

Курс "Прикладные проблемы геометрии, Курс научно-естественного содержания"

5-й курс, весна 2016–2017 уч.года
четверг; 12:30— 14:02, ауд. 13-06
(проект А.С.Мищенко)

Программа

1. Вспомогательные понятия из дифференциальной топологии
 - (a) Конфигурационное пространство.
 - (b) Примеры нетривиальных конфигурационных пространств: плоский маятник, пространственный маятник, двузвенный плоский маятник, твердое тело с закрепленной точкой.
 - (c) Фазовое пространство, примеры.
2. Дифференциальное исчисление на многообразиях
 - (a) Касательное расслоение.
 - (b) Векторные поля и их обобщения - распределения плоскостей.
 - (c) Коммутирующие векторные поля и группы диффеоморфизмов
 - (d) Градиентные векторные поля.
 - (e) Дифференциальные формы.
 - (f) Определение симплектического пространства M , $\dim M = 2n$.
 - (g) Симплектическая форма ω на симплектическом пространстве, ее свойства.
 - (h) Функция Гамильтона, система уравнений Гамильтона.
 - (i) Косой градиент функции, скобка Пуассона
3. Векторные расслоения, ассоциированные с многообразиями
 - (a) Касательное расслоение.
 - (b) Кокасательное расслоение.
 - (c) Поливекторные поля.
 - (d) Дифференциальные формы.

(e) Тензоры

4. Линейные связности, тензор кривизны, тождества дифференциального исчисления.
5. Формулы Вейля-Чженя
6. Векторные поля, дифференциальные формы, сигнатура многообразия, род Хирцебруха.
7. Симплектические, Пуассоновы структуры на многообразиях. Понятие квантования.
8. Спинорные структуры, оператор Дирака, A -род.
- 9.

Список вопросов

1. Понятие гладкого многообразия
2. Касательное пространство
3. Касательное расслоение
4. Дифференциал гладкого отображения
5. Теорема Уитни
6. Кокасательное расслоение
7. Тензорные расслоения
8. Риманова метрика как сечение тензорного расслоения
9. Многообразия как конфигурационные пространства
10. Сечения касательного расслоения как векторные поля
11. Группа преобразований векторного поля
12. Исчисление на многообразии
13. Коммутатор векторных полей
14. Дифференциальные формы как сечения тензорных расслоений
15. Инвариантная формулировка ковариантной производной
16. Ковариантная производная в сечениях векторного расслоения
17. Тождество Лейбница

18. Тензор кривизны
19. Тензор кривизны как дифференциальная форма
20. Второе тождество Бьянки
21. Дифференциал тензора кривизны $dR=0!$
22. Ковариантная производная в производных тензорах
23. Внешнее умножение дифференциальных форм
24. Формула Вейля-Чженя
25. Описание задачи на дифференциальные операторы на многообразии
26. Что такое символ дифференциального оператора, главный символ
27. Кокасательное расслоение
28. Построение дифференциального оператора по главному символу.
29. Степень неоднозначности построения.
30. Описание задачи на дифференциальные операторы на многообразии.
31. Преобразование Фурье
32. Описание дифференциального оператора при помощи преобразование Фурье.
33. Пространства Шварца.
34. Псевдодифференциальные операторы в \mathbb{R}^n
35. Соболевские нормы
36. Соболевские пространства
37. Оценки норм ПДО
38. Теорема Соболева о компактности операторов
39. Общая теория компактных операторов
40. Ядро и коядро
41. Индекс фредгольмова оператора
42. Гомотопические свойства фредгольмовых операторов
43. Гомотопическая инвариантность индекса фредгольмова оператора
44. Построение теории эллиптических ПДО

45. Естественные обобщения на случай векторных расслоений
46. Построение векторных расслоений
47. Теорема Уитни и проекторно-значные функции
48. Редукция ПДО на векторных расслоениях к тривиальным расслоениям
49. Понятие К-теории как гомотопического функтора
50. Пунктированные пространства
51. Точная последовательность π_n , последовательность Пушпе
52. Независимость индекса от порядка эллиптического ПДО
53. Гомотопическая формулировка вычисления индекса эллиптических ПДО
54. Далее построение теории векторных расслоений и характеристических классов
55. Формула Атья-Зингера
56. Периодичность Ботта
57. Разностная конструкция
58. Длинные конструкции. Редукция к коротким. Тензорное произведение
59. Тензорное произведение
60. Прямой образ для вложения многообразий
61. Почти комплексная структура на касательном расслоении
62. Построение характеристических классов векторных расслоений
63. Главные расслоения, классифицирующие пространства.
64. Точные гомотопические последовательности для расслоений
65. Спектральные последовательности
66. Построение характеристических классов векторных расслоений
67. Пример $BU(1)$
68. Пример $BU(n)$
69. Образующие U_n .
70. Роды, род Тодда.

Список литературы

- [1] Б. В. Федосов. Аналитические формулы индекса эллиптических операторов. *Тр. ММО*, 30:159–241, 1974.
- [2] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их приложения*. Наука, М., 1984.
- [3] Р. Том. Некоторые свойства "в целом" дифференцируемых многообразий. In *Расслоенные пространства и их приложения*, pages 293 – 351. ИЛ, М., 1958.
- [4] Р. Пале. *Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе*. "Мир Москва, 1970.
- [5] М. Хирш. *Дифференциальная топология*. Мир, М., 1979.
- [6] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: I. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):484–530, 1968.
- [7] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: II. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):531–545, 1968.
- [8] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: III. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):546–604, 1968.
- [9] M.F. Atiyah. Global theory of elliptic operators. *Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo 1969)*. Tokyo, Univ. Tokyo Press, pages 21–30, 1970.
- [10] Luke, G. and Mishchenko, A. S., *Vector Bundles and Their Applications*, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1998*
- [11] Hatcher, A., *Vector bundles and K-theory*, <http://www.math.cornell.edu/hatcher/#VBKT>, 2009
- [12] Милнор, Дж., Сташеф, Дж.Д., *Характеристические классы*, *Мир*, 1979