

"Введение в топологию",
программа, второй курс,
осень 2017-2018 уч.год.
16 лекций (итоговая)

А.С.Мищенко

23 августа 2017 г.

1 Программа по разделам

- 1.1 Язык теории множеств**
- 1.2 Метрические и топологические пространства. Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств**
- 1.3 Непрерывные отображения**
- 1.4 Конструкции топологических пространств.**
- 1.5 Аксиомы отделимости**
- 1.6 Компактные пространства**
- 1.7 Теория гомотопий**
- 1.8 Теория гомологий**

2 Программа в деталях

2.1 Язык теории множеств.

1. **Множество.** Подмножество. Пустое множество. Одноэлементное множество.
2. **Теоретико-множественные операции.** Объединение. Пересечение. Разность. Непересекающиеся множества.
3. **Соотношения операций с множествами.** Коммутативность. Ассоциативность. Дистрибутивность пересечения относительно объединения. Дистрибутивность объединения относительно пересечения. Двойственность объединения и пересечения (законы де Моргана).
4. **Отображения множеств.** Область определения отображения. Область значений отображения. Тожественное отображение. Образ подмножества. Прообраз подмножества. Прообраз элемента. Сужения отображений.
5. **Композиция отображений.** Инъективное отображение. Сюръективное отображение. Взаимно однозначное отображение. Обратное отображение. Равномощные множества.
6. **Конструкции множеств.** Несвязное объединение. Категорное свойство универсальности. Декартово произведение. Координаты декартова произведения. Декартово произведение семейства множеств. Векторное пространство \mathbf{R}^n как декартово произведение. График отображения. Фактор множество.
7. **Мощность множества.** (Кардинальные числа.) Равномощные множества. Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.
8. **Упорядоченные множества.** Частично упорядоченное множество. Линейно упорядоченное множество. Направленные множества. Направленности, пределы направленностей. Последовательность элементов. Частичный порядок на арифметическом пространстве \mathbf{R}^n . Конфинальность. Поднаправленность. Подпоследовательность.
9. **Прямой и обратный пределы.** Прямой и обратный спектры множеств.
10. **Вполне упорядоченные множества.** Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества. Конечные, счетные и несчетные множества. Кардинальные и порядковые числа (кардиналы и ординалы). Кардиналы $\aleph_0, \aleph_1, c = 2^{\aleph_0}$. Континуум гипотеза.
Лемма Цорна. Вывод из аксиомы выбора. Вывод теоремы Цермело из леммы Цорна. Непустота декартова произведения непустых множеств.

2.2 Метрические и топологические пространства.

1. **Топологические пространства.** Топологии. Сравнение топологий. Открытые множества. Замкнутые множества. Эквивалентное определение топологии.
2. **Простейшие примеры:** тривиальная, дискретная, метрическая (в частности, в евклидовом пространстве), Зариского (на прямой).
3. **База открытых множеств. Предбаза.**
4. **Замыкание и внутренность подмножества.** Окрестность точки. Точки прикосновения. Внутренние, внешние, граничные, предельные, изолированные точки подмножества. Всюду плотные и нигде не плотные множества.
5. **Подпространства.** Индуцированная топология.
6. **Метрические пространства.** Шаровая окрестность. Открытость шаровой окрестности. Евклидово пространство.
7. **Метризуемые пространства,** эквивалентные метрики. Изометрии, сжимающие отображения. Нормированные векторные пространства.
8. **Топология на упорядоченных множествах**

2.2.1 Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

1. **Конечные топологические пространства в дискретной топологии.**
2. **Вещественная прямая.** Интервал. Структура открытого множества на прямой. Отрезок. Пространство рациональных чисел. Канторово совершенное множество. Плотность подмножества рациональных чисел на вещественной прямой.
3. **Счетная база** на подмножестве евклидова пространства.
4. **Гомеоморфность:** интервалов различной длины, открытого диска и евклидова пространства, открытого диска и открытого куба, замкнутого диска и замкнутого куба.
5. Гомеоморфность плоскости без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ и открытого круга без точки $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
6. Гомеоморфность двумерного тора \mathbb{T}^2 и декартового произведения окружностей $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
7. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц $\mathbb{SO}(3)$ и трехмерного вещественного проективного пространства \mathbb{RP}^3 .

2.3 Непрерывность отображений.

1. **Непрерывность отображения в точке**
2. **Предел отображения по Коши.** Сходимость по направленному множеству. Единственность предела направленности.
3. **Предел отображения в предельной точке по Гейне.** Предел отображения в предельной точке по Гейне для метрических пространств.
4. **Непрерывность по Коши и по Гейне.**
5. **Свойства непрерывных отображений.**
 - (a) Композиция непрерывных отображений.
 - (b) Сужение непрерывного отображения.
 - (c) Непрерывность объединения отображений.
 - (d) Замкнутость графика непрерывного отображения.
6. **Кривая Пеано.**
7. **Гомеоморфизмы.**

2.4 Конструкции топологических пространств.

1. **Несвязное объединение.**
2. **Декартово произведение.** Декартово произведение эвклидовых пространств. Сходимость в декартовых произведениях.
3. **График непрерывного отображения.** Замкнутость графика непрерывного отображения.
4. **Тихоновское произведение.** Хаусдорфовость тихоновского произведения.
5. **Фактор топология.**
 - (a) Вещественное проективное пространство.
 - (b) Лента Мебиуса.
 - (c) Тор.
 - (d) Бутылка Клейна.
 - (e) Конусы и цилиндры отображений.
 - (f) Надстройка.
 - (g) $SO(3)$ и RP^3 .

2.5 Аксиомы отделимости

Из Гайфуллина:

- 1.
1. Вторая аксиома счетности. Сепарабельность пространства со второй аксиомой счетности.
2. Теорема Урысона о метризуемости нормального пространства со второй аксиомой счетности.
3. Связность и линейная связность. Компоненты связности.
4. Компактные топологические пространства. Непрерывный образ компактного пространства.
5. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства.
6. Критерий компактности подмножества евклидова пространства \mathbb{R}^n .
7. Нормальность хаусдорфова компактного пространства.
8. Компактность декартового произведения компактных пространств.

Из Дынникова:

1. Связное топологическое пространство. Связное подмножество. Связные объединения связных подмножеств. Связность непрерывного образа связного подмножества. Связность произведения связных пространств.
 2. Связность замыкания связного подмножества. Связные компоненты. Замкнутость связных компонент. Вполне несвязные пространства.
 3. Локально связные пространства. Открытость связных компонент локально связного пространства. Связность и линейная связность.
 4. Компактное топологическое пространство. Компактное подмножество. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства и непрерывного образа компакта. Достижение максимума функции на компакте.
 5. Лемма Александра о предбазе. Теорема Тихонова о произведении компактных пространств.
1. **Аксиомы отделимости.**
 2. T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 . Нормальность $(T_1 + T_4)$.
 3. **Аксиомы отделимости в метрических пространствах.**
 4. **Всякое метрическое пространство нормально.**

5. **Лемма Урысона, теорема Титца, разбиение единицы.**
6. **Вторая аксиома счетности.**
7. Хаусдорфовость тихоновского произведения.
8. Хаусдорфовость метрического пространства.
9. Нормальность метрического пространства.
10. Лемма Урысона.
11. Теорема Титце.
12. Разбиение единицы.

Из Дынникова:

- (a) Хаусдорфовы пространства. Единственность предела в хаусдорфовом пространстве. Замкнутость множества совпадения отображений в хаусдорфово пространство. Хаусдорфовость подпространство хаусдорфова пространства и произведения хаусдорфовых пространств.
- (b) Аксиома отделимости T_3 . Регулярные пространства. Регулярность подпространства регулярного пространства и произведения регулярных пространств.
- (c) Аксиома отделимости T_4 . Нормальные пространства. Нормальность замкнутого подпространства нормального пространства. Плоскость Немыцкого.
- (d) Вторая аксиома счетности. Теорема Тихонова о нормальности.
- (e) Функциональная отделимость. Лемма Урысона. Теорема Титце.
- (f) Выполнение аксиом отделимости в метрических пространствах. Теорема Урысона о метризуемости.
- (g) Вторая аксиома счетности. Сепарабельность. Их равносильность для метрических пространств.
- (h) Локальная база. Первая аксиома счетности. Вывод первой аксиомы счетности из метризуемости и из второй аксиомы счетности.
- (i) Секвенциальная компактность и ее связь с компактностью для пространств, удовлетворяющих первой или второй аксиоме счетности.
- (j) Равносильность компактности и секвенциальной компактности для метрических пространств.
- (k) Локальная компактность. Ее сохранение при переходе к замкнутому подпространству. Одноточечная компактификация некомпактных локально компактных хаусдорфовых пространств.

- (l) Пространство непрерывных отображений. Компактно-открытая топология. Отображение $C(X \rightarrow Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z))$.
- (m) Биекция $C(X \rightarrow Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z))$ в случае, когда Y регулярно и локально компактно или когда X и Y удовлетворяют первой аксиоме счетности.

Из Гайфуллина:

- (a) 4. Аксиомы отделимости. Эквивалентность аксиомы (T1) замкнутости одноточечных подмножеств. Хаусдорфовы, регулярные и нормальные топологические пространства. Примеры. 5. Метрические пространства. Метрическая топология. Нормальность метрического пространства. 6. Пространства со счётной базой. Теорема Линделёфа. Нормальность регулярного пространства со счётной базой. 7. Лемма Урысона о функциональной отделимости. 8. Метризуемость нормального пространства со счётной базой. 9. Теорема Титце-Урысона о продолжении непрерывных функций. 10. Компактные топологические пространства. Компактные подмножества. Нормальность компактного хаусдорфова пространства. 11. Секвенциальная компактность. Равносильность компактности и секвенциальной компактности для пространств со счётной базой. 12. Прямое произведение семейства топологических пространств. Критерий непрерывности отображения в прямое произведение. 13. Частично упорядоченные множества. Лемма Цорна (без доказательства). Теорема Тихонова о компактности прямого произведения. 14. Фактортопология. Нормальность факторпространства нормального топологического пространства по замкнутому разбиению. 15. Приклеивание топологического пространства по непрерывному отображению его подмножества. Конечные клеточные комплексы. Примеры. Нормальность и компактность конечных клеточных комплексов.

2.6 Теория гомотопий.

1. **Что такое категория.** Примеры категорий, функтор, гомотопический функтор. Категория гомотопических типов.
2. **Пунктированные пространства.** Категория пунктированных пространств. Морфизмы пунктированных пространств.
3. **Пары топологических пространств.** Тройки, n -ады.
4. **Ретракция.** Ретракт, деформационная ретракция, деформационный ретракт. Окрестностный ретракт. Пара Борсука.
5. **Связность и линейная связность** топологических пространств. Связность линейно связного пространства.

6. **Фундаментальная группа.** $\pi_1(S^1)$. Перемена отмеченной точки. Фундаментальная группа декартового произведения. Гомотопическая инвариантность фундаментальной группы. Теорема ван Кампена.
7. **Гомотопия непрерывного отображения.** Категорные свойства гомотопии. Гомотопическая эквивалентность топологических пространств. Стягиваемые топологические пространства. Стягиваемость евклидова пространства.
8. **Примеры:**
 - (a) Гомотопическая эквивалентность окружности и $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
 - (b) Гомотопическая эквивалентность одномерного графа и букета окружностей.
9. **Накрытия:** определение и примеры. Лемма о поднятии пути. Аксиома о накрывающей гомотопии. Фундаментальная группа накрывающего пространства. Построение универсального накрытия. Построение накрытия по подгруппе фундаментальной группы.
10. **Аксиома о продолжении гомотопии,** ее эквивалентная формулировка в виде ретракции.
11. **Фундаментальная группа одномерного графа. Теорема Нильсена-Шрайера** о свободности подгруппы свободной группы.
12. **Свободные гомотопии** замкнутых путей и их связь с фундаментальной группой.

2.7 Теория гомологий.

1. **Клеточные пространства.** Примеры клеточных пространств. Теорема о клеточной аппроксимации. Симплициальные пространства. Барическое подразделение.
2. **Цепные комплексы.** Гомологии симплициального комплекса. Топологический смысл нулевых гомологий.
3. **Гомоморфизмы цепных комплексов.** Гомоморфизм измельчения. Симплициальные отображения. Симплициальная аппроксимация непрерывного отображения. Существование симплициальной аппроксимации после подразделения.
4. **Цепная гомотопия.** Цилиндр над симплициальным комплексом. Гомотопическая инвариантность групп гомологий.
5. **Гомологии n-мерного шара и n-мерной сферы.** Негомеоморфность евклидовых пространств разной размерности.

6. **Отсутствие ретракции** двумерного диска на его граничную окружность.
7. **Теорема Брауэра** о неподвижной точке.
8. **Отсутствие на двумерном диске векторного поля без особых точек**, направленного наружу на границе.
9. **Гомотопическое доказательство основной теоремы алгебры** о корнях комплексного многочлена.
10. **Теорема о причесывании ежа**.

Список литературы

- [1] Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию*, "Наука Москва, 1977
- [2] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии*, Москва, 2000
- [3] О.Я.Виро и др. *Элементарная топология*,
- [4] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, 2000.
- [5] Постников, М.М. *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий*, М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984.