07 сентября 2017

1 сентября 2017 г. 17:04

2	Программа в деталях	
2.1	Язык теории множеств.	
1.	Множество. Подмножество. Пустое множество. Одноэлементное множество.	
2.	Теоретико множественные операции. Объединение. Пересечение. Разность. Непересекающиеся множества.	
3.	Соотношения операций с множествами. Коммутативность. Ассоциативность. Дистрибутивность пересечения относительно объединения. Дистрибутивность объединения относительно пересечения. Двойственность объединения и пересечения (законы де Моргана).	
4.	Отображения множеств. Область определения отображения. Область значений отображения. Тождественное отображение. Образ подмножества. Прообраз подмножества. Прообраз элемента. Сужение отображения.	
5.	Композиция отображений. Инъективное отображение. Сюръективное отображение. Взаимно однозначное отображение. Обратное отображение. Равномощные множества.	
6.	Конструкции множеств. Несвязное объединение. Категорное свойство универсальности. Декартово произведение. Координаты декартова произведения. Декартово произведения семейства множеств. Векторное пространство R^n как декартово произведение. График отображения. Фактор-множество.	
7.	Мощность множества.(Кардинальные числа.) Равномощные мноества. Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.	
8.	Упорядоченные множества. Частично упорядоченное множество.Линейно упорядоченное множество. Направленные множества. Направленности, пределы направленностей.. Последовательность элементов. Частичный порядок на арифметическом пространстве R^n . Конфинальность. Поднаправленность. Подпоследовательность.	
9.	Прямой и обратный пределы. Прямой и обратный спектры множеств.	
10.	Вполне упорядоченные множества. Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества. Конечные, счетные и несчетные множества. Кардинальные и порядковые числа (кардиналы и ординалы). Кардиналы $\aleph_0$, $\aleph_1$, $c = 2^{\aleph_0}$. Континуум гипотеза. Лемма Цорна. Вывод из аксиомы выбора. Вывод теоремы Цермело из леммы Цорна. Непустота декартова произведения непустых множеств.	

Источник <https://2cyr.com/decode/?lang=ru>

Выдержки теорема Кантора-Бернштейна

5 сентября 2017 г. 13:10

■

Доказательство. (Другая версия доказательства).

Дано три множества $Y_0 \supset X_0 \supset Y_1$, причем множество Y_0 равномощно множеству Y_1. Значит имеется биекция $g : Y_0 \longrightarrow Y_1$. Можно построить убывающую последовательность подмножеств

$$Y_0 \supset X_0 \supset Y_1 \supset X_1 \supset Y_2 \supset X_2 \supset Y_3 \supset \cdots \supset Z = \bigcap Y_i = \bigcap X_i$$

где $X_1 = g(X_0)$, $Y_2 = g(Y_1)$, $\ldots X_{k+1} = g(X_k)$, $Y_{k+2} = g(Y_{k+1})$, $\ldots$ Все это можно изобразить в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
Y_0 \supset X_0 \supset & Y_1 \supset & X_1 \supset & Y_2 \supset & X_2 \supset Y_3 \supset X_3 \supset Y_4 \supset X_4 \cdots \supset & Z \\
& Y_0 \supset \arrow[u, "g"] & X_0 \supset \arrow[u, "g"] & Y_1 \supset \arrow[u, "g"] & X_1 \supset Y_2 \supset X_2 \supset Y_3 \supset X_3 \cdots \supset & Z \arrow[u, "g"]
\end{tikzcd}$$

причем вертикальное отображение является биекцией в каждом члене. Тогда оба множества X_0 и Y_0 можно представить в виде несвязных объединений:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
X_0 = & (X_0 \setminus Y_1) \sqcup & (Y_1 \setminus X_1) \sqcup (X_1 \setminus Y_2) \sqcup & (Y_2 \setminus X_2) \sqcup (X_2 \setminus Y_3) \sqcup \cdots \sqcup Z \\
Y_0 = & & (Y_0 \setminus X_0) \sqcup (X_0 \setminus Y_1) \sqcup \arrow[u, "g"] & (Y_1 \setminus X_1) \sqcup (X_1 \setminus Y_2) \sqcup \cdots \sqcup Z \arrow[u, "g"]
\end{tikzcd}$$

Теорема Кантора

5 сентября 2017 г. 13:12

Теорема 5 (Кантор) *Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.*

Доказательство.

Предположим, что существует множество A, равномощное множеству всех своих подмножеств 2^A, то есть, что существует такая биекция $f : A \longrightarrow 2^A, \quad f(a) \subset A, \quad a \in A$, ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A. Рассмотрим подмножество $B \subset A$, состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих своим образам при отображении f, $B = \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Поскольку отображение f биективно, то должен существовать такой элемент $b \in A$, что $f(b) = B$.

Теперь посмотрим, может ли элемент b принадлежать подмножеству B. Если $b \in B$, т.е. $b \in f(b)$, получаем по определению, что $b \notin B$. И наоборот, если $b \notin B$, т.е. $b \notin f(b)$, то, значит, согласно определению $b \in B$. В любом случае, получаем противоречие. Следовательно, исходное предположение ложно и, следовательно, множество A не равномощно множеству 2^A.

Заметим, что множество 2^A содержит подмножество, равномощное множеству A (например, множество всех одноэлементных подмножеств), а тогда из только что доказанного следует, что $\#(A) < \#(2^A)$.

Теорема Цермело

5 сентября 2017 г. 15:23

Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества.

Теорема 2 *Любое множество можно вполне упорядочить.*

Доказательство.

Пусть M — произвольное данное множество. Покажем, что его можно вполне упорядочить. Рассмотрим совокупность $\mathcal{M}$ всех пар $(A, \leq_A)$, где $A \subset M$, а $\leq_A$ — отношение полного порядка на A. На множестве $\mathcal{M}$ введем естественное отношение порядка: $(B, \leq_B)$ следует за $(A, \leq_A)$, если $(A, \leq_A)$ есть начальный отрезок в $(B, \leq_B)$, то есть если $A = \{a \in B : a < b\}$ для

некоторого $b \in B$ и на множестве A отношение $\leq_B$ совпадает с $\leq_A$. Далее докажем два утверждения. I. В $\mathcal{M}$ существует максимальный элемент. Это следует из того факта, что если $\mathcal{C}$ — цепь в $\mathcal{M}$, то объединение всех элементов $C \in \mathcal{C}$ есть также элемент $\mathcal{M}$, который является верхней гранью цепи $\mathcal{C}$. II. Если $(A, \leq_A)$ — максимальный элемент, то $A = M$. Если бы $M \setminus A$ было непусто, то взяв какой-нибудь элемент $b \in M \setminus A$, и положив $b > a$ для любого $a \in A$, мы получили бы вполне упорядоченное множество $A \cup \{b\}$, начальным отрезком которого является A. Это противоречит предположению о максимальности $(A, \leq_A)$. Таким образом, мы имеем вполне упорядоченное множество $(M, \leq_M)$. Что и требовалось доказать. ∎

Выдержки

5 сентября 2017 г.   15:24

Теорема 3 *Любое множество кардинальных чисел вполне упорядочено.*

Доказательство. Пусть M – некоторое множество кардинальных чисел. Реализуем каждое кардинальное число в виде мощность некоторого множества, т.е. множества $X_\alpha, \quad \alpha \in M$. Можно считать, что каждое множество вполне упорядочено с помощью полного порядка $\leq_\alpha$. Тогда если $\alpha < \beta$, то множество X_α является начальным отрезком множества X_β. ∎

14 сентября 2017

11 сентября 2017 г. 13:05

Теоремы:

1	Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.	x
2	Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах.	x

$$A_0\supset A_1\supset A_2\supset A_3\supset A_4\supset A_5\supset A_6\supset A_7\supset A_8\supset \ldots\supset A_\infty$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$A_0\supset A_1\supset A_2\supset A_3\supset A_4\supset A_5\supset A_6\supset \ldots\supset A_\infty$$

$$(A_1\supset A_2)\cup(A_2\supset A_3)\cup(A_3\supset A_4)\cup(A_4\supset A_5)\cup\ldots\cup A_\infty=A_1$$

$$\uparrow$$

$$(A_0\supset A_1)\cup(A_1\supset A_2)\cup(A_2\supset A_3)\cup(A_3\supset A_4)\cup\ldots\cup A_\infty=A_0$$

3	Вполне упорядочные множества. Ординалы и кардиналы	x
4	Теорема: Множество вполне упорядоченных множетв линейно упорядочено по канонияескому включению и вполне упорядочено	x
5	Теорема: Множество кардиналов вполне упорядочено	x
6	Теорема Цермело о сущетвовании полного порядка	x
7		

7.	Мощность множества.(Кардинальные числа.) Равномощные мноества. Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.	x
8.	Упорядоченные множества. Частично упорядоченное множество.Линейно упорядоченное множество. Направленные множества. Направленности, пределы направленностей.. Последовательность элементов. Частичный порядок на арифметическом пространстве R^n . Конфинальность. Поднаправленность. Подпоследовательность.	x
9.	Прямой и обратный пределы. Прямой и обратный спектры множеств.	
10.	Вполне упорядоченные множества. Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества. Конечные, счетные и несчетные множества. Кардинальные и порядковые числа (кардиналы и ординалы). Кардиналы $\aleph_0$, $\aleph_1$, $c = 2^{\aleph_0}$. Континуум гипотеза. Лемма Цорна. Вывод из аксиомы выбора. Вывод теоремы Цермело из леммы Цорна. Непустота декартова произведения непустых множеств.	x

2.2.	Метрические и топологические пространства
1.	Топологические пространства. Топологии. Сравнение топологий. Открытые множества. Замкнутые множества. Эквивалентное определение топологии.
2.	Простейшие примеры: тривиальная, дискретная, метрическая (в частности, в евклидовом пространстве), Зариского (на прямой).
3.	База открытых множеств. Предбаза.

4.	Замыкание и внутренность подмножества. Окрестность точки. Точки прикосновения. Внутренние, внешние, граничные, предельные, изолированные точки подмножества. Всюду плотные и нигде не плотные множества.
5.	Подпространства. Индуцированная топология.
6.	Метрические пространства. Шаровая окрестность. Открытость шаровой окрестности. Эвклидово пространство.
7.	Метризуемые пространства, эквивалентные метрики. Изометрии, сжимающие отображения, Нормированные векторные пространства
8.	Топология на упорядоченных множествах.

Источник <https://2cyr.com/decode/?lang=ru>

2.2.1	Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств
1	Конечные топологические пространства в дискретной топологии
2	Вещественная прямая. Интервал. Структура открытого множества на прямой. Отрезок. Пространство рациональных чисел. Канторово совершенное множество. Плотность подмножества рациональных чисел на вещественной прямой.
3	Счетная база на подмножестве евклидового пространства.
4	Гомеоморфность интервалов различной длины, открытого диска и евклидового пространства, открытого диска и открытого куба, замкнутого диска и замкнутого куба.
5	Гомеоморфность плоскости без точки R^2\setminus{x_0} и открытого круга без точки {(x, y) : 0 < x^2+y^2< 1}
6	Гомеоморфность двумерного тора T^2 и декартового произведения окружностей S^1\times S^1.
7	Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц SO(3) и трехмерного вещественного проективного пространства RP^3.

Источник <https://2cyr.com/decode/?lang=ru>

2.3	{Непрерывность отображений.}
1	{\bf Непрерывность отображения в точке}
2	{\bf Предел отображения по Коши.}Сходимость по направленному множеству. Единственность предела направленности.
3	{\bf Предел отображения в предельной точке по Гейне.} Предел отображения в предельной точке по Гейне для метрических пространств.
4	{\bf Непрерывность по Коши и по Гейне.}
5	{\bf Свойства непрерывных отображений.}
	\item Композиция непрерывных отображений. \item Сужение непрерывного отображения. \item Непрерывность объединения отображений. \item Замкнутость графика непрерывного отображения.
6	{\bf Кривая Пеано.}
7	{\bf Гомеоморфизмы.}

\end{enumerate}