Детальное содержание 12-10-2017

10 октября 2017 г. 10:04

1) Метрическое пространство
   a. Диаметр множества.
   b. Расстояние между множествами.
   c. Расстояние между множеством и точкой.
   d. Непрерывность расстояния.
      Докажите, что $|\rho(x,A)-\rho(y,A)| \le \rho(x,y)$ для любого множества A и точек x, y того же метрического пространства.
      Для произвольной точки $z \in A$ верно, что $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y, z)$, значит, $\rho(x,A) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,A)$, или $\rho(x,A) - \rho(y, A) \le \rho(x,y)$. Поменяв местами x и y, получим неравенство $\rho(y, A) - \rho(x,A) \le \rho(x,y)$. Система из двух полученных неравенств равносильна искомому неравенству.

   e. Критерий точки прикосновения в терминах метрики.
   f. Диаметр множества и его замыкания.
   g. Внутрення точка.
2) Экзотические примеры топологических пространств.
   a. Топология линейно упорядоченного пространства.
   b. Топология частично упорядоченного пространства.
   c. Канторово совершенное множество.
   d. Трансфинитная прямая.
3) База топологии.
   a. Окрестности модмножеств.
   b. Теоерма о существовании счетной базы на прямой и в R^n.
4) Индуцированная топология на подмножестве топологического пространства.
   a. Топология метрического подпространства.
   b. Эквивалентные метрики.
5) Различные примеры гомеоморфных постранств:
   a. Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей $S \times S$.
   b. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц SO(3) и трехмерного вещественного проективного пространства RP^3.
6) Конструкции топологических пространств.
   a. Сходимость в декартовых произведениях.
   b. График непрерывного отображения.
   c. Замкнутость графика непрерывного отображения.
   d. Тихоновское произведение.
   e. Хаусдорфовость тихоновского произведения.
   f. Фактор топология
   g. Вещественное проективное пространство.
   h. Лента Мебиуса.
   i. Тор.
   j. Бутылка Клейна.
   k. Конусы и цилиндры отображений.
   l. Надстройка.
   m. SO(3)
   n. RP^3 веществнное проективное пространство
7) Аксиомы отделимости:
   a. T_0. Простейшие примеры:
   b. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости Колмогорова или является T_0 -пространством, если для любых двух различных точек x и y пространства X по крайней мере одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

c. Наследсвенность T_0.

d. На множестве X, состоящим из двух различных точек a и b имеются четыре различные топологии. Перечислим их.

   T 1 = {∅,X} — слипшееся двоеточие;

   T 2 = { ∅,{a},X } — связное двоеточие;

   T 3 = { ∅,{b},X } — связное двоеточие;

   T 4 = { ∅,{a},{b},X } — дискретная топология.

e. T_1. Это пространство, у которого для любых различных точек x и y существуют окрестность Ox, не содержащая точки y, и окрестность Oy, не содержащая точки x.

f. Наследственность T_1.

g. Топология Зариского в эвклидовом пространстве.

h. Пространство X есть T_1 -пространство тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества X замкнуты.

i. T_2, Хаусдорфовы пространства.

j. Наследственость хаусдофовости.

k. Бесконечное множество, снабженное топологией, в которой замкнуты лишь конечные подмножества и само множество(минимальной T_1 -топологией), является нехаусдорфовым T_1 -пространством.

l. T_3, Бывают пространства T_3 , но не T_0: слипшееся двоеточие.

m. Нслдственность.

n. T_0+T_3 - регулярное пространство.

o. Всякое регулярное пространство хаусдофово.

p. T_4 : T_0+T_3 - нормальное пространство.

q. Различные определения нормальности.

8) Аксиомы отделимости в метрческих пространствах.

   a. $x \neq y \Rightarrow 2\varepsilon=\rho(x,y)>0 \Rightarrow O\varepsilon(x)\cap O\varepsilon(y)=\varnothing. \Rightarrow T_2$.

   b. $\{x\}\cap F=\varnothing \Rightarrow 2\varepsilon=\rho(x,F)>0 \Rightarrow O\varepsilon(x)\cap O\varepsilon(F)=\varnothing \Rightarrow T_3$.

   c. $H\cap F=\varnothing \Rightarrow f(x) = \frac{\rho(x,F)}{\rho(x,F)+\rho(x,H)}, \Rightarrow f|F = 0 \;\&\; f|H = 1. \Rightarrow$ нормальность.

9) Функциональная отделимость.

   a. Лемма Урысона.

   b. Теорема Титце.

   c. Разбиение единицы.