Детальное содержание 23-11-2017

23 ноября 2017 г. 3:46

1) Различные примеры гомеоморфных постранств:
    a. Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей S^1×S^1[1].
    b. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц SO(3) и трехмерного вещественного проективного пространства RP^3.
2) Конструкции топологических пространств.
    a. Фактор топология
    b. Вещественное проективное пространство.
    c. Лента Мебиуса.
    d. Тор.
    e. Бутылка Клейна.
    f. Конусы и цилиндры отображений.
    g. Надстройка.
    h. SO(3)
    i. RP^3 веществнное проективное пространство

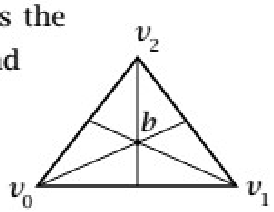
3) Вычисление фундаментальной группы окружности: $\pi_1(S^1,s_0)\approx Z$.
4) Фундаментальная группа букета пространств. Теорема Ван Кампена.

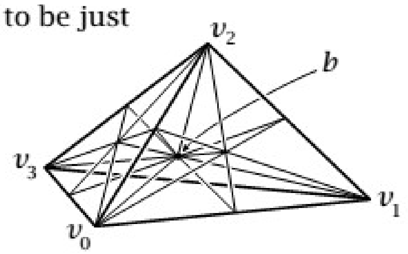
Повторные барицентрические подразделения

23 ноября 2017 г. 3:49

1. *Barycentric Subdivision of Simplices.* The points of a simplex $[v_0, \cdots, v_n]$ are the linear combinations $\sum_i t_i v_i$ with $\sum_i t_i = 1$ and $t_i \geq 0$ for each i. The **barycenter** or 'center of gravity' of the simplex $[v_0, \cdots, v_n]$ is the point $b = \sum_i t_i v_i$ whose barycentric coordinates t_i are all equal, namely $t_i = 1/(n+1)$ for each i. The **barycentric subdivision** of $[v_0, \cdots, v_n]$ is the decomposition of $[v_0, \cdots, v_n]$ into the n-simplices $[b, w_0, \cdots, w_{n-1}]$ where, inductively, $[w_0, \cdots, w_{n-1}]$ is an $(n-1)$-simplex in the

barycentric subdivision of a face $[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_n]$. The induction starts with $n = 0$ when the barycentric subdivision of $[v_0]$ is defined to be just $[v_0]$ itself. The figure shows the next two cases $n = 1, 2$ and part of the case $n = 3$.





It follows from the inductive definition that the vertices of simplices in the barycentric subdivision of $[v_0, \cdots, v_n]$ are the barycenters of all the k-dimensional faces $[v_{i_0}, \cdots, v_{i_k}]$ of $[v_0, \cdots, v_n]$ for $0 \leq k \leq n$. When $k = 0$ this gives the original vertices v_i since the barycenter of a 0-simplex is itself. The barycenter of $[v_{i_0}, \cdots, v_{i_k}]$ has barycentric coordinates $t_i = 1/(k+1)$ for $i = i_0, \cdots, i_k$ and $t_i = 0$ otherwise.

The n-simplices of the barycentric subdivision of Δ^n, together with all their faces, do in fact form a Δ-complex structure on Δ^n, indeed a simplicial complex structure, though we shall not need to know this in what follows.

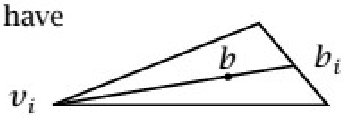
2

23 ноября 2017 г. 3:55

A fact we will need is that the diameter of each simplex of the barycentric subdivision of $[v_0, \cdots, v_n]$ is at most $n/(n+1)$ times the diameter of $[v_0, \cdots, v_n]$. Here the diameter of a simplex is by definition the maximum distance between any two of its points, and we are using the metric from the ambient Euclidean space $\mathbb{R}^m$ containing $[v_0, \cdots, v_n]$. The diameter of a simplex equals the maximum distance between any of its vertices because the distance between two points v and $\sum_i t_i v_i$ of $[v_0, \cdots, v_n]$ satisfies the inequality

$$(*) \quad \left|v - \textstyle\sum_i t_i v_i\right| = \left|\textstyle\sum_i t_i(v - v_i)\right| \leq \textstyle\sum_i t_i |v - v_i| \leq \textstyle\sum_i t_i \max|v - v_i| = \max|v - v_i|$$

To obtain the bound $n/(n+1)$ on the ratio of diameters, we therefore need to verify that the distance between any two vertices w_j and w_k of a simplex $[w_0, \cdots, w_n]$ of the barycentric subdivision of $[v_0, \cdots, v_n]$ is at most $n/(n+1)$ times the diameter of $[v_0, \cdots, v_n]$. If neither w_i nor w_j is the barycenter b of $[v_0, \cdots, v_n]$, then these two points lie in a proper face of $[v_0, \cdots, v_n]$ and we are done by induction on n. So we may suppose w_j, say, is the barycenter b, and then by $(*)$ we may take w_k to be a vertex v_i. Let b_i be the barycenter of $[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_n]$, with all barycentric coordinates equal to $1/n$ except for $t_i = 0$. Then we have $b = \frac{1}{n+1} v_i + \frac{n}{n+1} b_i$. The sum of the two coefficients is 1, so b lies on the line segment $[v_i, b_i]$ from v_i to b_i, and the distance from b to v_i is $n/(n+1)$ times the length of $[v_i, b_i]$. Hence the distance from b to v_i is bounded by $n/(n+1)$ times the diameter of $[v_0, \cdots, v_n]$.



3

23 ноября 2017 г. 3:56

The significance of the factor $n/(n+1)$ is that by repeated barycentric subdivision we can produce simplices of arbitrarily small diameter since $(n/(n+1))^r$ approaches 0 as r goes to infinity. It is important that the bound $n/(n+1)$ does not depend on

the shape of the simplex since repeated barycentric subdivision produces simplices of many different shapes.

Теорема о симплициальной аппроксимации

14 ноября 2017 г. 14:02

Пусть K - произвольное (конечное) симплициальное пространство, L - произвольное сиплициальное пространство, f:K-->L непрерывное отображение. Тогда отображение f гомотопно симплициальному отображению $g:K^{\delta}$-->L, где K^{δ} - некоторое барицентрическое подразделение пространства K.

Все симплексы пониаются как замкнутые. Внутренность симплекса σ, σ°, это разность $\sigma^{\circ}=\sigma\backslash\partial\sigma$. Звезда St σ - это объединение всех симплексов, которые содержат симплекс σ. Открытая звезда st $\sigma\subset$St σ это объеднение внутренностей всех симплексов, которые содржат симплекс σ. Следовательно, [st σ]=St σ.

Лемма. Пусть $a_1, a_2,\ldots,a_n$ - набор вершин. Пересечение открытых звезд st $a_1\cap\ldots\cap$st a_n равно открытой звезде st σ, $\sigma=[a_1, a_2,\ldots,a_n]$.

Доказательсто теоремы. Рассмотрим покрытие пространства L откртыми звездами вершин {st w: w∈ L}. Прообразы этих звезд $\{f^{-1}(\text{st } w): w\in L\}$ покрывают пространство K. Существует достаточно мелкое барицетрическое подразделение K^{δ}, для которого каждая замкнутая звезда вершины, St a, лежит в некотором прообразе $f^{-1}(\text{st } w)$, w=g(a), т.е. St $a\subset f^{-1}(\text{st } g(a))$, т.е. f(St a)⊂ st g(a) для каждой вершины a∈ K. Соответствие g можно понимать как отображение нульмерных остовов

$$g:K^0\to L^0,$$

Которое следует симплициально продолжить на все пространсто K. Рассмотрим симплекс $\sigma=[a_1, a_2,\ldots,a_n]$. Пусть x - внутренняя точка симплеса $\sigma=[a_1, a_2,\ldots,a_n]$. Значит, точка x принадлежит каждой звезде st a_j, $x\in$st a_j. Это значит, $f(x)\in$st $g(a_j)$. Это значит, что пересечение звезд st $g(a_j)$ не пусто, т.е имеется симплекс $[g(a_1), g(a_2),\ldots,g(a_n)]\subset L$. Это означает, что отобажение g продолжается до симплииального отображения $g:K\to L$.
Кроме того, точка f(x) принадлежит пересечению звезд st $g(a_j)$, т.е.
$f(x)\in$St $[g(a_1), g(a_2),\ldots,g(a_n)]$, а $g(x)\in[g(a_1), g(a_2),\ldots,g(a_n)]$. Значит, имеется гомотопия $F(x,t)=tf(x)+(1-t)g(x)$, $0\le t\le 1$, $x\in K$, построение которой не зависит от конкретного симплекса, содержащего точку x.