрестности. Тем самым компактное хаусдорфово пространство нормально.

8.3. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{O}_1$ и компактная $\mathcal{O}_2$ топологии. Показать, что если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

8.4. Докажите, что отображение $f : X \to Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.

8.7. Докажите, что любое некомпактное метрическое пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подмножество.

8.8. Докажите, что на любом некомпактном метрическом пространстве X существует непрерывная функция $f : X \to (0, 1]$, для которой $\inf\{f(x) : x \in X\} = 0$.

8.9. Доказать, что любая непрерывная функция на метрическом компакте X равномерно непрерывна (т.е. для любой функции $f : X \to \mathbb{R}$ и любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что образ множества диаметра меньше δ имеет диаметр меньше ϵ).

3.6. Сравнить на $\mathbb{R}$ евклидову топологию; топологию, базой которой являются множества $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$ (прямая Зоргенфрея); и топологию, замкнутыми множествами которой являются $\mathbb{R}$ и множества корней многочленов одной переменной (топология Зарисского).

8.13. Рассмотрите линейное упорядочение на квадрате I^2: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что квадрат с интервальной топологией заданного линейного порядка (лексикографически упорядоченный квадрат) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабелен.

8.14. Докажите, что подмножество $(0,1]\times\{0\}\cup[0,1)\times\{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство "Две стрелки Александрова") компактно, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

8.16. Докажите, что открытое подмножество локально компактного хаусдорфова пространства локально компактно. Можно ли отказаться от условия хаусдорфовости?

8.20. Доказать, что в любое открытое покрытие пространства $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, можно вписать локально конечное покрытие (т.е. пространства $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, паракомпактны).

8.21. Показать, что любое (не обязательно открытое) локально конечное покрытие компакта конечно.

8.6x. Докажите, что одноточечная Александровская компактификация локально компактного хаусдорфова пространства — хаусдорфово компактное пространство.

8.7x. Покажите, что одноточечная Александровская компактификация пространства $\mathbb{R}^n$ гомеоморфна сфере S^n, $n\in\mathbb{N}$.

3

1 ноября 2017 г.   14:44

9.4. Какие из подмножеств пространства матриц $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ компактны:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$;

(c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$?

9.5. Докажите, что для любого компактного подмножества K метрического пространства X существуют точки $x, y \in K$ такие, что $\mathrm{diam} X = \rho(x, y)$.

9.2x. Докажите, что подмножество $X = \{x \in \ell_2 : |x_n| \leq 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ компактно. Гомеоморфно ли оно гильбертову кубу?

10.4. Предложение. *Всякая метрика ρ_1 на множестве X топологически эквивалентна метрике ρ_2 диаметра ≤ 1.*

10.1. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x, y) \leq k_2\rho_2(x, y)$ и $\rho_2(x, y) \leq k_1\rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

10.2. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$, заданные формулами $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ и $\rho_2(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$, эквивалентны метрике ρ.

10.6. Доказать, что метризуемое пространство X компактно в том и только том случае, если любая вещественная функция на X ограничена.

10.8. Доказать, что метризуемый компакт сепарабелен и удовлетворяет второй аксиоме счетности.