Детальное содержание 19-10-2017

16 октября 2017 г. 18:45

1) Метрическое пространство
    a. Диаметр множества.
    b. Расстояние между множествами.
    c. Диаметр множества и его замыкания.
    d. Внутренння точка.
2) Экзотические примеры топологических пространств.
    a. Топология линейно упорядоченного пространства.
    b. Топология частично упорядоченного пространства.
    c. Канторово совершенное множество.
    d. Трансфинитная прямая.
3) База топологии.
    a. Окрестности модмножеств.
    b. Теоерма о существовании счетной базы на прямой и в R^n.
4) Индуцированная топология на подмножестве топологического пространства.
    a. Топология метрического подпространства.
    b. Эквивалентные метрики.
5) Различные примеры гомеоморфных постранств:
    a. Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей S^1×S^1 .
    b. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц SO(3) и трехмерного вещественного проективного пространства RP^3.
6) Конструкции топологических пространств.
    a. График непрерывного отображения.
    b. Замкнутость графика непрерывного отображения.
    c. Тихоновское произведение.
    d. Хаусдорфовость тихоновского произведения.
    e. Фактор топология
    f. Вещественное проективное пространство.
    g. Лента Мебиуса.
    h. Тор.
    i. Бутылка Клейна.
    j. Конусы и цилиндры отображений.
    k. Надстройка.
    l. SO(3)
    m. RP^3 веществнное проективное пространство
7) Аксиомы отделимости:
    a. Логическая путаница:
    b. $T_1+T_4 \Rightarrow T_0+T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$
    c.

T_4 : T_0+T_4 - нормальное пространство.	Ошибка
Должно быть	нормальность $=T_1+T_4$

    d. Бывает T_4, но не T_3: Например { ∅,{a}, {a,b}=X } — связное двоеточие:
    e. T1 не T2
    f. Хаусдофовость не регулярность: Енгелькинг, стр.73
    g. Из $T_0+T_3 \Rightarrow T_2$: Пусть дано две точки $x\neq y \in X$. Одна из них принадлежит замкнутому множеству, скажем, $y\in F$, $x\notin F$. Тогда существует окрестность U, $x\in U$, и окрестность V, $y\in F\subset V$, которые не пересекаются, $U\cap V=\varnothing$, что означает выполнение аксиомы T_2.
    h. $T_1+T_4 \Rightarrow T_0+T_3$: Пусть даны точка $x\in X$ и замкнутое множество $F\subset X$, $x\notin F$. Поскольку по аксиоме T_1(точка x замкнута, то применяем T_4: существует окрестность U, $x\in U$, и окрестность V, $F\subset V$, которые не пересекаются, $U\cap V=\varnothing$,

что означает выполнение аксиомы T_3.

i. Регуляность но не нормальность: плоскость Нмыцкого Енгелькинг стр.48, 74

j. Различные определения нормальности. $U \Subset V$ означает, что существует отрытое множество W, т.ч. $U \subset [U] \subset W \subset [W] \subset V$. Тогда нормальность означает выполение T_1 и для любого замкнутого множества $F \subset U$ существует окрестность W, $F \subset W \Subset U$, т.е. $F \Subset U$

8) Функциональная отделимость.
   a. Теорема Титце-Урысона
      i. Доказательство
      ii. |f|<=a
      iii. |f-g0|<=2/3 a, |g0|<=1/3 a
      iv. |f-g0-g1|<=(2/3)^2 a, |g1|<=1/3(2/3)a
      v. |f-g0-g1-g2|<=(2/3)^3 a, |g2|1/3(2/3)^2 a
      vi. И т.д.

9) Наследственность аксиом отделимости:
   a. T_0
   b. T_1
   c. T_2
   d. Регулярноть
   e. Нормальность: Нормальноть замкнутого подпространств нормального пространства

10) Вторая акиома счетности.
   a. Теорема Урысона о метризуемости нормального пространства со второй аксиомой счетности.
   b. Теорема Тихонова о нормальности (Енгелькинг, Теорема 1.5.15, стр. 79, см. стр. 85: Теорема 1.5.15 была доказана Тихоновым [1925]; Тихонов А. Н. [1925] Uber einen Metrisationssatz von P. Urysohn. — Math. Ann 95 A925, 139-142.)
      i. Тихонов: Любое регулярное пространство со второй аксиомой счетности нормльно.
      ii. Доазательство. Дано два замкнутых непересекающихся множества A и B, $A \cap B = \varnothing$, $A=[A]$, $B=[B]$.

11) Компактные топологические пространства.
   a. Непрерывный образ компактного пространство.
   b. Компактное подмножество.
   c. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства и непрерывного образа компакта.
   d. Замкнутость компактного подмножества хаусдофова пространства.
   e. Достижение максимума функции на компакте.
   f. Гомеоморфность инъективного отображения компатного пространства
   g. Цертрированные системы замкнутых множеств.
      i. Направленость, предельная точка направленности $\{x_\alpha\}$. Это такая точка x_0, когда для любой окрестности $x_0 \in U$ и любого α найдется $\beta > \alpha$, для которого $x_\beta \in U$.
      ii. Поднаправленное множество φ: A'-->A : это такое отображение, для которого конфинально, т.е. $\forall \alpha \in A \exists \alpha' \in A'$ $\varphi(\alpha') >= \alpha$. При этом, если $y_{\alpha'} = x_{\varphi(\alpha)}$, То $y_{\alpha'}$ называется поднаправленностью.
      iii. Теорема. Если x_0 - предельная точка направленности $\{x_\alpha\}$, То сущетвует поднаправленность $y_{\alpha'}$ сходящаяся к x_0.
      iv. Доказательство. Пусть A' - направленное множество окрестностей точки x_0, образующее базу в точке x_0. Поскольку точка x_0 является предельной для направленности $\{x_\alpha\}$, То
      v. Пусть x — предельная точка направленности $S = \{x_\alpha, \alpha \in A\}$. Рассмотрим множество A', состоящее из всех упорядоченных пар (α, U),где $\alpha \in A$, U-окрестность точки x, $x_\alpha \in U$. Положим по

определению ($\alpha1$,U1)<($\alpha2$,U2), если $\alpha1$<$\alpha2$ и U2⊂U1. Легко показать, что A' направлено отношением <. Направленность xS' = {a', ст' е 2'}, где xa> = л:a для a' = (a, ?/), тоньше, чем 2, так как функция ф, определенная равенстйом ф((a, U))=o, является неубывающим отображением 2' в 2. Для каждой окрестности U точки x существует такое ogJ, что xa^ U. Так как для a' ^ (a, C/)e S7 мы имеем лга'^ C/, то x— предел направленности S'.

h. Нормальность хаусдорфова компактного пространства.
i. Критерий компактности подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^{n}$.
j. Теорема Тихонова о произведении компактных пространств.

12) Секвенциальная компактность.
    a. Равносильность компактности и секвенциальной компактности для метрических пространств.
13) Паракомпактные пространства.
    a. Регулярноть хаусдорфова паракомпактного пространства.
    b. Нормальность хаусдофова паракомпактного проставнста.
    c. Паракомпактность метрического пространвства со второй аксиомой счетности
    d. Паракомпактность метрического пространвства
14) Аксиомы отделимости декартового произведения.
    a. T_0
    b. T_1
    c. T_2
    d. T_3
    e. T_4
    f. Регулярные пространства
    g. Нормальные пространства. Контрпример.