Детальное содержание 16-11-2017

13 ноября 2017 г. 14:10

1) Различные примеры гомеоморфных постранств:
    a. Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей S^1×S^1^1.
    b. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц SO(3) и трехмерного вещественного проективного пространства RP^3.
2) Конструкции топологических пространств.
    a. Фактор топология
    b. Вещественное проективное пространство.
    c. Лента Мебиуса.
    d. Тор.
    e. Бутылка Клейна.
    f. Конусы и цилиндры отображений.
    g. Надстройка.
    h. SO(3)
    i. RP^3 веществнное проективное пространство

3) Связные топологичекие пространства.
    a. Компонента связности.
    b. Всякая компонента связности пространства X замкнута в X .
    c. Объединение связных подмножеств, пересечение связных подмножеств.
    d. Декартово произведение связных пространств.
4) Независимость фудаментальной группы от отмеченной точки в компоненте линейной свзности.
   На этом окончена предыдущая лекция.
5) Вычисление фундаментальной группы окружности: $\pi_1(S^1,s_0)\approx Z$.
6) Фундаментальная группа декартового произведения пространств.
7) Фундаментальная группа букета пространств. Теорема Ван Кампена.

От Пасынкова 1

13 ноября 2017 г. 14:16

13.15. Упражнения. 1. Пространство стягиваемо тогда и только тогда когда оно имеет гомотопический тип точки.

2. Конус над любым пространством стягиваем.

3. Цилиндр отображения $X \to Y$ гомотопически эквивалентен пространству Y.

Примеры. 1. Шары B^n имеют гомотопический тип точки, но B^{n_1} не гомеоморфно B^{n_2} при $n_1 \neq n_2$. Например, $n_1 = 0, n_2 > 0$.

2. Доказать, что отрезок I не гомеоморфен кругу B^2.

3. Диск D^n, $n > 0$, имеет гомотопический тип точки, но D^n не гомеоморфно B^n, поскольку шар B^n компактен, а диск D^n — нет.

4. Докажите, что окружность S^1 и кольцо K имеют одинаковый гомотопический тип, но не гомеоморфны (см. Рис. 13.1).

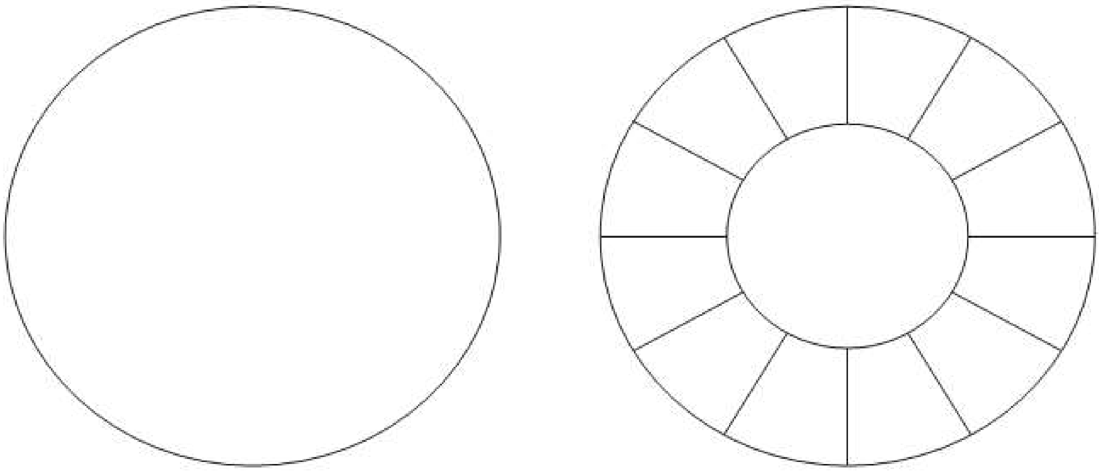

Рис. 13.1:

Задачи.

13.1. Докажите гомотопность любых непрерывных не сюръективных отображений $f, g : X \to \mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

13.2. Будут ли гомотопны любые два непрерывных отображения в линейно связное пространство?

13.3. Когда гомотопны два постоянных отображения?

13.4. Если $h : A \to X, f, f' : X \to Y, g : Y \to B$ — непрерывные отображения, и $F : X \times I \to Y$ — гомотопия между f и f', то $g \circ F \circ (h \times id)$ — гомотопия между $g \circ f \circ h$ и $g \circ f' \circ h : A \to B$, где id — тождественное отображение отрезка I.

13.5. Непрерывные отображения $f, g : X \to Y \times Z$ гомотопны в том и только том случае, если гомотопны пары композиций $pr_Y \circ f$, $pr_Y \circ g$ и $pr_Z \circ f$, $pr_Z \circ g$, где pr_Y и pr_Z — проекции в произведении на соответствующие сомножители.

13.6. Докажите, что все отображения отрезка в сферу S^2 гомотопны.

13.7. Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств совпадает число компонент (линейной) связности.

13.8. Найдите счетное число попарно гомотопически эквивалентных пространств, не являющихся попарно гомеоморфными.

13.9. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) окружности S^1 и плоскости с выкинутой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$;

(2) окружности S^1 и ленты Мебиуса.

13.10. Докажите, что стягиваемое пространство линейно связно. Верна ли обратная импликация?

13.11. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между их гомотопическими классами отображений в произвольное пространство.

13.12. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений произвольного пространства Z в X и Y соответственно.

13.13. Доказать, что для линейно связного пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) X — стягиваемо;

(2) $\pi(X, Y)$ тривиально для любого линейно связного пространства Y;

(3) $\pi(Y, X)$ тривиально для любого пространства Y.

13.14. Сколько гомотопических классов отображений стягиваемого пространства в произвольное пространство?

13.15. Докажите, что произведение $X \times Y$ пространств X и Y стягиваемо в том и только том случае, если пространства X и Y стягиваемы. Верен ли аналогичный результат для счетного (произвольного) числа сомножетелей?

13.16. Докажите, что любое линейное пространство над полем вещественных чисел стягиваемо.

13.17. Докажите, что ректракт стягиваемого пространства стягиваем.

13.18. Доказать, что $\mathrm{Con}(X)$ стягиваем для любого пространства X.

13.1x. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) тора T^2 с замкнутыми дисками B^2, приклеенными по границе с меридианом и по границе с параллелью, и сферы S^2;

(2) пространства невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ и ортогональных матриц $O(n)$.

13.2x. Докажите, что бесконечномерная сфера S^∞ (сфера в гильбертовом пространстве) стягиваема.

13.3x. Доказать, что любая связная конечномерная группа Ли (множество, на котором заданы согласованные структуры группы и гладкого многообразия) гомотопически эквивалентна компактной группе Ли.

14.4. Упражнение. Приведите пример, когда топологический тип букета $X \vee Y$ зависит от выбора отмеченных точек.

14.1. Вычислить фундаментальную группу:

(1) дискретного пространства;

(3) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(3) S^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

(4) $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

14.2. Докажите, что если пространство X односвязно, то любое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} : D^2 \to X$.

14.3. Доказать, что для любого непрерывного отображения f пространств с отмеченными точками отображение f_* (Определение 13.8) является гомоморфизмом их фундаментальных групп.

Доказать, что для любых гомотопных непрерывных отображений f и g пространств с отмеченными точками $f_* = g_*$.

Доказать, что фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

14.4. Докажите гомотопическую эквивалентность тора T^2 с вырезанным диском D^2 (т.е. ручки) и букета двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$.

14.1х. Пусть множества U и V открыты в X. Докажите, что если множества $U \cap V$ и $U \cup V$ односвязны, то и множества U и V односвязны.

14.2х. Привести пример линейно связного пространства, фундаментальная группа которого не абелева.

14.3х. Докажите формулу:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

14.4х. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы абелева.

14.5х. Привести пример односвязного линейно связного пространства, которое не стягиваемо.

14.6х. Верно ли, что пространство стягиваемо, если все его гомотопические группы (классы гомотопических эквивалентностей отображений сфер S^n в пространство) тривиальны?

14.7х. Докажите гомотопическую эквивалентность сферы S^2 с отождествленной парой точек и букета сферы и окружности $S^2 \bigvee S^1$.

14.8х. Докажите, что связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

14.9х. Привести пример пространств X и Y, подмножества A пространства X и непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ таких, что $f|_A = g|_A$, которые гомотопны, но не A-гомотопны.

15.1. (Теорема Брауэра о неподвижной точке.) Докажите, что любое непрерывное отображение замкнутого диска B^2 в себя имеет неподвижную точку.

15.2. Доказать, что при любом гомеоморфизме B^2 точки из границы S^1 отображаются в точки из границы.

15.3. Доказать, что не существует ретракции замкнутого диска B^2 на граничную окружность S^1.

15.4. Доказать основную теорему алгебры: любой многочлен над полем комплексных чисел степени ≥ 1 имеет корень.

15.5. Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Замкнутое подмножество C называется перегородкой между A и B в X, если $X \setminus C = O \cup U$, где

$O \cap U = \emptyset$, $A \subset O$, $B \subset U$.

Докажите, что любые две перегородки C_1, C_2 между $A_1 = \{0\} \times I$ и $A_2 = \{1\} \times I$, и $B_1 = I \times \{0\}$ и $B_2 = I \times \{1\}$ в I^2 соответственно, пересекаются.

15.6. Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^1$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

15.1x. Вычислить фундаментальную группу букета окружностей.

15.2x. Вычислить фундаментальные группы двумерных компактных поверхностей.

15.3x. Вычислить фундаментальные группы проективных пространств $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$.

15.4x. Какие группы реализуются как фундаментальные группы связных конечных графов?

15.5x. Вычислить фундаментальную группу:

(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$;

(b) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$;

(c) $\mathrm{SU}(n, \mathbb{R})$.

15.6x. Пусть $f : S^1 \to S^1$ такое непрерывное отображение, что $f(t) \neq f(-t)$ для любой точки $t \in S^1$. Докажите, что $f \sim \mathrm{id}$.

15.7x. (Теорема Борсука–Улама.) Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^2 \to \mathbb{C}$ существует точка $t \in S^2$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

15.8x. Докажите, что для любой пары непрерывных функций $f_1, f_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^2$ такая, что $f_1(t) = f_2(-t)$.

15.9x. Докажите, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$.

15.10x. Докажите, что не существует пространства X такого, что $X \times X$ гомеоморфно $\mathbb{R}$.

15.11x. Докажите, что в любом замкнутом покрытии $\{F, T\}$ окружности S^1 существует элемент, содержащий пару противоположных точек. Сформулируйте и докажите соответствующее утверждении для сферы S^2.

15.12x. Непрерывным касательным векторным полем на сфере $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ называется непрерывное отображение $V : S^2 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $x \in S^2$ и $f(x)$ ортогональны.

(Теорема Пуанкаре.) У любого непрерывного касательного векторного поля V на сфере S^2 существует точка $x \in S^2$, в которой $V(x) = (0, 0, 0)$.

15.13x. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f : S^2 \to S^2$ или существует неподвижная точка, или точка, для которой $f(x) = -x$.

Теорема о симплициальной аппроксимации

14 ноября 2017 г. 14:02

Пусть K - произвольное (конечное) симплициальное пространство, L - произвольное сиплициальное пространство, f:K-->L непрерывное отображение. Тогда отображение f гомотопно симплициальному отображению g:K^δ-->L, где K^δ - некоторое барицентрическое подразделение пространства K.

Все симплексы пониаются как замкнутые. Внутренность симплекса σ, σ°, это разность $\sigma^\circ=\sigma\backslash\partial\sigma$. Звезда St σ - это объединение всех симплексов, которые содержат симплекс σ. Открытая звезда st $\sigma\subset$St σ это объеднение внутренностей всех симплексов, которые содржат симплекс σ. Следовательно, [st σ]=St σ.

Лемма. Пусть $a_1, a_2,\ldots,a_n$ - набор вершин. Пересечение открытых звезд st $a_1\cap\ldots\cap$st a_n равно открытой звезде st σ, $\sigma=[a_1, a_2,\ldots,a_n]$.

Доказательсто теоремы. Рассмотрим покрытие пространства L откртыми звездами вершин {st w: w$\in$ L}. Прообразы этих звезд {f^{-1}(st w): w$\in$ L} покрывают пространство K. Существует достаточно мелкое барицетрическое подразделение K^δ, для которого каждая замкнутая звезда вершины, St a, лежит в некотором прообразе f^{-1}(st w), w=g(a), т.е. St a$\subset$ f^{-1}(st g(a)), т.е. f(St a)$\subset$ st g(a) для каждой вершины a$\in$ K. Соответствие g можно понимать как отображение нульмерных остовов

$$g:K^0\to L^0,$$

Которое следует симплициально продолжить на все пространсто K. Рассмотрим симплекс $\sigma=[a_1, a_2,\ldots,a_n]$. Пусть x - внутренняя точка симплеса $\sigma=[a_1, a_2,\ldots,a_n]$. Значит, точка x принадлежит каждой звезде st a_j, x$\in$st a_j. Это значит, f(x)$\in$st g(a_j). Это значит, что пересечение звезд st g(a_j) не пусто, т.е имеется симплекс $[g(a_1), g(a_2),\ldots,g(a_n)]\subset L$. Это означает, что отобажение g продолжается до симплииального отображения g:K→L.
Кроме того, точка f(x) принадлежит пересечению звезд st g(a_j), т.е. f(x)$\in$St $[g(a_1), g(a_2),\ldots,g(a_n)]$, а g(x)$\in[g(a_1), g(a_2),\ldots,g(a_n)]$. Значит, имеется гомотопия $F(x,t)=tf(x)+(1-t)g(x)$, $0\le t\le 1$, $x\in K$, построение которой не зависит от конкретного симплекса, содержащего точку x.