Курс "Прикладные проблемы геометрии, Курс научно-естественного содержания"

5-й курс, весна 2016–2017 уч.года
четверг; 12:30— 14:02, ауд. 13-06
(проект А.С.Мищенко)

Программа

1. Вспомогательные понятия из дифференциальной топологии
   (a) Конфигурационное пространство.
   (b) Примеры нетривиальных конфигурационных пространств: плоский маятник, пространственный маятник, двузвенный плоский маятник, твердое тело с закрепленной точкой.
   (c) Фазовое пространство, примеры.
2. Дифференциальное исчисление на многообразиях
   (a) Понятие гладкого многообразия
   (b) Локальные системы координат, карты, атлас карт, замены переменных
   (c) Дифференциальное исчисление на многообразии
   (d) Касательные векторы
   (e) Касательное расслоение.
   (f) Векторные поля и их обобщения - распределения плоскостей.
   (g) Коммутирующие векторные поля и группы диффеоморфизмов
   (h) Градиентные векторные поля.
   (i) Однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем
   (j) Дифференциальные формы.
   (k) Определение симплектического пространства M, $\dim M = 2n$.
   (l) Симплектическая форма ω на симплектическом пространстве, ее свойства.
   (m) Функция Гамильтона, система уравнений Гамильтона.

(n) Косой градиент функции, скобка Пуассона

3. Векторные расслоения, ассоциированные с многообразиями

   (a) Касательное расслоение.
   (b) Кокасательное расслоение.
   (c) Поливекторные поля.
   (d) Дифференциальные формы.
   (e) Тензоры

4. Дифференциальные операторы на многообразии.

   (a) Описание задачи на дифференциальные операторы на многообразии
   (b) Что такое символ дифференциального оператора, главный символ
   (c) Кокасательное расслоение
   (d) Построение дифференциального оператора по главному символу.
   (e) Степень неоднозначности построения.
   (f) Описание задачи на дифференциальные операторы на многообразии.
   (g) Преобразование Фурье
   (h) Описание дифференциального оператора при помощи преобразование Фурье.
   (i) Пространства Шварца.
   (j) Псевдодифференциальные операторы в Rn
   (k) Соболевские нормы
   (l) Соболевские пространства
   (m) Оценки норм ПДО
   (n) Теорема Соболева о компактности операторов
   (o) Общая теория компактных операторов
   (p) Ядро и коядро
   (q) Индекс фредгольмова оператора
   (r) Гомотопические свойства фредгольмовых операторов
   (s) Гомотопическая инвариантность индекса фредгольмова оператора

5. Теория эллиптических операторов на компактных многообразиях

   (a) Построение характеристических классов векторных расслоений

   (b) Главные расслоения, классифицирующие пространства.
   (c) Точные гомотопические последовательности для расслоений
   (d) Спектральные последовательности
   (e) Построение характеристических классов векторных расслоений
   (f) Пример BU(1)
   (g) Пример BU(n)
   (h) Образующие Ву.
   (i) Роды, род Тодда.
   (j) формула индекса Атья-Зингера

6. Линейные связности, тензор кривизны, тождества дифференциального исчисления.
7. Формулы Вейля-Чженя
8. Векторные поля, дифференциальные формы, сигнатура многообразия, род Хирцебруха.
9. Симплектические, Пуассоновы структуры на мнгообразяих. Понятие квантования.
10. Спинорные структуры, оператор Дирака, A–род.
11.

Список вопросов

1. Понятие гладкого многообразия
2. Касательное пространство
3. Касательное расслоение
4. Дифференциал гладкого отображения
5. Теорема Уитни
6. Кокасательное расслоение
7. Тензорные расслоения
8. Риманова метрика как сечение тензорного расслоения
9. Многообразия как конфигурационные пространства
10. Сечения касательного расслоения как векторные поля
11. Группа преобразований векторного поля

12. Исчисление на многообразии
13. Коммутатор векторных полей
14. Дифференциальные формы как сечения тензорных расслоений
15. Инвариантная формулировка ковариантной производной
16. Ковариантная производная в сечениях векторного расслоения
17. Тождество Лейбница
18. Тензор кривизны
19. Тензор кривизны как дифференциальная форма
20. Второе тождество Бьянки
21. Дифференциал тензора кривизны dR=0!
22. Ковариантная производная в производных тензорах
23. Внешнее умножение дифференциальных форм
24. Формула Вейля-Чженя
25. Описание задачи на дифференциальные операторы на многообразии
26. Что такое символ дифференциального оператора, главный символ
27. Кокасательное расслоение
28. Построение дифференциального оператора по главному символу.
29. Степень неоднозначности построения.
30. Описание задачи на дифференциальные операторы на многообразии.
31. Преобразование Фурье
32. Описание дифференциального оператора при помощи преобразование Фурье.
33. Пространства Шварца.
34. Псевдодифференциальные операторы в Rn
35. Соболевские нормы
36. Соболевские пространства
37. Оценки норм ПДО
38. Теорема Соболева о компактности операторов

39. Общая теория компактных операторов
40. Ядро и коядро
41. Индекс фредгольмова оператора
42. Гомотопические свойства фредгольмовых операторов
43. Гомотопическая инвариантность индекса фредгольмова оператора
44. Построение теории эллиптических ПДО
45. Естественные обобщения на случай векторных расслоений
46. Построение векторных расслоений
47. Теорема Уитни и проекторно-значные функции
48. Редукция ПДО на векторных расслоениях к тривиальным расслоениям
49. Понятие K-теории как гомотопического функтора
50. Пунктированные пространства
51. Точная последовательность , последовательность Пуппе
52. Независимость индекса от порядка эллиптического ПДО
53. Гомотопическая формулировка вычисления индекса эллиптических ПДО
54. Далее построение теории векторных расслоений и характеристических классов
55. Формула Атья-Зингера
56. Периодичность Ботта
57. Разностная конструкция
58. Длинные конструкции. Редукция к коротким. Тензорное произведение
59. Тензорное произведение
60. Прямой образ для вложения многообразий
61. Почти комплексная структура на касательном расслоении
62. Построение характеристических классов векторных расслоений
63. Главные расслоения, классифицирующие пространства.
64. Точные гомотопические последовательности для расслоений
65. Спектральные последовательности

1 Введение

Курс естественно-научного содержания (ЕНС) под названием "Прикладные проблемы геометрии"читается на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова долее 10 лет различными лекторами кафедры высшей геометрии и топологии. Содержание такого курса может оказаться различным при чтении его различными лекторами, но всех их объединяет глубокое убеждение, основанное на опыте, что геометрические методы в настоящее время составляют один из главных разделов математических методов в естественных науках. Если ранее основную роль математических методов в естественных науках играли методы анализа, так сказать, в «малом», что отражается в виде применения дифференциального и интегрального исчисления и методов дифференциальных или дифференциально-разностных уравнений для линеаризации задач, то методы анализа задач в «целом» стали особенно интенсивно развиваться последние пять-шесть декад прошлого столетия именно потому, что линейных аппроксимаций по существу нелинейных задач уже оказывалось недостаточно.

В качестве примера можно привести, скажем, учебник Голованова (2002) "Геометрическое моделирование"([17]), который посвящен геометрическим методам в использовании компьютерного моделирования естественно-научных задач. В учебнике справедливо пишется, что необходимо научиться описывать "форму окружающих предметов, их размеры и взаимное расположение, не вдаваясь в подробности физических свойств. Другими словами, нужно изучать и моделировать геометрические свойства реальных или воображаемых объектов. Нашей конечной целью является построение математических моделей геометрии этих объектов. Эти модели нужны для принятия решений, для проведения исследований, для производства материальных ценностей."

Вторым важным соображением при изучении геометрических методов является тот факт, что эффективное применение геометрических методов становится возможном только при переходе от классических двумерных и трехмерных задач к геометрическим задачам более высоких размерностей, как конечных так и бесконечных.

2 Дифференциальное исчисление на многообразиях

1. Понятие гладкого многообразия
2. Локальные координаты, карты, атлас карт,
3. функции замены координат, гладкая структура,
4. гладкие функции, зависимость от выбора локальной системы координат, пространство гладких функций.
5. Финитные функции. Разбиение единицы,
6. Гладкие кривые на многообразии, зависимость от выбора локальной системы координат,
7. Касательное векторы, касательное пространство. Три определения касательного вектора:
8. Касательный вектор как пучок соприкасающихся кривых.
9. Касательный вектор как система компонент тензора.
10. Касательное пространство как оператор дифференцирования пространства гладких функций.
11. Векторное поле, его вид в трех определениях касательного вектора.
12. Тензорный вид векторного поля.
13. Интегральные кривые векторного поля.
14. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов векторного поля на компактном многообразии.
15. Оператор дифференцирования векторного поля.
16. Его связь с однопараметрической группой диффеоморфизмов.
17. Коммутатор векторного поля.
18. Формулы коммутатора в локальных координатах.
19. Касательное расслоение.
20. Сечения касательного расслоения как векторные поля.
21. Дифференциал гладкого отображения
22. Теорема Уитни
23. Кокасательное расслоение

Список литературы

[1] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. I” *УМН, 23:5(143) (1968), 99–142*

[2] М. Ф. Атья, Г. Б. Сегал, “Индекс эллиптических операторов. II” *УМН, 23:6(144) (1968), 135–149*

[3] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. III” *УМН, 24:1(145) (1969), 127–182*

[4] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. IV” *УМН, 27:4(166) (1972), 161–178*

[5] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. V” *УМН, 27:4(166) (1972), 179–188*

[6] M.F. Atiyah. Global theory of elliptic operators. *Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo 1969). Tokyo, Univ. Tokyo Press*, pages 21–30, 1970.

[7] Р. Пале. *Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.* "Мир Москва, 1970.

[8] Б. В. Федосов. Аналитические формулы индекса эллиптических операторов. *Тр. ММО*, 30:159–241, 1974.

[9] М.А.Шубин. Псевдодиференциальные операторы и спектральная теория *2-е изд., испр. и доп.*, 2005, М., Добросвет.

[10] J.R.Munkers. Analysis on Manufolds, *Adicon-Wesley Publishing Comapany*, 1990, NY.

[11] Милнор, Дж., Сташеф, Дж.Д., Характеристические классы, *Мир, 1979*

[12] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их приложения.* Наука, М., 1984.

[13] Luke, G. and Mishchenko, A. S., Vector Bundles and Their Applications, *Kluwer Academic Publishers, Dordrrecht, Boston, London, 1998*

[14] Hatcher, A., Vector bundles and K-theory, *http://www.math.cornell.edu/hatcher/#VBKT, 2009*

[15] Р. Том. Некоторые свойства "в целом"дифференцируемых многообразий. In *Расслоенные пространства и их приложения*, pages 293 – 351. ИЛ, М., 1958.

[16] М. Хирш. *Дифференциальная топология.* Мир, М., 1979.

[17] Голованов Н. Н. *Геометрическое моделирование..* М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002, — 472 с.