Детальное содержание 02-11-2017

1 ноября 2017 г. 12:30

1) Метрическое пространство
   a. Диаметр множества.
   b. Расстояние между множествами.
   c. Диаметр множества и его замыкания.
   d. Внутрення точка.
2) Экзотические примеры топологических пространств.
   a. Топология линейно упорядоченного пространства.
   b. Топология частично упорядоченного пространства.
   c. Канторово совершенное множество.
   d. Трансфинитная прямая.
3) База топологии.
   a. Теорема о существовании счетной базы на прямой и в R^n.
4) Различные примеры гомеоморфных постранств:
   a. Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей S^1×S^1[1].
   b. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц SO(3) и трехмерного вещественного проективного пространства RP^3.
5) Конструкции топологических пространств.
   a. График непрерывного отображения.
   b. Замкнутость графика непрерывного отображения.
   c. Фактор топология
   d. Вещественное проективное пространство.
   e. Лента Мебиуса.
   f. Тор.
   g. Бутылка Клейна.
   h. Конусы и цилиндры отображений.
   i. Надстройка.
   j. SO(3)
   k. RP^3 веществнное проективное пространство

6) Вторая акиома счетности.
   a. Теорема Урысона о метризуемости нормального пространства со второй аксиомой счетности.
   b. Теорема Тихонова о нормальности (Енгелькинг, Теорема 1.5.15, стр. 79, см. стр. 85: Теорема 1.5.15 была доказана Тихоновым [1925]; Тихонов А. Н. [1925] Uber einen Metrisationssatz von P. Urysohn. — Math. Ann 95 A925, 139-142.)
      i. Тихонов: Любое регулярное пространство со второй аксиомой счетности нормльно.
      ii. Доазательство. Дано два замкнутых непересекающихся множества A и B, $A\cap B=\varnothing$, $A=[A]$, $B=[B]$.
7) Теоерема Стоуна-Вейерштрасса об алгебре непрерывных функций на компактном пространстве.
8) Паракомпактные пространства.
   a. Регулярноть хаусдорфова паракомпактного пространства.
   b. Нормальность хаусдофова паракомпактного пространвнста.
   c. Паракомпактность метрического пространства со второй аксиомой счетности
   d. Паракомпактность метрического пространства
9) Аксиомы отделимости декартового произведения.
   a. T_0
   b. T_1
   c. T_2

    d. T_3
    e. T_4
    f. Регулярные пространства
    g. Нормальные пространства. Контрпример.

10) Связные топологичекие пространства.
    a. Связность числового отрезка, числового интервала.
    b. Незвязность мноества рациональных чисел.
    c. Замыкание связного множества связно.
    d. Компонента связности.
    e. Всякая компонента связности пространства X замкнута в X .
    f. Объединение связных подмножеств, пересечение связных подмножеств.
    g. Декартово произведение связных пространств.
    h. Линейно связные пространства.
    i. Пример связного, но не линейно связного пространства.

Теорема Урысона - 1 о метризуемости

1 ноября 2017 г. 14:08

10.7. Теорема Урысона. *Всякое нормальное пространство X со счётной базой метризуемо.*

Доказательство. Поскольку подпространство метризуемого пространства метризуемо (см. 1.2.4), достаточно, в силу Теоремы 10.6, построить гомеоморфное вложение $f : X \to I^\omega$ пространства X в гильбертов куб (счётное произведение отрезков). Пусть $\mathcal{B}$ — счётная база пространства X. Пару элементов $\pi = (U, V)$ базы $\mathcal{B}$ назовём *нормальной*, если

$$\mathrm{Cl}(V) \subset U.$$

Множество всех нормальных пар, как и множество всех пар элементов базы $\mathcal{B}$ счётно. Занумеруем их натуральными числами:

$$\pi_n = (U_n, V_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

По лемме Урысона для каждой нормальной пары π_n существует такая непрерывная функция

$\varphi_n : X \to I_n = [0, 1],$

что

$$\varphi_n(V_n) = 1, \quad \varphi_n(X \setminus U_n) = 0. \tag{10.7}$$

Положим

$$f = \mathop{\Delta}_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n = I^\omega. \tag{10.8}$$

Отображение f непрерывно как диагональное произведение непрерывных отображений (см. Предложение 7.4.4).

Докажем инъективность отображения f. Пусть $x, y \in X$ — различные точки. Поскольку X — T_1-пространство, существует такой элемент $U \in \mathcal{B}$, что

$x \in U, \ \ y \in X \setminus U.$

В силу регулярности X существует такая окрестность Ox, что $\mathrm{Cl}(Ox) \subset U$. Далее, существует такое $V \in \mathcal{B}$, что

$x \in V \subset Ox \subset \mathrm{Cl}(Ox) \subset U.$

Ясно, что (U, V) — нормальная пара. Следовательно, $(U, V) = (U_n, V_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (10.7) вытекает, что $\varphi_n(x) = 1 \neq 0 = \varphi_n(y)$. Значит, $f(x) \neq f(y)$ согласно (10.8).

Остаётся показать, что отображение

$f^{-1} : f(X) \to X$

непрерывно. Пусть $y = (y_n) \in f(X)$ и $f^{-1}(y) = x$. Берём произвольную окрестность Ox точки x. Следуя процедуре доказательства инъективности отображения f, находим такую нормальную пару $\pi_n = (U_n, V_n)$, что

$x \in V_n \subset U_n \subset Ox.$

Согласно (10.7) функция $\varphi_n : X \to [0,1]$ обладает свойствами

$$\varphi_n(x) = 1, \quad \varphi_n(x') = 0 \quad \text{для всякого} \quad x' \in X \setminus Ox. \tag{10.9}$$

Пусть $p_n : I^\omega \to I_n$ — проектирование. Тогда, в силу (10.8), коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi_n"'] & I^\omega \arrow[d, "p_n"] \\ & I_n. \end{tikzcd}$$

Из коммутативности этой диаграммы вытекает, что множество $p_n^{-1}(0,1]$ является окрестностью Oy точки y, поскольку $p_n(y) = \varphi_n(x) = (10.9) = 1$. Пусть теперь $z \in f^{-1}\big(Oy \cap f(X)\big)$. Тогда

$$\varphi_n(z) = p_n\big(f(z)\big) > 0, \tag{10.10}$$

так как $f(z) \in Oy$. Следовательно, $z \in Ox$ согласно (10.9) и (10.10). Поэтому $f^{-1}(Oy) \subset Ox$ и, значит, отображение f^{-1} непрерывно. $\square$