Детальное содержание 26-10-2017

23 октября 2017 г. 21:00

1) Метрическое пространство
   a. Диаметр множества.
   b. Расстояние между множествами.
   c. Диаметр множества и его замыкания.
   d. Внутрення точка.
2) Экзотические примеры топологических пространств.
   a. Топология линейно упорядоченного пространства.
   b. Топология частично упорядоченного пространства.
   c. Канторово совершенное множество.
   d. Трансфинитная прямая.
3) База топологии.
   a. Окрестности модмножеств.
   b. Теоерма о существовании счетной базы на прямой и в R^n.
4) Индуцированная топология на подмножестве топологического пространства.
   a. Топология метрического подпространства.
   b. Эквивалентные метрики.
5) Различные примеры гомеоморфных постранств:
   a. Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей $S^1 \times S^1$[1].
   b. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц SO(3) и трехмерного вещественного проективного пространства RP^3.
6) Конструкции топологических пространств.
   a. График непрерывного отображения.
   b. Замкнутость графика непрерывного отображения.
   c. Фактор топология
   d. Вещественное проективное пространство.
   e. Лента Мебиуса.
   f. Тор.
   g. Бутылка Клейна.
   h. Конусы и цилиндры отображений.
   i. Надстройка.
   j. SO(3)
   k. RP^3 веществнное проективное пространство

7) Наследственность аксиом отделимости:
   a. Регулярнoть
   b. Нормальность: Нормальнoть замкнутого подпространств нормального пространства
8) Вторая акиома счетности.
   a. Теорема Урысона о метризуемости нормального пространства со второй аксиомой счетности.
   b. Теорема Тихонова о нормальности (Енгелькинг, Теорема 1.5.15, стр. 79, см. стр. 85: Теорема 1.5.15 была доказана Тихоновым [1925]; Тихонов А. Н. [1925] Uber einen Metrisationssatz von P. Urysohn. — Math. Ann 95 A925, 139-142.)
      i. Тихонов: Любое регулярное пространство со второй аксиомой счетности нормльно.
      ii. Доазательство. Дано два замкнутых непересекающихся множества A и B, $A \cap B = \varnothing$, $A=[A]$, $B=[B]$.
9) Компактные топологические пространства.
   a. Непрерывный образ компактного пространство.
   b. Компактное подмножество.
   c. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства и

непрерывного образа компакта.

d. Замкнутость компактного подмножества хаусдофова пространства.
e. Достижение максимума функции на компакте.
f. Гомеоморфность инъективного отображения компатного пространства
g. Цертрированные системы замкнутых множеств.
   i. Направленость, предельная точка направленности $\{x_\alpha\}$. Это такая точка x_0, когда для любой окрестности $x_0 \in U$ и любого α найдется $\beta > \alpha$, для которого $x_\beta \in U$.
   ii. Поднаправленное множество φ: A'-->A : это такое отображение, для которого конфинально, т.е. $\forall \alpha \in A \exists \alpha' \in A'$ $\varphi(\alpha') >= \alpha$. При этом, если $y_{\alpha'} = x_{\varphi(\alpha)}$, То $y_{\alpha'}$ называется поднаправленностью.
   iii. Теорема. Если x_0 - предельная точка направленности $\{x_\alpha\}$, То сущетвует поднаправленность $y_{\alpha'}$ сходящаяся к x_0.
   iv. Доказательство. Пусть A' - направленное множество окрестностей точки x_0 , образующее базу в точке x_0 . Поскольку точка x_0 является предельной для направленности $\{x_\alpha\}$, То
   v. Пусть x — предельная точка направленности $S = \{x_\alpha, \alpha \in A\}$. Рассмотрим множество A', состоящее из всех упорядоченных пар (α, U),где $\alpha \in A$, U-окрестность точки x, $x_\alpha \in U$. Положим по определению (α1,U1)<(α2,U2), если α1<α2 и U2$\subset$U1. Легко показать, что A' направлено отношением <. Направленность xS' = {a', ст' е 2'}, где xa> = л:а для a' = (a, ?/), тоньше, чем 2, так как функция ф, определенная равенстйом ф((a, U))=o, является неубывающим отображением 2' в 2. Для каждой окрестности U точки x существует такое ogJ, что xa^ U. Так как для a' ^ (a, C/)e S7 мы имеем лга'^ C/, то x— предел направленности S'.

h. Нормальность хаусдорфова компактного пространства.
i. Критерий компактности подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^{n}$.
j. Теорема Тихонова о произведении компактных пространств.

10) Секвенциальная компактность.

a. Равносильность компактности и секвенциальной компактности для метрических пространств.
b. Теорема 21.17. Метрическое пространство (X;?) компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.
c. Доказательство. Начнем с более простой части «только тогда». Пусть X компактно. Если ни одна точка a ∈ X не является предельной точкой последовательности {x n }, то для всякой a ∈ X существует такое открытое множество U a 3 a, что x n ∈ U a лишь для конечного числа натуральных чисел n. Ввиду компактности X имеем X = U a 1 ∪ ··· ∪ U a m для каких-то a 1 ;:::;a m ∈ X, так что x n ∈ X лишь для конечного числа натуральных чисел n, что нелепо. (Доказательство в эту сторону проходит и для произвольных топологических пространств.)
d. Лемма 21.18 (о лебеговом числе). Для всякого открытого покрытия секвенциально компактного метрического пространства X существует такое число " > 0, что для всякой точки x ∈ X шар B " (x) содержится в одном из множеств покрытия.
e. Теперь можно завершить доказательство теоремы. Итак, пусть {U } | открытое покрытие секвенциально компактного метрического пространства X; нам нужно выбрать из него конечное подпокрытие. Ввиду леммы существует такое " > 0, что для всякого x ∈ X шар B " (x) содержится в одном из U . Стало быть, достаточно выбрать конечное подпокрытие в покрытии S x∈X B " (x) = X; этим мы сейчас и займемся.
f. Выберем произвольно точку x 1 ∈ X; если B " (x 1) = X, то требуемое подпокрытие (состоящее всего из одного множества) уже найдено; если

нет, то возьмем произвольную x 2 ∈ X\B " (x 1); если B " (x 1)∪B " (x 2) 6= X, то возьмем произвольную x 3 ∈ X \ (B " (x 1) ∪ B " (x 2)), и т.д. Если этот процесс на каком-то шаге оборвется, мы получим искомое конечное покрытие пространства X множествами вида B " (x); в противном случае мы получаем последовательность {x n } n∈N , обладающую тем свойством, что ?(x m ;x n) > " при m 6= n. Ясно, что ни такая последовательность, ни любая ее подпоследовательность предела иметь не может: если ?(y n ;y n+k) > " при k > 0 и limy n = y, то существует такое N, что ?(y n ;y) < "=2 при всех n > N. Если теперь n 2 > n 1 > N, то
?(y n 1 ;y n 2) 6 ?(y n 1 ;y) + ?(y n 2 ;y) <"2+"2= ";
вопреки тому, что расстояния между разными членами последовательности не меньше ".
Полученное противоречие с секвенциальной компактностью завершает доказательство.

11) Паракомпактные пространства.
    a. Регулярноть хаусдорфова паракомпактного пространства.
    b. Нормальность хаусдофова паракомпактного простравнста.
    c. Паракомпактность метрического пространвства со второй аксиомой счетности
    d. Паракомпактность метрического пространвства
12) Аксиомы отделимости декартового произведения.
    a. T_0
    b. T_1
    c. T_2
    d. T_3
    e. T_4
    f. Регулярные пространства
    g. Нормальные пространства. Контрпример.

Извлечение из вышки 1

25 октября 2017 г. 12:22

21. Компактность

Компактность — чрезвычайно важное техническое понятие топологии и анализа. Начнем с определения.

Определение 21.1. Топологическое пространство X называется *компактным*, если оно обладает следующим свойством: во всяком семействе открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$, обладающем тем свойством, что $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, существует такое конечное подсемейство $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$, что $X = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$ (кратко эту мысль выражают так: из всякого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие).

Подмножество Y в топологическом пространстве X называется компактным, если оно компактно в топологии, индуцированной с X.

Пример 21.2. Всякое компактное подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ обязано быть ограниченным. В самом деле, для всякого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим открытое в M множество $U_n = B_n(0) \cap M$ (через 0 обозначено начало координат в $\mathbb{R}^n$, а через $B_n(0)$ — как обычно, открытый шар в метрическом пространстве $\mathbb{R}^n$ — скажем, относительно L^2-метрики). Ясно, что $M = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i$ и что неограниченное множество M не может быть объединением конечного подсемейства этого семейства.

Пример 21.3. Интервал $(0;1) \subset \mathbb{R}$ ограничен, но компактным все же не является: имеем $(0;1) = \bigcup_{n>2}(1/n; 1-1/n)$, и конечного подпокрытия из этого покрытия не выберешь.

Предложение 21.4. *Всякий отрезок* $[a;b] \subset \mathbb{R}$ *компактен.*

Доказательство. Пусть $[a;b] = \bigcup_\alpha U_\alpha$ — открытое покрытие. Положим

$X = \{\, x \in (a;b] \mid$ Отрезок $[a;x]$ покрыт конечным числом множеств $U_\alpha \,\}$.

Заметим, что $X \neq \varnothing$: в самом деле, пусть $a \in U_{\alpha_0}$, тогда $[a; a+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и, скажем, отрезок $[a; a+\varepsilon/2]$ покрывается всего лишь одним множеством из нашего семейства.

Далее, пусть $\xi = \sup X$; покажем, что $\xi \in X$. В самом деле, пусть $\xi \in U_\beta$. Так как U_β открыто, существует такое $\delta > 0$, что $(\xi - \delta; \xi] \subset U_\beta$; так как ξ — верхняя грань множества X, существует точка

$$c \in (\xi - \delta; \xi] \cap X \subset U_\beta \cap X;$$

по определению множества X имеем $[a;c] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ для каких-то $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; тогда $[a;\xi] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_\beta$, так что $\xi \in X$.

Покажем, наконец, что $\xi = b$. В самом деле, пусть $\xi \in U_\beta$; если $\xi < b$, то имеем $(\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon) \subset U_\beta$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда, добавляя, если надо, множество U_β к конечному семейству множеств U_α, покрывающих $[a;\xi]$, получаем, что, скажем, $\xi + \varepsilon/2 \in X$, в противоречие с тем, что $\xi = \sup X$.

Коль скоро $\xi = b$, отрезок $[a;b]$ покрывается конечным числом множеств U_α, что и требовалось доказать. $\square$

Предложение 21.5. *Пусть X — компактное топологическое пространство и $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Тогда Y компактно.*

Доказательство. Согласно определению индуцированной топологии, задать открытое покрытие множества Y — все равно, что задать такое семейство открытых подмножеств $U_\alpha \subset X$, что $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Добавив к этому семейству открытое множество $X \setminus Y$, получим открытое покрытие X. Ввиду компактности X некоторое конечное подсемейство этого покрытия также покрывает X. Выбросим из этого подсемейства множество $X \setminus Y$, если оно там есть; оставшиеся множества $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ обязаны покрывать Y, что и требовалось. □

Предложение 21.6. *Пусть $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причем X компактно. Тогда подмножество $f(X) \subset Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть $f(X) \subset \bigcup U_\alpha$, где все U_α открыты в Y. Тогда $X = \bigcup f^{-1}(U_\alpha)$, где все $f^{-1}(U_\alpha)$ открыты в X ввиду непрерывности f. Так как X компактно, имеем $X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})$ для каких-то $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Отсюда $f(X) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$, что и требовалось. □

Предложение 21.7. *Пусть X — хаусдорфово пространство и $K \subset X$ — его компактное подмножество. Тогда K замкнуто в X.*

Доказательство. Достаточно показать, что $X \setminus K$ открыто, т.е. что для всякой точки $z \notin K$ существует такое открытое $V \ni x$, что $V \cap K = \varnothing$. Однако же ввиду отделимости X для каждой точки $x \in K$ найдутся такие открытые подмножества $U_x \ni x$ и $V_x \ni z$, что $U_x \cap V_x = \varnothing$. Имеем, очевидно, $K = \bigcup_{x \in K} U_x$; ввиду компактности K имеем $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ для некоторого конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\}$; тогда открытое множество $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ содержит z и не пересекается с K, что и требовалось. □

Следствие 21.8. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. «Тогда» следует из предложений 21.4 и 21.5, а «только тогда» — из предложения 21.7 и примера 21.2. □

Следствие 21.9. *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция на компактном пространстве* X*. Тогда* f *достигает на* X *наибольшего и наименьшего значения.*

Доказательство. Ввиду предложений 21.6 и 21.8, множество $f(X) \subset \mathbb{R}$ ограничено (стало быть, у него есть точная верхняя и точная нижняя грани) и замкнуто (стало быть, его верхняя и нижняя грани принадлежат $f(X)$ и тем самым являются его наибольшим и наименьшим элементами). $\square$

3

25 октября 2017 г. 12:28

Предложение 21.11. *Пусть X и Y — компактные топологические пространства. Тогда произведение $X \times Y$ также компактно.*

Доказательство. Ясно, что достаточно найти конечное подпокрытие в покрытии пространства $X \times Y$ открытыми подмножествами вида $U_\alpha \times V_\beta$, где U_α — открытое подмножество в X, а V_β — открытое подмножество в Y. Далее, для всякой точки $x \in X$ подмножество $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ естественно отождествляется с Y (паре $(x; y)$ соответствует $y \in Y$); легко видеть, что при этом отождествлении индуцированная с $X \times Y$ топология на $\{x\} \times Y$ переходит в исходную топологию на Y. Возвращаясь к нашему покрытию $X \times Y$ множествами вида $U_\alpha \times V_\beta$, отметим, что, ввиду компактности Y и только что сделанного замечания, для всякой точки $x \in X$ существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $\{x\} \times Y \subset U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \times V_{\beta_n}$. Обозначим через U_x пересечение множеств вида U_{α_i}, содержащих x; тогда $U_x \times Y \subset U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \times V_{\beta_n}$. Поскольку $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, ввиду компактности X существуют такие $x_1, \ldots, x_m$, что $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$. Стало быть, $X \times Y = (U_{x_1} \times Y) \cup \cdots \cup (U_{x_m} \times Y)$; тем самым $X \times Y$ является объединением конечного числа подмножеств, каждое из которых покрыто конечным числом множеств нашего покрытия. Следовательно, само $X \times Y$ также покрывается конечным числом множеств нашего покрытия. □

Определение 21.15. Пусть $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность точек в топологическом пространстве X и $a \in X$. Точка a называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности $U \ni a$ бесконечно много $n \in \mathbb{N}$, для которых $x_n \in U$.

Определение 21.16. Пространство называется *секвенциально компактным*, если всякая последовательность его точек имеет предельную точку.

Теорема 21.17. *Метрическое пространство $(X; \rho)$ компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Доказательство. Начнем с более простой части «только тогда». Пусть X компактно. Если ни одна точка $a \in X$ не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, то для всякой $a \in X$ существует такое открытое множество $U_a \ni a$, что $x_n \in U_a$ лишь для конечного числа натуральных чисел n. Ввиду компактности X имеем $X = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$ для каких-то $a_1, \ldots, a_m \in X$, так что $x_n \in X$ лишь для конечного числа натуральных чисел n, что нелепо. (Доказательство в эту сторону проходит и для произвольных топологических пространств.)

Лемма 21.18 (о лебеговом числе). *Для всякого открытого покрытия секвенциально компактного метрического пространства X существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всякой точки $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ содержится в одном из множеств покрытия.*

Доказательство леммы. Предположим, что искомого «лебегова числа» не нашлось. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in X$, что $B_{1/n}(x_n)$ не содержится ни в одном из множеств покрытия. Ввиду секвенциальной компактности из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Стало быть, существуют такие последовательность точек $y_m \in X$, сходящаяся к точке $y \in X$, и последовательность положительных чисел ε_m, сходящаяся к нулю, что для всякого $m \in \mathbb{N}$ шар $B_{\varepsilon_m}(y_m)$ не содержится ни в одном из множеств покрытия. Приведем эту ситуацию к противоречию.

В самом деле, имеем $y \in U$, где U — какое-то из множеств, входящих в покрытие. Так как U открыто, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(y) \subset U$. Если теперь при всех $m \geqslant N$ имеем $\rho(y_m, y) < \varepsilon/2$ и $|\varepsilon_m| < \varepsilon/2$, то из неравенства треугольника вытекает, что при $m \geqslant N$ имеем $B_{\varepsilon_m}(y_m) \subset B_\varepsilon(y)$. Поскольку $B_\varepsilon(y)$ содержится в U, получаем противоречие с выбором чисел ε_m. □

Теперь можно завершить доказательство теоремы. Итак, пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие секвенциально компактного метрического пространства X; нам нужно выбрать из него конечное подпокрытие. Ввиду леммы существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ содержится в одном из U_α. Стало быть, достаточно выбрать конечное подпокрытие в покрытии $\bigcup_{x \in X} B_\varepsilon(x) = X$; этим мы сейчас и займемся.

Выберем произвольно точку $x_1 \in X$; если $B_\varepsilon(x_1) = X$, то требуемое подпокрытие (состоящее всего из одного множества) уже найдено; если нет, то возьмем произвольную $x_2 \in X \setminus B_\varepsilon(x_1)$; если $B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \neq X$, то возьмем произвольную $x_3 \in X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$, и т. д. Если этот процесс на каком-то шаге оборвется, мы получим искомое конечное покрытие пространства X множествами вида $B_\varepsilon(x)$; в противном случае мы получаем последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, обладающую тем свойством, что $\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$ при $m \neq n$. Ясно, что ни такая последовательность, ни любая ее подпоследовательность предела иметь не может: если $\rho(y_n, y_{n+k}) \geqslant \varepsilon$ при $k > 0$ и $\lim y_n = y$, то существует такое N, что $\rho(y_n, y) < \varepsilon/2$ при всех $n > N$. Если теперь $n_2 > n_1 > N$, то

$$\rho(y_{n_1}, y_{n_2}) \leqslant \rho(y_{n_1}, y) + \rho(y_{n_2}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

вопреки тому, что расстояния между разными членами последовательности не меньше ε.

Полученное противоречие с секвенциальной компактностью завершает доказательство. $\square$