Детальное содержание 09-11-2017

6 ноября 2017 г. 13:02

1) Различные примеры гомеоморфных постранств:
   a. Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей S^1×S^1[1].
   b. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц SO(3) и трехмерного вещественного проективного пространства RP^3.
2) Конструкции топологических пространств.
   a. Фактор топология
   b. Вещественное проективное пространство.
   c. Лента Мебиуса.
   d. Тор.
   e. Бутылка Клейна.
   f. Конусы и цилиндры отображений.
   g. Надстройка.
   h. SO(3)
   i. RP^3 веществнное проективное пространство

3) Связные топологичекие пространства.
   a. Компонента связности.
   b. Всякая компонента связности пространства X замкнута в X .
   c. Объединение связных подмножеств, пересечение связных подмножеств.
   d. Декартово произведение связных пространств.
4) Теория гомотопий.
   a. Определение гомотопии $f\sim g$.
   b. Отображение $F:X\times I\to Y$ называется гомотопией между отображениями f_0 и f_1, а промежуточные отображения $f_t(x)=F(x,t)$ называются деформацией, соединяющей отображения f_0 и f_1.
   c. Симметричность $f\sim g$.
   d. Рефлексивность $f\sim f$.
   e. Транзитивность $f\sim g$, $g\sim h \Rightarrow f\sim h$.
   f. Разбиение множества, отвечающее отношению эквивалентности $f\sim g$. Класс эквивалентности.
   g. Фактор пространство. Фактор топология.
   h. Классы гомотопий $\pi(X,Y)$.
   i. Независимость гомотопии от параметра: $G(x,t)=F(x,a+tb)$, $F:X\times[a,b]\to Y$, $G:X\times[0,1]\to Y$.
   j. Гомотопия композиции: $f\sim g$ и $h\sim k \Rightarrow fh\sim gk$.
   k. Гомотопическая эквивалентность:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\cdot f\sim \mathbf{Id}_X"] & Y \arrow[r, "g=f^{-1}"'] \arrow[rr, bend left, "f\cdot g\sim \mathbf{Id}_Y"] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} .$$

   l. Гомотопический тип.
   m. Гомеоморфные топологические пространства гомотопически эквивалентны.
   n. Эвклидово пространство R^n гомотопически эквивалентно одноточечному пространству $\{x_0\}$ (которое можно отождествить с R^0).
   o. Замкнутый диск гомотопически эквивалентен одноточечному пространству.
   p. Открытый диск гомотопически эквивалентен одноточечному пространству.

   q. Пунктированые пространства (X, x_0). Категория пунктированных простраств.
   r. Морфизмы пунктированных пространств $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$.

s. Классы гомотопий пунктрированных пространств $\pi((X,x_0),(Y,y_0))$.

5) Фундаментальная группа $\pi_1(X,x_0)$.
   a. Определение.
   b. Операция умножения.
   c. Независимость от гомотопии.
   d. Ассоциативность.
   e. Нейтральный элемент.
   f. Обратный элемент.
   g. Функториальность: отображение $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ порождает отображение $\pi(f):\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$, при котором комозиции соответствует композиция, а тождественному отображению соответствует тождественное отображение: $\pi(f)\pi(g)=\pi(fg)$.
   h. $\pi(f)$ является гомоморфизмом групп
6) Фундаментальная группа являтся инвариатнтом гомотопического типа пунктированного пространства.
7) Независимость фудаментальной группы от отмеченной точки в компоненте линейной свзности.
8) Вычисление фундаментальной группы окружности: $\pi_1(S^1,s_0)\approx Z$.