

"Введение в топологию",
программа, второй курс,
осень 2017-2018 уч.год.
16 лекций (начальная)

А.С.Мищенко

27 августа 2017 г.

1 Программа по разделам

1.1 Язык теории множеств

1.2 Метрические и топологические пространства. Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

1.3 Непрерывные отображения

1.4 Конструкции топологических пространств.

1.5 Аксиомы отделимости

1.6 Компактные пространства

1.7 Теория гомотопий

1.8 Теория гомологий

2 Программа в деталях

2.1 Язык теории множеств.

1. **Множество.** Подмножество. Пустое множество. Одноэлементное множество.
2. **Теоретико-множественные операции.** Объединение. Пересечение. Разность. Непересекающиеся множества.
3. **Соотношения операций с множествами.** Коммутативность. Ассоциативность. Дистрибутивность пересечения относительно объединения. Дистрибутивность объединения относительно пересечения. Двойственность объединения и пересечения (законы де Моргана).
4. **Отображения множеств.** Область определения отображения. Область значений отображения. Тожественное отображение. Образ подмножества. Прообраз подмножества. Прообраз элемента. Сужения отображений.
5. **Композиция отображений.** Инъективное отображение. Сюръективное отображение. Взаимно однозначное отображение. Обратное отображение. Равномощные множества.
6. **Конструкции множеств.** Несвязное объединение. Категорное свойство универсальности. Декартово произведение. Координаты декартова произведения. Декартово произведение семейства множеств. Векторное пространство \mathbf{R}^n как декартово произведение. График отображения. Фактор множество.
7. **Мощность множества.** (Кардинальные числа.) Равномощные множества. Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.
8. **Упорядоченные множества.** Частично упорядоченное множество. Линейно упорядоченное множество. Направленные множества. Направленности, пределы направленностей. Последовательность элементов. Частичный порядок на арифметическом пространстве \mathbf{R}^n . Конфинальность. Поднаправленность. Подпоследовательность.
9. **Прямой и обратный пределы.** Прямой и обратный спектры множеств.
10. **Вполне упорядоченные множества.** Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества. Конечные, счетные и несчетные множества. Кардинальные и порядковые числа (кардиналы и ординалы). Кардиналы $\aleph_0, \aleph_1, c = 2^{\aleph_0}$. Континуум гипотеза.
Лемма Цорна. Вывод из аксиомы выбора. Вывод теоремы Цермело из леммы Цорна. Непустота декартова произведения непустых множеств.

2.2 Метрические и топологические пространства.

1. **Топологические пространства.** Топологии. Сравнение топологий. Открытые множества. Замкнутые множества. Эквивалентное определение топологии.
2. **Простейшие примеры:** тривиальная, дискретная, метрическая (в частности, в евклидовом пространстве), Зариского (на прямой).
3. **База открытых множеств. Предбаза.**
4. **Замыкание и внутренность подмножества.** Окрестность точки. Точки прикосновения. Внутренние, внешние, граничные, предельные, изолированные точки подмножества. Всюду плотные и нигде не плотные множества.
5. **Подпространства.** Индуцированная топология.
6. **Метрические пространства.** Шаровая окрестность. Открытость шаровой окрестности. Евклидово пространство.
7. **Метризуемые пространства,** эквивалентные метрики. Изометрии, сжимающие отображения. Нормированные векторные пространства.
8. **Топология на упорядоченных множествах**

2.2.1 Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

1. **Конечные топологические пространства в дискретной топологии.**
2. **Вещественная прямая.** Интервал. Структура открытого множества на прямой. Отрезок. Пространство рациональных чисел. Канторово совершенное множество. Плотность подмножества рациональных чисел на вещественной прямой.
3. **Счетная база** на подмножестве евклидова пространства.
4. **Гомеоморфность:** интервалов различной длины, открытого диска и евклидова пространства, открытого диска и открытого куба, замкнутого диска и замкнутого куба.
5. Гомеоморфность плоскости без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ и открытого круга без точки $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
6. Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей $S^1 \times S^1$.
7. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц $SO(3)$ и трехмерного вещественного проективного пространства RP_3 .

2.3 Непрерывность отображений.

1. **Непрерывность отображения в точке**
2. **Предел отображения по Коши.** Сходимость по направленному множеству. Единственность предела направленности.
3. **Предел отображения в предельной точке по Гейне.** Предел отображения в предельной точке по Гейне для метрических пространств.
4. **Непрерывность по Коши и по Гейне.**
5. **Свойства непрерывных отображений.**
 - (a) Композиция непрерывных отображений.
 - (b) Сужение непрерывного отображения.
 - (c) Непрерывность объединения отображений.
 - (d) Замкнутость графика непрерывного отображения.
6. **Кривая Пеано.**
7. **Гомеоморфизмы.**

2.4 Конструкции топологических пространств.

1. **Несвязное объединение.**
2. **Декартово произведение.** Декартово произведение эвклидовых пространств. Сходимость в декартовых произведениях.
3. **График непрерывного отображения.** Замкнутость графика непрерывного отображения.
4. **Тихоновское произведение.** Хаусдорфовость тихоновского произведения.
5. **Фактор топология.**
 - (a) Вещественное проективное пространство.
 - (b) Лента Мебиуса.
 - (c) Тор.
 - (d) Бутылка Клейна.
 - (e) Конусы и цилиндры отображений.
 - (f) Надстройка.
 - (g) $SO(3)$ и RP^3 .

2.5 Аксиомы отделимости

1. **Аксиомы отделимости.** T_0, T_1, T_2 -хаусдорфовость, T_3 , $(T_1 + T_3)$ -регулярность, T_4 . $(T_1 + T_4)$ - Нормальность.
2. **Аксиомы отделимости в метрических пространствах.**
3. **Вторая аксиома счетности.** Сепарабельность пространства со второй аксиомой счетности.
4. **Хаусдорфовы пространства.** Единственность предела в хаусдорфовом пространстве. Замкнутость множества совпадения отображений в хаусдорфово пространство. Хаусдорфовость подпространство хаусдорфова пространства. Хаусдорфовость тихоновского произведения хаусдорфовых пространств. Хаусдорфовость метрического пространства.
5. **Регулярные пространства.** Регулярность подпространства регулярного пространства и произведения регулярных пространств.
6. **Нормальные пространства.** Нормальность замкнутого подпространства нормального пространства. Плоскость Немыцкого, Матюшичева. Нормальность метрического пространства.
7. **Функциональная отделимость.** Лемма Урысона. Теорема Титце. Разбиение единицы.
8. **Теорема Урысона о метризуемости** нормального пространства со второй аксиомой счетности. Теорема Тихонова о нормальности (Енгелькинг, Теорема 1.5.15, стр. 79, см. стр. 85; Теорема 1.5.15 была доказана Тихоновым [1925]; Тихонов А. Н. [1925] *Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn.* — *Math. Ann* 95 A925, 139-142.)
9. **Компактные топологические пространства.** Непрерывный образ компактного пространства. Компактное подмножество. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства и непрерывного образа компакта. Достижение максимума функции на компакте.
10. **Нормальность** хаусдорфова компактного пространства. Критерий компактности подмножества евклидова пространства \mathbb{R}^n .
11. **Теорема Тихонова** о произведении компактных пространств.
12. **Секвенциальная компактность.** Равносильность компактности и секвенциальной компактности для метрических пространств.
13. **Локальная компактность.** Ее сохранение при переходе к замкнутому подпространству. Одноточечная компактификация некомпактных локально компактных хаусдорфовых пространств.

14. **Пространство непрерывных отображений.** Компактно-открытая топология. Отображение $C(X \times Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z))$. Условие его биективности.

2.6 Теория гомотопий.

1. **Что такое категория.** Примеры категорий, функтор, гомотопический функтор. Категория гомотопических типов.
2. **Пунктированные пространства.** Категория пунктированных пространств. Морфизмы пунктированных пространств.
3. **Пары топологических пространств.** Тройки, n -ады.
4. **Ретракция.** Ретракт, деформационная ретракция, деформационный ретракт. Окрестностный ретракт. Пара Борсука.
5. **Связность и линейная связность.** Компоненты связности. Связное подмножество. Связные объединения связных подмножеств. Связность непрерывного образа связного подмножества. Связность произведения связных пространств. Связность замыкания связного подмножества. Связные компоненты. Замкнутость связных компонент. Вполне несвязные пространства.
6. **Локально связные пространства.** Открытость связных компонент локально связного пространства. Связность и линейная связность.
7. **Фундаментальная группа.** $\pi_1(S^1)$. Перемена отмеченной точки. Фундаментальная группа декартового произведения. Гомотопическая инвариантность фундаментальной группы. Теорема ван Кампена.
8. **Гомотопия непрерывного отображения.** Категорные свойства гомотопии. Гомотопическая эквивалентность топологических пространств. Стягиваемые топологические пространства. Стягиваемость евклидова пространства.
9. **Примеры:**
 - (а) Гомотопическая эквивалентность окружности и $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
 - (б) Гомотопическая эквивалентность одномерного графа и букета окружностей.
10. **Накрытия:** определение и примеры. Лемма о поднятии пути. Аксиома о накрывающей гомотопии. Фундаментальная группа накрывающего пространства. Построение универсального накрытия. Построение накрытия по подгруппе фундаментальной группы.
11. **Аксиома о продолжении гомотопии,** ее эквивалентная формулировка в виде ретракции.

12. **Фундаментальная группа одномерного графа. Теорема Нильсена-Шрайера** о свободности подгруппы свободной группы.
13. **Свободные гомотопии** замкнутых путей и их связь с фундаментальной группой.

2.7 Теория гомологий.

1. **Клеточные пространства.** Примеры клеточных пространств. Теорема о клеточной аппроксимации. Симплициальные пространства. Барцентрическое подразделение.
2. **Цепные комплексы.** Гомологии симплициального комплекса. Топологический смысл нулевых гомологий.
3. **Гомоморфизмы цепных комплексов.** Гомоморфизм измельчения. Симплициальные отображения. Симплициальная аппроксимация непрерывного отображения. Существование симплициальной аппроксимации после подразделения.
4. **Цепная гомотопия.** Цилиндр над симплициальным комплексом. Гомотопическая инвариантность групп гомологий.
5. **Гомологии n -мерного шара и n -мерной сферы.** Негомеоморфность евклидовых пространств разной размерности.
6. **Отсутствие ретракции** двумерного диска на его граничную окружность.
7. **Теорема Брауэра** о неподвижной точке.
8. **Отсутствие на двумерном диске векторного поля без особых точек**, направленного наружу на границе.
9. **Гомотопическое доказательство основной теоремы алгебры** о корнях комплексного многочлена.
10. **Теорема о причисывании ежа.**

Список литературы

- [1] Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию*, "Наука Москва, 1977
- [2] Энгелькинг Р. *Общая топология*, "Мир Москва, 1986
- [3] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии*, Москва, 2000
- [4] О.Я.Виро и др. *Элементарная топология*,

- [5] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, 2000.
- [6] Постников, М.М. *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий*, М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984.