ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Я испытывал двойственные чувства, готовя книгу ко второму изданию. Мне было ясно, что надо исправить все ошибки и опечатки, найденные со времени первого издания. Это было легко, потому что ошибки были незначительны, а опечатки немногочисленны.

Труднее было решить, надо ли дополнить текст или хотя бы список литературы. В конце концов я решил, что книга в этом не нуждается. Главная ценность математической книги состоит в том, что она учит читателя элементам математического языка и некоторым навыкам. Ни одна книга не может полностью исчерпать сколько-нибудь серьезную область математики, как бы ни старался автор.

Псевдодифференциальные операторы давным давно стали языком и полезным орудием в уравнениях с частными производными. Поэтому бессмысленно пытаться исчерпать эту область. Вот простое доказательства этого факта. В июле 2000 года в MathSciNet, базе данных Американского математического общества, построенной на основе реферативного журнала Mathematical Reviews, за несколько секунд компьютерного поиска слов «pseudodifferential operator» (псевдодифференциальный оператор) я нашел 3695 источников (в том числе 363 книги), в которых такая комбинация слов встречается в названии или реферате. (Там же нашлось 963 источника со словами «pseudo-differential operator», но я не смог выяснить, каково пересечение соответствующих списков.)

Вот результаты поиска по другим важнейшим темам этой книги:

Fourier Integral operator: 1022 источника (в том числе 105 книг),
Microlocal analysis: 500 источников (82 книги),
Spectral asymptotic: 367 источников (56 книг),
Eigenvalue asymptotic: 127 источников (21 книга),
Pseudodifferential operator AND spectral theory: 142 источника (36 книг).

Аналогичные результаты получились у меня при поиске в базе данных издающегося в Германии реферативного журнала Zentralblatt. И всего лишь 132 источника содержала библиография первого издания, которую я считал более или менее исчерпывающей. Несмотря на это, я не могу удержаться от того, чтобы упомянуть следующие три книги (в хронологическом порядке):

Brüning J., Guillemin V. (eds.) Mathematics Past and Present. Fourier Integral Operators. Selected Classical Articles by J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin and L. Hörmander, Springer-Verlag, 1994.

Safarov Yu., Vassiliev D. The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators, Amer. Math. Soc., 1997.

Ivrii V. Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics. Springer-Verlag, 1998.

Эти книги содержат материал, которого, по-моему, недоставало уже в первом издании: получение уточненных спектральных асимптотик методами более продвинутого микролокального анализа (в частности, в помощью глобальных интегральных операторов Фурье).

По вышеуказанным причинам я решил не дополнять библиографию, приведенную в конце книги, а лишь уточнил ее (в частности, добавил ссылки на новые издания старых книг в тех случаях, когда мне было известно о существовании новых изданий).

Я добавил некоторые объяснения в тех местах, где это казалось необходимым. Я очень благодарен читателям русского и английского изданий, указавшим мне неясные места в первом издании. К сожалению, у меня не сохранились имена всех читателей, которые помогли мне выявить все неясные места. Все же я хочу упомянуть Пабло Рамахера (Pablo Ramacher, Humboldt University, Berlin) как недавнего и весьма добросовестного читателя, замечания которого было мне весьма полезны.

Я надеюсь, что эта книга и сейчас может выполнять свою главную роль: учить читателей красивой и интересной математике.

М. А. Шубин
9 апреля 2001 года

ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ (1987)

К настоящему моменту вышло уже много книг по псевдодифференциальным операторам (в то время как их почти не существовало в момент появления русского издания). Поэтому естественным образом возникает сомнение в том, что нужна еще одна такая книга. Тем не менее, я думаю, что эта книга может быть полезна ввиду ее замкнутости и подхода, нацеленного на приложения к спектральной теории. Кроме того, она содержит некоторые идеи, не описанные ни в какой другой книге на английском языке. Это относится, например, к методу приближенного спектрального проектора, который является универсальным методом исследования спектральных асимптотик — см. главу IV, а также обзор С. Левендорского в Acta Applicandae Mathematicae *).

Разумеется, много нового появилось в теории с момента выхода русского издания. Самые важные новые моменты отражены в перечисленных ниже монографиях.

М. А. Шубин
3 сентября 1985 года

Литература

Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные управления в частных производных главного типа. М., Мир, 1984.

Хёрмандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 1—4. М., Мир, 1986—1988.

Helffer, B. Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques. Astérisque, 112. Société Mathématique de France, Paris, 1984.

Ivrii, V. Precise spectral asymptotics for elliptic operators. Lecture Notes in Mathematics, 1100. Springer — Verlag, Berlin, 1984.

Kumano-go, H. Pseudodifferential operators. MIT Press, Cambridge, Mass. London, 1981.

Рид, М., Саймон, Б.. Методы современной математической физики, т. 1—4, М., Мир, 1977—1982.

Ремпель Ш., Шульце, Б. В. Теория индекса эллиптических краевых задач. М., Мир, 1986.

Тейлор, М. Псевдодифференциальные операторы. М., Мир, 1985.

Трев, Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, т. 1, 2. М., Мир, 1984.

*) Теперь вышла и монография: Levendorskii S. Asymptotic distribution of eigenvalues of differential operators. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Теория псевдодифференциальных операторов (сокращенно ПДО) сравнительно молода: в своей современной форме она была создана в середине шестидесятых годов. Однако полученные с ее помощью продвижения столь существенны, что без ПДО уже трудно себе представить современный анализ и математическую физику. Особенно важны ПДО для изучения эллиптических уравнений. Уже простейшие преобразования эллиптических операторов (например, взятие обратного оператора или извлечение корня) выводят за класс дифференциальных операторов, однако при разумных условиях сохраняют класс ПДО. Важна роль ПДО в теории индекса эллиптических операторов, где они нужны для расширения класса возможных деформаций оператора. ПДО появляются при сведении на границу какой-либо граничной задачи для эллиптического уравнения. Таким образом, ПДО возникают не как самоцель, а как мощное и естественное средство изучения дифференциальных операторов с частными производными (прежде всего эллиптических и гипоэллиптических). В очень многих случаях ПДО позволяют не только сформулировать новые теоремы, но и иначе взглянуть на старые, получить более простое и прозрачное изложение уже известных фактов. Так обстоит дело, например, в теории пространств Соболева.

Естественным обобщением ПДО являются интегральные операторы Фурье (сокращенно ИОФ), первоначальным вариантом которых был канонический оператор В. П. Маслова. Примером ИОФ является разрешающий оператор задачи Коши для гиперболического уравнения. Таким образом, ИОФ играют ту же роль в теории гиперболических уравнений, что ПДО в теории эллиптических уравнений.

Одной из наиболее существенных областей приложения ПДО и ИОФ является спектральная теория эллиптических операторов. Здесь важна возможность описания структуры различных нетривиальных функций от оператора (резольвенты, комплексных степеней, экспоненты, спектрального почти-проектора). С помощью ПДО н ИОФ получается теорема об аналитическом продолжении ζ-функции оператора, ряд существенных теорем об асимптотике собственных значений.

В этой книге представлено в несколько переработанном и расширенном виде содержание курса лекций по ПДО и спектральной теории, прочитанных автором на механико-математическом факультете МГУ. Цель этого курса состояла в замкнутом и систематическом изложении теории ПДО и ИОФ в связи со спектральной теорией эллиптических и гипоэллиптических операторов. При этом автор старался, с одной стороны, сделать изложение доступным для студентов, знакомых с обязательным курсом анализа-III (включая элементарную теорию обобщенных функций), и, с другой стороны, довести изложение до уровня современных журнальных статей. Все это потребовало достаточно жесткого отбора материала, на который, естественно, повлияли и личные интересы автора.

Наиболее существенный материал учебного характера расположен в главе I и в добавлении 1, использующем также теоремы из § 17 и § 18 главы III (отметим, что § 17 вообще не опирается ни на какой предшествующий материал, а § 18 опирается лишь на главу I). Все это мы условно объединим в первый концентр, который составляет некоторое замкнутое введение в теорию ПДО и волновых фронтов обобщенных функций. По мнению автора, этот концентр полезен всем математикам, специализирующимся по функциональному анализу и уравнениям с частными производными. Подчеркнем еще раз, что первый концентр может изучаться независимо от всего остального.

Главы II и III составляют, соответственно, второй и третий концентры. Из главы II читатель узнает теорию комплексных степеней и ζ-функции эллиптического оператора. Теорема о полюсах ζ-функции является, по-видимому, одним из самых замечательных применений псевдодифференциальных операторов. В этой же главе показано, как из этой теоремы можно вывести грубую асимптотику собственных значений. В главе III можно найти более точную теорему об асимптотике собственных значений. Эта теорема использует ряд изложенных здесь же существенных фактов теории ИОФ. Отметим, что именно на этом пути, хотя и с использованием более полной теории ИОФ, выходящей за рамки этой книги, были получены дальнейшие существенные продвижения в спектральной теории (см. раздел «Краткие литературные указания»).

Наконец, глава IV и добавления 2 и 3 *) составляют последний (четвертый) концентр. Здесь изложена теория ПДО в $\mathbb{R}^n$, возникшая в связи с некоторыми математическими вопросами квантовой механики.

---

*) Добавление 3 содержит вспомогательный материал из функционального анализа, используемый в главе IV и выделенный в добавление лишь для удобства. Продвинутый читатель, знакомый с этим материалом, может не заглядывать в добавление 3 или использовать его для справок, а начинающему будет полезно прочесть добавление 3 целиком.

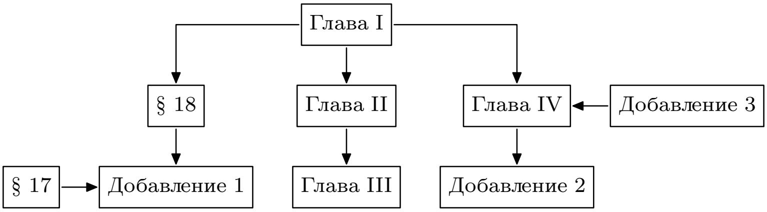
Необходимо сказать о месте в этой книге упражнений и задач. Вкрапленные в текст упражнения являются его неотъемлемой частью, и, как правило, сформулированные в них утверждения используются в дальнейшем. Все эти утвержения проверяются непосредственно и не доказаны в тексте лишь потому, что их проще понять самостоятельно, чем прочесть. Содержание же задач, обычно более трудных, чем упражнения, в тексте не используется, хотя и развивает основной материал в полезных напрвлениях. Задачи можно использовать для контроля понимания прочитанного, их решение полезно для лучшего усвоения понятий и методов. Однако вряд ли стоит решать все задачи подряд, так как это может сильно затормозить продвижение вперед. Вероятно, при первом чтении следует решать те задачи, содержание которых кажется читателю наиболее интересным. В задачах, как и в основном тексте, помимо уже изложенного материала, не используются никакие сведения, выходящие за рамки обычного университетского курса.

Автор надеется, что предлагаемая книга будет полезна как начинающим, так и более опытным математикам, желающим быстро ознакомиться с ПДО и их наиболее важными приложениями, а также всем, кто интересуется спектральной теорией или применяет ее.

В заключение я хочу поблагодарить В. И. Безяева, Т. Е. Богородскую, Т. В. Гирю, А. И. Гусева, В. Ю. Киселева, С. М. Козлова, М. Д. Миссарова и А. Г. Сергеева, которые помогли записать и обработать предлагаемые лекции; В. Н. Туловского, рассказавшего мне свое доказательство теоремы о распространении особенностей и разрешившего привести его в этой книге; В. Л. Ройтбурда, написавшего по моей просьбе добавление 2; В. Я. Иврия и В. П. Паламодова, прочитавших рукопись и сделавших ряд полезных замечаний, а также всех, кто тем или иным способом помогал мне в работе.

М. А. Шубин

Схема зависимости



ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Осциллирующие интегралы

1.1. Преобразование Фурье. Простейшим примером осциллирующего интеграла является преобразование Фурье функции (или обобщенной функции) умеренного роста.

Пусть $S(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца функций $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, у которых каждая производная убывает при $|x| \to +\infty$ быстрее любой степени $|x|$, т. е. для любых α, β

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta u)(x)| < +\infty. \tag{1.1}$$

Здесь, как обычно, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; α, β — мультииндексы, т. е., например, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \geqslant 0$ и α_j — целое; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$; $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, где $\partial_j = \partial / \partial x_j$; $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\beta_n} = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$, где $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Левые части (1.1) определяют в пространстве $S(\mathbb{R}^n)$ набор полунорм, превращающих его в пространство Фреше.

Преобразование Фурье функции $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ дается формулой

$$(Fu)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} u(x)\, dx, \tag{1.2}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \ldots + x_n \xi_n$, $i = \sqrt{-1}$ и $dx = dx_1 \ldots dx_n$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Интеграл в (1.2) берется по всему пространству $\mathbb{R}^n$, что всегда будет подразумеваться, если явно не указана область интегрирования.

Известно, что оператор F определяет линейный топологический изоморфизм $F \colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, причем обратный оператор (обратное преобразование Фурье) дается формулой обращения

$$(F^{-1} \hat{u})(x) = u(x) = \int e^{ix \cdot \xi}\, \hat{u}(\xi)\, đ\xi, \tag{1.3}$$

где $đ\xi = (2\pi)^{-n} d\xi_1 \ldots d\xi_n$.

Мы покажем сейчас, как распространить преобразование Фурье (1.2) на непрерывные функции $u(x)$, удовлетворяющие условию: существуют такие $C > 0$ и $N > 0$, что

$$|u(x)| \leqslant C \langle x \rangle^N, \tag{1.4}$$

где $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$, $|x|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. При этом мы получим $\hat{u}(\xi)\in S'(\mathbb{R}^n)$, где $S'(\mathbb{R}^n)$ — пространство, двойственное к $S(\mathbb{R}^n)$, т. е. состоящее из линейных непрерывных функционалов на $S(\mathbb{R}^n)$. Мы хотим, таким образом, регуляризовать интеграл

$$\langle\hat{u},\,\psi\rangle=\iint e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi, \tag{1.5}$$

где $\psi(\xi)\in S(\mathbb{R}^n)$, который и будем считать значением функционала $\hat{u}$ на элементе $\psi(\xi)$. Если $u(x)\in S(\mathbb{R}^n)$, то ясно, что

$$\langle\hat{u},\,\psi\rangle=\int\hat{u}(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

ибо интеграл (1.5) в этом случае абсолютно сходится.

Мы укажем два равносильных способа регуляризации интеграла (1.5), отличных от известного способа, основанного на равенстве Парсеваля, и обобщающихся на значительно более общую ситуацию.

1-й способ. Положим $D_j=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $D=(D_1,\,\ldots,\,D_n)$, $\langle D\rangle=(1+D_1^2+\ldots+D_n^2)^{1/2}$ (обычно мы будем употреблять $\langle D\rangle^k$, где k — четное неотрицательное число, так что $\langle D\rangle^k$ будет дифференциальным оператором). Вектор D будет употребляться и для дифференцирования по ξ. Во избежание путаницы мы будем тогда обозначать через D_x только что написанный вектор D, а через D_ξ — такой же вектор, в котором производные берутся по ξ. Имеем

$$e^{-ix\cdot\xi}=\langle x\rangle^{-k}\langle D_\xi\rangle^k e^{-ix\cdot\xi}. \tag{1.6}$$

Пусть сначала $u(x)\in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда, подставляя это выражение для $e^{-ix\cdot\xi}$ в интеграл (1.5), получим, интегрируя по частям,

$$\langle\hat{u},\,\psi\rangle=\iint e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,\langle x\rangle^{-k}\langle D_\xi\rangle^k\psi(\xi)\,dx\,d\xi. \tag{1.7}$$

Этот интеграл определен уже не только при $u(x)\in S(\mathbb{R}^n)$ и даже не только для абсолютно интегрируемых $u(x)$. Именно, если $u(x)$ удовлетворяет оценке (1.4) и $k>N+n$, то интеграл (1.7) абсолютно сходится и мы можем считать его требуемой регуляризацией (1.5).

Упражнение 1.1. Проверить, что формула (1.7) при $k>N+n$ определяет непрерывный линейный функционал $\hat{u}\in S'(\mathbb{R}^n)$.

2-й способ. Пусть $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$) и $\varphi(0)=1$. Положим

$$I_\varepsilon=\iint e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\varepsilon x)\,u(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi,\qquad \varepsilon>0. \tag{1.8}$$

Этот интеграл абсолютно сходится. Оказывается, что существует предел $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$, не зависящий от выбора $\varphi(x)$. В самом деле, выполняя в (1.8) то же интегрирование по частям, что и раньше, мы получаем

$$I_\varepsilon=\iint e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\varepsilon x)\,u(x)\,\langle x\rangle^{-k}\langle D_\xi\rangle^k\psi(\xi)\,dx\,d\xi,$$

и если $k>N+n$, то предел при $\varepsilon\to 0$ существует по теореме Лебега и равен выражению $\langle\hat{u},\,\psi\rangle$, определенному формулой (1.7).

Упражнение 1.2. Проверить, что формула (1.7), написанная при разных k, приводит к одному и тому же функционалу $\hat{u}$.

1.2. Определение осциллирующего интеграла и его регуляризация. Рассмотрим теперь более общий, чем (1.5), интеграл вида

$$I_\Phi(au)=\iint e^{i\Phi(x,\,\theta)}a(x,\,\theta)\,u(x)\,dx\,d\theta. \tag{1.9}$$

Здесь $\theta\in\mathbb{R}^N$ и $x\in X$, где X — область в $\mathbb{R}^n$; $u(x)\in C_0^\infty(X)$, т. е. $u(x)\in C^\infty(X)$ и существует такой компакт $K\subset X$, что $u|_{X\setminus K}=0$. Для описания $a(x,\,\theta)$ и $\Phi(x,\,\theta)$ введем ряд определений.

Определение 1.1. Пусть m, ρ и δ — вещественные числа, $0\leqslant\delta\leqslant 1$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$. Класс

$S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ состоит из таких функций $a(x,\,\theta)\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^N)$, что для любых мультииндексов α, β и для любого компакта $K\subset X$ существует такая постоянная $C_{\alpha,\,\beta,\,K}$, что при $x\in K$, $\theta\in\mathbb{R}^N$ справедлива оценка

$$|\,\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta\,a(x,\,\theta)\,|\leqslant C_{\alpha,\,\beta,\,K}\langle\theta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{1.10}$$

Вместо $S^m_{1,\,0}(X\times\mathbb{R}^N)$ мы будем писать просто $S^m(X\times\mathbb{R}^N)$. Далее, вместо $S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ мы будем писать иногда просто $S^m_{\rho,\,\delta}$. Положим также $S^{-\infty}=\bigcap\limits_m S^m$.

Определение 1.2. Функция $\Phi(x,\,\theta)$ называется *фазовой функцией*, если $\Phi(x,\,\theta)\in C^\infty(X\times(\mathbb{R}^N\setminus 0))$ вещественнозначна и положительно однородна 1-го порядка по θ (т. е. $\Phi(x,\,t\theta)=t\Phi(x,\,\theta)$ для любых $x\in X$, $\theta\in\mathbb{R}^N$ и $t>0$) и $\Phi(x,\,\theta)$ не имеет критических точек при $\theta\neq 0$, т. е. $\Phi'_{x,\,\theta}(x,\,\theta)\neq 0$ при $x\in X$, $\theta\in\mathbb{R}^N\setminus 0$ (здесь $\Phi'_{x,\,\theta}$ означает градиент функции $\Phi(x,\,\theta)$ по переменным x, θ).

Определение 1.3. Интеграл (1.9), в котором $a(x,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, а $\Phi(x,\,\theta)$ — фазовая функция, называется *осциллирующим интегралом.*

Упражнение 1.3. Проверить, что если $a(x,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, то $\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta\,a(x,\,\theta)\in S^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$. Если еще $b(x,\,\theta)\in S^{m'}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, то $a(x,\,\theta)\cdot b(x,\,\theta)\in S^{m+m'}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$.

Наша ближайшая цель — регуляризация осциллирующего интеграла (1.9), не являющегося, вообще говоря, абсолютно сходящимся. Следующая лемма позволяет написать в общем случае равенство типа (1.6).

Лемма 1.1. *На $X \times \mathbb{R}^N$ существует такой оператор*

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x, \theta) \frac{\partial}{\partial x_k} + c(x, \theta), \tag{1.11}$$

что $a_j(x, \theta) \in S^0(X \times \mathbb{R}^N)$, $b_k(x, \theta) \in S^{-1}(X \times \mathbb{R}^N)$, $c(x, \theta) \in S^{-1}(X \times \mathbb{R}^N)$, и если определить формально сопряженный оператор ${}^tL$ формулой

$${}^tLu(x, \theta) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \theta_j}(a_j u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(b_k u) + cu, \tag{1.12}$$

то имеет место тождество

$${}^tLe^{i\Phi} = e^{i\Phi}. \tag{1.13}$$

Упражнение 1.4. Оператор ${}^tL$ также можно записать в виде (1.11) с другими a_j, b_k, c, принадлежащими, однако, тем же классам, которые были указаны в формулировке для L.

Упражнение 1.5. Доказать, что если $M = {}^tL$, то $L = {}^tM$.

Доказательство леммы 1.1. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} e^{i\Phi} = i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} e^{i\Phi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_k} e^{i\Phi} = i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} e^{i\Phi}.$$

Отсюда

$$\left(\sum_{j=1}^{N} -i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} |\theta|^2 \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^{n} -i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) e^{i\Phi} = \\ = \left(\sum_{j=1}^{N} |\theta|^2 \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j}\right|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right|^2\right) e^{i\Phi} = \frac{1}{\psi} e^{i\Phi},$$

где $\psi(x, \theta) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^N \backslash 0))$ и $\psi(x, \theta)$ положительно однородна по θ порядка -2. Поэтому

$$-i\psi \left\{\sum_{j=1}^{N} |\theta|^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} e^{i\Phi} = e^{i\Phi}$$

и остается только ликвидировать особенность при $\theta = 0$. Пусть $\chi(\theta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\chi(\theta) = 1$ при $|\theta| < 1/4$ и $\chi(\theta) = 0$ при $|\theta| > 1/2$. Положим

$$M = -\sum_{j=1}^{N} i(1-\chi) \psi |\theta|^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} - \sum_{k=1}^{n} i(1-\chi) \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + \chi.$$

Ясно, что $Me^{i\Phi}=e^{i\Phi}$, и легко проверить, что все коэффициенты оператора M обладают требуемыми свойствами. То же самое верно и для $L={}^tM$ (см. упражнение 1.4). Остается заметить, что ${}^tL=M$ в силу упражнения 1.5. ■

Регуляризация интеграла (1.9) будет проведена двумя способами.

1-й способ. Пусть вначале $m<-N$, так что интеграл (1.9) абсолютно сходится. Используя тождество (1.13), напишем в этом интеграле $({}^tL)^k e^{i\Phi}$ вместо $e^{i\Phi}$ и проинтегрируем по частям k раз. Получим

$$I_\Phi(au)=\iint e^{i\Phi(x,\,\theta)}L^k(a(x,\,\theta)\,u(x))\,dx\,d\theta. \tag{1.14}$$

Упражнение 1.6. Проверьте законность этой операции.

Полагая теперь $s=\min(\rho,\,1-\delta)$, мы получим из упражнения 1.3, что $L^k(au)\in S^{m-ks}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$. Если $\rho>0$ и $\delta<1$ (так что $s>0$), что будет предполагаться всюду в дальнейшем, то формула (1.14) позволяет определить интеграл $I_\Phi(au)$ уже при любом m, выбирая k так, что $m-ks<-N$. При этом интеграл (1.14) уже абсолютно сходится.

Упражнение 1.7. Показать, что при фиксированных a и Φ интеграл $I_\Phi(au)$, рассматриваемый как функционал от элемента $u\in C_0^\infty(X)$, определяет обобщенную функцию на X — элемент $\mathscr{D}'(X)$ (пространства, сопряженного к $C_0^\infty(X)$).

2-й способ. Выбирая $\chi(\theta)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\chi(\theta)=1$ в окрестности точки $0\in\mathbb{R}^N$, положим

$$I_{\Phi,\,\varepsilon}(au)=\iint \chi(\varepsilon\theta)\,e^{i\Phi(x,\,\theta)}a(x,\,\theta)\,u(x)\,dx\,d\theta,\qquad \varepsilon>0. \tag{1.15}$$

Интегрируя по частям аналогично 1-му способу, получим

$$I_{\Phi,\,\varepsilon}(au)=\iint e^{i\Phi(x,\,\theta)}L^k(\chi(\varepsilon\theta)\,a(x,\,\theta)\,u(x))\,dx\,d\theta. \tag{1.16}$$

Заметим, что

$$|\,\partial_\theta^\gamma\,\chi(\varepsilon\theta)\,|\leqslant C_\gamma\langle\theta\rangle^{-|\gamma|}, \tag{1.17}$$

где постоянные C_γ не зависят от ε при $0<\varepsilon\leqslant 1$.

Упражнение 1.8. Проверьте справедливость оценок (1.17).

Мы видим теперь, что в (1.16) можно перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$, используя теорему Лебега. Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_{\Phi,\,\varepsilon}(au)$ существует и равен $I_\Phi(au)$ в смысле формулы (1.14). Отсюда, в частности, следует, что интеграл (1.14) не зависит от k (если только k достаточно велико), а предел интегралов (1.15) при $\varepsilon\to 0$ не зависит от выбора срезающей функции χ.

В дальнейшем мы будем более или менее свободно обращаться с осциллирующими интегралами, подразумевая возможность их регуляризации одним из указанных способов.

Упражнение 1.9. Доказать, что при фиксированных Φ и u осциллирующий интеграл $I_\Phi(au)$ представляет собой непрерывный линейный функционал на пространстве Фреше $S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, в котором топология задается полунормами, равными точным нижним граням возможных постоянных $C_{\alpha,\,\beta,\,K}$ в оценках (1.10). Проверить, что замыкание $S^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^N)$ в $S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ содержит $S^{m'}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ при любом $m'<m$. Таким образом, регуляризацию можно рассматривать как продолжение линейного функционала по непрерывности.

1.3. Гладкость обобщенной функции, определяемой осциллирующим интегралом. Введем важное обозначение:

$$C_\Phi=\{(x,\,\theta)\colon x\in X,\ \theta\in\mathbb{R}^N\backslash 0,\ \Phi'_\theta(x,\,\theta)=0\} \tag{1.18}$$

$\left(\text{здесь } \Phi'_\theta \text{ — градиент функции } \Phi \text{ по } \theta, \text{ т. е. вектор } \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta_1},\,\ldots,\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta_N}\right)\right).$

Множество C_Φ является коническим подмножеством $X\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)$, т. е. вместе с точкой $(x_0,\,\theta_0)$ содержит также все точки вида $(x_0,\,t\theta_0)$, где $t>0$.

Обозначая через π естественную проекцию $\pi\colon X\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)\to X$, положим

$$S_\Phi=\pi C_\Phi,\qquad R_\Phi=X\backslash S_\Phi. \tag{1.19}$$

Рассмотрим обобщенную функцию $A\in\mathscr{D}'(X)$, определяемую осциллирующим интегралом $I_\Phi(au)$ по формуле

$$\langle A,\,u\rangle=I_\Phi(au).$$

Теорема 1.1. *Имеет место включение*

$$\operatorname{sing\,supp} A\subset S_\Phi$$

или, что то же самое, $A\in C^\infty(R_\Phi)$.

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно тому, что существует такая функция $A\in C^\infty(R_\Phi)$, что если $u\in C_0^\infty(R_\Phi)$, то

$$I_\Phi(au)=\int A(x)\,u(x)\,dx. \tag{1.20}$$

Положим

$$A(x)=\int e^{i\Phi(x,\,\theta)}a(x,\,\theta)\,d\theta. \tag{1.21}$$

Последний интеграл при $x\in R_\Phi$ представляет собой осциллирующий интеграл, зависящий от параметра x. При дифференцировании по этому параметру получаются интегралы того же типа. По существу, речь идет здесь о дифференцировании по параметру сходящегося интеграла, получающегося из (1.21) описанным выше преобразованием. Поэтому $A(x)\in C^\infty(R_\Phi)$. Формула (1.20) теперь получается тривиально. ■

Теорема 1.2. *Если $a\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ и $a=0$ в конической окрестности множества C_Φ, то $A\in C^\infty(X)$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.1, поскольку дело опять-таки сводится к изучению осциллирующего интеграла (1.21), ввиду того что $\Phi'_\theta(x,\,\theta)\neq 0$ на носителе $a(x,\,\theta)$. ■

Определение 1.4. Фазовая функция $\Phi(x,\,\theta)$ называется *невырожденной*, если дифференциалы $d\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\right)$, $j=1,\,\ldots,\,N$, линейно независимы на C_Φ или, что то же самое, $\operatorname{rank}\|\Phi''_{\theta\theta}\Phi''_{\theta x}\|=N$ (rank здесь обозначает ранг матрицы, а сама матрица в более подробной записи имеет вид

$$\|\Phi''_{\theta\theta}\,\Phi''_{\theta x}\|=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_1\,\partial\theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_1\,\partial\theta_N} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_1\,\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_1\,\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_N\,\partial\theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_N\,\partial\theta_N} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_N\,\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_N\,\partial x_n}\end{matrix}\right\|$$

и размеры $N\times(N+n)$).

Предложение 1.1. *Если Φ — невырожденная фазовая функция, то C_Φ — подмногообразие размерности n в $X\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)$.*

Доказательство банально получится из теоремы о неявной функции. ■

Следующая теорема уточняет теорему 1.2 в случае невырожденной фазовой функции.

Теорема 1.3. *Пусть Φ невырождена, $a\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, причем выполнено условие*:

$$\text{«либо } \rho>\delta \text{ и } \rho+\delta=1, \text{ либо } \rho>\delta \text{ и } \Phi \text{ линейна по } \theta\text{»}. \tag{1.22}$$

Тогда

1) *если a имеет на C_Φ нуль бесконечного порядка, то $A(x)\in C^\infty(X)$;*

2) *если $a=0$ на C_Φ, то существует такое $b\in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, что $I_\Phi(au)=I_\Phi(bu)$ при любом $u\in C_0^\infty(X)$.*

Замечание. Последнее утверждение показывает, что если $a|_{C_\Phi}=0$, то обобщенную функцию A можно также определить, заменив $a(x,\,\theta)$ на $b(x,\,\theta)$ с той же фазовой функцией. При этом $b(x,\,\theta)$ имеет меньший порядок роста по θ, что означает бóльшую регулярность $A(x)$.

Для доказательства теоремы 1.3 нам понадобится ряд лемм. Первая из них относится к заменам переменных в функциях класса $S^m_{\rho,\,\delta}$. Прежде всего заметим, что имеет смысл говорить, что $a(x,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(U)$, где U — любая коническая по θ область в пространстве $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$. Именно, мы будем писать, что $a(x,\,\theta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(U)$, если для любого компакта $K\subset(\mathbb{R}^n\times S^{N-1})\cap U$ (здесь S^{N-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^N$) и для любых мультииндексов α, β существует такая постоянная $C_{\alpha,\beta,\,K}>0$, что оценка (1.10) выполнена при $(x,\,\theta/|\theta|)\in K$ и при $|\theta|\geqslant 1$. Предположим теперь, что задан диффеоморфизм конической области $V\subset\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{N_1}$ на коническую область $U\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$, перестановочный с естественным действием мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положительных чисел, т. е. диффеоморфизм, переводящий точку $(y,\,\eta)\in V$ в точку $(x(y,\,\eta),\,\theta(y,\,\eta))\in U$, где $x(y,\,\eta)$ и $\theta(y,\,\eta)$ положительно однородны по η порядков 0 и 1 соответственно. Сделаем в функции $a(x,\,\theta)$ замену переменной, полагая

$$b(y,\,\eta)=a(x(y,\,\eta),\,\theta(y,\,\eta)). \tag{1.23}$$

Л е м м а 1.2. *Пусть $a(x,\,\xi)\in S^m_{\rho,\,\delta}(U)$ и выполнено одно из следующих трех условий*:

а) $\rho+\delta=1$;

б) $\rho+\delta\geqslant 1$ *и* $x=x(y)$ *не зависит от* η;

в) $x=x(y)$, $\xi=\xi(\eta)$.

Тогда $b(y,\,\eta)\in S^m_{\rho,\,\delta}(V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя $b(y,\,\eta)$, получаем из (1.23)

$$\frac{\partial b}{\partial\eta_l}=\sum_j b^{(j)}\frac{\partial\theta_j}{\partial\eta_l}+\sum_k b_{(k)}\frac{\partial x_k}{\partial\eta_l}, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_r}=\sum_j b^{(j)}\frac{\partial\theta_j}{\partial y_r}+\sum_k b_{(k)}\frac{\partial x_k}{\partial y_r}, \tag{1.25}$$

где $b^{(j)}=\dfrac{\partial a}{\partial\theta_j}(x(y,\,\eta),\,\theta(y,\,\eta))$, $b_{(k)}=\dfrac{\partial a}{\partial x_k}(x(y,\,\eta),\,\theta(y,\,\eta))$. Функции $\dfrac{\partial\theta_j}{\partial\eta_l}$, $\dfrac{\partial x_k}{\partial\eta_l}$, $\dfrac{\partial\theta_j}{\partial y_r}$ и $\dfrac{\partial x_k}{\partial y_r}$ положительно однородны по η порядков, соответственно, 0, -1, 1 и 0. Поэтому они принадлежат, соответственно, классам S^0, S^{-1}, S^1 и S^0 (в области V). Учитывая оценки производных функции a, мы получим легко при $|\eta|\geqslant 1$

$$\left|\frac{\partial b}{\partial\eta_l}\right|\leqslant C_k(|\eta|^{m-\rho}+|\eta|^{m+\delta-1}),\qquad \left(x,\,\frac{\eta}{|\eta|}\right)\in K,$$

$$\left|\frac{\partial b}{\partial y_r}\right|\leqslant C_k(|\eta|^{m-\rho+1}+|\eta|^{m+\delta}),\qquad \left(x,\,\frac{\eta}{|\eta|}\right)\in K,$$

где K — некоторый компакт в V. Если $m+\delta-1\leqslant m-\rho$, т. е. $\rho+\delta\leqslant 1$, то из (1.24) получается оценка $\left|\dfrac{\partial b}{\partial\eta_l}\right|\leqslant 2C_K\langle\eta\rangle^{m-\rho}$. Если $x=x(y)$, то $\dfrac{\partial x_k}{\partial\eta_l}=0$ и эта оценка получается из (1.24) без предположения $\rho+\delta\leqslant 1$.

Аналогично, если $m-\rho+1\leqslant m+\delta$, т. е. $\rho+\delta\geqslant 1$, то из (1.25) следует $\left|\dfrac{\partial b}{\partial y_r}\right|\leqslant 2C_K\langle\eta\rangle^{m+\delta}$. Эта же оценка получается без дополнительного предположения $\rho+\delta\geqslant 1$, если $\theta=\theta(\eta)$.

Итак, нижние оценки вида (1.10) проверены при $|\alpha+\beta|\leqslant 1$ для любой функции $a(x,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}(U)$ сразу то всех трех случаях а), б), в). Теперь, действуя по индукции, будем считать, что они проверены при $|\alpha+\beta|\leqslant k$ для любых $a\in S^m_{\rho,\delta}(U)$. В частности, мы получаем, что для производных порядка $\leqslant k$ от функций $b^{(j)}$ и $b_{(j)}$ верны оценки классов $S^{m-\rho}(V)$ и $S^{m+\delta}(V)$ соответственно. Но тогда из (1.24), (1.25) аналогичным рассуждением получим справедливость этих оценок для производных порядка $\leqslant(k+1)$ для любой функции $a\in S^m_{\rho,\delta}(U)$. ■

Лемма 1.3 (вариант леммы Адамара). *Пусть функции* $\Phi_1(x,\theta),\ldots,\Phi_k(x,\theta)$ *принадлежат* $C^\infty(U)$, *где* U — *коническая область в* $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)$, *и положительно однородны по* θ *степени* 0, *причем* $d\Phi_1,\ldots,d\Phi_k$ *линейно независимы в точках множества*

$$C=\{(x,\theta)\in U,\ \ \Phi_j(x,\theta)=0,\ \ j=1,\ldots,k\}.$$

Пусть теперь $a\in S^m_{\rho,\delta}(U)$, $a|_C=0$ *и* $\rho+\delta=1$. *Тогда существует представление*

$$a=\sum_{j=1}^{k}a_j\Phi_j,\tag{1.26}$$

где $a_j(x,\theta)\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U)$, $j=1,\ldots,k$. *Если при этом функция* $a(x,\theta)$ *имела* 0 *бесконечного порядка на* C, *то все функции* $a_j(x,\theta)$, $j=1,\ldots,k$, *также имеют* 0 *бесконечного порядка на* C.

Доказательство. Заметим, что (1.26) является линейным уравнением относительно функций a_j. Поэтому достаточно уметь находить функции a_j локально (при $(x,\theta/|\theta|)$, близком к $(x_0,\theta_0/|\theta_0|)$, где (x_0,θ_0) — некоторая произвольно фиксированная точка из U). Глобальное решение можно склеить на всем U, пользуясь разбиением единицы на U, состоящим из функций нулевой однородности и подчиненным покрытию U коническими областями, в которых требуемые функции a_j уже построены.

Итак, пусть $(x_0,\theta_0)\in U$. Если $(x_0,\theta_0)\notin C$, то существует такое j_0, что $\Phi_{j_0}(x_0,\theta_0)\neq 0$. Мы можем тогда при $(x,\theta/|\theta|)$, близком к $(x_0,\theta_0/|\theta_0|)$, положить $a_{j_0}=a/\Phi_{j_0}$ и $a_j=0$ при $j\neq j_0$. Таким образом, остается проверить существование a_j локально при $(x,\, \theta/|\,\theta\,|)$, близком к $(x_0,\, \theta_0/|\,\theta_0\,|) \in C$. По теореме о неявной функции $\Phi_1,\, \ldots,\, \Phi_k$ можно дополнить функциями $\Phi_{k+1},\, \ldots,\, \Phi_l$ $(l = n + N - 1)$ нулевой однородности так, что $\Phi_1,\, \ldots,\, \Phi_l$ — локальные координаты на многообразии $\{(x,\, \theta)\colon |\,\theta\,| = 1\}$ в окрестности точки $(x_0,\, \theta_0/|\,\theta_0\,|)$. Тогда отображение

$$(x,\, \theta) \mapsto (\Phi_1(x,\, \theta),\, \ldots,\, \Phi_l(x,\, \theta),\, |\,\theta\,|) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+$$

является диффеоморфизмом конической окрестности луча $(x_0,\, t\theta_0)$ на открытое коническое множество $B \times \mathbb{R}_+$, где B можно считать шаром в $\mathbb{R}^l$. При этом образ C имеет вид $\{(\Phi,\, |\,\theta\,|)\colon \Phi_1 = \ldots = \Phi_k = 0\}$. Рассмотрим теперь символ

$$\tilde{a}(\Phi,\, |\,\theta\,|) = a(x(\Phi,\, |\,\theta\,|),\;\; \theta(\Phi,\, |\,\theta\,|)),$$

получающийся из $a(x,\, \theta)$ под действием этого диффеоморфизма. Из леммы 1.2 следует, что $\tilde{a}(\Phi,\, |\,\theta\,|) \in S^m_{\rho,\,\delta}(B \times \mathbb{R}_+)$. Но тогда по формуле Ньютона—Лейбница

$$\tilde{a}(\Phi,\, |\,\theta\,|) = \sum_{j=1}^{k} \Phi_j \int\limits_0^1 \tilde{a}_{(j)}(t\Phi_1,\, \ldots,\, t\Phi_k,\, \Phi_{k+1},\, \ldots,\, \Phi_l,\, |\,\theta\,|)\, dt,$$

где $\tilde{a}_{(j)} = \dfrac{\partial \tilde{a}}{\partial \Phi_j} \in S^{m+\delta}_{\rho,\,\delta}(B \times \mathbb{R}_+)$. Остается произвести обратную замену. ■

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.3. Будем считать, что $\rho + \delta = 1$. Тогда, если $a|_{C_\Phi} = 0$, то по лемме 1.3 с $\Phi_j = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta_j}$ можно представить $a(x,\, \theta)$ в виде

$$a = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j}, \qquad a_j \in S^{m+\delta}_{\rho,\,\delta}(U). \tag{1.27}$$

Однако, учитывая соотношение $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} e^{i\Phi} = -i \dfrac{\partial}{\partial \theta_j} e^{i\Phi}$, мы можем, интегрируя по частям, получить, что

$$I_\Phi(au) = \sum_{j=1}^{N} I_\Phi\Big(i \frac{\partial a_j}{\partial \theta_j} u\Big).$$

Но $\dfrac{\partial a_j}{\partial \theta_j} \in S^{m+\delta-\rho}_{\rho,\,\delta}(U)$, что доказывает второе утверждение теоремы. Из этого доказательства видно, что если функция $a(x,\, \theta)$ имела 0 бесконечного порядка на C_Φ, то $b(x,\, \theta)$ также можно выбрать обладающей этим свойством. Поэтому при доказательстве первого утверждения можно считать, что $a(x, \theta) \in S^{-M}_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, где M сколь угодно велико. Но тогда интеграл (1.21) абсолютно сходится равномерно по x, как и интегралы, полученные из него дифференцированием порядка $\leqslant l(M)$, где $l(M) \to +\infty$ при $M \to +\infty$, откуда и следует гладкость $A(x)$. ■

Упражнение 1.10. Доказать теорему 1.3 в случае, когда выполнено второе из предположений (1.22) ($\Phi(x, \theta)$ линейна по θ).

Указание. Дело сводится к применению п. в) из леммы 1.2.

§ 2. Интегральные операторы Фурье (определение и простейшие свойства)

2.1. Определение интегрального оператора Фурье и его ядра. Пусть X, Y — область в $\mathbb{R}^{n_X}$ и $\mathbb{R}^{n_Y}$. Рассмотрим выражение

$$Au(x) = \int e^{i\Phi(x, y, \theta)}\, a(x, y, \theta)\, u(y)\, dy\, d\theta, \tag{2.1}$$

где $u(y) \in C_0^\infty(Y)$, $x \in X$, $\Phi(x, y, \theta)$ — фазовая функция на $X \times Y \times \mathbb{R}^N$, $a(x, y, \theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$, причем $\rho > 0$, $\delta < 1$.

При указанных предположениях определен интеграл

$$\langle Au, v\rangle = \iiint e^{i\Phi(x, y, \theta)}\, a(x, y, \theta)\, u(y)\, v(x)\, dx\, dy\, d\theta, \quad v \in C_0^\infty(X), \tag{2.2}$$

являющийся обычным осциллирующим интегралом. Легко проверить, что при фиксированном u выражение (2.2), рассматриваемое как функционал от v, определяет обобщенную функцию $Au \in \mathscr{D}'(X)$. Таким образом, определен линейный оператор

$$A\colon C_0^\infty(Y) \to \mathscr{D}'(X), \tag{2.3}$$

который мы будем формально записывать в виде интеграла (2.1).

Определение 2.1. Оператор A вида (2.1) называется *интегральным оператором Фурье* (сокращенно ИОФ) с фазовой функцией $\Phi(x, y, \theta)$.

Определение 2.2. Обобщенная функция $K_A \in \mathscr{D}'(X \times Y)$, определяемая осциллирующим интегралом

$$\langle K_A, w\rangle = \iiint e^{i\Phi(x, y, \theta)}\, a(x, y, \theta)\, w(x, y)\, dx\, dy\, d\theta, \quad w \in C_0^\infty(X \times Y), \tag{2.4}$$

называется *ядром* оператора A.

Предложение 2.1. а) $K_A \in C^\infty(R_\Phi)$, *где*

$$R_\Phi = \{(x, y)\colon \Phi'_\theta(x, y, \theta) \neq 0 \ \text{для любого}\ \theta \in \mathbb{R}^N \setminus 0\}.$$

б) *Если* $a(x, y, \theta)=0$ *в конической окрестности множества*

$$C_\Phi=\{(x, y, \theta)\colon \Phi'_\theta(x, y, \theta)=0\},$$

то $K_A\in C^\infty(X\times Y)$.

Доказательство немедленно получается из теорем 1.1 и 1.2. ■

Ядро K_A является обычным ядром оператора A в смысле Л. Шварца ввиду очевидной формулы

$$\langle Au, v\rangle=\langle K_A, u(y)\,v(x)\rangle, \quad u\in C_0^\infty(Y),\ v\in C_0^\infty(X). \tag{2.5}$$

Упражнение 2.1. Проверить, что ядро K_A однозначно определяется отображением (2.3), задаваемым оператором A, и, наоборот, однозначно определяет это отображение.

Замечание. Легко привести пример двух различных пар фазовая функция — функция $a(x, y, \theta)$, определяющих одно и то же отображение (2.3). Более того, как правило, функция $a(x, y, \theta)$ неоднозначно определена оператором A даже при одной и той же фазовой функции Φ.

2.2. Операторные фазовые функции.

Определение 2.3. Фазовая функция $\Phi(x, y, \theta)$ называется *операторной фазовой функцией*, если выполнены следующие два условия:

$$\Phi'_{y,\theta}(x, y, \theta)\neq 0 \quad \text{при} \quad \theta\neq 0,\ x\in X,\ y\in Y; \tag{2.6}$$

$$\Phi'_{x,\theta}(x, y, \theta)\neq 0 \quad \text{при} \quad \theta\neq 0,\ x\in X,\ y\in Y. \tag{2.7}$$

Роль этих условий выясняется в следующих двух предложениях.

Предложение 2.2. *Если выполнено условие* (2.6), *то оператор вида* (2.1) *непрерывно отображает* $C_0^\infty(Y)$ *в* $C^\infty(X)$.

Доказательство. Интеграл (2.1) сам уже определен как осциллирующий интеграл, зависящий от параметра x. Его производные по x имеют аналогичный вид. ■

В дальнейшем $\mathscr{E}'(Y)$ означает дуальное пространство к $C^\infty(Y)$ (пространство обобщенных функций с компактным носителем в Y).

Предложение 2.3. *Если выполнено условие* (2.7), *то отображение* (2.3), *определяемое интегралом* (2.1), *продолжается до линейного непрерывного отображения*

$$A\colon \mathscr{E}'(Y)\to\mathscr{D}'(X) \tag{2.8}$$

(*непрерывность можно понимать, вводя в* $\mathscr{E}'(Y)$ *и* $\mathscr{D}'(X)$ *слабые топологии* *)).

*) Напомним, что слабая топология в пространстве E', состоящем из линейных функционалов на пространстве E, определяется набором полунорм $p_\varphi(f)=|\langle f, \varphi\rangle|$, где $f\in E'$, φ — любой фиксированный элемент пространства E.

Доказательство. Транспонированный оператор

$$ {}^{t}Av(y) = \iint e^{i\Phi(x,\,y,\,\theta)}\, a(x,\, y,\, \theta)\, v(x)\, dx\, d\theta \tag{2.9} $$

в силу предложения 2.2 определяет отображение

$$ {}^{t}A\colon C_0^\infty(X) \to C^\infty(Y), $$

и остается определить A формулой

$$ \langle Au,\, v\rangle = \langle u,\, {}^{t}Av\rangle, $$

где $u \in \mathscr{E}'(Y)$, $v \in C_0^\infty(X)$. ■

Упражнение 2.2. Проверить, что определенный таким образом оператор A действительно является продолжением отображения (2.3) по непрерывности.

Таким образом, ИОФ A с операторной фазовой функцией Φ отображает $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$ и $\mathscr{E}'(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$. Мы изучим сейчас изменение носителя сингулярности под действием A.

Условимся об одном обозначении. Если X, Y — два множества, S — подмножество в $X \times Y$ и K — подмножество в Y, то $S \circ K$ — подмножество в X, состоящее из тех точек $x \in X$, для которых существует такое $y \in K$, что $(x,\, y) \in S$.

Теорема 2.1. *Имеет место включение*

$$ \operatorname{sing\,supp} Au \subset S_\Phi \circ \operatorname{sing\,supp} u, \tag{2.10} $$

где $S_\Phi = (X \times Y) \backslash R_\Phi$ состоит из тех пар $(x,\, y)$, для которых существует такое $\theta \in \mathbb{R}^N \backslash 0$, что $\Phi'_\theta(x,\, y,\, \theta) = 0$.

Доказательство. Разбивая обобщенную функцию $u \in \mathscr{E}'(Y)$ в сумму функции из $C_0^\infty(Y)$ и обобщенной функции, сосредоточенной в окрестности $\operatorname{sing\,supp} u$, мы видим, что достаточно проверить, что

$$ \operatorname{sing\,supp}(Au) \subset S_\Phi \circ \operatorname{supp} u. $$

Положим $K = \operatorname{supp} u$, и пусть K' — произвольный компакт в X, не пересекающийся с $S_\Phi \circ K$, так что $K' \times K \subset R_\Phi$. Так как R_Φ открыто, то существуют такие открытые окрестности Ω и Ω' компактов K и K', что $\Omega' \times \Omega \subset R_\Phi$. Достаточно проверить, что $Au \in C^\infty(\Omega')$. Но это ясно, так как $K_A(x,\, y) \in C^\infty(R_\Phi)$ и, в частности, $K_A(x,\, y) \in C^\infty(\Omega' \times \Omega)$. ■

Упражнение 2.3. Проверить использованное выше утверждение о том, что если $K_A \in C^\infty(\Omega' \times \Omega)$, то оператор A отображает $\mathscr{E}'(\Omega)$ в $C^\infty(\Omega')$.

2.3. Пример 1: задача Коши для волнового уравнения. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f; \tag{2.11}$$

$$f|_{t=0} = 0, \quad f'_t|_{t=0} = u(x), \tag{2.12}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f = f(t, x)$, Δ — лапласиан по x, и пусть вначале $u(x) \in \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Будем решать задачу (2.11)—(2.12) с помощью преобразования Фурье по x, полагая

$$\tilde{f}(t, \xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} f(t, y)\, dy.$$

Тогда имеем, очевидно,

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2} = -|\,\xi\,|^2\, \tilde{f}(t, \xi), \tag{2.13}$$

$$\tilde{f}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{f}'_t|_{t=0} = \tilde{u}(\xi), \tag{2.14}$$

где $\tilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$. Из (2.13) и (2.14) легко следует, что

$$\tilde{f}(t, \xi) = \tilde{u}(\xi)\, \frac{\sin\, t\,|\,\xi\,|}{|\,\xi\,|}.$$

Следовательно, по формуле обращения преобразования Фурье

$$f(t, x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} |\,\xi\,|^{-1} \sin\, t\,|\,\xi\,|\, u(y)\, dy\, đ\xi =$$
$$= \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} (2i|\,\xi\,|)^{-1} (e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|})\, u(y)\, dy\, đ\xi.$$

Мы хотим разбить последний интеграл в сумму двух интегралов, каждый из которых содержит одну из экспонент $e^{it|\xi|}$ и $e^{-it|\xi|}$. Однако это приведет к появлению особенности при $\xi = 0$. Чтобы избежать этого, введем такую срезающую функцию $\chi = \chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\chi(\xi) = 1$ вблизи 0 и разобьем интеграл на три части

$$f(t, x) = f_+(t, x) - f_-(t, x) + r(t, x), \tag{2.15}$$

где

$$f_+(t, x) = \iint e^{(x-y)\cdot\xi + t|\xi|}\, (1 - \chi(\xi))\, (2i\,|\,\xi\,|)^{-1}\, dy\, đ\xi,$$

$$f_-(t, x) = \iint e^{(x-y)\cdot\xi - t|\xi|}\, (1 - \chi(\xi))\, (2i\,|\,\xi\,|)^{-1}\, dy\, đ\xi,$$

$$r(t, x) = \iint e^{(x-y)\cdot\xi}\, \chi(\xi)\, |\,\xi\,|^{-1} \sin\, t\,|\,\xi\,|\, dy\, đ\xi.$$

Ясно, например, что $f_+ = Au$, где A — ИОФ с фазовой функцией

$$\Phi(t, x, y, \xi) = (x-y)\cdot\xi + t|\xi|.$$

Это — операторная фазовая функция. Поскольку $\Phi'_\xi = x - y + t\xi/|\xi|$, мы получаем

$$C_\Phi = \{(t, x, y, \xi) : y - x = t\,\xi/|\xi|\},$$
$$S_\Phi = \{(t, x, y) : |x-y|^2 = t^2\}.$$

Аналогичным образом второй член $f_-(t, x)$ представляется в виде $f_- = \tilde{A}u$, где $\tilde{A}$ — ИОФ с фазовой функцией

$$\tilde{\Phi}(t, x, y, \xi) = (x-y)\cdot\xi - t|\xi|,$$

имеющей то же самое множество $S_{\tilde{\Phi}} = S_\Phi$.

Третий член очевидным образом имеет вид $r = Ru$, где R — интегральный оператор с гладким (C^∞) ядром. Легко видеть, что он тоже может быть записан как ИОФ вида (2.1) с любой наперед заданной фазовой функцией и с амплитудой $a \in S^{-\infty}$ (см. также упражнение 2.4).

Таким образом, мы видим, что каждый из членов $f_\pm(t, x)$, $r(t, x)$ может быть представлен как результат применения ИОФ к начальному условию u. В частности, согласно предложению 2.3, мы можем определить $f(t, x)$ для любого $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. По теореме 2.1 особенности обобщенной функции $f(t, x)$ содержатся в множестве

$$\{(t, x) : \exists\, y \in \operatorname{sing\,supp} u,\ \ |x-y|^2 = t^2\}.$$

Это классический результат, означающий, что особенности распространяются со скоростью света (в данном случае равной 1). В частности, особенности фундаментального решения (т. е. решения, соответствующего начальному изложению $u(y) = \delta(y)$) принадлежат световому конусу $|x|^2 = t^2$.

Отметим также, что если мы зафиксируем момент времени t_0, то $\Phi_{t_0}(x, y, \xi) = \Phi(t_0, x, y, \xi)$ остается операторной фазовой функцией. Следовательно, отображение $u \mapsto f(t_0, x)$ представляет собой ИОФ.

2.4. Пример 2: линейные дифференциальные операторы. Пусть

$$A = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha, \tag{2.16}$$

где $a_\alpha(x) \in C^\infty(X)$, X — область в $\mathbb{R}^n$ и $D = i^{-1}\partial/\partial x$.

Пользуясь преобразованием Фурье, мы можем написать

$$D^\alpha u(x) = \iint \xi^\alpha\, e^{i(x-y)\cdot\xi}\, u(y)\, dy\, đ\xi,$$

откуда

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \sigma_A(x, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{2.17}$$

где $\sigma_A(x, \xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ называется *символом* оператора A. Так как $\sigma_A(x, \xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$, то из (2.17) видно, что A является ИОФ с фазовой функцией $\Phi(x, y, \xi) = (x - y)\cdot\xi$.

2.5. Пример 3: псевдодифференциальные операторы.

Определение 2.4. Пусть $n_X = n_Y = N = n$ и $X = Y$. Тогда ИОФ с фазовой функцией $\Phi(x, y, \xi) = (x - y)\cdot\xi$ называется *псевдодифференциальным оператором* (сокращенно ПДО). Класс ПДО, которые можно определить с помощью функций $a(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$, мы будем обозначать через $L^m_{\rho,\delta}(X)$ или просто $L^m_{\rho,\delta}$. Вместо $L^m_{1,0}$ будем писать L^m. Положим $L^{-\infty} = \bigcap\limits_m L^m$.

Как показывает предыдущий пример, всякий линейный дифференциальный оператор является ПДО.

Мы укажем сейчас те свойства ПДО, которые вытекают из уже доказанных свойств ИОФ.

Предложение 2.4. *Пусть A — ПДО, заданный формулой*

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, a(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{2.18}$$

K_A — ядро оператора A и Δ — диагональ в $X \times X$. Тогда

а) $K_A \in C^\infty((X \times X) \backslash \Delta)$;

б) *оператор A определяет линейные непрерывные отображения*

$$A\colon C_0^\infty(X) \to C^\infty(X), \tag{2.19}$$

$$A\colon \mathscr{E}'(X) \to \mathscr{D}'(X), \tag{2.20}$$

причем если $u \in \mathscr{E}'(X)$, то

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u, \tag{2.21}$$

(это свойство называется *псевдолокальностью* оператора A);

в) *если функция $a(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ обращается в 0 при $x = y$ и $\delta < \rho$, то оператор A можно записать в виде* (2.18), *где вместо $a(x, y, \xi)$ стоит $b(x, y, \xi) \in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$;*

г) *если $a(x, y, \xi)$ имеет при $x = y$ нуль бесконечного порядка, то $K_A \in C^\infty(X \times X)$ и оператор A отображает $\mathscr{E}'(X)$ в $C^\infty(X)$.*

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

Упражнение 2.4. Пусть $K(x, y) \in C^\infty(X \times X)$ и A — оператор из $C_0^\infty(x)$ в $C^\infty(X)$ с ядром $K(x, y)$. Доказать, что A — ПДО, причем его запись (2.18) можно выбрать так, что $a(x, y, \xi) \in S^{-\infty}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$.

Указание. Если $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi) \geqslant 0$ и $\int \chi(\xi)\, đ\xi = 1$, то мы можем положить

$$a(x, y, \xi) = e^{-i(x-y)\cdot\xi} K(x, y)\, \chi(\xi).$$

Заметим, что линейные дифференциальные операторы обладают свойством *локальности*:

$$\operatorname{supp}(Au) \subset \operatorname{supp} u, \quad u \in C_0^\infty(X). \tag{2.22}$$

Следующее упражнение показывает, что для ПДО это, вообще говоря, не так.

Упражнение 2.5. Показать, что оператор с ядром $K(x, y) \in C^\infty(X \times X)$ не может обладать свойством локальности (2.22), если только $K(x, y) \not\equiv 0$.

Задача 2.1. Пусть дан линейный непрерывный оператор

$$A\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X),$$

обладающий локальностью (2.22). Тогда для любой подобласти $X' \subset X$, замыкание которой есть компакт в X, ограничение A на $C_0^\infty(X')$ является линейным дифференциальным оператором.

Указание. Проверить, что при каждом фиксированном $x_0 \in X$ линейный функционал на $C_0^\infty(x)$, равный $(A\varphi)(x_0)$ на функции $\varphi \in C_0^\infty(X)$, сосредоточен в точке x_0 и, следовательно, может быть записан в виде

$$(A\varphi)(x_0) = \sum_\alpha a_\alpha(x_0)\,(D^\alpha\varphi)(x_0).$$

Вывести из непрерывности A локальную конечность написанной суммы и гладкость (по x_0) коэффициентов $a_\alpha(x_0)$.

§ 3. Алгебра псевдодифференциальных операторов и их символов

3.1. Собственные псевдодифференциальные операторы. Пусть A — ПДО, K_A — его ядро, $\operatorname{supp} K_A$ — носитель ядра K_A (наименьшее из всех замкнутых подмножеств $Z \subset X \times X$, для которых $K_A|_{(X\times X)\setminus Z} = 0$). Рассмотрим канонические проекции $\pi_1, \pi_2\colon \operatorname{supp} K_A \to X$, получаемые ограничением соответствующих проекций прямого произведения $X \times X$. Напомним, что непрерывное отображение $f\colon M \to N$, где M, N — топологические пространства, называется *собственным*, если для любого компакта $K \subset N$ его прообраз $f^{-1}(K)$ является компактом в M.

Определение 3.1. ПДО A называется *собственным*, если обе проекции $\pi_1, \pi_2\colon \operatorname{supp} K_A \to X$ являются собственными отображениями.

Пример. Линейный дифференциальный оператор (см. п. 2.4) является собственным ПДО (в этом случае $\operatorname{supp} K_A$ — диагональ $\Delta \subset X \times X$).

Предложение 3.1. *Пусть A — собственный* ПДО. *Тогда A определяет отображение*

$$A\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X), \tag{3.1}$$

которое продолжается до непрерывных отображений

$$A\colon \mathscr{E}'(X) \to \mathscr{E}'(X), \tag{3.2}$$

$$A\colon C^\infty(X) \to C^\infty(X), \tag{3.3}$$

$$A\colon \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X). \tag{3.4}$$

Доказательство. Если $u(y) \in C_0^\infty(X)$, то имеет место включение

$$\operatorname{supp}(Au) \subset (\operatorname{supp} K_A) \circ (\operatorname{supp} u). \tag{3.5}$$

В самом деле, если $v \in C_0^\infty(X)$ таково, что $\operatorname{supp} v \cap (\operatorname{supp} K_A) \circ (\operatorname{supp} u) = \varnothing$, то $\operatorname{supp} K_A \cap \operatorname{supp}[u(y)\, v(x)] = \varnothing$, и поэтому $\langle Au, v\rangle = 0$ ввиду формулы (2.5). Далее, из очевидной формулы

$$(\operatorname{supp} K_A) \circ (\operatorname{supp} u) = \pi_1(\operatorname{supp} K_A \cap \pi_2^{-1}(\operatorname{supp} u)), \tag{3.6}$$

следует, что в правой части (3.5) стоит компакт, так что $Au \in C_0^\infty(X)$, и доказано, что A осуществляет отображение (3.1), непрерывность которого легко проверяется.

Поскольку ядро $K_{{}^tA}$ транспонированного оператора ${}^tA$ получается из K_A перестановкой x и y (точнее, $\langle K_{{}^tA}, w(x, y)\rangle = \langle K_A, w(y, x)\rangle$), то оператор ${}^tA$ также определяет непрерывное отображение

$${}^tA\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X),$$

что по двойственности дает для A отображение (3.4). Наконец, формула (3.5), как легко проверить, применима и при $u \in \mathscr{E}'(X)$, откуда получается отображение (3.2). А поскольку это же можно сказать и об ${}^tA$, то по двойственности получается отображение (3.3). ■

Упражнение 3.1. Пусть X_n — такая последовательность открытых подмножеств X, что

1) $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$,

2) $\bigcup\limits_n X_n = X$,

3) замыкание $\bar{X}_n$ множества X_n в X является компактом в X.

Пусть $\chi_n(x) \in C_0^\infty(X)$ и $\chi_n(x) = 1$ при $x \in X_n$.

Пусть, наконец, A — собственный ПДО в X. Показать, что если $u \in \mathscr{D}'(X)$, то для любого m найдется такое $N = N(m)$, что обобщенная функция $[A(\chi_n u)]|_{X_m}$ при

$n \geqslant N$ не зависит от n. Таким образом, мы можем определить $Au \in \mathscr{D}'(X)$ формулой

$$Au = \lim_{n \to \infty} A(\chi_n u). \tag{3.7}$$

Показать, что это определение совпадает с определением, данным выше в доказательстве предложения 3.1.

Упражнение 3.2. Показать, что на $C^\infty(X)$ совпадают все три указаных выше определения собственного ПДО A:

а) по двойственности к отображению ${}^tA\colon \mathscr{E}'(X) \to \mathscr{E}'(X)$;

б) как ограничение на $C^\infty(X)$ отображения $A\colon \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$, построенного по двойственности к отображению ${}^tA\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X)$,

в) по формуле (3.7).

Упражнение 3.3. Проверить, что оператор A является собственным тогда и только тогда, когда собственным является оператор ${}^tA$.

Роль собственных ПДО состоит в том, что они образуют алгебру, в которой роль умножения играет обычное умножение (композиция) операторов. Это утверждение будет доказано ниже, а пока из предложения 3.1 видно, что композиция $A_1 \circ A_2$ двух собственных ПДО определена как линейный непрерывный оператор в пространствах $C_0^\infty(X)$, $\mathscr{E}'(X)$, $C^\infty(X)$ или $\mathscr{D}'(X)$.

Отметим, что из (2.18), задающей ПДО A через $a(x, y, \xi)$, не видно сразу, что она применима при $u \in \mathscr{D}'(X)$ (или хотя бы при $u \in C^\infty(X)$). Это не удивительно, поскольку функция $a(x, y, \xi)$ не определяется однозначно оператором A. Однако, пользуясь этим произволом, мы можем выбрать $a(x, y, \xi)$ более удачно.

Определение 3.2. Будем называть функцию $a(x, y, \xi)$ *функцией с собственным носителем*, если обе проекции

$$\pi_1,\, \pi_2\colon \operatorname{supp}_{x,y} a(x, y, \xi) \to X$$

являются собственными отображениями (через $\operatorname{supp}_{x,y} a(x, y, \xi)$ обозначается замыкание проекции $\operatorname{supp} a(x, y, \xi)$ на $X \times X$).

Ясно, что в этом случае соответствующий ПДО A является собственным.

Предложение 3.2. *Если A — собственный* ПДО *и $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$, то оператор A можно задать формулой* (2.18) *с функцией $a(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$, имеющей собственный носитель.*

Доказательство. Пусть $\chi(x, y) \in C^\infty(X \times X)$, причем $\chi(x, y) = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} K_A$ и обе проекции $\pi_1, \pi_2\colon \operatorname{supp} \chi \to X$ являются собственными отображениями (проверьте, что такая функция существует!). Тогда, написав в (2.18) вместо $a(x, y, \xi)$ функцию $\chi(x, y)\, a(x, y, \xi)$, мы не изменим ядра K_A и, следовательно, не изменим оператора A, в то время как функция $\chi(x, y)\, a(x, y, \xi)$ уже имеет собственный носитель. ∎

Отметим, что если функция $a(x, y, \xi)$ имеет собственный носитель, то интеграл (2.18) при $u \in C^\infty(X)$ определен, если рассматривать его как повторный.

Предложение 3.3. *Всякий* ПДО A *может быть записан в виде* $A = A_0 + A_1$, *где* A_0 — *собственный* ПДО, *а* A_1 *имеет ядро* $K_{A_1} \in C^\infty(X \times X)$.

Доказательство. Если A задается в виде (2.18) с функцией $a(x, y, \xi)$, то можно задать A_0 и A_1 в том же виде, подставив вместо $a(x, y, \xi)$ функции $a_0(x, y, \xi) = \chi(x, y)\, a(x, y, \xi)$ и $a_1(x, y, \xi) = (1 - \chi(x, y))\, a(x, y, \xi)$, где функция $\chi(x, y)$ равна 1 в окрестности диагонали $\Delta \subset X \times X$ и такова, что обе проекции $\pi_1, \pi_2 \colon \operatorname{supp} \chi \to X$ являются собственными отображениями. ■

Предложение 3.4. *Пусть* A — ПДО. *Тогда* A *является собственным тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия*:

а) *для любого компакта* $K \subset X$ *существует такой компакт* $K_1 \subset X$, *что из включения* $\operatorname{supp} u \subset K$ *вытекает, что* $\operatorname{supp}(Au) \subset K_1$;

б) *то же самое условие с заменой* A *на* ${}^tA$.

Доказательство. Необходимость условий а) и б) вытекает из формулы (3.5). Докажем достаточность. Проверим, например, что проекция $\pi_2 \colon \operatorname{supp} K_A \to X$ является собственным отображением. Пусть K — любой компакт в X. Найдем компакт K_1, о котором говорится в п. а), и проверим, что $\pi_2^{-1}(K) \cap \operatorname{supp} K_A \subset K_1 \times K$. Если $(x_0, y_0) \in (X \backslash K_1) \times K$, то если гладкая функция $w(x, y) = u(y)\, v(x)$ сосредоточена в окрестности (x_0, y_0), то $\langle K_A, w \rangle = 0$ в силу условия а). Но тогда это же верно по линейности и непрерывности для любой функции $w \in C_0^\infty(X \times X)$, сосредоточенной в окрестности (x_0, y_0), откуда и следует требуемое включение. ■

3.2. Символ собственного псевдодифференциального оператора. Мы хотим для любого собственного ПДО A определить его символ аналогично примеру 2 из § 2.

Укажем сразу, что в этом примере справедлива формула

$$\sigma_A(x, \xi) = e_{-\xi}(x)\, A\, e_\xi(x), \tag{3.8}$$

где $e_\xi(x) = e^{ix \cdot \xi}$. Отметим, что правая часть ее имеет смысл и для собственного ПДО A.

Определение 3.3. Пусть A — собственный ПДО. Его *символом* (или *полным символом*) называется функция $\sigma_A(x, \xi)$ на $X \times \mathbb{R}^n$, определенная формулой (3.8).

Поскольку $e_\xi(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией от ξ со значениями в $C^\infty(X)$, а A — линейный непрерывный оператор в $C^\infty(X)$, то ясно, что $\sigma_A(x,\,\xi)$ также является бесконечно дифференцируемой функцией от ξ со значениями в $C^\infty(X)$, откуда $\sigma_A(x,\,\xi)\in$ $\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^n)$.

Записывая $u(x)\in C_0^\infty(X)$ с помощью формулы обращения преобразования Фурье в виде

$$u(x)=\int e_\xi(x)\,\hat u(\xi)\,đ\xi$$

и замечая, что интеграл сходится в топологии $C^\infty(X)$, мы видим, что

$$Au(x)=\int e^{ix\cdot\xi}\,\sigma_A(x,\,\xi)\,\hat u(\xi)\,đ\xi \tag{3.9}$$

или

$$Au(x)=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\,\sigma_A(x,\,\xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi \tag{3.10}$$

(интеграл понимается как повторный), что совпадает с соответствующей формулой для дифференциальных операторов.

Как показывают формулы (3.8) и (3.9), символ $\sigma_A(x,\,\xi)$ определяет оператор A и определяется им.

В дальнейшем будет доказано, что если $A\in L^m_{\rho,\,\delta}(X)$ и $\delta<\rho$, то $\sigma_A(x,\,\xi)\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$, так что (3.10) можно будет понимать и как осциллирующий интеграл (интеграл (3.9) абсолютно сходится).

З а м е ч а н и е. Если A — любой ПДО в X, то часто его символом или полным символом называют символ $\sigma_{A_1}(x,\,\xi)$ такого собственного ПДО A_1 в X, что $A-A_1\in L^{-\infty}$. В этом случае символ определен неоднозначно, хотя, как будет видно из дальнейшего, любые два символа отличаются на функцию $r(x,\,\xi)\in S^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^n)$.

3.3. Асимптотические разложения в классах $S^m_{\rho,\,\delta}$.

О п р е д е л е н и е 3.4. Пусть $a_j(x,\,\theta)\in S^{m_j}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, $j=1,\,2,\,\ldots,$ $m_j\to-\infty$ при $j\to+\infty$, и пусть задана функция $a(x,\,\theta)\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^N)$. Будем писать, что

$$a(x,\,\theta)\sim\sum_{j=1}^{\infty}a_j(x,\,\theta),$$

если для любого целого $r\geqslant 2$

$$a(x,\,\theta)-\sum_{j=1}^{r-1}a_j(x,\,\theta)\in S^{\bar m_r}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^n), \tag{3.11}$$

где $\bar m_r=\max\limits_{j\geqslant r}m_j$.

Отсюда, в частности, следует, что $a \in S^{\bar{m}_1}_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Предложение 3.5. *Если задана последовательность* $a_j \in S^{m_j}_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, $j = 1, 2, \ldots$, *причем* $m_j \to -\infty$ *при* $j \to +\infty$, *то существует такая функция* $a(x, \theta)$, *что*

$$a \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Далее, если другая функция a' *обладает тем же свойством* $a' \sim \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$, *то* $a - a' \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Докажем первое. Можно считать, что $m_1 > m_2 > m_3 > \ldots$. В самом деле, если это не так, то объединим первый член с несколькими последующими до последнего, имеющего порядок $\geqslant m_1$. Первый из оставшихся объединяем аналогичным образом и т. д. Пусть $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$, где X_j — открытое подмножество в X, причем $K_j = \bar{X}_j \Subset X$ (т. е. K_j — компакт в X). Пусть $\varphi(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |\theta| \leqslant 1/2, \\ 1 & \text{при} \quad |\theta| \geqslant 1. \end{cases}$$

Мы положим

$$a(x, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta), \tag{3.12}$$

где t_j так быстро стремятся к $+\infty$ при $j \to +\infty$, что

$$\left|\partial_\theta^\alpha\, \partial_x^\beta \left[\varphi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta)\right]\right| \leqslant 2^{-j} \langle\theta\rangle^{m_{j-1} - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \tag{3.13}$$

при $x \in K_l$ и при $|\alpha| + |\beta| + l \leqslant j$. Покажем, что этого всегда можно добиться.

Заметим, что

$$\left|\partial_\theta^\alpha\, \varphi\left(\frac{\theta}{t}\right)\right| \leqslant C_\alpha \langle\theta\rangle^{-|\alpha|}, \quad t \geqslant 1, \tag{3.14}$$

где C_α не зависит от t, т. е. для $\varphi(\theta/t)$ при $t \geqslant 1$ выполнены оценки класса $S^0_{1,\,0}$ равномерно по t. В самом деле,

$$\partial_\theta^\alpha \varphi\left(\frac{\theta}{t}\right) = (\partial_\theta^\alpha \varphi)\left(\frac{\theta}{t}\right) \cdot t^{-|\alpha|} \quad \text{и} \quad |\theta| \leqslant t \leqslant 2|\theta|$$

при $\theta \in \operatorname{supp} \partial_\theta^\alpha\, \varphi(\theta/t)$, откуда и вытекает (3.14).

Далее, из (3.14) следует, что

$$\left|\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta\left[\varphi\Big(\frac{\theta}{t}\Big)\,a_j(x,\,\theta)\right]\right|\leqslant C_j\langle\theta\rangle^{m_j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

если $x\in K_l$, $t\geqslant 1$ и $|\alpha|+|\beta|+l\leqslant j$. Заметим теперь, что

$$\langle\theta\rangle^{m_j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\leqslant\varepsilon\langle\theta\rangle^{m_{j-1}-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

при $\langle\theta\rangle^{m_{j-1}-m_j}\geqslant 1/\varepsilon$. Поэтому выбором t_j мы можем добиться выполнения (3.13). Из (3.13) следует сходимость ряда (3.12) вместе со всеми производными, равномерная на любом компакте $K\subset X$, и при любых фиксированных α, β и l получается, что

$$\left|\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta\left[\sum_{j=r+1}^{\infty}\varphi\Big(\frac{\theta}{t_j}\Big)\,a_j(x,\,\theta)\right]\right|\leqslant 2^{-r}\langle\theta\rangle^{m_r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\qquad x\in K_l\,.$$

Поэтому $a-\sum\limits_{j=1}^{r}a_j\in S^{m_r}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$. Так как $a_r\in S^{m_r}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, то отсюда следует, что $a-\sum\limits_{j=1}^{r-1}a_j\in S^{m_r}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, что и требовалось. ■

Следующее предложение облегчает проверку того, что $a\sim\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$.

Предложение 3.6. *Пусть* $a_j\in S^{m_j}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$, $m_j\to-\infty$ *при* $j\to+\infty$, $a\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^N)$, *причем для любого компакта* $K\subset X$ *и любых мультииндексов* α, β *существуют такие постоянные* $\mu=\mu(\alpha,\,\beta,\,K)$ *и* $C=C(\alpha,\,\beta,\,K)$, *что*

$$|\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta a(x,\,\theta)|\leqslant C\langle\theta\rangle^{\mu},\qquad x\in K.\tag{3.15}$$

Далее, предположим, что для любого компакта $K\subset X$ *существуют такая числовая последовательность* $\mu_l=\mu_l(K)$, $l=1,\,2,\,\ldots,$ *и такой набор постоянных* $C_l=C_l(K)$, *что* $\mu_l\to-\infty$ *при* $l\to+\infty$ *и выполнены оценки*:

$$\left|a(x,\,\theta)-\sum_{j=1}^{l-1}a_j(x,\,\theta)\right|\leqslant C_l\langle\theta\rangle^{\mu_l},\qquad x\in K.\tag{3.16}$$

Тогда $a\sim\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$.

Суть этого предложения в том, что вместо (3.11) оно позволяет проверять оценки остатка лишь для самих функций (а не для всех производных), если для производных $\partial_\theta^\alpha\,\partial_x^\beta a$ гарантированы довольно слабые оценки (3.15).

Доказательство опирается на следующую хорошо известную лемму.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f(t)$ имеет непрерывные производные $f'(t)$ и $f''(t)$ при $t \in [-1, 1]$. Положим*

$$A_j = \sup_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(j)}(t)|, \quad j = 0, 2.$$

Тогда

$$|f'(0)|^2 \leqslant 4A_0(A_0 + A_2). \tag{3.17}$$

Доказательство. По теореме Лагранжа

$$|f'(t) - f'(0)| \leqslant A_2|t|.$$

Поэтому $|f'(t)| \geqslant \frac{1}{2}|f'(0)|$ при $A_2|t| \leqslant \frac{1}{2}|f'(0)|$, $|t| \leqslant 1$. Обозначим $\Delta = \min\left\{\frac{|f'(0)|}{2A_2}, 1\right\}$, так что $|f'(t)| \geqslant \frac{1}{2}|f'(0)|$ при $t \in [-\Delta, \Delta]$. Имеем

$$2A_0 \geqslant |f(\Delta) - f(-\Delta)| \geqslant 2\Delta \cdot \frac{|f'(0)|}{2}.$$

Следовательно,

$$|f'(0)| \leqslant \frac{2A_0}{\Delta} = 2A_0 \max\left\{\frac{2A_2}{|f'(0)|}, 1\right\}.$$

Это означает, что либо $|f'(0)| \leqslant \frac{4A_0A_2}{|f'(0)|}$, либо $|f'(0)| \leqslant 2A_0$, т. е. либо $|f'(0)|^2 \leqslant 4A_0A_2$, либо $|f'(0)|^2 \leqslant 4A_0^2$, откуда и следует (3.17). ■

Лемма 3.2. *Пусть K_1, K_2 — два компакта в $\mathbb{R}^p$, причем $K_1 \subset \operatorname{Int} K_2$ (множество внутренних точек K_2). Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что для любой функции f, бесконечно дифференцируемой в окрестности K_2, справедлива оценка*

$$\left(\sup_{x \in K_1} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha f(x)|\right)^2 \leqslant \\ \leqslant C \sup_{x \in K_2} |f(x)| \left(\sup_{x \in K_2} |f(x)| + \sup_{x \in K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f(x)|\right). \tag{3.18}$$

Доказательство немедленно получается из леммы 3.1.

Доказательство предложения 3.6. Пусть $b \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ (такая функция b существует в силу предложения 3.5). Положим $d(x, \theta) = a(x, \theta) - b(x, \theta)$. Тогда для любого компакта $K \subset X$ выполняются оценки

$$|\partial_\theta^\alpha \partial_x^\beta d(x, \theta)| \leqslant C\langle\theta\rangle^\mu, \quad x \in K, \tag{3.19}$$

где C и μ зависят от α, β, K, и, кроме того,

$$|d(x, \theta)| \leqslant C_r \langle\theta\rangle^{-r}, \quad x \in K, \tag{3.20}$$

где $C_r = C_r(K)$.

Положим $d_\theta(x, \xi) = d(x, \theta + \xi)$. Тогда

$$\partial_\xi^\alpha \, \partial_x^\beta d_\theta(x, \xi)|_{\xi=0} = \partial_\theta^\alpha \, \partial_x^\beta d(x, \theta).$$

Применим лемму 3.2, полагая $K_1 = K \times 0$, $K_2 = \hat{K} \times \{|\xi| \leqslant 1\}$, где $\hat{K}$ — такой компакт в X, что $\operatorname{Int} \hat{K} \supset K$. Тогда получим в силу (3.20)

$$\left(\sup_{x \in K} \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant 1} \left| \partial_\theta^\alpha \, \partial_x^\beta d(x, \theta) \right| \right)^2 \leqslant C \langle\theta\rangle^{-r} (\langle\theta\rangle^{-r} + \langle\theta\rangle^\mu),$$

где r может быть выбрано произвольно, μ зависит от α, β и K, а C, кроме того, еще и от r. Но отсюда следует, что при $x \in K$ и $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$ функция $\partial_\theta^\alpha \, \partial_x^\beta d(x, \theta)$ убывает при $|\theta| \to +\infty$ быстрее любой степени $\langle\theta\rangle$. Рассуждая по индукции, мы получим это же при любых α, β, что дает требуемое включение $d \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N)$. ■

3.4. Выражение символа собственного ПДО через функцию $\boldsymbol{a(x, y, \xi)}$. В этом пункте и во всех последующих мы считаем, что $\delta < \rho$.

Теорема 3.1. *Пусть A — собственный* ПДО, *заданный формулой* (2.18), *$\sigma_A(x, \xi)$ — его символ. Тогда*

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \, \partial_\xi^\alpha \, D_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x}, \tag{3.21}$$

где асимптотическая сумма берется по всем мультииндексам α.

Замечание. Ясно, что $\partial_\xi^\alpha \, D_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x} \in S_{\rho, \delta}^{m-(\rho-\delta)|\alpha|}$, так что асимптотическая сумма (3.21) имеет смысл.

Доказательство теоремы 3.1. Заметим, что в силу предложения 3.2 можно считать, что функция $a(x, y, \xi)$ имеет собственный носитель. Формулу (3.8), определяющую символ $\sigma_A(x, \xi)$, можно тогда переписать в виде

$$\sigma_A(x, \xi) = \iint a(x, y, \theta) \, e^{i(x-y)\cdot\theta} e^{i(y-x)\cdot\xi} \, dy \, đ\theta, \tag{3.22}$$

где интеграл понимается как повторный и имеет смысл, так как при каждом фиксированном x интегрирование по y ведется по компакту. Таким образом, если K — компакт в X, то в формуле (3.22) написан осциллирующий интеграл, зависящий от параметра $x \in K$. Сделаем в нем замену переменных $z = y - x$, $\eta = \theta - \xi$, чтобы упростить экспоненту:

$$\sigma_A(x, \xi) = \iint a(x, x+z, \xi+\eta)\, e^{-iz\cdot\eta}\, dz\, đ\eta. \tag{3.23}$$

Разложим $a(x, x+z, \xi+\eta)$ по η по формуле Тейлора в точке $\eta = 0$:

$$a(x, x+z, \xi+\eta) = \sum_{|\alpha| \leqslant N-1} \partial_\xi^\alpha a(x, x+z, \xi)\, \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} + r_N(x, x+z, \xi, \eta), \tag{3.24}$$

где

$$r_N(x, x+z, \xi, \eta) = \sum_{|\alpha| = N} \frac{N\eta^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_\xi^\alpha a(x, x+z, \xi + t\eta)\, dt. \tag{3.25}$$

Заметим теперь, что

$$\iint \partial_\xi^\alpha a(x, x+z, \xi)\, \eta^\alpha e^{-iz\cdot\eta}\, dz\, đ\eta = \partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x, x+z, \xi)|_{z=0}, \tag{3.26}$$

по формуле обращения Фурье. Это дает конечные члены в формуле (3.21).

Мы хотим теперь воспользоваться предложением 3.6. Получим вначале грубую оценку типа (3.15) для $\sigma_A(x, \xi)$. Для этого преобразуем (3.23) интегрированием по частям:

$$\sigma_A(x, \xi) = \iint e^{-iz\cdot\eta} \langle D_z \rangle^\nu a(x, x+z, \xi+\eta) \cdot \langle \eta \rangle^{-\nu}\, dz\, đ\eta, \tag{3.27}$$

где ν четно и неотрицательно.

Теперь, учитывая неравенство

$$\langle \xi + \eta \rangle \leqslant \langle \xi \rangle \cdot \langle \eta \rangle,$$

мы получим из (3.27), что

$$\left| \partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta \sigma_A(x, \xi) \right| \leqslant C \langle \xi \rangle^{p+\delta\nu} \int \langle \eta \rangle^{p-(1-\delta)\nu}\, d\eta,$$

где $p = \max(m - \rho|\,\alpha\,| + \delta|\,\beta\,|, 0)$, $x \in K$ и ν достаточно велико. Это и дает требуемые оценки производных от $\sigma_A(x, \xi)$ типа (3.15). Теперь остается оценить остаточный член.

Подставляя в (3.23) выражение r_N (3.25) вместо $a(x, x+z, \xi+\eta)$, поменяем местами интегрирование по t и интегрирование по z, η, и тогда получается, что нужно равномерно по $t \in (0, 1]$ и $x \in K$ оценить интеграл

$$R_{\alpha, t}(x, \xi) = \iint e^{-iz\cdot n} \eta^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x, x+z, \xi + t\eta)\, dz\, đ\eta,$$

где $|\alpha|=N$. Интегрируя по частям, мы получаем

$$R_{\alpha, t}(x, \xi)=\iint e^{-iz\cdot\eta}\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x, x+z, \xi+t\eta)\, dz\, đ\eta. \tag{3.28}$$

Разобьем интеграл в (3.28) на две части:

$$R_{\alpha, t}=R'_{\alpha, t}+R''_{\alpha, t}, \tag{3.29}$$

где в $R'_{\alpha,t}$ интегрирование происходит по множеству $\{(z, \eta)\colon |\eta|\leqslant \leqslant|\xi|/2\}$, а в $R''_{\alpha, t}$ — по его дополнению. Заметим, что если $|\eta|\leqslant|\xi|/2$, то $|\xi|/2\leqslant|\xi+t\eta|\leqslant 3|\xi|/2$, а поскольку в $R'_{\alpha, t}$ объем области интегрирования по η не превосходит $C|\xi|^n$, то

$$|R'_{\alpha, t}(x, \xi)|\leqslant C\langle\xi\rangle^{m-(\rho-\delta)N+n}, \tag{3.30}$$

где C не зависит от ξ и от t.

Оценим теперь $R''_{\alpha, t}$. Проведем по z интегрирование по частям, пользуясь формулой

$$\langle\eta\rangle^{-\nu}\langle D_z\rangle^\nu e^{-iz\cdot\eta}=e^{-iz\cdot\eta},$$

где ν — неотрицательное четное число. Тогда $R''_{\alpha, t}$ представляется в виде конечной суммы слагаемых вида

$$R_{\alpha, \beta, t}(x, \xi)=\iint\limits_{|\eta|>|\xi|/2} e^{-iz\cdot\eta}\langle\eta\rangle^{-\nu}\partial_\xi^\alpha D_z^{\alpha+\beta} a(x, x+z, \xi+t\eta)\, dz\, đ\eta, \tag{3.31}$$

где $|\beta|\leqslant\nu$. При $|\eta|>|\xi|/2$ выражение $\partial_\xi^\alpha D_z^{\alpha+\beta}a(x, x+z, \xi+t\eta)$ оценивается по модулю через $C\langle\eta\rangle^{m-(\rho-\delta)\, N+\delta\nu}$ при $m-(\rho-\delta)\, N+\delta\nu\geqslant 0$ и через C при $m-(\rho-\delta)\, N+\delta\nu<0$ (в обоих случаях C не зависит от ξ, η и t). Учитывая множитель $\langle\eta\rangle^{-\nu}$, мы получаем из (3.31) при достаточно большом ν

$$|R_{\alpha, \beta, t}(x, \xi)|\leqslant C\int\limits_{|\eta|>|\xi|/2}\langle\eta\rangle^{p-(1-\delta)\nu}\, d\eta,$$

где $p=\max\{m-(\rho-\delta)\, N, 0\}$. Если $p-(1-\delta)\nu+n+1<0$, то отсюда следует, что

$$|R_{\alpha, \beta, t}(x, \xi)|\leqslant C\langle\xi\rangle^{p-(1-\delta)\nu+n+1}\int\langle\eta\rangle^{-n-1}\, d\eta\leqslant C\langle\xi\rangle^{p-(1-\delta)\nu+n+1}, \tag{3.32}$$

где C не зависит от x, ξ, t (при $x\in K$, $t\in(0, 1]$). Выбирая большое ν, мы можем сделать в (3.32) показатель $p-(1-\delta)\nu+n+1$ отрицательным и сколь угодно большим по модулю.

Принимая во внимание (3.29) и (3.30), мы получаем для $R_{\alpha,t}$ оценку

$$|R_{\alpha,t}(x, \xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{m-(\rho-\delta)N+n}, \quad x\in K, \quad t\in(0, 1],$$

которая обеспечивает применимость предложения 3.6, что и требовалось. ■

З а м е ч а н и е. Метод доказательства теоремы 3.1 очень характерен для теории ПДО, и соответствующие рассуждения имеются во всех вариантах этой теории при любых способах ее изложения. Поэтому мы рекомендуем читателю тщательно разобраться в доказательстве этой ключевой теоремы.

3.5. Символ транспонированного оператора и дуальный символ. Транспонированный оператор ${}^tA$ определяется тем, что для $u, v\in C_0^\infty(X)$ должно иметь место тождество

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, {}^tAv\rangle, \tag{3.33}$$

где

$$\langle u, v\rangle = \int u(x)\, v(x)\, dx.$$

Поэтому, если оператор $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$ задается формулой (2.18), в которой $a(x, y, \xi)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$, то ${}^tA$ задается формулой

$${}^tAv(y) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, a(x, y, \xi)\, v(x)\, dx\, đ\xi,$$

откуда заменой переменных $\eta = -\xi$ получается

$${}^tAv(y) = \iint e^{i(y-x)\cdot\eta}\, a(x, y, -\eta)\, v(x)\, dx\, đ\eta. \tag{3.34}$$

Отсюда видно, что ${}^tA\in L^m_{\rho,\delta}(X)$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть A — собственный* ПДО, $\sigma_A(x, \xi)$ — *его символ*, $\sigma'_A(x, \xi)$ — *символ оператора* ${}^tA$. *Тогда*

$$\sigma'_A(x, \xi) \sim \sum_\alpha \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \sigma_A(x, -\xi)/\alpha!. \tag{3.35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что оператор ${}^tA$ также является собственным (см. упражнение 3.3). Далее, вместо $a(x, y, \xi)$ в формулу (2.18), задающую действие A, можно подставить $\sigma_A(x, \xi)$ (см. (3.10)). Тогда (3.34) можно записать в виде

$${}^tAv(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_A(y, -\xi)\, v(y)\, dy\, đ\xi. \tag{3.36}$$

Это стандартная запись ПДО (см. (2.18)), в которой роль $a(x, y, \xi)$ играет $\sigma_A(y, -\xi)$). Остается воспользоваться теоремой 3.1. ■

Упражнение 3.4. Пусть A — собственный ПДО с символом $\sigma_A(x, \xi)$, A^* — «сопряженный» оператор, определяемый тем условием, что

$$(Au, v) = (u, A^* v), \quad u, v \in C_0^\infty(X),$$

где $(u, v) = \int\limits_X u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$. Показать, что A^* — собственный ПДО и если $\sigma_A^*(x, \xi)$ — его символ, то

$$\sigma_A^*(x, \xi) \sim \sum_\alpha \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{\sigma_A(x, \xi)}/\alpha!, \tag{3.37}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Мы введем теперь *дуальный символ* $\tilde\sigma_A(x, \xi)$, полагая

$$\tilde\sigma_A(x, \xi) = \sigma'_A(x, -\xi). \tag{3.38}$$

Учитывая, что ${}^t({}^tA) = A$, мы получаем из (3.36), что оператор A записывается через дуальный символ $\tilde\sigma_A(x, \xi)$ по формуле

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\tilde\sigma_A(y, \xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi$$

или

$$(\widehat{Au})\,(\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi}\,\tilde\sigma_A\,(y, \xi)\,u(y)\,dy. \tag{3.39}$$

Теорема 3.3. *Дуальный символ $\tilde\sigma_A(y, \xi)$ связан с символом $\sigma_A(y, \xi)$ асимптотической формулой*

$$\tilde\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_\alpha (-\partial_\xi)^\alpha D_x^\alpha \sigma_A(x, \xi)/\alpha!. \tag{3.40}$$

Доказательство очевидно из (3.38) и (3.35). ■

3.6. Формула композиции.

Теорема 3.4. *Пусть A, B — собственные* ПДО *в области $X \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma_A(x, \xi)$, $\sigma_B(x, \xi)$ — их символы. Рассмотрим их композицию $C = B \circ A$. Тогда C — собственный* ПДО, *символ которого $\sigma_{BA}(x, \xi)$ удовлетворяет условию*

$$\sigma_{BA}(x, \xi) \sim \sum_\alpha \partial_\xi^\alpha \sigma_B(x, \xi) \cdot D_x^\alpha \sigma_A(x, \xi)/\alpha!. \tag{3.41}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (3.39) для оператора A и формулой (3.9), примененной к оператору B, получаем

$$Cu(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_B(x, \xi)\,\tilde\sigma_A(y, \xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi.$$

Отсюда видно, что если $A\in L^{m_1}_{\rho,\,\delta}(X)$ и $B\in L^{m_2}_{\rho,\,\delta}(X)$, то $C\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(X)$. Далее, аналогично получается, что ${}^tC={}^tA\circ{}^tB\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\,\delta}(X)$. Тот факт, что ПДО C является собственным, вытекает теперь из предложения 3.4. Остается вычислить символ $\sigma_{BA}(x,\,\xi)$, пользуясь теоремами 3.1 и 3.3.

Имеем

$$\sigma_{BA}(x,\,\xi)\sim\sum_{\alpha}\partial^\alpha_\xi D^\alpha_y\big[\sigma_B(x,\,\xi)\,\tilde\sigma_A(y,\,\xi)\big]/\alpha!\,\big|_{y=x}=$$

$$=\sum_{\alpha}\partial^\alpha_\xi\big[\sigma_B(x,\,\xi)\,D^\alpha_x\tilde\sigma_A(x,\,\xi)\big]/\alpha!\sim$$

$$\sim\sum_{\alpha,\,\beta}\partial^\alpha_\xi\big[\sigma_B(x,\,\xi)\,(-\partial_\xi)^\beta\,D^{\alpha+\beta}_x\sigma_A(x,\,\xi)\big]/\alpha!\,\beta!. \quad (3.42)$$

Теперь сформулируем две хорошо известные алгебраические леммы.

Лемма 3.3 (формула Лейбница). *Пусть $f(x)$, $g(x)$ — гладкие функции в области $X\subset\mathbb{R}^n$, а α — мультииндекс. Тогда*

$$\partial^\alpha(f(x)\,g(x))=\sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\,\delta!}\,[\partial^\gamma f(x)]\,[\partial^\delta g(x)]. \quad (3.43)$$

Лемма 3.4 (бином Ньютона). *Пусть $x,\,y\in\mathbb{R}^n$ и α — мультииндекс. Тогда*

$$(x+y)^\alpha=\sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\,\delta!}\,x^\gamma y^\delta. \quad (3.44)$$

Упражнение 3.5. Доказать леммы 3.3 и 3.4.

Указание. Формула (3.44) может быть доказана по индукции или из формулы Тейлора для многочленов. Формула (3.43) получается из (3.44), если заметить, что

$$\partial^\alpha[f(x)\,g(x)]=\{(\partial_x+\partial_y)^\alpha\,[f(x)\,g(y)]\}|_{y=x}.$$

Окончание доказательства теоремы 3.4. Преобразуем теперь (3.42), пользуясь леммой 3.3. Получим тогда

$$\sigma_{BA}(x,\,\xi)\sim\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma,\delta\\ \gamma+\delta=\alpha}}[\partial^\gamma_\xi\,\sigma_B(x,\,\xi)]\,[(-\partial_\xi)^\beta(\partial^\delta_\xi\,D^{\alpha+\beta}_x\sigma_A(x,\,\xi))]/\gamma!\,\beta!\,\delta!=$$

$$=\sum_{\beta,\,\gamma,\,\delta}(-1)^{|\beta|}[\partial^\gamma_\xi\,\sigma_B(x,\,\xi)]\,[\partial^{\beta+\delta}_\xi\,D^{\beta+\gamma+\delta}_x\sigma_A(x,\,\xi)]/\beta!\,\gamma!\,\delta!=$$

$$=\sum_{\gamma}\sum_{\kappa}\left(\sum_{\beta+\delta=\kappa}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\delta!}\right)[\partial^\gamma_\xi\,\sigma_B(x,\,\xi)]\,[\partial^\kappa_\xi\,D^{\kappa+\gamma}_x\sigma_A(x,\,\xi)]/\gamma!\,. \quad (3.45)$$

Теперь из формулы (3.44) с $x=-y=e$, где $e=(1, 1, \ldots, 1)$, и $\alpha=\varkappa$ получаем

$$\delta^0_{|\varkappa|}=(e-e)^{\varkappa}=\sum_{\beta+\delta=\varkappa}\frac{\varkappa!}{\beta!\,\delta!}\,e^{\delta}(-e)^{\beta}=\varkappa!\sum_{\beta+\delta=\varkappa}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\delta!},$$

где $\delta^0_{|\varkappa|}$ — символ Кронекера, равный 1 при $\varkappa=0$ и 0 при $|\varkappa|>0$. Благодаря этому соотношению в (3.45) остаются лишь слагаемые с $\varkappa=0$, что и доказывает (3.41). ■

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть* $A\in L^{m_1}_{\rho,\,\delta}(X)$, $B\in L^{m_2}_{\rho,\,\delta}(X)$, $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$ *и оператор* B — *собственный. Тогда операторы* $A\circ B$ *и* $B\circ A$, *рассматриваемые как операторы из* $C_0^\infty(X)$ *в* $C^\infty(X)$, *принадлежат* $L^{m_1+m_2}_{\rho,\,\delta}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим A в сумму $A=A_1+R$, где оператор A_1 — собственный, а R имеет ядро $R(x, y)\in C^\infty(X\times X)$. Легко проверить, что операторы BR и RB имеют гладкие ядра, равные, соответственно, $B_xR(x, y)$ и ${}^tB_yR(x, y)$, где B_x — оператор B, применяемый по переменной x при фиксированном y, и аналогичный смысл имеет ${}^tB_y$. Утверждение следствия вытекает теперь из теоремы 3.4. ■

3.7. Классические символы и псевдодифференциальные операторы. Иногда удобно рассматривать более узкие классы ПДО. Один из таких классов, выдерживающий большинство необходимых операций, мы сейчас опишем.

О п р е д е л е н и е 3.5. *Классическим символом* называется такая функция $a(x, \theta)\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^N)$, что при некотором комплексном m имеет место асимптотическое разложение

$$a(x, \theta)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\psi(\theta)\,a_{m-j}(x, \theta),$$

где $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi(\theta)=0$ при $|\theta|\leqslant 1/2$, $\psi(\theta)=1$ при $|\theta|\geqslant 1$, а $a_{m-j}(x, \theta)$ положительно однородна по θ порядка $m-j$, т. е. $a_{m-j}(x, t\theta)=t^{m-j}a_{m-j}(x, \theta)$ при всех $t>0$ и $(x, \theta)\in X\times(\mathbb{R}^N\backslash 0)$. Класс всех символов, обладающих этим свойством, мы будем обозначать $CS^m(X\times\mathbb{R}^N)$. Через $CL^m(X)$ мы будем обозначать класс ПДО, которые могут быть заданы в виде (2.18) с $a(x, y, \xi)\in CS^m(X\times X\times\mathbb{R}^n)$. Такие ПДО мы будем называть *классическими* ПДО.

Если $a_k(x, \theta)$ положительно однородна по θ порядка k, то $\partial^\alpha_\theta\partial^\beta_x a_k(x, \theta)$ положительно однородна по θ порядка $k-|\alpha|$. Поэтому ясно, что $CS^m(X\times\mathbb{R}^N)\subset S^{\mathrm{Re}\,m}(X\times\mathbb{R}^N)$.

Предложение 3.7.

а) *Если* $A \in CL^m(X)$ *и* A *собственный, то* $\sigma_A(x, \xi) \in CS^m(X \times \mathbb{R}^n)$.

б) *Если* $A \in CL^{m_1}(X)$, $B \in CL^{m_2}(X)$ *и* A, B — *собственные* ПДО, *то* $BA \in CL^{m_1+m_2}(X)$.

в) *Если* $A \in CL^m(X)$, *то* ${}^tA \in CL^m(X)$ *и* $A^* \in CL^m(X)$.

Доказательство непосредственно получается из теорем 3.1—3.4. ■

Таким образом, класс всех классических ПДО выдерживает взятие композиции, сопряженного и транспонированного операторов. В дальнейшем будет показано, что он выдерживает также замену переменных, взятие параметрикса эллиптического оператора (см. § 5) и комплексных степеней эллиптического оператора.

3.8. Упражнения и задачи.

Упражнение 3.6. Доказать следующее обобщение формулы Лейбница (3.43): если $p(x, \xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$, $p(x, D)$ — соответствующий дифференциальный оператор, то

$$p(x, D)\,(f(x)\, g(x)) = \sum_\alpha [p^{(\alpha)}(x, D)\, f(x)]\, [D^\alpha g(x)]/\alpha!, \tag{3.46}$$

где $p^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)$.

Упражнение 3.7. Вывести теорему 3.4 для дифференциальных операторов из результата упражнения 3.6.

Упражнение 3.8. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — n-мерные векторы, α — n-мерный мультииндекс. Доказать, что

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^\alpha = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!}\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}. \tag{3.47}$$

Вывести отсюда, что

$$\partial^\alpha [f_1(x) \ldots f_k(x)] = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} (\partial^{\alpha_1} f_1)\,(x) \ldots (\partial^{\alpha_k} f_k)\,(x). \tag{3.48}$$

Упражнение 3.9. Пусть дана функция $a(x, \xi) \in S^m_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)$, где X — область в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что существует такой собственный ПДО A в X, что $a - \sigma_A \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$.

Указание. Рассмотреть оператор, заданный формулой (2.18), взяв $a(x, y, \xi) = \chi(x, y)\, a(x, \xi)$, где функция $\chi(x, y)$ такая же, как в доказательстве предложения 3.3.

Упражнение 3.10. Вывести из упражнения 2.4 и 3.9, что операция взятия символа определяет (при $\delta < \rho$) изоморфизм

$$L^m_{\rho,\,\delta}(X)/L^{-\infty}(X) \xrightarrow{\sim} S^m_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)/S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n).$$

Задача 3.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ оператор

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{3.49}$$

где $a(x, \xi)$ удовлетворяет условиям:

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{3.50}$$

Предположим, что $\rho > 0$, а $\delta < 1$. Придать смысл интегралу (3.49) в следующих двух ситуациях: т. е. $|\partial_x^\alpha u(x)| \leqslant C_\alpha$ для любого мультииндекса α. Показать, что A определяет непрерывные отображения в себя пространств $S(\mathbb{R}^n)$ и $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Показать, что символ $a(x, \xi)$ однозначно определен действием A на $S(\mathbb{R}^n)$ или $C_b^\infty(R^n)$.

Задача 3.2. Показать, что операторы описанного в задаче 3.1 вида образуют алгебру с инволюцией, и получить асимптотические формулы для символов композиции двух операторов, транспонированного и сопряженного операторов.

Задача 3.3. Пусть $K(x, z) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ и $K(x, z)$ положительно однородна по z порядка $-n$, причем

$$\int\limits_{|z|=1} K(x, z)\, dS_z = 0 \tag{3.51}$$

(интеграл по поверхности сферы $|z| = 1$). Доказать, что для $u \in C_0^\infty(X)$ существует предел

$$Au(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-y| \geqslant \varepsilon} K(x, x-y)\, u(y)\, dy, \tag{3.52}$$

определяющий ПДО $A \in CL^0(X)$.

Оператор A, определяемый формулой (3.52) (при условии (3.51)), называется *сингулярным интегральным оператором.* Таким образом, этот оператор является частным случаем ПДО.

Замечание. Решение задачи 3.2 можно найти в одной из работ Кумано-го [1]—[3], а решение задачи 3.3 можно извлечь из книги Михлина [1]. Решение этих задач довольно трудоемко, однако очень полезно для понимания теории ПДО.

§ 4. Замена переменной и псевдодифференциальные операторы на многообразиях

4.1. Действие замены переменной на ПДО. Пусть дан диффеоморфизм $\varkappa\colon X \to X_1$ области $X \subset \mathbb{R}^n$ на другую область $X_1 \subset \mathbb{R}^n$. Индуцированное отображение $\varkappa^*\colon C^\infty(X_1) \to C^\infty(X)$, переводящее функцию u в функцию $u \circ \varkappa$, является изоморфизмом и отображает $C_0^\infty(X_1)$ в $C_0^\infty(X)$. Пусть A — ПДО в X. Определим оператор

$A_1\colon C_0^\infty(X_1)\to C^\infty(X_1)$ с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} C_0^\infty(X) \arrow[r, "A"] & C^\infty(X) \\ C_0^\infty(X_1) \arrow[u, "\varkappa^*"] \arrow[r, "A_1"] & C^\infty(X_1) \arrow[u, "\varkappa^*"'] \end{tikzcd}$$

Если $\varkappa_1=\varkappa^{-1}$, то

$$A_1u=[A(u\circ\varkappa)]\circ\varkappa_1. \tag{4.1}$$

Пусть оператор A задан формулой (2.18). Тогда

$$A_1u(x)=\iint e^{i(\varkappa_1(x)-y)\cdot\xi}\,a(\varkappa_1(x),\,y,\,\xi)\,u(\varkappa(y))\,dy\,đ\xi,$$

и, полагая $y=\varkappa_1(z)$, получаем

$$A_1u(x)=\iint e^{i(\varkappa_1(x)-\varkappa_1(z))\cdot\xi}\,a(\varkappa_1(x),\,\varkappa_1(z),\,\xi)\,|\,\det\,\varkappa_1'(z)\,|\,u(z)\,dz\,đ\xi, \tag{4.2}$$

где $\varkappa_1'(z)$ — матрица Якоби отображения $\varkappa_1$. Отсюда видно, что A_1 — ИОФ с фазовой функцией $\Phi(x,\,y,\,\theta)=(\varkappa_1(x)-\varkappa_1(y))\cdot\theta$. Мы покажем, что при $1-\rho\leqslant\delta<\rho$ оператор A_1 — ПДО. Этот факт очевидным образом вытекает из следующей более общей теоремы.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть Φ — такая фазовая функция в $X\times X\times\mathbb{R}^n$, что*

1) *$\Phi(x,\,y,\,\theta)$ линейна по θ;*

2) *$\Phi_\theta'(x,\,y,\,\theta)=0\Leftrightarrow x=y$.*

Пусть A_1 — ИОФ с фазовой функцией $\Phi(x,\,y,\,\theta)$ и $a(x,\,y,\,\theta)\in\in S^m_{\rho,\,\delta}(X\times X\times\mathbb{R}^n)$ (см. формулу (2.1)), *причем*

$$1-\rho\leqslant\delta<\rho. \tag{4.3}$$

Тогда $A_1\in L^m_{\rho,\,\delta}(X)$.

Для доказательства понадобится

Л е м м а 4.1. *Пусть фазовая функция Φ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 4.1. Тогда существуют такие окрестность Ω диагонали $\Delta\subset X\times X$ и C^∞-отображение $\psi\colon\,\Omega\to GL(n,\mathbb{R})$ (невырожденная матричная функция $\psi(x,\,y)$), что*

$$\Phi(x,\,y,\,\psi(x,\,y)\,\xi)=(x-y)\cdot\xi,\qquad (x,\,y)\in\Omega. \tag{4.4}$$

При этом

$$\det\,\psi(x,\,x)\cdot\det\,\Phi_{x\theta}''(x,\,y,\,\theta)|_{y=x}=1. \tag{4.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\Phi(x,\,y,\,\theta)=\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(x,\,y)\,\theta_j, \tag{4.6}$$

причем $\Phi_j(x,\,x)=0$ и если $\Phi_j(x,\,y)=0$, $j=1,\,\ldots,\,n$, то $x=y$. Далее,

$$\Phi'_{x,\,\theta}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_1}\,\theta_j,\,\ldots,\,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_n}\,\theta_j,\,\Phi_1,\,\ldots,\,\Phi_n\right).$$

Заметим, что дифференцирование по x соотношения $\Phi(x,\,x,\,\theta)=0$ показывает, что $\Phi'_y|_{x=y}=-\Phi'_x|_{x=y}$. Но по определению фазовой функции $\Phi'_{x,\,y,\,\theta}\neq 0$ при $\theta\neq 0$. Так как $\Phi'_\theta(x,\,x,\,\theta)=0$, то должно быть $\Phi'_x(x,\,x,\,\theta)\neq 0$, т. е. при любом $\theta\neq 0$ существует такое k, $1\leqslant k\leqslant n$, что $\sum\limits_{j=1}^{n}\left.\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x_k}\right|_{x=y}\cdot\theta_j\neq 0$. Отсюда следует, что

$$\det\left.\left(\frac{\partial\Phi_j(x,\,y)}{\partial x_k}\right)\right|_{x=y}\neq 0. \tag{4.7}$$

По лемме Адамара при близких x и y

$$\Phi_j(x,\,y)=\sum_{k=1}^{n}\Phi_{kj}(x,\,y)\,(x_k-y_k),$$

где $\Phi_{kj}\in C^\infty(\Omega')$, Ω' — некоторая окрестность диагонали в $X\times X$; при этом

$$\Phi_{kj}(x,\,x)=\left.\frac{\partial\Phi_j(x,\,y)}{\partial x_k}\right|_{x=y}. \tag{4.8}$$

Если через $\Phi(x,\,y)$ обозначить матрицу $(\Phi_{kj}(x,\,y))_{k,\,j=1}^{n}$, то из (4.7) и (4.8) следует, что существует такая окрестность Ω диагонали в $X\times X$, что $\det\,\Phi(x,\,y)\neq 0$ при $(x,\,y)\in\Omega$. Положим

$$\psi(x,\,y)=\Phi(x,\,y)^{-1}. \tag{4.9}$$

Ввиду того, что

$$\Phi(x,\,y,\,\theta)=\sum_{j,\,k=1}^{n}\Phi_{kj}(x,\,y)\,\theta_j\,(x_k-y_k)=(x-y)\cdot(\Phi(x,\,y)\,\theta),$$

и полагая $\Phi(x,\,y)\,\theta=\xi$, мы получаем, очевидно, формулу (4.4). Формула (4.5) вытекает из (4.8) и (4.9). ■

Доказательство теоремы 4.1. В силу предложения 2.1 и упражнения 2.4 можно считать, что оператор A задается формулой (2.1), в которой $a(x,\,y,\,\theta)=0$ при $(x,\,y)\notin\Omega'$, где Ω' — любая окрестность диагонали. Делая в интеграле (2.1) замену переменной $\theta = \psi(x, y)\,\xi$, мы получим тогда

$$A_1 u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, a(x, y, \psi(x, y)\,\xi)\,|\det \psi(x, y)|\, u(y)\, dy\, d\xi. \tag{4.10}$$

Остается заметить, что условие (4.3) обеспечивает для $a_1(x, y, \xi) = a(x, y, \psi(x, y)\,\xi)$ включение $a_1(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ в силу леммы 1.2. ■

4.2. Формула преобразования символа.

Теорема 4.2. *Пусть дан диффеоморфизм $\varkappa\colon X \to X_1$ и собственный* ПДО $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$, *причем* $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. *Пусть оператор* A_1 *построен по формуле* (4.1). *Тогда*

$$\sigma_{A_1}(y, \eta)|_{y=\varkappa(x)} \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,\sigma_A^{(\alpha)}(x, {}^t\varkappa'(x)\,\eta)\cdot D_z^\alpha e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}\Big|_{z=x}, \tag{4.11}$$

где $\sigma_A^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \sigma_A(x, \xi)$, *а* $\varkappa''_x(z)$ *задается формулой*

$$\varkappa''_x(z) = \varkappa(z) - \varkappa(x) - \varkappa'(x)\,(z-x). \tag{4.12}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что функция $\varkappa''_x(z)$ имеет при $z = x$ нуль второго порядка. Поэтому, если обозначить

$$\Phi_\alpha(x, \eta) = D_z^\alpha\, e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}\Big|_{z=x}, \tag{4.13}$$

то $\Phi_\alpha(x, \eta)$ — многочлен по η степени не больше $|\alpha|/2$. Принимая во внимание лемму 1.2, мы видим, что

$$\sigma_A^{(\alpha)}(x, {}^t\varkappa'(x)\,\eta)\;\; D_z^\alpha e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}\Big|_{z=x} \in S^{m-(\rho-1/2)|\alpha|}_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n).$$

Но из условия $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ вытекает, что $\rho > 1/2$, так что асимптотическая сумма (4.11) действительно имеет смысл.

Для доказательства формулы (4.11) мы воспользуемся формулой (4.2), беря в ней $a(x, y, \theta) = \sigma_A(x, \theta)$. Пользуясь преобразованием, описанным в доказательстве теоремы 4.1, мы получим из нее, что

$$A_1 u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\eta}\,\sigma_A(\varkappa_1(x), \psi(x, y)\,\eta)\, D(x, y)\, u(y)\, dy\, đ\eta, \tag{4.14}$$

где $D(x, y) = |\det \varkappa_1'(x)|\,|\det \psi(x, y)|$. По теореме 3.1 мы имеем

$$\sigma_{A_1}(x, \eta) \sim \sum_\alpha \partial_\eta^\alpha\, D_y^\alpha\, [\sigma_A(\varkappa_1(x), \psi(x, y)\,\eta)\, D(x, y)]/\alpha!\,|_{y=x}. \tag{4.15}$$

Из членов с мультииндексом α получится (до подстановки $y = x$) сумма членов вида

$$c(x, y)\,\eta^\gamma \sigma_A^{(\beta)}(\varkappa_1(x), \psi(x, y)\,\eta), \tag{4.16}$$

где $c(x, y)$ зависит только от замены переменных (но не зависит от A). При этом для мультииндексов γ и β в (4.16) выполнены оценки

$$|\beta| \leqslant 2|\alpha|, \tag{4.17}$$

$$|\gamma| + |\alpha| \leqslant |\beta|. \tag{4.18}$$

В самом деле, оценка (4.17) очевидна, а оценка (4.18) следует из того, что оператор D_y, примененный к выражению вида (4.16), не меняет $|\beta| - |\gamma|$, а оператор ∂_η увеличивает $|\beta| - |\gamma|$ на 1.

Из (4.17) и (4.18) имеем

$$|\gamma| \leqslant |\beta| - |\alpha| \leqslant |\beta| - |\beta|/2 = |\beta|/2. \tag{4.19}$$

Отметим теперь, что из формулы (4.9), примененной для $\Phi(x, y, \theta) = (\varkappa_1(x) - \varkappa_1(y)) \cdot \theta$, вытекает, что $\psi(x, x) = ({}^t\varkappa_1'(x))^{-1}$.

Теперь произведем в (4.15) группировку членов вида (4.16), собирая вместе все члены с одинаковыми β. Получим тогда

$$\sigma_{A_1}(x, \eta) \sim \sum_\beta \sigma_A^{(\beta)}(\varkappa_1(x), ({}^t\varkappa_1'(x))^{-1}\eta)\, \Psi_\beta(x, \eta)/\beta!, \tag{4.20}$$

где $\Psi_\beta(x, \eta)$ — полиномы по η степени не выше $|\beta|/2$ (с коэффициентами из $C^\infty(X_1)$), не зависящие от A. При этом $\Psi_0 \equiv 1$.

Заменяя в (4.20) x на $\varkappa(x)$, мы получим, очевидно, эквивалентную формулу:

$$\sigma_{A_1}(\varkappa(x), \eta) \sim \sum_\beta \sigma_A^{(\beta)}(x, {}^t\varkappa'(x)\,\eta)\, \Phi_\beta(x, \eta)/\beta!, \tag{4.21}$$

в которой $\Phi_\beta(x, \eta)$ — полиномы по η степени не выше $|\beta|/2$ (с коэффициентами из $C^\infty(X)$), не зависящие от A, причем $\Phi_0 \equiv 1$. Остается проверить, что эти полиномы задаются формулой (4.13).

Будем вычислять полиномы $\Phi_\beta(x, \eta)$ с помощью дифференциальных операторов. Для дифференциального оператора A имеем

$$\sigma_{A_1}(y, \eta)|_{y=\varkappa(x)} = e^{-iy\cdot\eta} A_1 e^{iy\cdot\eta}|_{y=\varkappa(x)} = e^{-i\varkappa(z)\cdot\eta} \sigma_A(z, D_z)\, e^{i\varkappa(z)\cdot\eta}|_{z=x} \tag{4.22}$$

(здесь $\sigma_A(z, D_z)$ означает оператор A, действующий по переменной z). Напишем теперь

$$\varkappa(z) = \varkappa(x) + \varkappa'(x)\,(z - x) + \varkappa_x''(z),$$

откуда

$$\varkappa(z) \cdot \eta = \varkappa(x) \cdot \eta + z \cdot {}^t\varkappa'(x)\,\eta + \varkappa_x''(z) \cdot \eta - x \cdot {}^t\varkappa'(x)\,\eta.$$

Подставляя в формулу (4.22), получаем

$$\sigma_{A_1}(y,\,\eta)|_{y=\varkappa(x)} = e^{-x\cdot{}^t\varkappa'(x)\eta}\left\{\sigma_A(z,\,D_z)\left[\,e^{iz\cdot{}^t\varkappa'(x)\eta}e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}\right]\right\}\Big|_{z=x}. \quad (4.23)$$

Воспользуемся теперь формулой Лейбница (3.46) (упражнение 3.6) для дифференцирования произведения двух экспонент в (4.23). Тогда получим, очевидно,

$$\sigma_{A_1}(\varkappa(x),\,\eta) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,\sigma_A^{(\alpha)}(x,\,{}^t\varkappa'(x)\,\eta)\cdot D_z^\alpha e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}\big|_{z=x} \quad (4.24)$$

(мы воспользовались здесь еще очевидной формулой дифференцирования линейной экспоненты: $\sigma_A(z,\,D_z)\,e^{iz\cdot\xi} = e^{iz\cdot\xi}\,\sigma_A(z,\,\xi)$).

Формула (4.24) означает справедливость для дифференциальных операторов формулы (4.13) для полиномов $\Phi_\alpha(x,\,\eta)$, входящих в (4.21). Но ввиду универсальности полиномов $\Phi_\alpha(x,\,\eta)$ она же верна и в общем случае. ■

Примеры. $\Phi_0 \equiv 1$, $\Phi_\beta = 0$ при $|\beta| = 1$, $\Phi_\beta(x,\,\eta) = D_x^\beta(i\varkappa(x)\cdot\eta)$ при $|\beta| = 2$.

Следствие 4.1.

$$\sigma_{A_1}(y,\,\eta) - \sigma_A(\varkappa_1(y),\,({}^t\varkappa_1'(y))^{-1}\eta) = S_{\rho,\,\delta}^{m-2(\rho-1/2)}(X_1\times\mathbb{R}^n). \quad (4.25)$$

Это утверждение показывает, что по модулю символов меньшего порядка символы всех операторов, получаемых из A заменами переменных, образуют корректно определенную функцию на кокасательном расслоении T^*X.

Следствие 4.2. *Если* $A\in CL^m(X)$, *то* $A_1\in CL^m(X_1)$.

Доказательство непосредственно получается из формул (4.11). ■

4.3. Псевдодифференциальные операторы на многообразии. Пусть M — n-мерное гладкое многообразие (класса C^∞). Через $C^\infty(M)$ и $C_0^\infty(M)$ мы будем обозначать пространство всех гладких комплекснозначных функций на M и его подпространство, состоящее из функций с компактным носителем. Предположим, что дан линейный оператор

$$A\colon C_0^\infty(M)\to C^\infty(M).$$

Если X — некоторая координатная окрестность в M (не обязательно связная) и $\varkappa\colon X\to X_1$ — ее диффеоморфизм на открытое множество $X_1\subset\mathbb{R}^n$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} C_0^\infty(X) \arrow[r, "A"] & C^\infty(X) \\ C_0^\infty(X_1) \arrow[u, "\varkappa^*"] \arrow[r, "A_1"] & C^\infty(X_1) \arrow[u, "\varkappa^*"'] \end{tikzcd}$$

однозначно определяет оператор A_1 (отметим, что в верхней ее строчке стоит оператор, равный композиции $r_X \circ A \circ i_X$, где i_X — естественное вложение $i_X\colon C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(M)$, а r_X — естественное ограничение $r_X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(X)$; для простоты мы обозначаем этот оператор той же буквой A, что и исходный оператор).

Определение 4.1. Оператор $A\colon C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$ называется *псевдодифференциальным оператором на* M, если для любого координатного диффеоморфизма $\varkappa\colon X \to X_1$ определенный выше оператор A_1 является ПДО в X_1.

Теорема 4.1 показывает, что введенные выше ПДО в области $X \subset \mathbb{R}^n$ при $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ действительно являются ПДО на многообразии X.

Далее, лемма 1.2 показывает, что при $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ корректно определен класс символов $S^m_{\rho,\,\delta}(T^*M)$ и соответствующий класс операторов $L^m_{\rho,\,\delta}(M)$, а следствие 4.1 показывает, что корректно определен *главный символ*, являющийся элементом факторпространства $S^m_{\rho,\,\delta}(T^*M)/S^{m-2(\rho-1/2)}_{\rho,\,\delta}(T^*M)$.

Далее, в силу теоремы 4.2 корректно определен класс $CL^m(M)$ классических ПДО на M. Если $A \in CL^m(M)$, то главный символ оператора A можно считать однородной функцией $\sigma_A(x,\,\xi)$ на T^*M порядка однородности m, ибо если две функции $a_1(x,\,\xi)$ и $a_2(x,\,\xi)$ положительно однородны по ξ при $|\xi| \geqslant 1$ порядка m и определяют один и тот же класс вычетов пространства $S^m(X \times \mathbb{R}^n)$ по модулю $S^{m-1}(X \times \mathbb{R}^n)$, то они совпадают при $|\xi| \geqslant 1$.

Заметим в заключение, что существенно разрешать в определении 4.1 употребление несвязных координатных окрестностей, ибо иначе придется считать псевдодифференциальным оператор отражения $f(x) \mapsto f(-x)$ в $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Упражнение 4.1. Доказать, что ПДО A на многообразии M продолжается по непрерывности до отображения

$$A\colon \mathscr{E}'(M) \to \mathscr{D}'(M),$$

где $\mathscr{E}'(M)$ и $\mathscr{D}'(M)$ означают пространства, дуальные к пространствам соответственно всех гладких и гладких финитных сечений одномерного расслоения плотностей $|\Lambda^n(T^*M)|$ *).

---

*) Это расслоение можно определить, например, выбрав покрытие M координатными картами, считая его тривиальным над каждой координатной окрестностью и задавая функции перехода равными модулю якобиана координатных преобразований. Сечения расслоения плотностей можно интегрировать по многообразию, чего нельзя сказать о внешних n-формах, для интегрирования которых необходимо задание ориентации (т. е., по существу, задание изоморфизма $\Lambda^n(T^*M)$ и $|\Lambda^n(T^*M)|$). Если на M фиксирована некоторая гладкая положительная плотность,

Вложение $C^\infty(M) \hookrightarrow \mathscr{D}'(M)$, индуцирующее вложение $C_0^\infty(M) \hookrightarrow \mathscr{E}'(M)$, φ — естественным образом определяется формулой

$$\langle u, \varphi\rangle = \int\limits_M u \cdot \varphi, \tag{4.26}$$

где $u \in C^\infty(M)$, φ — гладкая финитная плотность (так что $u \cdot \varphi$ — это также гладкая финитная плотность). Проверить свойство псевдолокальности оператора A.

Упражнение 4.2. Пусть E, F — гладкие векторные расслоения на многообразии M; $\pi\colon T^*M \to M$ — естественная проекция; π^*E, π^*F — индуцированные расслоения на T^*M. Дать определение ПДО $A\colon C_0^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ ($C_0^\infty(M, E)$ — гладкие финитные сечения расслоения E; $C^\infty(M, F)$ — гладкие сечения расслоения F) и показать, что его главный символ — корректно определенный элемент пространства

$$S^m_{\rho,\,\delta}(\mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))/S^{m-2(\rho-1/2)}_{\rho,\,\delta}(\mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)).$$

Задача 4.1. Пусть A — дифференциальный оператор порядка m на многообразии M (такой оператор $A_1\colon C_0^\infty(M) \to C_0^\infty(M)$, что всякий оператор $A\colon C_0^\infty(X_1) \to C_0^\infty(X_1)$, определенный выше, является дифференциальным оператором порядка m). Дать инвариантное определение главного символа $a_m(x, \xi)$ как функции на T^*M, являющейся однородным многочленом по ξ (т. е. вдоль слоев) степени m.

Указание. Воспользоваться формулой

$$a_m(x, \varphi'_x) = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-m} e^{-i\lambda\varphi} A(e^{i\lambda\varphi}), \quad \varphi \in C^\infty(M). \tag{4.27}$$

Задача 4.2. Вычислить главный символ оператора d внешнего дифференцирования де Рама:

$$d\colon \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M),$$

где $\Lambda^k(M)$ означает пространство гладких внешних k-форм на M ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Задача 4.3. Доказать, что одномерный сингулярный интегральный оператор на гладкой замкнутой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$

$$Au(t) = a(t)\,u(t) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|t-\tau|\geqslant\varepsilon} \frac{K(t, \tau)}{t-\tau}\,u(\tau)\,d\tau, \quad t, \tau \in \Gamma,$$

при $a(t) \in C^\infty(\Gamma)$, $K(t, \tau) \in C^\infty(\Gamma\times\Gamma)$ является классическим ПДО из $CL^0(\Gamma)$.

то она задает изоморфизм расслоений $|\Lambda^n(T^*M)|$ и $M \times \mathbb{R}^1$, что позволяет рассматривать функции как плотности и считать элементы $\mathscr{E}'(M)$ и $\mathscr{D}'(M)$ функционалами на функциях.

§ 5. Гипоэллиптичность и эллиптичность

5.1. Определение гипоэллиптических символов и операторов и примеры.

Определение 5.1. Функция $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$, где X — область в $\mathbb{R}^n$, называется *гипоэллиптическим символом*, если выполнены следующие условия:

а) существуют такие вещественные числа m_0, m, что для любого компакта $K \subset X$ найдутся такие положительные постоянные R, C_1, C_2, что

$$C_1|\xi|^{m_0} \leqslant |\sigma(x, \xi)| \leqslant C_2|\xi|^m, \quad |\xi| \geqslant R, \quad x \in K; \tag{5.1}$$

б) существуют такие числа ρ и δ, что $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, и для любого компакта $K \subset X$ существует такая постоянная R, что для любых мультииндексов α, β найдутся такие постоянные $C_{\alpha, \beta, K}$, что

$$|[\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)]\ \sigma^{-1}(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta, K}|\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad |\xi| \geqslant R, \quad x \in K. \tag{5.2}$$

Класс символов, удовлетворяющих условиям (5.1) и (5.2) с фиксированными m, m_0, ρ и δ мы будем обозначать $HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(X \times \mathbb{R}^n)$ или просто $HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}$, если ясно (или безразлично), о какой области X идет речь. Из (5.1) и (5.2) очевидным образом следует, что

$$HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(X \times \mathbb{R}^n) \subset S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}^n).$$

Через $HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(X)$ мы будем обозначать класс собственных ПДО A в области X, для которых $\sigma_A(x, \xi) \in HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(X \times \mathbb{R}^n)$.

Определение 5.2. ПДО A называется *гипоэллиптическим*, если существует такой собственный ПДО $A_1 \in HL_{\rho,\delta}^{m, m_0}(X)$, что $A = A_1 + R_1$, где $R_1 \in L^{-\infty}(X)$, т. е. R_1 — оператор с бесконечно дифференцируемым ядром.

Отметим, что для любого представления гипоэллиптического оператора A в виде $A = A_1 + R_1$, где A_1 — собственный ПДО, а R_1 оператор с гладким ядром, верно, что $A_1 \in HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(X)$.

Пример 5.1. Пусть A — дифференциальный оператор, т. е. $A = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$, где $a_\alpha(x) \in C^\infty(X)$. Обозначим через $a_m(x, \xi)$ его главный символ:

$$a_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha. \tag{5.3}$$

Определение 5.3. Дифференциальный оператор A называется *эллиптическим*, если

$$a_m(x, \xi) \neq 0 \ \text{ при } \ (x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0). \tag{5.4}$$

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Для дифференциального оператора A следующие условия эквивалентны*:

а) A *эллиптичен*;

б) $A \in HL^{m,\,m}_{1,\,0}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация б) $\Rightarrow$ а) очевидна. Для доказательства обратной импликации введем полный символ оператора A

$$a(x,\,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha, \tag{5.5}$$

и заметим, что если а) выполнено, то

$$\frac{a(x,\,\xi)}{a_m(x,\,\xi)} = 1 + b_{-1}(x,\,\xi) + \ldots + b_{-m}(x,\,\xi),$$

где функции $b_{-j}(x,\,\xi) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ однородны по ξ степени $-j$. Отсюда следует оценка (5.1) с $m_0 = m$, а оценка (5.2) получается аналогично. ■

П р и м е р ы э л л и п т и ч е с к и х о п е р а т о р о в:

оператор Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ в $\mathbb{R}^n$;

оператор Коши—Римана $\dfrac{\partial}{\partial \bar z} = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + i\,\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ в $\mathbb{R}^2$.

П р и м е р 5.2. Оператор теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^{n+1}$, хотя и не является эллиптическим.

У п р а ж н е н и е 5.1. Проверить гипоэллиптичность оператора теплопроводности и найти соответствующие m, m_0, ρ, δ.

П р и м е р 5.3. Пусть A — классический ПДО, $a_m(x,\,\xi)$ — его главный символ. Тогда имеет смысл

О п р е д е л е н и е 5.3$'$. Оператор $A \in CL^m(X)$ называется *эллиптическим*, если его главный символ $a_m(x,\,\xi)$ удовлетворяет условию (5.4).

Так же, как и в доказательстве предложения 5.1, легко проверить, что если оператор $A \in CL^m(X)$ является собственным, то его эллиптичность эквивалентна включению $A \in HL^{m,\,m}_{1,\,0}(X)$. Не предполагая собственности оператора A, можно сказать, что оператор $A \in CL^m(X)$ эллиптичен тогда и только тогда, когда $A = A_1 + R$, где $A_1 \in HL^{m,\,m}_{1,\,0}(X)$ и $R \in L^{-\infty}(X)$.

Примеры 5.1 и 5.3 делают естественным следующее

О п р е д е л е н и е 5.3$''$. Оператор $A \in L^m_{\rho,\,\delta}(X)$ называется *эллиптическим*, если $A = A_1 + R$, где $A_1 \in HL^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}(X)$ и $R \in L^{-\infty}(X)$.

Предложение 5.1$'$. *Если оператор $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$ является собственным, то его эллиптичность равносильна тому, что условие* а) *в определении* 5.1 *выполняется для его символа с $m_0=m$. Без предположения собственности оператор $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$ эллиптичен тогда и только тогда, когда существует представление A в виде $A=A_1+R$, где $R\in L^{-\infty}(X)$, а оператор A_1 является собственным и условие* а) *в определении* 5.1 *выполняется для символа оператора A_1 с $m_0=m$ (и тогда это верно для любого такого представления).*

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. ■

5.2. Простейшие свойства гипоэллиптических символов. Условимся прежде всего говорить, что $\sigma(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$ *при больших* ξ, если для любого компакта $K\subset X$ существует такое $R=R(K)$, что функция $\sigma(x,\xi)$ определена при $x\in K$, $|\xi|\geqslant R(K)$, и при этих (x,ξ) выполнены все необходимые оценки типа (1.10). Если при этом еще выполняются оценки (5.1) и (5.2), то будем говорить, что $\sigma(x,\xi)\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}$ при больших ξ.

Отметим, что если $\sigma(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$ или $\sigma(x,\xi)\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}$ при больших ξ, то, умножая $\sigma(x,\xi)$ на гладкую срезающую функцию $\psi(x,\xi)$, равную 1 «при больших ξ» (например, при $x\in K$, $|\xi|\geqslant R(K)+2$ для любого компакта K) и 0 в окрестности того множества, где символ σ не определен (например, при $x\in K$, $|\xi|\leqslant R(K)+1$), мы получим символ $\sigma_1(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$ или, соответственно, символ $\sigma_1(x,\xi)\in$ $\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$, совпадающий с $\sigma(x,\xi)$ «при больших ξ».

Лемма 5.1. *Если $\sigma(x,\xi)\in HS^{m,m_0}_{\rho,\delta}$ при больших ξ, то $\sigma^{-1}(x,\xi)\in$ $\in HS^{-m_0,-m}_{\rho,\delta}$ при больших ξ. Далее, для любых мультииндексов α, β*

$$\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x\sigma(x,\xi)/\sigma(x,\xi)\in S^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\delta}$$

при больших ξ.

Доказательство. Пусть $y=(x,\xi)$, γ, δ — $2n$-мерные мультииндексы. Индукцией по $|\delta|$ проверяется, что

$$\partial^\delta\left[\frac{\partial^\gamma\sigma(y)}{\sigma(y)}\right]=\sum_{k=0}^{|\delta|}\sum_{\delta_0+\ldots+\delta_k=\delta}c_{\delta_0\ldots\delta_k}\frac{\partial^{\delta_0+\gamma}\sigma(y)}{\sigma(y)}\prod_{l=1}^{k}\frac{\partial^{\delta_l}\sigma(y)}{\sigma(y)}. \tag{5.6}$$

Теперь видно, что если взять $\gamma=(\beta,\alpha)$, то все оценки, необходимые для доказательства утверждения леммы, следуют непосредственно из определений. ■

Лемма 5.2. *Если $\sigma'\in HS^{m',m_0'}_{\rho,\delta}$, $\sigma''\in HS^{m'',m_0''}_{\rho,\delta}$, то $\sigma'\sigma''\in$ $\in HS^{m'+m'',m_0'+m_0''}_{\rho,\delta}$.*

Доказательство непосредственно получается из формулы Лейбница. ■

Лемма 5.3. *Если* $\sigma(x, \xi) \in HS^{m, m_0}_{\rho, \delta}$ *и* $r(x, \xi) \in S^{m_1}_{\rho, \delta}$, *где* $m_1 < m_0$, *то* $\sigma + r \in HS^{m, m_0}_{\rho, \delta}$.

Доказательство. Используя представление $\sigma + r = \sigma(1 + r/\sigma)$ и леммы 5.1 и 5.2, мы видим, что достаточно рассмотреть случай $\sigma \equiv 1$ и $m_0 = m = 0$, откуда $m_1 < 0$. Но тогда утверждение леммы становится очевидным. ■

Лемма 5.4. *Пусть* $\sigma(x, \xi) \in HS^{m, m_0}_{\rho,\delta}$ *при больших* ξ *и* $\sigma_1(y, \eta) = \sigma(x(y), \xi(y, \eta))$, *где отображение* $(y, \eta) \mapsto (x(y), \xi(y, \eta))$ *является дифференцируемым отображением* $X_1 \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$ *в* $X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$, *причем* $\xi(y, \eta)$ *положительно однородно по* η *порядка* 1. *Пусть* $1 - \rho \leqslant \delta < \rho$. *Тогда* $\sigma_1(y, \eta) \in HS^{m, m_0}_{\rho, \delta}$ *при больших* η.

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 1.2 и предоставляется читателю. ■

5.3. Простейшие свойства гипоэллиптических операторов.

Предложение 5.2. *Если* $A' \in HL^{m', m'_0}_{\rho, \delta}(X)$ *и* $A'' \in HL^{m'', m''_0}_{\rho, \delta}(X)$, *то* $A' \circ A'' \in HL^{m'+m'', m'_0+m''_0}_{\rho, \delta}(X)$.

Доказательство. По теореме 3.4

$$\sigma_{A'A''}(x, \xi) \sim \sigma_{A'}(x, \xi)\, \sigma_{A''}(x, \xi) \left[1 + \sum_{|\alpha| \geqslant 1} \frac{\partial^\alpha_\xi \sigma_{A'}}{\sigma_{A'}} \frac{D^\alpha_x \sigma_{A''}}{\sigma_{A''}}\right].$$

В силу лемм 5.1 и 5.3 в квадратных скобках стоит ряд, асимптотическая сумма которого (в смысле предложения 3.4) принадлежит $HS^{0, 0}_{\rho, \delta}$. Остается воспользоваться леммой 5.2. ■

Предложение 5.3. *Если* $A \in HL^{m, m_0}_{\rho, \delta}(X)$, *то* ${}^tA \in HL^{m, m_0}_{\rho, \delta}(X)$ *и* $A^* \in HL^{m, m_0}_{\rho, \delta}(X)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущего предложения. ■

Предложение 5.4. *Если* $A \in HL^{m, m_0}_{\rho, \delta}(X)$, $R \in L^{m_1}_{\rho, \delta}(X)$, *где* $m_1 < m_0$ *и* R — *собственный, то* $A + R \in HL^{m, m_0}_{\rho, \delta}(X)$.

Доказательство. Утверждение очевидным образом вытекает из леммы 5.3. ■

Предложение 5.5. *Если* $1 - \rho \leqslant \delta < \rho$, *то класс* $HL^{m, m_0}_{\rho, \delta}(X)$ *инвариантен относительно замен переменных, т. е. если дан диффеоморфизм* $\varkappa \colon X \to X_1$ *и оператор* A *определен, как в* § 4 (*формула* (4.1)), *то* $A_1 \in HL^{m, m_0}_{\rho, \delta}(X_1)$.

Доказательство. По лемме 5.4

$$\sigma_A(\varkappa_1(y), ({}^t\varkappa'_1(y))^{-1}\eta) \in HS^{m, m_0}_{\rho, \delta}(X)$$

(здесь $\varkappa_1 = \varkappa^{-1}$). Но тогда из теоремы 4.2 и леммы 5.1 ясно, что

$$\sigma_{A_1}(y,\, \eta) = \sigma_A(\varkappa_1(y),\, ({}^t\varkappa_1'(y))^{-1}\eta)\,(1 + r(y,\, \eta)),$$

где $r(y,\, \eta) \in S_{\rho,\,\delta}^{-2(\rho-1/2)}$ при больших η. Утверждение предложения следует теперь из лемм 5.2 и 5.3. ■

Предложение 5.5 позволяет определить на любом многообразии M класс гипоэллиптических ПДО $HL_{\rho,\,\delta}^{m,\,m_0}(M)$, если только $1-\rho \leqslant \delta < \rho$.

5.4. Параметрикс и грубая теорема регулярности.

Теорема 5.1. *Пусть $A \in HL_{\rho,\,\delta}^{m,\,m_0}(M)$ и либо $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, либо $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такой оператор $B \in HL_{\rho,\,\delta}^{-m_0,\,-m}(M)$, что*

$$BA = I + R_1, \quad AB = I + R_2, \tag{5.7}$$

где $R_j \in L^{-\infty}(M)$, $j = 1,\, 2$; I — тождественный оператор.

Далее, если B' — другой ПДО, *для которого либо $B'A = I + R_1'$, либо $AB' = I + R_2'$ (где $R_j' \in L^{-\infty}(M)$), то $B' - B \in L^{-\infty}(M)$.*

Следствие 5.1. *Если A — гипоэллиптический* ПДО *в M (не обязательно собственный), то существует такой собственный* ПДО *B, что справедливы соотношения* (5.7).

Доказательство теоремы 5.1. 1. Пусть вначале $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Пусть σ_A — символ оператора A. Рассмотрим такую функцию $b_0(x,\, \xi) \in HS_{\rho,\,\delta}^{-m_0,\,-m}(X \times \mathbb{R}^n)$, что $b_0(x,\, \xi) = \sigma_A^{-1}(x,\, \xi)$ при больших ξ. Найдем теперь такой собственный оператор $B_0 \in HL_{\rho,\,\delta}^{-m_0,\,-m}(X)$, что $\sigma_{B_0} - b_0 \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$. Проверим, что

$$B_0 A = I + R_0, \tag{5.8}$$

где $R_0 \in L_{\rho,\,\delta}^{-(\rho-\delta)}(X)$.

В самом деле, по теореме 3.4 имеем при больших ξ

$$\sigma_{B_0 A}(x,\, \xi) \sim 1 + \sum_{|\alpha| \geqslant 1} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha \sigma_A^{-1} \cdot D_x^\alpha \sigma_A = 1 + \sum_{|\alpha| \geqslant 1} \frac{1}{\alpha!}\, \frac{\partial_\xi^\alpha \sigma_A^{-1}}{\sigma_A^{-1}}\, \frac{D_x^\alpha \sigma_A}{\sigma_A}$$

и остается воспользоваться леммой 5.1. Пусть теперь C_0 — такой собственный ПДО, что

$$C_0 \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, R_0^j, \tag{5.9}$$

т. е.

$$\sigma_{C_0} \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, \sigma_{R_0^j}. \tag{5.9$'$}$$

Из (5.9) очевидным образом следует, что

$$C_0(I+R_0)-I\in L^{-\infty},$$

так что если мы положим $B_1=C_0B_0$, то

$$B_1A=I+R_1, \tag{5.10}$$

где $R_1\in L^{-\infty}(X)$. Из построения ясно, что $B_1\in HL^{-m_0,-m}_{\rho,\delta}(X)$. Далее, аналогичным образом можно построить такой оператор $B_2\in\in HL^{-m_0,-m}_{\rho,\delta}(X)$, что

$$AB_2=I+R_2, \tag{5.11}$$

где $R_2\in L^{-\infty}(X)$.

Проверим теперь, что если B_1, B_2 — любых два ПДО, для которых выполнены соотношения (5.10) и (5.11), то $B_1-B_2\in L^{-\infty}(X)$. Этим будет доказано существование требуемого B (в качестве которого можно взять любой из операторов B_1, B_2) и его единственность (с точностью до оператора из $L^{-\infty}(X)$). Отметим, что B_1 и B_2 можно считать собственными. Умножая (5.10) справа на B_2 и пользуясь соотношением (5.11), получим $B_1-B_2=R_1B_2-B_1R_2$, и остается заметить, что B_1R_2 и R_1B_2 принадлежат $L^{-\infty}(X)$.

2. Пусть теперь M — произвольное многообразие, $M=\bigcup\limits_\gamma X^\gamma$ — покрытие M координатными окрестностями X^γ. Тогда в X^γ существует (в силу только что доказанного результата) такой собственный оператор B^γ, что

$$B^\gamma\circ A=I+R_1^\gamma,\quad A\circ B^\gamma=I+R_2^\gamma,$$

где R_1^γ, R_2^γ — операторы с гладкими ядрами.

Пусть теперь φ_j, $j=1,2,\ldots,$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию многообразия M открытыми подмножествами X^γ. Это значит, что выполнены следующие условия (см., например, теорему 6.20 в книге Рудина [1]):

1) $\varphi_j\in C_0^\infty(M)$, $\varphi_j\geqslant 0$, $\operatorname{supp}\varphi_j\subset X^\gamma$ при некотором $\gamma=\gamma(j)$;

2) для любого $x\in M$ существует такая окрестность $\mathscr{U}_x$ точки x в M, что $\mathscr{U}_x$ пересекается лишь с конечным числом множеств $\operatorname{supp}\varphi_j$;

3) $\sum_j\varphi_j=1$.

Теперь построим такие функции $\psi_j\in C_0^\infty(M)$, что они удовлетворяют сформулированным выше условиям 1) и 2) (с теми же $\gamma(j)$) и вдобавок $\psi_j=1$ в окрестности множества $\operatorname{supp}\varphi_j$.

Обозначим через Φ_j и Ψ_j операторы умножения на φ_j и ψ_j соответственно. Теперь положим

$$B=\sum_j\Phi_jB^{\gamma(j)}\Psi_j,$$

где подразумеваются необходимые операции ограничения и продолжения нулем. Тогда мы утверждаем, что B удовлетворяет всем требованиям.

Ясно, что B — собственный оператор. Заметим еще, что на пересечении $X^\gamma \cap X^{\gamma'}$ операторы B^γ и $B^{\gamma'}$ отличаются на оператор с гладким ядром, так что по модулю операторов из $L^{-\infty}$ они могут быть заданы одним и тем же символом. Это позволяет вычислять композиции BA и AB по модулю $L^{-\infty}$, использовать формулу композиции (3.41). Например, символ оператора BA локально имеет вид

$$\sigma_{BA}(x,\,\xi) \sim \sum_{j,\,\alpha} \frac{1}{\alpha!}\,\Phi_j(x)\,(\partial_\xi^\alpha \sigma_B(x,\,\xi))\,D_x^\alpha(\sigma_A(x,\,\xi)\,\Psi_j(x)).$$

Если производная по x применяется к Ψ_j, то возникающий член обращается в 0, поскольку $\Phi_j D_x^\alpha \Psi_j \equiv 0$ для любого $\alpha \neq 0$. Поэтому

$$\sigma_{BA}(x,\,\xi) \sim \left(\sum_j \Phi_j(x)\,\Psi_j(x)\right)\left(\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha \sigma_B(x,\,\xi)\,D_x^\alpha(\sigma_A(x,\,\xi))\right) \sim 1,$$

что эквивалентно первому соотношению в (5.7). Точно так же доказывается и второе соотношение. ■

Замечание. Полученную выше формулу для B можно упростить, если добавить достаточно малые окрестности множеств $\operatorname{supp}\varphi_j$ к множеству всех X^γ.

В этом случае мы можем написать

$$B = \sum_\gamma \Phi_\gamma\, B^\gamma\, \Psi_\gamma,$$

где φ_γ удовлетворяют тем же условиям, что рассматривавшиеся выше функции φ_j. При этом подразумевается, что некоторые из функций φ_γ могут быть тождественно равны нулю.

Если M — компактное многообразие (без края), то мы всегда можем считать покрытие $\{X^\gamma\}$ конечным, так что сумма в формуле для B также становится конечной.

Определение 5.4. Оператор B, удовлетворяющий условиям (5.7), называется *параметриксом* оператора A.

Следствие 5.2. *Эллиптический оператор $A \in L^m_{\rho,\,\delta}(M)$ имеет параметрикс $B \in HL^{-m,\,-m}_{\rho,\,\delta}(M)$.*

Теорема 5.2. *Если A — гипоэллиптический* ПДО, *то*

$$\operatorname{sing\,supp} Au = \operatorname{sing\,supp} u, \qquad u \in \mathscr{E}'(M). \tag{5.12}$$

Иными словами, если Ω — открытое подмножество M, то $Au|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $u|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$.

Если A — *собственный гипоэллиптический* ПДО, *то* (5.12) *верно для любой обобщенной функции* $u \in \mathscr{D}'(M)$.

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать первую часть утверждения теоремы. При этом включение $\operatorname{sing\,supp} Au \subset \subset \operatorname{sing\,supp} u$ вытекает из псевдолокальности A (см. предложение 2.4) и остается доказать включение

$$\operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{sing\,supp} Au. \tag{5.13}$$

Пусть B — собственный ПДО, являющийся параметриксом оператора A. Тогда из формулы $u = B(Au) - R_1 u$ и псевдолокальности B вытекает, что

$$\operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{sing\,supp}(Au) \cup \operatorname{sing\,supp} R_1 u,$$

но $R_1 u \in C^\infty(X)$, так что $\operatorname{sing\,supp} R_1 u = \varnothing$, что и доказывает (5.13). ■

Теорема 5.2 является грубой теоремой о регулярности решений гипоэллиптических уравнений вида $Au = f$. Более точные теоремы будут доказаны после введения точных классов гладкости функций — шкалы пространств Соболева.

5.5. Параметрикс классических эллиптических псевдодифференциальных операторов. В случае классических эллиптических ПДО параметрикс можно строить более явно.

Пусть A — классический эллиптический ПДО в области $X \subset \mathbb{R}^n$, символ которого $a(x, \xi)$ допускает при больших ξ асимптотическое разложение

$$a(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}(x, \xi), \tag{5.14}$$

где $a_{m-j}(x, \xi) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$, $a_{m-j}(x, \xi)$ положительно однородна по ξ порядка $m - j$ и и выполнено условие эллиптичности (5.4).

Пусть B — параметрикс оператора A. Покажем, что B — классический ПДО, символ которого $b(x, \xi)$ допускает при больших ξ асимптотическое разложение

$$b(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_{-m-j}(x, \xi), \tag{5.15}$$

где $b_{-m-j}(x, \xi) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ и $b_{-m-j}(x, \xi)$ положительно однородна по ξ порядка $-m - j$.

Формула композиции показывает, что символ $b(x, \xi)$ должен удовлетворять условию

$$\sum_{\alpha} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)\, D_x^\alpha b(x, \xi)/\alpha! \sim 1,$$

или

$$\sum_{\alpha,\,k,\,j} \partial_\xi^\alpha a_{m-k}(x,\,\xi)\, D_x^\alpha b_{-m-j}(x,\,\xi)/\alpha! \sim 1. \tag{5.16}$$

Ясно, что если мы сгруппируем в (5.16) все члены по порядкам однородности, то (5.16) будет означать просто равенство соответствующих однородных компонент. Делая это, получим

$$\sum_{k+j+|\alpha|=p} \partial_\xi^\alpha a_{m-k}(x,\,\xi)\, D_x^\alpha b_{-m-j}(x,\,\xi)/\alpha! = \delta_0^p, \quad p=0,\,1,\,\ldots, \tag{5.17}$$

или, более подробно,

$$a_m \cdot b_{-m} = 1, \tag{5.17$'$}$$

$$a_m \cdot b_{-m} + \sum_{\substack{k+l+|\alpha|=j\\ l<j}} (\partial_\xi^\alpha a_{m-k})\, (D_x^\alpha b_{-m-l})\, /\alpha! = 0, \quad j=1,\,2,\,\ldots \tag{5.17$''$}$$

Из уравнений (5.17) очевидным образом однозначно определяются положительно однородные функции $b_{-m-j}(x,\,\xi)$ порядков $-m-j$ $(j=0,\,1,\,2,\,\ldots)$. Если теперь определить $b(x,\,\xi)$ формулой (5.15) и найти такой собственный ПДО B, что $\sigma_B(x,\,\xi)-b(x,\,\xi)\in S^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^n)$, то оператор B будет параметриксом оператора A.

Формулы (5.17) определяют параметрикс оператора A и в случае, когда A является матричным эллиптическим ПДО: в этом случае $a_{-m-j}(x,\,\xi)$ являются квадратными матричными функциями, а условие эллиптичности имеет вид

$$\det\, a_m(x,\,\xi)\neq 0, \quad (x,\,\xi)\in X\times(\mathbb{R}^n\backslash 0). \tag{5.18}$$

З а д а ч а 5.1. Показать, что члены $b_{-m-j}(x,\,\xi)$ $(j>0)$ параметрикса классического эллиптического оператора A выражаются через $a_{m-k}(x,\,\xi)$ в скалярном случае формулами вида

$$b_{-m-j}(x,\,\xi) = \sum_{l=2}^{2j+1} c_l(x,\,\xi)\,(a_m(x,\,\xi))^{-l}, \tag{5.19}$$

где $c_l(x,\xi)$ — некоторые положительно однородные функции по ξ порядков $m(l-1)-j$, являющиеся полиномами от функций $a_m,\,a_{m-1},\,\ldots,\,a_{m-j}$ и их производных порядков $\leqslant j$.

Аналогичные формулы в матричном случае имеют вид

$$b_{-m-j}(x,\,\xi) = a_m^{-1}(x,\,\xi)\sum_{l=1}^{2j+1}\prod_{k=1}^{l}\big[c_{k,\,l}(x,\,\xi)\,a_m^{-1}(x,\,\xi)\big]. \tag{5.20}$$

§ 6. Теоремы об ограниченности и компактности псевдодифференциальных операторов

6.1. Формулировка основной теоремы ограниченности. Пусть A — ПДО в $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать A как отображение

$$A\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Пусть K_A — ядро оператора A в смысле Л. Шварца. Если $\operatorname{supp} K_A$ — компакт в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то A определяет отображение

$$A\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Поставим вопрос: можно ли продолжить оператор A до непрерывного линейного оператора

$$A\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)?$$

Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы была выполнена оценка

$$\|Au\| \leqslant C\|u\|, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{6.1}$$

где $C>0$ не зависит от u, а $\|\cdot\|$ означает норму в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 6.1. *Пусть $A \in L^0_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, и $\operatorname{supp} K_A$ — компакт в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Тогда выполнена оценка (6.1) и, следовательно, оператор A продолжается до линейного непрерывного оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

6.2. Вспомогательные утверждения и доказательство теоремы 6.1. В дальнейшем используется обозначение

$$\varlimsup_{\substack{|\xi|\to\infty \\ x\in K}} |a(x,\xi)| = \lim_{t\to\infty} \sup_{\substack{|\xi|\geqslant t \\ x\in K}} |a(x,\xi)|.$$

Теорема 6.2. *Пусть A — собственный* ПДО, $A \in L^0_{\rho,\delta}(X)$, *где $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$ и X — область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что существует такая постоянная M, что*

$$\varlimsup_{\substack{|\xi|\to\infty \\ x\in K}} |\sigma_A(x,\xi)| < M \tag{6.2}$$

для любого компакта $K \subset X$. Тогда существует такой собственный интегральный оператор R с эрмитовым ядром $R \in C^\infty(X\times X)$, что

$$(Au, Au) \leqslant M^2(u,u) + (Ru,u), \quad u \in C_0^\infty(X). \tag{6.3}$$

Если при этом $\operatorname{supp} K_A$ *— компакт в $X\times X$, то и* $\operatorname{supp} R$ *также компакт в $X \times X$.*

Доказательство импликации теорема 6.2 $\Rightarrow$ теорема 6.1. Достаточно проверить ограниченность в $L^2(\mathbb{R}^n)$ оператора R с гладким финитным ядром. Но это хорошо известно (можно показать, например, что $\|R\|^2 \leqslant \int |R(x, y)|^2 \,dx\,dy$, где $\|R\|$ — норма оператора R в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а $R(x, y)$ — ядро оператора R). ■

Для доказательства теоремы 6.2 ввиду соотношения $(Au, Au) = (A^*Au, u)$ достаточно построить такой собственный оператор $B \in L^0_{\rho,\,\delta}(x)$, что

$$A^*A + B^*B - M^2 = R, \tag{6.4}$$

где R имеет гладкое ядро (в этом случае оператор R собственный, так как в левой части (6.4) стоит собственный оператор). Переписывая (6.4) в виде $B^*B = M^2 - A^*A + R$, мы заметим, что по модулю символов класса $S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X)$ символ оператора $M^2 - A^*A$ равен $M^2 - |\sigma_A(x, \xi)|^2$, откуда

$$\varliminf_{\substack{|\xi|\to\infty\\ x\in K}} \operatorname{Re}\,[\sigma_{(M^2 - A^*A)}(x, \xi)] > 0, \tag{6.5}$$

где $\varliminf$ определяется точно так же, как $\varlimsup$, но с заменой sup на inf для любого компакта $K \subset X$. Поэтому теорема 6.2 вытекает из следующего предложения.

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Пусть* $C \in L^0_{\rho,\,\delta}(X)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, C — *собственный* ПДО, $C^* = C$ *и*

$$\varliminf_{\substack{|\xi|\to\infty\\ x\in K}} \operatorname{Re}\,\sigma_C(x, \xi) > 0, \tag{6.6}$$

для любого компакта $K \subset X$. *Тогда существует такой собственный оператор* $B \in L^0_{\rho,\,\delta}(X)$, *что оператор* $R = B^*B - C$ *имеет бесконечно дифференцируемое ядро.*

Л е м м а 6.1. *Пусть* $a(x, \xi) \in S^0_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)$ *и* $a(x, \xi)$ *при любых* $(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n$ *принимает значения, лежащие в компакте* $K \subset \mathbb{C}$. *Пусть комплекснозначная функция* $f(z)$ *определена в окрестности компакта* K *и бесконечно дифференцируема как функция двух вещественных переменных* $\operatorname{Re} z$ *и* $\operatorname{Im} z$. *Тогда*

$$f(a(x, \xi)) \in S^0_{\rho,\,\delta}(X \times \mathbb{R}^n). \tag{6.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначая $u = \operatorname{Re} z$ и $v = \operatorname{Im} z$, получим, очевидно,

$$\partial_y^\gamma f(a(y)) = \sum_{\substack{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_p+\\ +\omega_1+\ldots+\omega_q=\gamma}} c_{p,\,q,\,\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p,\omega_1,\ldots,\omega_q} (\partial^{(p,\,q)}_{u,\,v} f)\,(a(y)) \times$$
$$\times\, \partial_y^{\varkappa_1}(\operatorname{Re} a)\ldots\partial_y^{\varkappa_p}(\operatorname{Re} a)\,\partial_y^{\omega_1}(\operatorname{Im} a)\ldots\partial_y^{\omega_q}(\operatorname{Im} a), \tag{6.8}$$

откуда и следует (6.7), так как $\left|(\partial_{u,v}^{(p,q)} f)\,(a(y))\right| \leqslant C_{pq}$. ■

Доказательство предложения 6.1. Из леммы 6.1 следует, что функция $\sqrt{\operatorname{Re}\,\sigma_C(x,\,\xi)}$ принадлежит $S^0_{\rho,\,\delta}$ при больших ξ. Поэтому существует собственный ПДО $B_0 \in L^0_{\rho,\,\delta}(X)$ с таким вещественнозначным символом $b_0(x,\,\xi)$, что $|\,b_0(x,\,\xi)\,|^2 - \operatorname{Re}\,\sigma_C(x,\,\xi) \in S^{-\infty}_{\rho,\,\delta}$. Отсюда следует, что

$$C - B_0^* B_0 \in L^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X). \tag{6.9}$$

Оператор B_0 служит «нулевым приближением» для B. Будем искать первое приближение в виде $B_0 + B_1$, где $B_1 \in L^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X)$. Имеем

$$C - (B_0^* + B_1^*)\,(B_0 + B_1) = (C - B_0^* B_0) - (B_0^* B_1 + B_1^* B_0) - B_1^* B_1. \tag{6.10}$$

Имеет смысл уменьшить порядок оператора $B_0^* B_1 + B_1^* B_0$, взяв B_1 собственным ПДО с таким символом $b_1(x,\,\xi)$, что

$$2b_1(x,\,\xi)\,b_0(x,\,\xi) = \sigma_{C - B_0^* B_0}(x,\,\xi), \tag{6.11}$$

что очевидно возможно, так как $b_0^{-1}(x,\,\xi) \in S^0_{\rho,\,\delta}$ при больших ξ по лемме 6.1. Из (6.10) и (6.11) следует, что

$$C - (B_0 + B_1)^*(B_0 + B_1) \in L^{-2(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X). \tag{6.12}$$

Действуя по индукции, мы можем теперь точно так же построить такие собственные ПДО $B_j \in L^{-j(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X)$, $j = 0,\,1,\,2,\,\ldots$, что

$$C - (B_0 + \ldots + B_j)^*(B_0 + \ldots + B_j) \in L^{-j(\rho-\delta)}_{\rho,\,\delta}(X). \tag{6.13}$$

Пусть $b_j(x,\,\xi)$ — символ оператора B_j. Теперь остается построить такой собственный оператор B, что

$$\sigma_B(x,\,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x,\,\xi).$$

Из (6.13) легко следует, что этот оператор B и будет искомым. Тем самым предложение 6.1 доказано, а вместе с ним доказаны и теоремы 6.1 и 6.2. ■

6.3. Теорема о компактности. Мы выведем теорему о компактности ПДО из следующего более общего утверждения.

Теорема 6.3. *Пусть* $A \in L^0_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, *и пусть ядро* K_A *имеет компактный носитель в* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, *а символ* $\sigma_A(x,\,\xi)$ *удовлетворяет условию*

$$\varlimsup_{|\xi|\to\infty} |\,\sigma_A(x,\,\xi)\,| < M. \tag{6.14}$$

Тогда существует такой оператор A_1, *что* $A - A_1 \in L^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, *ядро* K_{A_1} *имеет компактный носитель и*

$$\|A_1 u\| \leqslant M\|u\|, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{6.15}$$

Доказательство. Пусть функция $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\chi(x) \geqslant 0$, $\int \chi(x)\,dx = 1$, $0 \leqslant \hat\chi(\xi) \leqslant 1$. Такая функция существует. В самом деле, пусть вначале функция $\chi_0(x)$ такова, что $\chi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_0(x) \geqslant 0$ и $\int \chi_0(x)\,dx = 1$. Тогда ясно, что $|\hat\chi_0(\xi)| \leqslant 1$. Теперь положим $\chi(x) = \int \chi_0(x+y)\,\chi_0(y)\,dy$. Ввиду того, что $\hat\chi(\xi) = |\hat\chi_0(\xi)|^2$ функция $\chi(x)$ удовлетворяет всем требованиям.

Положим теперь $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(x/\varepsilon)$ и определим оператор A_ε формулой

$$A_\varepsilon u = Au - A(\chi_\varepsilon * u), \tag{6.16}$$

где $(\chi_\varepsilon * u)(x)$ — свертка функций χ_ε и u, задаваемая формулой

$$(\chi_\varepsilon * u)\,(x) = \int \chi_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,dy = \int u(x-y)\,\chi_\varepsilon(y)\,dy.$$

Тогда в силу теоремы 6.2

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leqslant M^2\|u - \chi_\varepsilon * u\|^2 + (R(u - \chi_\varepsilon * u),\, u - \chi_\varepsilon * u), \tag{6.17}$$

где R — оператор с ядром $R(x,\,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Заметим, что преобразование Фурье функции $u - \chi_\varepsilon * u$ равно $(1 - \hat\chi(\varepsilon\xi))\,\hat u(\xi)$ и из условия $0 \leqslant \hat\chi \leqslant 1$ вытекает, что

$$\|u - \chi_\varepsilon * u\| \leqslant \|u\|. \tag{6.18}$$

Далее, если обозначить через R_ε оператор, переводящий u в $R(u - \chi_\varepsilon * u)$, то его ядро $R_\varepsilon(x,\,y)$ задается формулой

$$R_\varepsilon(x,\,y) = R(x,\,y) - \int R(x,\,z)\,\varepsilon^{-n}\chi\Big(\frac{z-y}{\varepsilon}\Big)dz,$$

или

$$R_\varepsilon(x,\,y) = R(x,\,y) - \int R(x,\,y + \varepsilon z)\,\chi(z)\,dz,$$

откуда видно, что $\operatorname{supp} R_\varepsilon(x,y)$ лежит в некотором фиксированном компакте K (не зависящем от ε при $0 < \varepsilon \leqslant 1$) и, кроме того,

$$\sup_{x,\,y} |R_\varepsilon(x,\,y)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует, что $\|R_\varepsilon\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Теперь из (6.17) и (6.18) мы получаем

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leqslant M^2\|u\|^2 + \|R_\varepsilon u\|\,\|u\|. \tag{6.19}$$

Из условия теоремы ясно, что мы можем заменить M на $M-\delta$, где δ достаточно мало. Но тогда из (6.19) следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leqslant M^2 \|u\|^2.$$

Теперь положим $A_1 = A_\varepsilon$. Так как оператор свертки с χ_ε имеет символ $\hat{\chi}(\varepsilon\xi) \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то ясно, что $A - A_1 \in L^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Непосредственно проверяется также, что ядро K_{A_1} оператора A_1 имеет компактный носитель. ■

Теорема 6.4. *Пусть* $A \in L^0_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, *ядро* K_A *имеет компактный носитель в* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *и*

$$\sup_x |\,\sigma_A(x,\,\xi)\,| \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to +\infty. \tag{6.20}$$

Тогда A *продолжается до компактного (вполне непрерывного) оператора в* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Из теоремы 6.3 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение $A = A_\varepsilon + R_\varepsilon$, где $\|A_\varepsilon\| < \varepsilon$, а оператор R_ε имеет гладкое финитное ядро (и, следовательно, компактен). Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|A - R_\varepsilon\| = 0$, откуда и следует компактность оператора A. ■

Следствие 6.1. *Пусть* $A \in L^m_{\rho,\,\delta}(R^n)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, $m < 0$ *и* K_A *имеет компактный носитель. Тогда* A *продолжается до компактного оператора в* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

6.4. Случай операторов на многообразии. Рассмотрим сначала случай замкнутого многообразия M (компактного многообразия без края). С помощью разбиения единицы на многообразии M легко ввести меру, имеющую гладкую положительную плотность по мере Лебега в любых локальных координатах. Если $d\mu$ — какая-нибудь такая мера, то определено гильбертово пространство $L^2(M,\,d\mu)$. Отметим, что множество элементов и топология в $L^2(M,\,d\mu)$ не зависят от выбора $d\mu$. Поэтому имеет смысл говорить о пространстве $L^2(M)$, являющемся топологическим векторным пространством, в котором топология может быть задана с помощью некоторого неоднозначно определенного гильбертова скалярного произведения. Из теорем 6.1 и 6.4 очевидным образом следует

Теорема 6.5. *Пусть* M — *замкнутое многообразие*, $A \in L^0_{\rho,\,\delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. *Тогда*

1) *оператор* A *продолжается до линейного непрерывного оператора*

$$A\colon L^2(M) \to L^2(M);$$

2) *если главный символ* $\sigma_A(x,\xi)\in S^0_{\rho,\delta}(T^*M)/S^{-2\rho+1}_{\rho,\delta}(T^*M)$ *удовлетворяет условию* (6.20) (*оно эквивалентно для всех представителей одного и того же элемента факторпространства* $S^0_{\rho,\delta}(T^*M)/S^{-2\rho+1}_{\rho,\delta}(T^*M)$), *то полученный оператор* $A\colon L^2(M)\to L^2(M)$ *будет компактным оператором.*

Следствие 6.2. *Если* $A\in L^m_{\rho,\delta}(M)$, $1-\rho\leqslant\delta-\rho$ *и* $m<0$, *то* A *продолжается до компактного оператора*

$$A\colon L^2(M)\to L^2(M).$$

Мы сформулируем теперь вариант теоремы об ограниченности, пригодный в случае некомпактного M. Для этого введем пространства $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ и $L^2_{\mathrm{comp}}(M)$.

Пусть f — комплекснозначная функция на M, определенная всюду, кроме, быть может, множества меры 0 *). Будем писать, что $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, если для любого диффеоморфизма $\varkappa\colon X\to X_1$ области $X\subset\mathbb{R}^n$ на область $X_1\subset M$ и для любой подобласти $X_0\subset X$, для которой $\overline{X}_0$ — компакт в X, справедливо включение $[\varkappa^*(f|_{X_1})]|_{X_0}\in L^2(X_0,\,dx)$, где dx — мера Лебега на X_0, индуцированная мерой Лебега на $\mathbb{R}^n$. Топология в $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ задается системой полунорм

$$\|f\|_{\varkappa,\,X_0}=\|[\varkappa^*(f|_{X_1})]|_{X_0}\|_{L^2(X_0,dx)}.$$

Если M имеет счетную базу, то $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ — пространство Фреше (полное метризуемое локально выпуклое пространство или, что то же самое, полное счетно-нормированное пространство).

Далее, через $L^2_{\mathrm{comp}}(M)$ обозначается линейное подмногообразие $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, состоящее из тех $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, для которых $\operatorname{supp} f$ — компакт в M. Пусть даны описанные выше $\varkappa\colon X\to X_1$ и $X_0\subset X$. Определим оператор вложения

$$i_{\varkappa,\,X_0}\colon L^2(X_0,\,dx)\to L^2_{\mathrm{comp}}(M),$$

сопоставляющий функции $f\in L^2(X_0,\,dx)$ функцию $\hat f(y)$ на M, равную $f(x)$ в точке $\varkappa(x)\in M$ и 0 при $y\in M\backslash\varkappa(X_0)$. Топология в $L^2_{\mathrm{comp}}(M)$ определяется как индуктивная топология, т. е. самая сильная локально выпуклая топология, для которой все отображения $i_{\varkappa,\,X_0}$ непрерывны. Отсюда следует, что линейное отображение $A\colon L^2_{\mathrm{comp}}(M)\to E$, где E — любое локально выпуклое пространство, непрерывно тогда и только

*) Отметим, что всюду в дальнейшем мы будем считать две функции f_1 и f_2, эквивалентными, если они совпадают вне некоторого множества меры 0. Элементами пространств $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ и $L^2_{\mathrm{comp}}(M)$ будут на самом деле не функции, а их классы эквивалентности, хотя мы и будем писать $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ для функции f, используя общепринятую вольность речи.

тогда, когда непрерывны все композиции $A \circ i_{\varkappa, X_0}$. Учитывая это обстоятельство, мы очевидным образом получаем, что справедлива следующая

Теорема 6.6. *Если $A \in L^0_{\rho, \delta}(M)$, где $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, то A продолжается до линейного непрерывного оператора*

$$A\colon L^2_{\text{comp}}(M) \to L^2_{\text{loc}}(M).$$

Упражнение 6.1. Доказать, что если $A \in L^0_{\rho, \delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, оператор A собственный, то он продолжается до линейного непрерывного оператора

$$A\colon L^2_{\text{comp}}(M) \to L^2_{\text{comp}}(M),$$

а также до линейного непрерывного оператора

$$A\colon L^2_{\text{loc}}(M) \to L^2_{\text{loc}}(M).$$

§ 7. Пространства Соболева

7.1. Определение пространств Соболева.

Лемма 7.1. *Пусть M — произвольное многообразие. Тогда для любого вещественного s на M существует собственный классический эллиптический* ПДО Λ_s *порядка s, главный символ которого положителен (при $\xi \neq 0$).*

Доказательство. Пусть вначале $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Тогда мы можем взять в качестве Λ_s произвольный собственный ПДО $\Lambda_s \in CL^s(X)$ с главным символом $|\xi|^s$.

Пусть теперь M произвольно и пусть задано покрытие M координатными окрестностями $M = \bigcup\limits_{\gamma} X_1^\gamma$. Через $\varkappa^\gamma$ будем обозначать какие-нибудь координатные диффеоморфизмы $\varkappa^\gamma\colon X^\gamma \to X_1^\gamma$, где X^γ — открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Построим на X^γ операторы Λ_s^γ, обладающие требуемыми свойствами, и перенесем их на X_1^γ стандартной процедурой (см. § 4) с помощью диффеоморфизмов $\varkappa^\gamma$, изготовив таким образом собственные классические ПДО $\Lambda_{s,1}^\gamma$ на X_1^γ с положительными главными символами. Оператор Λ_s на M склеивается из операторов $\Lambda_{s,1}^\gamma$ с помощью той же процедуры, что B из B^γ в доказательстве теоремы 5.1. ■

Определение 7.1. Будем писать, что $u \in H^s_{\text{loc}}(M)$, если $u \in \mathscr{D}'(M)$ и $\Lambda_s u \in L^2_{\text{loc}}(M)$. Далее, положим $H^s_{\text{comp}}(M) = H^s_{\text{loc}}(M) \cap \mathscr{E}'(M)$ *). Если M — замкнутое многообразие, то будем обозначать пространство $H^s_{\text{loc}}(M) = H^s_{\text{comp}}(M)$ просто через $H^s(M)$.

Если K — компакт в M, то через $H^s(K)$ будем обозначать множество тех $u \in H^s_{\text{comp}}(M)$, для которых $\operatorname{supp} u \subset K$.

---

*) По поводу $\mathscr{D}'(M)$ и $\mathscr{E}'(M)$ см. упражнение 4.1.

В дальнейшем в пространствах $H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ и $H^s(K)$ будет определена топология, а пока нам существен лишь запас элементов в этих пространствах.

Ниже будет также доказано, что эти пространства не зависят от выбора оператора Λ_s.

7.2. Действие ПДО в пространствах Соболева. Точная теорема регулярности.

Теорема 7.1. *Если $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$, причем $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ или $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$, то A осуществляет отображение*

$$A\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M) \to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M).$$

Если дополнительно предположить, что A — собственный, то A также задает отображения

$$A\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M) \to H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(M),$$
$$A\colon H^s_{\mathrm{loc}}(M) \to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что оператор Λ_{-s} является параметриксом для оператора Λ_s при любом $s \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\Lambda_{-s}\Lambda_{+s} = I + R_s, \tag{7.1}$$

где R_s — собственный оператор с гладким ядром, переводящий, следовательно, $\mathscr{E}'(M)$ в $C_0^\infty(M)$ и $\mathscr{D}'(M)$ в $C^\infty(M)$.

Если $u \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$, то, полагая $\Lambda_s u = u_0$, мы получим из (7.1), что $u = \Lambda_{-s}u_0 + v$, где $u_0 \in L^2_{\mathrm{comp}}(M)$, $v \in C_0^\infty(M)$. Поэтому

$$\Lambda_{s-m}Au = \Lambda_{s-m}A(\Lambda_{-s}u_0 + v) = \Lambda_{s-m}A\Lambda_{-s}u_0 + \Lambda^s Av,$$

и ввиду того, что $\Lambda_{s-m}A\Lambda_{-s} \in L^0_{\rho,\delta}(M)$, мы получаем из теоремы 6.6, что $\Lambda_{s-m}A\Lambda_{-s}u_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, $\Lambda^s Av \in C^\infty(M)$, откуда $\Lambda_{s-m}Au \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, т. е. $Au \in H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M)$. Мы доказали первое утверждение теоремы 7.1. Остальные вытекают из него или доказываются аналогично. ■

Мы можем теперь дать определение пространств Соболева, не зависящее от выбора Λ_s. Достаточно, очевидно, определить $H^s_{\mathrm{loc}}(M)$.

Определение 7.1′. Будем писать, что $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, если $u \in \mathscr{D}'(M)$ и $Au \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ для любого собственного $A \in L^s_{1,0}(M)$.

Эквивалентность определений 7.1 и 7.1′ очевидным образом вытекает из теоремы 7.1.

Теорема 7.2. *Пусть $A \in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(M)$, где $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ или $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}$. Тогда, если $u \in \mathscr{D}'(M)$ и $Au \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, то $u \in H^{s+m_0}_{\mathrm{loc}}(M)$.*

Доказательство. Пусть B — параметрикс A, $B \in HL_{\rho,\delta}^{-m_0,-m}$. Тогда по теореме 7.1 имеем $BAu \in H_{\mathrm{loc}}^{s+m_0}(M)$. Но $BAu = u + v$, где $v \in C^\infty(M)$. Отсюда $u \in H_{\mathrm{loc}}^{s+m_0}(M)$. ■

Следствие 7.1. а) *Если A — эллиптический оператор порядка m, $u \in \mathscr{E}'(M)$ и $Au \in H_{\mathrm{loc}}^s(M)$, то $u \in H_{\mathrm{comp}}^{s+m}(M)$.*

б) *Если A — собственный (в частности, если A — дифференциальный) эллиптический оператор порядка m, $u \in \mathscr{D}'(M)$ и $Au \in H_{\mathrm{loc}}^s(M)$, то $u \in H_{\mathrm{loc}}^{s+m}(M)$.*

7.3. Локализация. Из теоремы 7.1 очевидным образом вытекает, что если $u \in H_{\mathrm{loc}}^s(M)$, $a(x) \in C^\infty(M)$, то $au \in H_{\mathrm{loc}}^s(M)$. Если, в частности, $a(x) \in C_0^\infty(M)$, то $au \in H_{\mathrm{comp}}^s(M)$. Следующее утверждение является точной формулировкой обратного утверждения.

Предложение 7.1. *Пусть обобщенная функция $u \in \mathscr{D}'(M)$ такова, что для любой точки $x_0 \in M$ найдется такая функция $\varphi_{x_0} \in C_0^\infty(M)$, что $\varphi_{x_0}(x_0) \neq 0$ и $\varphi_{x_0} \cdot u \in H_{\mathrm{comp}}^s(M)$. Тогда $u \in H_{\mathrm{loc}}^s(M)$.*

Доказательство. Мы можем выбрать из функций φ_{x_0} такую систему $\{\varphi_\gamma\}$, что некоторые окрестности $\operatorname{supp} \varphi_\gamma$ образуют локально конечное покрытие M и для любой точки $x_0 \in M$ найдется такое γ, что $\varphi_\gamma(x_0) \neq 0$. Положим теперь $\psi_\gamma = \dfrac{\bar{\varphi}_\gamma \cdot \varphi_\gamma}{\sum\limits_\gamma |\varphi_\gamma|^2}$. Тогда ясно, что ψ_γ обладают теми же свойствами, что и φ_γ, и, кроме того, $\psi_\gamma \geqslant 0$ и $\sum\limits_\gamma \psi_\gamma \equiv 1$. Имеем теперь

$$\Lambda_s u = \sum_\gamma \Lambda_s(\psi_\gamma u) \in L_{\mathrm{loc}}^2(M),$$

поскольку в силу собственности оператора Λ_s, сумма $\sum\limits_\gamma \Lambda_s(\psi_\gamma u)$ является локально конечной. ■

Следствие 7.2. *Пусть $M = \bigcup\limits_\gamma X_\gamma$ — покрытие M открытыми множествами, $u \in \mathscr{D}'(M)$. Тогда условие $u \in H_{\mathrm{loc}}^s(M)$ равносильно тому, что $u|_{X_\gamma} \in H_{\mathrm{loc}}^s(X_\gamma)$ для любого γ.*

Предложениее 7.1 показывает, что, по существу, достаточно изучать пространство $H^s(K)$, где K — компакт в $\mathbb{R}^n$.

7.4. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Определение 7.2. Пусть $s \in \mathbb{R}$, $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. Будем писать, что $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, если $\hat{u}(\xi) \in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|u\|_s^2 = \int |\hat{u}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s}\, đ\xi < +\infty, \tag{7.2}$$

(это равенство служит определением нормы $\|\cdot\|_s$).

Упражнение. Проверить полноту пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ (с нормой $\|\cdot\|_s$).

В пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$ может быть введено гильбертово скалярное произведение

$$(u, v)_s = \int \hat{u}(\xi)\,\overline{\hat{v}(\xi)}\,\langle\xi\rangle^{2s}\,đ\xi, \tag{7.3}$$

причем отображение $\langle D\rangle^s$, переводящее $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ в $F^{-1}\langle\xi\rangle^s\hat{u}(\xi)$ (где F — преобразование Фурье), задает изометрический изоморфизм:

$$\langle D\rangle^s\colon H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n). \tag{7.4}$$

Лемма 7.2. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$H^s(K) = \mathscr{E}'(K) \cap H^s(\mathbb{R}^n) \tag{7.5}$$

(*через $\mathscr{E}'(K)$ обозначено множество таких $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, что* $\operatorname{supp} u \subset K$).

Доказательство. 1. Поскольку $\langle D\rangle^s \in L^s_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ и оператор $\langle D\rangle^s$ эллиптичен, то в силу следствия 7.1 ясно, что из включений $u \in \mathscr{E}'(K)$ и $\langle D\rangle^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ вытекает, что $u \in H^s(K)$, т. е. $\mathscr{E}'(K) \cap H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^s(K)$.

2. Пусть теперь $u \in H^s(K)$. Надо проверить, что $\langle D\rangle^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, в то время как известно, что $\langle D\rangle^s u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. На самом деле верно даже более сильное утверждение: если $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ в окрестности K, то $(1-\varphi)\,\langle D\rangle^s u \in S(\mathbb{R}^n)$. Докажем это. Пусть функция $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\varphi = 1$ в окрестности $\operatorname{supp}\psi$ (в частности, $(1-\varphi)\,\psi \equiv 0$) и в то же время $\psi = 1$ в окрестности K. Тогда $\psi u = u$ и $(1-\varphi)\,\langle D\rangle^s u = (1-\varphi)\,\langle D\rangle^s \psi u$. Изучим оператор $(1-\varphi)\,\langle D\rangle^s\psi$. Ясно, что его ядро $K(x, y)$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Нам достаточно проверить, что $K(x, y) \in S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Но $K(x, y)$ задается осциллирующим интегралом:

$$K(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}(1-\varphi(x))\,\langle\xi\rangle^s\psi(y)\,đ\xi,$$

который можно преобразовать так:

$$K(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}|x-y|^{-2N}(1-\varphi(x))\,\psi(y)\,(-\Delta_\xi)^N\langle\xi\rangle^s\,đ\xi,$$

поскольку $|x-y| \geqslant \varepsilon > 0$ при $x \in \operatorname{supp}(1-\varphi)$, $y \in \operatorname{supp}\psi$. При $2N > s+n$ получается сходящийся интеграл, который оценивается через $C(1+|x|+|y|)^{-2N}$. Аналогично получаются оценки производных ядра $K(x, y)$. ■

Отмечая, что $H^s(K)$ является замкнутым подпространством $H^s(\mathbb{R}^n)$, мы видим, что скалярное произведение $(u, v)_s$ индуцирует на $H^s(K)$ структуру гильбертова пространства.

Лемма 7.3. *Пусть* $\hat{K}$ — *такой компакт в* $\mathbb{R}^n$, *что* $K \subset \operatorname{Int} \hat{K}$. *Тогда, если* $u \in H^s(K)$, *то существует такая последовательность* $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u_n \subset \hat{K}$, *что* $\|u_n - u\|_s \to 0$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \varphi(x)\,dx = 1$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Положим

$$u_\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon * u)(x) = \langle u(y),\, \varphi_\varepsilon(x-y)\rangle, \quad \varepsilon > 0,$$

Ясно, что $u_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \|u_\varepsilon - u\|_s = 0$. Поскольку $\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \hat{\varphi}(\varepsilon\xi)$ и $\hat{\varphi}(0) = 1$, то дело сводится к установлению соотношения

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int |\hat{\varphi}(\varepsilon\xi) - 1|^2\, |\hat{u}(\xi)|^2\, \langle \xi \rangle^{2s}\, d\xi = 0,$$

очевидного из теоремы Лебега.

7.5. Топология в пространствах Соболева на многообразии. Пусть $M = \bigcup\limits_\gamma X_1^\gamma$ — локально конечное покрытие многообразия M координатными окрестностями, $\varkappa^\gamma \colon X^\gamma \to X_1^\gamma$ — координатные диффеоморфизмы (X^γ — область в $\mathbb{R}^n$), φ^γ — разбиение единицы на M, подчиненное покрытию $\{X_1^\gamma\}$. Пусть K — компакт в M. Введем в пространстве $H^s(K)$ скалярное произведение, полагая

$$(u,\, v)_s = \sum_\gamma ((\varkappa^\gamma)^*(\varphi^\gamma u),\, (\varkappa^\gamma)^*(\varphi^\gamma v))_s, \quad u,\, v \in H^s(K). \tag{7.6}$$

Предложение 7.2. *Скалярное произведение* (7.6) *индуцирует в* $H^s(K)$ *структуру гильбертова пространства.*

Доказательство. Ясно, что в проверке нуждается лишь полнота пространства $H^s(K)$ по норме $\|\cdot\|_s$, определяемой скалярным произведением (7.6). Пусть последовательность $\{u_n\}_{n=1,2,\ldots}$ элементов $H^s(K)$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|_s$. Тогда

$$(\varkappa^\gamma)^* \varphi^\gamma u_n \to v_1^\gamma \in H^s(\varkappa_1^\gamma(\operatorname{supp} \varphi^\gamma)) \tag{7.7}$$

по норме $H^s(\mathbb{R}^n)$ (здесь $\varkappa_1^\gamma = (\kappa^\gamma)^{-1}$). Мы можем взять $v^\gamma = (\kappa_1^\gamma)^* v_1^\gamma$, так что $v_1^\gamma = (\varkappa^\gamma)^* v^\gamma$. Тогда $v^\gamma \in H^s(\operatorname{supp} \varphi^\gamma)$ и мы положим $u = \sum\limits_\gamma v^\gamma$ (ясно, что эта сумма конечна). Ясно, что $u \in H^s(K)$, поскольку $v^\gamma \in H^s(K)$. Остается доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|u_n - u\|_s = 0$. Это означает в силу (7.6), что

$$\lim_{n \to \infty} \|(\kappa^\gamma)^* \varphi^\gamma (u_n - u)\|_s = 0,$$

при любом γ. Но из (7.7) ясно, что достаточно проверить соотношение $v^\gamma = \varphi^\gamma u$, очевидное ввиду того, что $u_n \to u$ в $\mathscr{D}'(M)$, откуда $\varphi^\gamma u_n \to \varphi^\gamma u$

в $\mathscr{D}'(M)$, а из (7.7) следует, что $\varphi^\gamma u_n \to v^\gamma$ в $\mathscr{D}'(M)$ (сходимость в $\mathscr{D}'(M)$ понимается здесь в слабом смысле). ■

Теперь мы хотим доказать независимость топологии, индуцированной нормой $\|\cdot\|_s$ на $H^s(K)$, от выбора произвольных элементов в (7.6) (покрытия, разбиения единицы и координатных диффеоморфизмов). Для этого целесообразно дать другое определение этой топологии.

Пусть Λ_s выбраны по лемме 7.1, причем Λ_{-s} является параметриксом Λ_s (выполнено соотношение (7.1)). Имеем тогда

$$u = \Lambda_{-s}\Lambda_s u - R_s u. \tag{7.8}$$

Пусть $p > s$, p — натуральное и $Q_1, \ldots, Q_N$ — дифференциальные операторы, порождающие левый $C^\infty(M)$-модуль всех дифференциальных операторов порядка не выше p на M. Положим тогда

$$(u, v)'_s = (\Lambda_s u, \Lambda_s v) + \sum_{k=1}^{N} (Q_k R_s u, Q_k R_s v), \tag{7.9}$$

где $u, v \in H^s(K)$, (f, g) — скалярное произведение в $L^2_{\mathrm{comp}}(M)$, индуцированное любой гладкой положительной плотностью на M. Из $(u, u)'_s = 0$ следует, что $\Lambda_s u = 0$ и $R_s u = 0$, но тогда в силу (7.8) имеем $u = 0$. Поэтому скалярное произведение (7.9) положительно определено и мы будем обозначать через $\|\cdot\|'_s$ соответствующую гильбертову норму.

П р е д л о ж е н и е 7.2$'$. *Скалярное произведение* (7.9) *индуцирует в* $H^s(K)$ *структуру гильбертова пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опять-таки в проверке нуждается лишь полнота. Отметим сразу, что из сходимости последовательности $u_n \in H^s(K)$ по норме $\|\cdot\|'_s$ вытекает слабая сходимость в $\mathscr{D}'(M)$. Если последовательность $u_n \in H^s(K)$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|'_s$, то это означает, что в топологии $L^2(\hat{K})$ (где $\hat{K}$ — некоторый компакт в M) существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_s u_n = v, \qquad \lim_{n\to\infty} Q R_s u_n = \omega_Q, \tag{7.10}$$

где Q — любой дифференциальный оператор порядка $\leqslant p$. В частности, $\Lambda_s u_n$ и $R_s u_n$ сходятся в топологии $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, так что из (7.8) следует слабая сходимость u_n в $\mathscr{D}'(M)$. Обозначая через u предел u_n (в слабой топологии $\mathscr{D}'(M)$), мы будем иметь, очевидно,

$$u = \Lambda_{-s} v - w_1, \tag{7.11}$$

где $w_1 = \lim\limits_{n\to\infty} R_s u_n$. Беря в качестве Q в (7.10) эллиптический оператор порядка p, мы получим

$$Qw_1 = \lim_{n\to+\infty} QR_s u_n = w_Q \in L^2_{\mathrm{loc}}(M),$$

откуда $w_1 \in H^p_{\mathrm{loc}}(M)$ и, значит, $w_1 \in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$, но тогда $w_1 \in H^s(\hat{K})$ для некоторого компакта $\hat{K}$ ввиду собственности операторов Λ_s и R_s.

Остается проверить, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|'_s = 0$. Имеем

$$u_n - u = u_n - \Lambda_{-s}v + w_1 = \Lambda_{-s}\Lambda_s u_n - R_s u_n - \Lambda_{-s}v + w_1 = \\ = \Lambda_{-s}(\Lambda_s u_n - v) - (R_s u_n - w_1).$$

Отсюда

$$\|u_n - u\|'_s \leqslant \|\Lambda_s\Lambda_{-s}(\Lambda_s u_n - v)\| + \sum_{k=1}^{N} \|Q_k R_s \Lambda_{-s}(\Lambda_s u_n - v)\| + \\ + \|\Lambda_s(R_s u_n - w_1)\| + \sum_{k=1}^{N} \|Q_k R_s(R_s u_n - w_1)\|. \quad (7.12)$$

(здесь норма $\|\cdot\|$ индуцирована тем же скалярным произведением (f, g), что и в формуле (7.9)).

Сходимость к 0 первых двух и последнего слагаемых в (7.12) следует из ограниченности операторов $\Lambda_s\Lambda_{-s}$, $Q_k R_s \Lambda_{-s}$ и $Q_k R_s$ как операторов из $L^2(K)$ в $L^2(\hat{K})$. Для обнаружения сходимости к 0 третьего слагаемого возьмем эллиптический дифференциальный оператор Q порядка p и его собственный параметрикс Q_1. Тогда

$$\Lambda_s(R_s u_n - \omega_1) = \Lambda_s Q_1 Q(R_s u_n - w_1) + \Lambda_s R(R_s u_n - w_1),$$

где $R \in L^{-\infty}$. Искомое утверждение следует теперь из того, что $\Lambda_s Q_1$ — собственный ПДО порядка $s - p \leqslant 0$, непрерывно отображающий $L^2(K)$ в $L^2(\hat{K})$. ■

Есть еще третий способ ввести топологию в $H^s(K)$ — задать ее полунормами

$$\|u\|_{A,\hat{K}} = \|Au|_{\hat{K}}\|, \quad A \in L^s_{1,0}(M). \quad (7.13)$$

П р е д л о ж е н и е 7.3. *Все три введенные выше топологии на $H^s(K)$ (с помощью нормы $\|\cdot\|_s$, нормы $\|\cdot\|'_s$ и полунорм (7.13)) совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Совпадение топологий, заданных нормами $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|'_s$, ясно из теоремы о замкнутом графике. Топология, задаваемая полунормами (7.13), очевидным образом сильнее топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|'_s$, ибо норма $\|\cdot\|'_s$ оценивается суммой $N+1$ полунорм типа (7.13), соответствующих операторам A, равным Λ_s и $Q_k R_s$. Для проверки же совпадения этих топологий достаточно установить, что если $A \in L^s_{1,0}(M)$ и K, $\hat{K}$ — компакты в M, то справедлива оценка

$$\|Au|_{\hat{K}}\| \leqslant C\|u\|'_s, \quad u \in H^s(K). \tag{7.14}$$

Но, представляя u в виде (7.8), мы получаем

$$Au = (A\Lambda_{-s})\Lambda_s u - AR_s u,$$

и, поскольку $A\Lambda_{-s} \in L^0_{1,0}(M)$, $AR_s \in L^{-\infty}(M)$, оценка (7.14) следует из теоремы 6.6. ■

С л е д с т в и е 7.3. *Топологии, определяемые в $H^s(K)$ нормами $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|'_s$, не зависят от произвольных элементов, входящих в определения этих норм.*

П р е д л о ж е н и е 7.4. *Пусть $\hat{K}$ — такой компакт в M, что $K \subset \operatorname{Int} \hat{K}$. Тогда, если $u \in H^s(K)$, то существует такая последовательность $\varphi_n \in C_0^\infty(\hat{K})$, что $\varphi_n \to u$ при $n \to +\infty$ в топологии $H^s(\hat{K})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение следует из леммы 7.3 с учетом определения нормы $\|\cdot\|_s$. ■

П р е д л о ж е н и е 7.5. *Пусть K — компакт в M, и $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$, причем $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ или $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$.*

Тогда, если A — собственный, то A определяет линейный непрерывный оператор

$$A\colon H^s(K) \to H^{s-m}(\hat{K}),$$

где $\hat{K}$ — компакт в M, зависящий от K. Без предположения собственности это же верно для оператора φA, где $\varphi \in C_0^\infty(M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Удобнее всего использовать норму $\|\cdot\|'_s$. Тогда для проверки непрерывности A из $H^s(K)$ в $H^{s-m}(\hat{K})$ нужно оценить $\|\Lambda_{s-m}Au\|$ и $\|QR_{s-m}Au\|$ через $C\|\Lambda_s u\|$ и $C\|Q'R_s u\|$ (здесь Q и Q' — любые дифференциальные операторы). Но из (7.8) имеем

$$Au = (A\Lambda_{-s})\,(\Lambda_s u) - AR_s u,$$

откуда

$$\Lambda_{s-m}Au = (\Lambda_{s-m}A\Lambda_s)\,(\Lambda_{-s}u) - (\Lambda_{s-m}AR_s)\,u,$$
$$QR_{s-m}Au = QR_{s-m}\Lambda_{-s}\Lambda_s u - QR_{s-m}R_s u,$$

и искомая оценка следует из теорем 6.1 и 6.6, если учесть, что $\Lambda_{s-m}A\Lambda_{-s} \in L^0_{\rho,\delta}(M)$, а операторы $\Lambda_{s-m}AR_s$, $QR_{s-m}\Lambda_{-s}$ и QR_{s-m} принадлежат $L^{-\infty}(M)$. ■

Теперь введем топологию в $H^s_{\text{loc}}(M)$ и в $H^s_{\text{comp}}(M)$.

Топология в $H^s_{\mathrm{loc}}(M)$ определяется как самая слабая из всех локально выпуклых топологий, для которых непрерывны все отображения $M_\varphi\colon H^s_{\mathrm{loc}}(M)\to H^s(\operatorname{supp}\varphi)$, где $\varphi\in C_0^\infty(M)$, $M_\varphi u=\varphi u$. Иными словами, это топология, задаваемая системой полунорм

$$\|u\|_{s,\varphi}=\|\varphi u\|_s,\quad \varphi\in C_0^\infty(M). \tag{7.15}$$

Топология в $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ определяется как самая сильная из всех локально выпуклых топологий, для которых непрерывны все вложения $i_K\colon H^s(K)\to H^s_{\mathrm{comp}}(M)$. Важнейшим свойством и свойством, характеризующим эту топологию (называемую *индуктивной*), является то, что линейное отображение $f\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M)\to E$ в любое локально выпуклое пространство E непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $f\circ i_K\colon H^s(K)\to E$.

Из этих определений и предложения 7.5 вытекает следующая

Теорема 7.3. *Пусть $A\in L^m_{\rho,\delta}$, где $1-\rho\leqslant\delta<\rho$ или $\delta<\rho$ и $M=X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $s\in\mathbb{R}$ оператор A является линейным непрерывным оператором*:

$$A\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M)\to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M).$$

Если A — собственный, то он может быть продолжен до линейных непрерывных отображений

$$A\colon H^s_{\mathrm{comp}}(M)\to H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(M),$$

и

$$A\colon H^s_{\mathrm{loc}}(M)\to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(M).$$

7.6. Теоремы вложения. Отметим прежде всего тот тривиальный (и уже использовавшийся) факт, что при $s>s'$ имеются вложения

$$H^s(K)\subset H^{s'}(K),\quad H^s_{\mathrm{loc}}(M)\subset H^{s'}_{\mathrm{loc}}(M),$$
$$H^s_{\mathrm{comp}}(M)\subset H^{s'}_{\mathrm{comp}}(M),$$

которые непрерывны. Менее тривиальна следующая

Теорема 7.4. *Пусть $s>s'$ и K — компакт в M. Тогда оператор вложения*

$$i_s^{s'}\colon H^s(K)\to H^{s'}(K)$$

является компактным оператором.

Доказательство. Используя тождество (7.8), получим

$$\Lambda_{s'}u=(\Lambda_{s'}\Lambda_{-s})(\Lambda_s u)-(\Lambda_{s'}R_s)\,u=$$
$$=(\Lambda_{s'}\Lambda_{-s})\,(\Lambda_s u)-(\Lambda_{s'}\Lambda_{-s})\,(\Lambda_s R_s u)+(\Lambda_{s'}R_s)\,(R_s u).$$

Поскольку $\Lambda_{s'}\Lambda_{-s} \in L_{1,0}^{-(s-s')}(M)$ (и, значит, по следствию 6.1 для любого компакта K_1 найдется такой компакт K_2, что оператор $\Lambda_{s'}\Lambda_{-s}$ является компактным оператором из $L^2(K_1)$ в $L^2(K_2)$), то ясно, что если u пробегает ограниченное множество в $H^s(K)$ (и, следовательно, $\Lambda_s u$ и $R_s u$ пробегают ограниченные множества в $L^2(K_1)$), то $\Lambda_{s'}u$ пробегает компактное множество в $L^2(K_2)$. Аналогично доказывается, что в этом случае $QR_{s'}u$ пробегает компактное множество в $L^2(K_2)$ для любого дифференциального оператора Q. Но это в силу тождества (7.8) и определения нормы влечет компактность соответствующего множества в $H^{s'}(K_2)$ (и, значит, в $H^{s'}(K)$), поскольку на самом деле оно лежит в $H^{s'}(K)$, а топология $H^{s'}(K)$ индуцируется топологией $H^{s'}(K_2)$, если только $K \subset K_2$. ■

Обобщением теоремы 7.4 является

Т е о р е м а 7.5. *Пусть $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$, A — собственный и $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ или $\delta < \rho$ и $M = X$ — область в $\mathbb{R}^n$. Пусть числа s, $s' \in R$ таковы, что $s' < s - m$. Пусть K — компакт в M и $\hat{K}$ — такой компакт в M (зависящий от K), что $A\mathscr{E}'(K) \subset \mathscr{E}'(\hat{K})$. Тогда оператор*

$$A\colon H^s(K) \to H^{s'}(\hat{K})$$

компактен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 7.5 является следстврем предложения 7.5 и теоремы 7.4, поскольку оператор $A\colon H^s(K) \to H^{s'}(\hat{K})$ можно рассматривать как композицию $H^s(K) \xrightarrow{A} H^{s-m}(\hat{K}) \xrightarrow{i^{s'}_{s-m}} H^{s'}(\hat{K})$. ■

Обозначим через $C^p(M)$ пространство функций на M имеющих непрерывный производные порядка $\leqslant p$ в любых локальных координатах. Топология в $C^p(M)$ определяется полунормами

$$\|u\|_{A,K} = \sup_{x \in K} |Au(x)|, \tag{7.16}$$

где A — любой дифференциальный оператор порядка $\leqslant p$. Через $C_0^p(K)$ будем обозначать подпространство таких функций $u \in C^p(M)$, что $\operatorname{supp} u \subset K$. Ясно, что топология $C^p(M)$ индуцирует в $C_0^p(K)$ топологию, которая может быть задана банаховой нормой.

Т е о р е м а 7.6. *Если $s > n/2 + p$, то $H^s_{\mathrm{loc}}(M) \subset C^p(M)$, причем вложение непрерывно. Если K — компакт в M, то вложение $H^s(K) \subset C^p(K)$ при том же условии $s > n/2 + p$ является компактным оператором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку дифференциальные операторы порядка p непрерывно отображают $H^s(K)$ в $H^{s-p}(K)$, то ясно, что достаточно рассмотреть случай $p = 0$. Далее, достаточно проверить, что при $s > n/2$ имеется непрерывное вложение $H^s(K) \subset C_0^0(K)$, ибо компактность этого вложения получится, если мы представим его в виде композиции

$$H^s(K) \subset H^{s-\varepsilon}(K) \subset C_0^0(K),$$

($\varepsilon > 0$ таково, что $s - \varepsilon > n/2$) и воспользуемся теоремой 7.4. Наконец, ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда K лежит в координатной окрестности и, значит, дело сводится к случаю $M = \mathbb{R}^n$.

Итак, пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $s > n/2$. Из леммы 7.3 следует, что достаточно доказать оценку

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leqslant C\|u\|_s, \quad u \in C_0^\infty(K), \tag{7.17}$$

где C не зависит от u. Мы докажем эту оценку даже с постоянной C, не зависящей от K. Имеем

$$|u(x)| = \left|\int e^{ix\cdot\xi}\,\hat{u}(\xi)\,đ\xi\right| \leqslant \int |\hat{u}(\xi)|\,đ\xi = \int |\hat{u}(\xi)|\,\langle\xi\rangle^s\,\langle\xi\rangle^{-s}\,đ\xi \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int |\hat{u}(\xi)|^2\,\langle\xi\rangle^{2s}\,đ\xi\right]^{1/2} \left[\int \langle\xi\rangle^{-2s}\,đ\xi\right]^{1/2} = C\|u\|_s,$$

где $C = (\int \langle\xi\rangle^{-2s} đ\xi)^{1/2} < +\infty$, что и требовалось.

С л е д с т в и е 7.4. $\bigcap\limits_s H^s_{\mathrm{loc}}(M) = C^\infty(M)$.

Это следствие очевидно. Отметим еще двойственный факт: $\bigcup\limits_s H^s(K) = \mathscr{E}'(K)$ для любого компакта $K \subset M$. Этот факт вытекает из хорошо известного в теории обобщенных функций утверждения о том, что если $u \in \mathscr{E}'(K)$, то u можно записать в виде $u = \sum\limits_{j=1}^N Q_j v_j$, где $v_j \in L^2(\hat{K})$, а Q_j — дифференциальные операторы. Обозначая через m наибольший порядок Q_j, мы видим, что $u \in H^{-m}(K)$.

7.7. Двойственность. Пусть на M задана гладкая положительная плотность $d\mu(x)$. Она определяет билинейную форму

$$\langle u, v\rangle = \int u(x)\,v(x)\,d\mu(x), \tag{7.18}$$

определенного, например, если $u \in C_0^\infty(M)$, $v \in C^\infty(M)$.

Т е о р е м а 7.7. *Билинейная форма* (7.18) *при любом* $s \in \mathbb{R}$ *продолжается до спаривания* (*раздельно непрерывного билинейного отображения*)

$$H^s_{\mathrm{comp}}(M) \times H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M) \to \mathbb{C}, \tag{7.19}$$

которое мы будем обозначать по-прежнему $\langle u, v\rangle$. *Пространства* H^s_{comp} *и* H^s_{loc} *сопряжены относительно этого спаривания, т. е. любой линейный непрерывный функционал* $l(u)$ *на* $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ *можно записать в виде* $\langle u, v\rangle$ *при некотором* $v \in H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)$, *а любой линейный непрерывный функционал* $l(v)$ *на* H^{-s}_{loc} *можно записать в виде* $\langle u, v\rangle$, *где* $u \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$. *Если многообразие* M *замкнуто, то отображение, сопоставляющее произвольному* $v \in H^{-s}(M)$ *линейный функционал* $l_v(u) = \langle u, v\rangle$, *является обратимым линейным непрерывным оператором из* $H^{-s}(M)$ *в* $(H^s(M))^*$ (*последнее пространство считается наделенным естественной банаховой топологией*).

Доказательство. 1. Проверим прежде всего возможность продолжения формы (7.18) до спаривания (7.19). Отметим прежде всего, что операторы Λ_s, фигурирующие в определении пространств Соболева, мы можем считать симметричными в смысле заданной плотности, т. е. такими, что $\langle \Lambda_s u, v\rangle = \langle u, \Lambda_s v\rangle$ для любых $v, u \in C_0^\infty(M)$. В самом деле мы можем заменить оператор Λ_s на $\frac{1}{2}(\Lambda_s + {}^t\Lambda_s)$, что не меняет главного символа. Далее, будем считать, что $\Lambda_0 = I$ и оператор Λ_{-s} является параметриксом оператора Λ_s (этого можно добиться, если построить вначале все Λ_s при $s \geqslant 0$, сделав их симметричными, а затем рассмотреть их параметриксы Λ'_{-s} и взять в качестве Λ_{-s} симметризацию Λ'_{-s}: $\Lambda_{-s} = \frac{1}{2}(\Lambda'_{-s} + {}^t\Lambda'_{-s})$).

Из определения топологии в $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ вытекает, что достаточно продолжить форму (7.18) до спаривания

$$H^s(K) \times H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M) \to \mathbb{C}, \tag{7.20}$$

где K — любой компакт в M. Это, очевидно, возможно при $s = 0$. При $s \neq 0$ мы возьмем $u \in C_0^\infty(K)$, $v \in C^\infty(M)$ и запишем u в виде (7.8). Тогда

$$\langle u, v\rangle = \langle \Lambda_{-s}\Lambda_s u - R_s u, v\rangle = \langle \Lambda_s u, \Lambda_{-s} v\rangle - \langle R_s u, v\rangle, \tag{7.21}$$

откуда и следует продолжимость $\langle u, v\rangle$ до спаривания (7.20), поскольку операторы Λ_s и Λ_{-s} задают линейные непрерывные отображения

$$\Lambda_s\colon H^s(K) \to L^2(\hat{K}), \quad \Lambda_{-s}\colon H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M) \to L^2_{\mathrm{loc}}(M).$$

2. Пусть теперь $l(v)$ — линейный непрерывный функционал на $H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)$. Покажем, что его можно записать в виде $l(v) = \langle u, v\rangle$, где $u \in H^s_{\mathrm{comp}}(M)$. Прежде всего, поскольку $C^\infty(M) \subset H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)$, причем вложение непрерывно, то ограничение $l(v)$ на $C^\infty(M)$ можно записать в виде $\langle u, v\rangle$, $u \in \mathscr{E}'(K)$, где K — компакт в M. При этом обобщенная функция u однозначно определена, и остается проверить лишь, что

$u \in H^s(K)$, т. е. что $\Lambda_s u \in L^2(\hat{K})$. Но

$$\langle \Lambda_s u,\, v\rangle = \langle u,\, \Lambda_s v\rangle = l(\Lambda_s v),$$

и поэтому искомое утверждение вытекает из того, что Λ_s непрерывно отображает $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ в $H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)$, а также из теоремы Рисса, обеспечивающей справедливость искомого утверждения при $s=0$.

Аналогично доказывается представимость функционала $l(u)$ на $H^s_{\mathrm{comp}}(M)$ в виде $l(u) = \langle u,\, v\rangle$, где $v \in H^{-s}_{\mathrm{loc}}(M)$.

3. Пусть теперь M — замкнутое многообразие. Проверим, что отображение $v \mapsto l_v(\cdot) = \langle \cdot,\, v\rangle$ является топологическим изоморфизмом $H^{-s}(M)$ на $(H^s(M))^*$. Это, очевидно, верно по теореме Рисса при $s=0$. Рассмотрим случай произвольного $s \in \mathbb{R}$. Поскольку биективность отображения $v \mapsto l_v(\cdot)$ уже доказана в п. 2, достаточно проверить его непрерывность. Но она сразу следует из (7.21). ■

7.8. Упражнения и задачи.

Упражнение 7.1. Проверить, что $\delta(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ при $s < -n/2$.

Упражнение 7.2. Показать, что оператор вложения $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ ни при каких s и s' $(s > s')$ не является компактным.

Упражнение 7.3. Пусть $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор ($\mathbb{Z}^n$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^n$). Если $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ $(= C_0^\infty(\mathbb{T}^n))$, то функцию f можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k e^{ik\cdot x}, \tag{7.22}$$

где f_k — коэффициенты Фурье, задаваемые формулами

$$f_k = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot x} dx. \tag{7.23}$$

Та же формула применима и при $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ $(= \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n))$, если под интегралом в (7.23) понимать значение функционала f на функции $e^{-ik\cdot x}$ (в этом случае ряд (7.22) сходится в слабой топологии $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$).

Показать, что если $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, то условие $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$ равносильно тому, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f_k|^2 (1+|k|^2)^s < +\infty, \tag{7.24}$$

причем левая часть (7.24) определяет квадрат нормы в $H^s(\mathbb{T}^n)$, эквивалентной любой из введенных выше норм.

Упражнение 7.4. Показать, что если A удовлетворяет условиям теоремы 6.4, то при любом $s \in \mathbb{R}$ оператор $A\colon H^s(K) \to H^s(\hat{K})$ является компактным оператором.

Упражнение 7.5. Проверить, что пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ дуальны друг к другу относительно билинейной формы $\langle f,\, g\rangle = \int f(x)\, g(x)\, dx$.

Задача 7.1. Показать, что если N — подмногообразие коразмерности d многообразия M, то отображение ограничения $f \mapsto f|_N$ (определенное a priori для $f \in C^\infty(M)$) продолжается при $s > d/2$ до линейного непрерывного отображения

$$H^s_{\text{loc}}(M) \to H^{s-d/2}_{\text{loc}}(N).$$

Задача 7.2. Показать, что определенное в задаче 7.1 отображение является эпиморфизмом.

§ 8. Фредгольмовость, индекс, спектр

8.1. Простейшие свойства фредгольмовых операторов.

Определение 8.1. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A\colon E_1 \to E_2$ — линейный непрерывный оператор. Будем называть оператор A *фредгольмовым*, если $\dim \operatorname{Ker} A < +\infty$ и $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$ (напомним, что $\operatorname{Ker} A = \{x\colon x \in E_1,\ Ax = 0\}$, $\operatorname{Coker} A = E_2/\operatorname{Im} A$, где $\operatorname{Im} A = AE_1$, а факторпространство понимается в алгебраическом смысле, т. е. без учета топологии). *Индексом* фредгольмова оператора A называется число

$$\operatorname{index} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A. \tag{8.1}$$

Множество всех линейных непрерывных операторов $A\colon E_1 \to E_2$ будем обозначать $\mathscr{L}(E_1, E_2)$.

Множество всех фредгольмовых операторов $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ будем обозначать $\operatorname{Fred}(E_1, E_2)$.

Лемма 8.1. *Пусть $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ и $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$. Тогда $\operatorname{Im} A$ — замкнутое подпространство в E_2.*

Доказательство. Ясно, что $\operatorname{Ker} A$ — замкнутое подпространство в E_1. Поэтому в факторпространстве $E_1/\operatorname{Ker} A$ имеется естественная банахова структура. Оператор A индуцирует непрерывное отображение $A_1\colon E_1/\operatorname{Ker} A \to E_2$, причем $\operatorname{Im} A_1 = \operatorname{Im} A$. Отметим, что $\operatorname{Ker} A_1 = 0$. Теперь обозначим через C любое конечномерное подпространство E_2, для которого $E_2 = \operatorname{Im} A \dotplus C$ (прямая сумма в алгебраическом смысле). Определим оператор

$$\hat{A}\colon E_1/\operatorname{Ker} A \oplus C \to E_2, \tag{8.2}$$

переводящий пару $\{x, c\}$ в $A_1 x + c \in E_2$. Ясно, что A биективен и непрерывен, если пространство слева рассматривать как банахову прямую сумму (например, с нормой $\|\{x, c\}\| = \|x\| + \|c\|$, где $\|c\|$ определяется с помощью произвольной нормы в C). По теореме Банаха оператор $\hat{A}$ будет топологическим изоморфизмом, но отсюда следует, что $\operatorname{Im} A$ замкнут в E_2, ибо подпространство $\hat{A}^{-1}(\operatorname{Im} A) = E_1/\operatorname{Ker} A \oplus 0$ замкнуто в $E_1/\operatorname{Ker} A \oplus C$. ■

Следствие 8.1. *Если* $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$ *и* L_1 *— такое замкнутое подпространство в* E_1, *что* $E_1 = L_1 \dotplus \operatorname{Ker} A$, *то* A *определяет топологический изоморфизм* $A\colon L_1 \to \operatorname{Im} A$.

Отметим, что в случае $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$ подпространство L_1 указанного типа всегда существует, ибо по теореме Хана—Банаха мы можем продолжить тождественное отображение $\operatorname{Ker} A \to \operatorname{Ker} A$ до непрерывного линейного оператора $P_1\colon E_1 \to \operatorname{Ker} A$ и затем положить $L_1 = \operatorname{Ker} P_1$.

Следствие 8.2. *Если* $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ *и* $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$, *то* $\dim \operatorname{Coker} A = \dim \operatorname{Ker} A^*$, *где* A^* *— сопряженный оператор* $A^*\colon E_2^* \to E_1^*$.

Доказательство. Известно (и тривиально), что

$$\operatorname{Ker} A^* = \{f\colon f \in E_2^*,\ \langle f, \operatorname{Im} A\rangle = 0\}.$$

Из замкнутости же $\operatorname{Im} A$ и теоремы Хана—Банаха вытекает, что

$$\operatorname{Im} A = \{x\colon x \in E_2,\ \langle \operatorname{Ker} A^*, x\rangle = 0\},$$

откуда и следует искомая формула. ■

Лемма 8.2. *Пусть* E *— банахово пространство и оператор* $T \in \mathscr{L}(E, E)$ *конечномерен, т. е.* $\dim \operatorname{Im} T < +\infty$. *Тогда оператор* $I + T$ *фредгольмов, причем* $\operatorname{index}(I + T) = 0$.

Доказательство. Легко проверить, что существует разложение $E = L_0 \dotplus L_1$, где L_0 — замкнутое подпространство, $L_0 \subset \operatorname{Ker} T$, $L_1 \supset \operatorname{Im} T$, $\dim L_1 < +\infty$. Тогда $(I + T)|_{L_0} = I|_{L_0}$, $(I + T) L_1 \subset L_1$, так как $TL_1 \subset \operatorname{Im} T \subset L_1$. Таким образом, L_0 и L_1 — инвариантные подпространства для оператора $I + T$, причем $\operatorname{Im}(I + T) \supset L_0$, $\operatorname{Ker}(I + T) \subset L_1$. Поэтому оператор $I + T$ фредгольмов, причем $\operatorname{index}(I + T)$ равен индексу оператора $I + T$, рассматриваемого как оператор из L_1 в L_1, так что дело сводится к тривиальному утверждению из линейной алгебры. ■

Лемма 8.3. *Если* $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, *то существует такой оператор* $B \in \operatorname{Fred}(E_2, E_1)$, *что*

$$BA = I - P_1, \qquad AB = I - P_2, \tag{8.3}$$

где P_1 *— проектор на* $\operatorname{Ker} A$, *а* $I - P_2$ *— проектор на* $\operatorname{Im} A$ (*так что* P_1, P_2 *— конечномерные проекторы*).

Доказательство. Пусть L_1 — замкнутое дополнение к $\operatorname{Ker} A$ в E_1, L_2 — любое дополнение к $\operatorname{Im} A$. Определим оператор B так, чтобы были выполнены условия

$$BA|_{L_1} = I|_{L_1}, \qquad B|_{L_2} = 0.$$

В силу следствря 8.1 ясно, что $B \in \mathscr{L}(E_2, E_1)$. Кроме того, очевидно, что $\operatorname{Ker} B = L_2$, $\operatorname{Im} B = L_1$. Отсюда следует фредгольмовость B. Условия (8.3) проверяются непосредственно. ■

Л е м м а 8.4. *Пусть* $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$, *и существуют такие операторы* $B_1, B_2 \in \mathscr{L}(E_2, E_1)$, *что*

$$B_1 A = I + T_1, \quad AB_2 = I + T_2, \tag{8.4}$$

где T_1, T_2 — *конечномерные операторы. Тогда оператор* A *фредгольмов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из очевидных включений

$$\begin{gathered}\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(B_1 A) = \operatorname{Ker}(I + T_1),\\ \operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im}(AB_2) = \operatorname{Im}(I + T_2),\end{gathered}$$

и леммы 8.2. ■

Л е м м а 8.5. *Пусть* $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, $B \in \operatorname{Fred}(E_2, E_3)$. *Тогда* $BA \in \operatorname{Fred}(E_1, E_3)$, *причем*

$$\operatorname{index} BA = \operatorname{index} A + \operatorname{index} B. \tag{8.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы покажем прежде всего, что существуют такие замкнутые подпространства $L_j \subset E_j$, $j = 1, 2, 3$, что $\operatorname{Ker} A|_{L_1} = 0$, $AL_1 = L_2$, $\operatorname{Ker} B|_{L_2} = 0$, $BL_2 = L_3$, причем $\operatorname{codim} L_j < +\infty$, $j = 1, 2, 3$ *). В самом деле, если L_1' — замкнутое дополнение к $\operatorname{Ker} A$ в E_1, L_2' — замкнутое дополнение к $\operatorname{Ker} B$ в E_2, то мы можем положить

$$L_2 = L_2' \cap \operatorname{Im} A, \quad L_1 = (A|_{L_1'})^{-1}\ (L_2), \quad L_3 = BL_2.$$

Теперь отметим следующий факт: пусть L_1, L_2 — замкнутые подпространства в E_1, E_2, $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, $\operatorname{Ker} A|_{L_1} = 0$ и $AL_1 = L_2$; тогда, если обозначить через $\hat{A}$ отображение $\hat{A}: E_1/L_1 \to E_2/L_2$, индуцированное оператором A, то $\hat{A} \in \operatorname{Fred}(E_1/L_1, E_2/L_2)$ и $\operatorname{index} A = \operatorname{index} \hat{A}$. Поэтому использование построенных выше подпространств $L_j \subset E_j$ позволяет свести доказательство формулы (8.5) к случаю, когда $\dim E_j < +\infty$, $j = 1, 2, 3$, очевидному ввиду того, что если $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ и $\dim E_j < +\infty$, $j = 1, 2$, то $\operatorname{index} A = \dim E_1 - \dim E_2$. ■

П р е д л о ж е н и е 8.1. $\operatorname{Fred}(E_1, E_2)$ *является открытым подмножеством* $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ (*в равномерной операторной топологии, т. е. топологии, определяемой нормой операторов*). *При этом функция*

$$\operatorname{index}\colon \operatorname{Fred}(E_1, E_2) \to \mathbb{Z}$$

непрерывна (*т. е. постоянна на всех связных компонентах* $\operatorname{Fred}(E_1, E_2)$).

---

*) Если L — подпространство E, то по определению $\operatorname{codim} L = \dim(E/L)$ ($\operatorname{codim} L$ называется коразмерностью L в E). Здесь, в частности, имеется в виду, что $\operatorname{codim} L_j = \dim E_j/L_j$, $j = 1, 2, 3$.

В частности, если A_t — *непрерывная (по норме) операторная функция* $t \in [0, 1]$ *со значениями в* $\mathrm{Fred}\,(E_1, E_2)$, *то* $\mathrm{index}\; A_0 = \mathrm{index}\; A_1$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{Fred}\,(E_1, E_2)$. Нужно доказать существование такого числа $\varepsilon > 0$, что если $D \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ и $\|D\| < \varepsilon$, то $A + D \in \mathrm{Fred}\,(E_1, E_2)$ и $\mathrm{index}\,(A + D) = \mathrm{index}\; A$.

Построим такой оператор $B \in \mathscr{L}(E_2, E_1)$, что выполнены условия

$$BA = I + T_1', \quad AB = I + T_2', \tag{8.6}$$

где T_1', T_2' — конечномерные операторы (это возможно по лемме 8.3). Проверим, что можно взять $\varepsilon = \|B\|^{-1}$. В самом деле, пусть тогда $\|D\| < \varepsilon$. Имеем $B(A + D) = I + BD + T_1'$, и если положить $B_1 = (I + BD)^{-1} B$, то $B_1(A + D) = I + T_1$, где T_1 конечномерен. Отметим, что $\mathrm{index}\; B_1 = \mathrm{index}\; B$. Аналогично строится такой оператор B_2, что $(A + D)\, B_2 = I + T_2$, где T_2 конечномерен. По лемме 8.4 оператор $A + D$ фредгольмов. По по леммам 8.5 и 8.2 мы имеем

$$\mathrm{index}\,(A + D) = -\mathrm{index}\; B_1 = -\mathrm{index}\; B = \mathrm{index}\; A. \qquad \blacksquare$$

В дальнейшем через $C(E_1, E_2)$ мы будем обозначать множество компактных линейных операторов из E_1 в E_2.

Лемма 8.6. *Пусть E — банахово пространство, $R \in C(E, E)$. Тогда $I + R \in \mathrm{Fred}\,(E, E)$ и $\mathrm{index}\,(I + R) = 0$.*

Доказательство. Поскольку $I|_{\mathrm{Ker}\,(I+R)} = -R|_{\mathrm{Ker}\,(I+R)}$, то единичный шар в $\mathrm{Ker}\,(I + R)$ компактен, и потому $\dim\,\mathrm{Ker}\,(I + R) < +\infty$. Далее, поскольку оператор R^* также компактен, то $\dim\,\mathrm{Ker}\,(I + R)^* < +\infty$, и для доказательства фредгольмовости $(I + R)$ остается проверить лишь замкнутость $\mathrm{Im}\,(I + R)$ (ибо тогда $\dim\,\mathrm{Coker}\,(I + R) = \dim\,\mathrm{Ker}\,(I + R)^*$).

Пусть $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$ и $y_n = (I + R)\, x_n \to y$ при $n \to +\infty$. Надо доказать существование такого $x \in E$, что $(I + R)\, x = y$. Пусть L — любое замкнутое подпространство, дополняющее $\mathrm{Ker}\,(I + R)$ в E. Добавляя к x_n векторы из $\mathrm{Ker}\,(I + R)$ (что не меняет y_n), мы можем считать, что $x_n \in L$ при всех n.

Покажем, что последовательность x_n тогда будет ограниченной. В самом деле, если это не так, то, заменяя $\{x_n\}$ на подпоследовательность, можно считать, что $\|x_n\| \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Положим тогда $x_n' = x_n / \|x_n\|$, $y_n' = (I + R)\, x_n'$. Имеем $y_n' \to 0$ при $n \to +\infty$, а поскольку $\|x_n'\| = 1$, то можно считать, что существует предел $\lim\limits_{n \to +\infty} R x_n'$. Но тогда существует и $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n' = -\lim\limits_{n \to +\infty} R x_n' = x$, причем ясно, что $\|x\| = 1$, $x \in L$, $(I + R)x = 0$, что противоречит предположению о выборе L.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Но тогда можно считать, что существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} Rx_n$ и, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y - \lim\limits_{n\to+\infty} Rx_n$. Обозначая $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, мы будем иметь, очевидно, $(I+R)\,x = y$, что доказывает замкнутость $\operatorname{Im}(I+R)$ и, значит, фредгольмовость $I+R$.

В силу предложения 8.1 при $t \in [0, 1]$ имеем $\operatorname{index}(I+tR) = \text{const}$, откуда $\operatorname{index}(I+R) = \operatorname{index} I = 0$. ■

Предложение 8.2. *Пусть $A \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ и существуют такие операторы B_1, B_2, что*

$$B_1 A = I + R_1, \quad AB_2 = I + R_2, \tag{8.7}$$

где $R_j \in C(E_j, E_j)$, $j = 1, 2$. Тогда $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$.

Доказательство получается из леммы 8.6 аналогично доказательству леммы 8.4. ■

Предложение 8.3. *Пусть $A \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, $R \in C(E_1, E_2)$. Тогда $A + R \in \operatorname{Fred}(E_1, E_2)$, причем $\operatorname{index}(A+R) = \operatorname{index} A$.*

Доказательство очевидно из предложения 8.2 и лемм 8.5 и 8.6. ■

8.2. Фредгольмовость и индекс эллиптических операторов на замкнутом многообразии.

Теорема 8.1. *Пусть M — замкнутое многообразие, $A \in HL^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. Построим при любом $s \in \mathbb{R}$ оператор $A_s \in \mathscr{L}(H^s(M), H^{s-m}(M))$, являющийся продолжением оператора A по непрерывности.*

Тогда

а) $A_s \in \operatorname{Fred}(H^s(M), H^{s-m}(M))$;

б) $\operatorname{Ker} A_s \subset C^\infty(M)$, *тем самым* $\operatorname{Ker} A_s$ *не зависит от s и будет обозначаться просто* $\operatorname{Ker} A$;

в) $\operatorname{index} A_s$ *не зависит от s (мы будем обозначать его просто* $\operatorname{index} A$) *и выражается формулой*

$$\operatorname{index} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^*, \tag{8.8}$$

где A^* — формально сопряженный ПДО (*см.* § 3) *в смысле скалярного произведения, задаваемого произвольной гладкой плотностью*;

г) *если $D \in L^{m'}_{\rho,\,\delta}(M)$, где $m' < m$, то* $\operatorname{index}(A+D) = \operatorname{index} A$.

Доказательство. По теореме 5.1 можно построить параметрикс $B \in HL^{-m,\,-m}_{\rho,\,\delta}(M)$ оператора A. Операторы $R_j \in L^{-\infty}(M)$ в силу теоремы 7.5 продолжаются до операторов $R_{j,\,s} \in C(H^s(M), H^s(M))$ при любом $s \in \mathbb{R}$. Теперь из предложения 8.2 следует фредгольмовость всех операторов A_s.

Далее, из теоремы 5.2 следует утверждение п. б) теоремы, а поскольку $A^* \in HL^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}$, то мы получаем и утверждение п. в).

Наконец, утверждение п. г) вытекает из предложения 8.3, поскольку если $D \in L^{m'}_{\rho,\,\delta}(M)$, $m' < m$, то $D \in C(H^s(M),\, H^{s-m}(M))$ в силу теоремы 7.5. ■

З а м е ч а н и е 8.1. Утверждение этой теоремы верно, конечно, не только для скалярных операторов, но и для операторов, действующих в сечениях векторных расслоений.

З а м е ч а н и е 8.2. Для классических эллиптических ПДО утверждение п. г) означает, что индекс зависит лишь от главного символа. Из теоремы 6.2 легко вывести, что индекс не меняется при любых непрерывных деформациях главного символа в классе однородных эллиптических символов. Это утверждение важно в теории индекса эллиптических операторов.

8.3. Спектр (простейшие сведения). Пусть M — замкнутое многообразие, $A \in HL^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, $m > 0$. Рассмотрим в пространстве $L^2(M)$ неограниченный линейный оператор, определяемый оператором A, если считать областью определения пространство $H^m(M)$. Мы будем обозначать этот неограниченный оператор через A_0 или иногда просто через A, если не опасна возникающая двусмысленность.

П р е д л о ж е н и е 8.4. *Оператор A_0 замкнут, т. е. если $u_n \in H^m(M)$, $n = 1, 2, \ldots$, и в $L^2(M)$ существуют пределы $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ и $f = \lim\limits_{n\to\infty} Au_n$, то $u \in H^m(M)$ и $Au = f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку из сходимости в $L^2(M)$ следует сходимость в $\mathscr{D}'(M)$, а оператор A непрерывен в $\mathscr{D}'(M)$ (в смысле, например, слабой топологии), то мы имеем $Au = f$, а тогда $u \in H^m(M)$ в силу теоремы 7.2. ■

Из того, что $C^\infty(M)$ плотно в $H^m(M)$ (в топологии $H^m(M)$), вытекает

С л е д с т в и е 8.3. *Оператор A_0 является замыканием (в $L^2(M)$) оператора $A|_{C^\infty(M)}$.*

О п р е д е л е н и е 8.2. *Спектр* оператора A — это подмножество $\sigma(A)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определяемое так: если $\lambda \in \mathbb{C}$, то условие $\lambda \notin \sigma(A)$ равносильно тому, что оператор $A_0 - \lambda I$ имеет в $L^2(M)$ ограниченный всюду определенный обратный $(A_0 - \lambda I)^{-1}$.

Легко проверяется, что $\sigma(A)$ — замкнутое подмножество $\mathbb{C}$, причем $(A_0 - \lambda I)^{-1}$ — голоморфная операторная функция от λ на $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ со значениями в $\mathscr{L}(L^2(M),\, L^2(M))$. Эта функция $R_\lambda = (A_0 - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A.

Предложение 8.5. *Пусть на M фиксирована гладкая положительная плотность $d\mu(x)$. Тогда условие $\lambda \notin \sigma(A)$ равносильно тому, что* $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)=\mathrm{Ker}\,(A^*-\bar{\lambda}I)=0$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 8.1, поскольку $(A-\lambda I)\in HL^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}$ ввиду условия $m>0$. ■

Теорема 8.2 (Теорема об обратном операторе). *Пусть $A\in$ $\in L^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}(M)$, $1-\rho\leqslant\delta<\rho$, $m>0$ и оператор A_0 построен по A, как описано выше. Пусть $\lambda\notin\sigma(A)$. Тогда оператор $(A_0-\lambda I)^{-1}$ является продолжением по непрерывности (с $C^\infty(M)$) или ограничением (с $\mathscr{D}'(M)$) оператора из $HL^{-m,\,-m}_{\rho,\,\delta}(M)$ (мы будем обозначать его $(A-\lambda I)^{-1}$). В частности, оператор $(A_0-\lambda I)^{-1}$ компактен в $L^2(M)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\lambda=0$. Пусть $B\in HL^{-m,\,-m}_{\rho,\,\delta}(M)$, B — параметрикс оператора A. В частности,

$$AB=I-R, \tag{8.9}$$

где R — оператор с гладким ядром $R(x,\,y)$ (считаем для простоты фиксированной гладкую положительную плотность на M, тогда ядро $R(x,\,y)$ — это обычная функция на $M\times M$).

Из (8.9) следует, что

$$A^{-1}=B+A^{-1}R, \tag{8.10}$$

и остается проверить, что $A^{-1}R$ — это оператор с гладким ядром. Но оператор A^{-1} по теореме 7.2 отображает $H^s(M)$ в $H^{s+m}(M)$ при любом $s\in\mathbb{R}$, и притом непрерывно по теореме о замкнутом графике. По теореме вложения 7.6 оператор A^{-1} непрерывно отображает $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$. Но тогда оператор $A^{-1}R$ задается гладким ядром $R_1(x,\,y)$, где $R_1(x,\,y)=[A^{-1}R(\cdot,\,y)]\,(x)$. ■

Теорема 8.3. *Пусть на замкнутом многообразии M фиксирована гладкая положительная плотность $d\mu(x)$, $A\in HL^{m,\,m}_{\rho,\,\delta}(M)$, $1-\rho\leqslant\delta<\rho$ и $m>0$. Пусть $A^*=A$. Тогда A_0 — самосопряженный оператор в $L^2(M)$, причем в $L^2(M)$ существует полная ортонормированная система $\{\varphi_j\}$, $j=1,\,2,\,\ldots$, собственных функций оператора A_0. При этом $\varphi_j\in C^\infty(M)$, $A\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$, собственные значения λ_j вещественны и $|\lambda_j|\to+\infty$ при $j\to+\infty$. Спектр $\sigma(A)$ совпадает с множеством всех собственных значений.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$ ввиду предложения 8.5, поскольку оператор A симметричен на $C^\infty(M)$ и не может иметь там невещественных собственных значений.

Покажем теперь, что $\sigma(A)\neq\mathbb{R}$. Если бы было $\sigma(A)=\mathbb{R}$, то для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ можно было бы указать такую функцию $\varphi_\lambda\in C^\infty(M)$, что

$A\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$ и $\|\varphi_\lambda\| = 1$. Но тогда $(\varphi_\lambda, \varphi_\mu) = 0$ при $\lambda \neq \mu$ из-за симметричности A, что противоречит сепарабельности $L^2(M)$.

Возьмем теперь $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$. По теореме 8.2 оператор $R_{\lambda_0} = (A - \lambda_0 I)^{-1}$ является компактным самосопряженным оператором в $L^2(M)$. По известной теореме функционального анализа он имеет ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ из собственных функций, причем если r_j — собственные значения, то $r_j \to 0$ при $j \to +\infty$.

Заметим теперь, что $r_j \neq 0$ (так как $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)^{-1} = 0$). Поэтому условие $R_{\lambda_0}\varphi_j = r_j\varphi_j$ можно переписать в виде

$$(A - \lambda_0 I)\,\varphi_j = r_j^{-1}\varphi_j$$

или

$$A\varphi_j = (r_j^{-1} + \lambda_0)\,\varphi_j. \tag{8.11}$$

Из (8.11) ясно, что $\varphi_j \in C^\infty(M)$ и φ_j — собственные функции оператора A с собственными значениями $\lambda_j = r_j^{-1} + \lambda_0$. Очевидно, что $|\lambda_j| \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Остальные утверждения теоремы 8.3 очевидны. Факт совпадения спектра $\sigma(A)$ с множеством $\{\lambda_j\}$ следует из предложения 8.5, а самосопряженность оператора A — из представления $A = R_{\lambda_0}^{-1} + \lambda_0 I$. ■

Следующая теорема распространяет одно из утверждений теоремы 8.3 на несамосопряженный случай.

Т е о р е м а 8.4. *Пусть* $A \in HL_{\rho,\delta}^{m,m}(M)$, $1 - \rho \leqslant \delta < \rho$ *и* $m > 0$. *Тогда для спектра* $\sigma(A)$ *выполнена одна из следующих двух возможностей*:

а) $\sigma(A) = \mathbb{C}$ (*это, в частности, так, если* $\operatorname{index} A \neq 0$);

б) $\sigma(A)$ — *дискретное* (*быть может, пустое*) *подмножество* $\mathbb{C}$ (*подмножество без предельных точек*).

При этом, если справедливо б) *и* $\lambda_0 \in \sigma(A)$, *то существует такое разложение* $L^2(M) = E_{\lambda_0} \dotplus E'_{\lambda_0}$, *что выполнены условия*:

1) $E_{\lambda_0} \subset C^\infty(M)$, $\dim E_{\lambda_0} < +\infty$, E_{λ_0} — *инвариантное подпространство для оператора* A, *причем существует такое натуральное* $N > 0$, *что* $(A - \lambda_0 I)^N E_{\lambda_0} = 0$ (*иными словами, оператор* $A|_{E_{\lambda_0}}$ *имеет своим собственным значением лишь* λ_0 *и подобен прямой сумме жордановых клеток порядков* $\leqslant N$);

2) E'_{λ_0} — *замкнутое подпространство в* $L^2(M)$, *инвариантное относительно* A_0 (*т. е.* $A(D_{A_0} \cap E'_{\lambda_0}) \subset E'_{\lambda_0}$), *причем если через* A'_{λ_0} *обозначить ограничение* $A_0|_{E'_{\lambda_0}}$ (*понимаемое как неограниченный оператор в* E'_{λ_0} *с областью определения* $D_{A_0} \cap E'_{\lambda_0}$), *то оператор* $A'_{\lambda_0} - \lambda_0 I$ *имеет ограниченный обратный* (*или, иными словами,* $\lambda_0 \notin \sigma(A|_{E'_{\lambda_0}})$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$. Докажем, что $\sigma(A)$ — дискретное подмножество $\mathbb{C}$. Существует точка $\lambda_0 \notin \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Без ущерба для общности можно предположить, что $\lambda_0 = 0$, так что оператор A_0

имеет по теореме 8.2 компактный обратный оператор A_0^{-1}. Но ввиду соотношения $A_0 - \lambda I = (I - \lambda A_0^{-1})\, A_0$ включение $\lambda \in \sigma(A)$ равносильно тому, что $\lambda \neq 0$ и $\lambda^{-1} \in \sigma(A_0^{-1})$. Дискретность $\sigma(A)$ вытекает теперь из того, что $\sigma(A_0^{-1})$ может иметь точкой накопления лишь 0.

2. Пусть $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Опять-таки можно без ущерба для общности считать, что $\lambda_0 = 0$. Пусть Γ_0 — контур в плоскости $\mathbb{C}$, обходящий 0 и не содержащий внутри себя других точек $\sigma(A)$ (например, окружность достаточно малого радиуса с центром в точке 0). Рассмотрим оператор

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} R_\lambda \, d\lambda. \tag{8.12}$$

Стандартное рассуждение (см. Рисс, Секефальви-Надь [1], гл. XI) показывает, что P_0 — проектор, конечномерный в силу компактности R_λ, перестановочный со всеми операторами R_λ (и с оператором A_0 в том смысле, что $P_0 A_0 \subset A_0 P_0$) и такой, что если $E_{\lambda_0} = P_0(L^2(M))$, $E'_{\lambda_0} = (I - P_0)\,(L^2(M))$, то выполнены заключения 1) и 2) теоремы 8.4.

Мы предоставляем читателю в виде упражнения все относящиеся сюда детали. Отметим лишь, что включение $E_{\lambda_0} \subset C^\infty(M)$ вытекает из того, что $A_0^N E_{\lambda_0} = 0$, если принять во внимание эллиптичность A и воспользоваться теоремой регулярности 5.2. ■

8.4. Задачи.

Задача 8.1. Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство, $\pi_0(\mathrm{Fred}\,(E, E))$ — множество связных компонент пространства $\mathrm{Fred}\,(E, E)$, наделенное полугрупповой структурой, индуцированной умножением операторов. Показать, что взятие индекса задает изоморфизм

$$\mathrm{index}\colon \pi_0(\mathrm{Fred}\,(E, E)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

Указание. Оператор A индекса 0 может быть записан в виде $A = A_0 + T$, где A_0 обратим, а T конечномерен. Доказать (с помощью полярного разложения) и использовать связность группы всех обратимых операторов в E.

Во всех следующих задачах M — замкнутое многообразие, $1 - \rho \leqslant \delta < \rho$ и $m > 0$.

Задача 8.2. Пусть $A \in HL^{m,\, m_0}_{\rho,\, \delta}(M)$. Доказать, что A — фредгольмов оператор в $C^\infty(M)$, т. е. $\dim \mathrm{Ker}\, A < +\infty$, $AC^\infty(M)$ замкнуто в $C^\infty(M)$ и $\dim \mathrm{Coker}\, A < +\infty$, где $\mathrm{Coker}\, A = C^\infty(M)/AC^\infty(M)$. Показать, что $AC^\infty(M)$ состоит из всех $f \in C^\infty(M)$, для которых $(f, g) = 0$ при любом $g \in \mathrm{Ker}\, A^*$ (здесь (f, g) — скалярное произведение, задаваемое гладкой положительной плотностью, и A^* — сопряженный ПДО относительно этого скалярного произведения).

Задача 8.3. Пусть $A \in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(M)$ и $m_0 > 0$. Пусть на M задана гладкая положительная плотность, определяющая скалярное произведение (f, g) и формально сопряженный ПДО A^*. Предположим, что $A = A^*$. Доказать, что оператор A_0, являющийся замыканием оператора $A|_{C^\infty(M)}$, самосопряжен в гильбертовом смысле в пространстве $L^2(M)$.

Задача 8.4. Пусть $A \in HL^{m,m_0}_{\rho,\delta}(M)$, A^* — формально сопряженный ПДО, A_0, A_0^* — замыкания $A|_{C^\infty(M)}$ и $A^*|_{C^\infty(M)}$ в $L^2(M)$. Доказать, что A_0 и A_0^* сопряжены в гильбертовом смысле в пространстве $L^2(M)$.

Указание. Рассмотреть матричный ПДО $\mathfrak{A}$ вида

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 8.5. Привести пример оператора $A \in HL^{m,m}_{1,0}(M)$, для которого $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Задача 8.6. Пусть дана последовательность гильбертовых пространств E_j и линейных непрерывных операторов d_j:

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{N-2}} E_{N-1} \xrightarrow{d_{N-1}} E_N \xrightarrow{d_N} 0. \tag{8.13}$$

Эта последовательность называется *комплексом*, если $d_{j+1} \circ d_j = 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots, N-2$. Положим

$$Z^j = \operatorname{Ker} d_j, \quad B^j = \operatorname{Im} d_{j-1}, \quad H^j = Z^j/B^j, \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

(если (8.13) — комплекс, то $B^j \subset Z^j$). Пространства H^j называются *когомологиями* комплекса (8.13). Комплекс называется *фредгольмовым*, если $\dim H^j < +\infty$ при всех $j = 0, 1, \ldots, N$.

а) Доказать, что если комплекс (8.13) фрегольмов, то B^j — замкнутые подпространства в Z^j.

б) Пусть $\Delta_j = \delta_j d_j + d_{j-1}\delta_{j-1}$, где $\delta_j = d_j^*$. Операторы Δ_j называются *лапласианами* комплекса (8.13) (или операторами Лапласа—Ходжа). Положим $\Gamma^j = \operatorname{Ker} \Delta_j$. Доказать, что для фредгольмовости комплекса (8.13) необходимо и достаточно, чтобы все Δ_j были фредгольмовыми операторами в E_j, $j = 0, 1, \ldots, N$. При этом

$$\dim H^j = \dim \Gamma^j.$$

Точнее, $\Gamma^j \subset Z^j$, причем отображение $\Gamma^j \to H^j$, индуцированное канонической проекцией $Z^j \to H^j$, является изоморфизмом (в случае фредгольмова комплекса).

в) Положим теперь

$$\chi(E)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j \dim H^j$$

(*эйлерова характеристика* фредгольмова комплекса E). Доказать, что если $N=1$, то эйлерова характеристика комплекса $0\to E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \to 0$ есть просто индекс оператора d_0.

Доказать, что если $\dim E_j<+\infty$, $j=0, 1, \ldots, N$, то

$$\chi(E)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j \dim E_j.$$

г) Доказать, что $\chi(E)$ не меняется при равномерной деформации всех операторов d_j, если в процессе этой деформации последовательность (8.13) все время остается фредгольмовым комплексом.

З а д а ч а 8.7. Пусть V_j $(j=0, 1, \ldots, N)$ — векторные расслоения над замкнутым многообразием M, $H^s(M, V_j)$ — соболевские пространства их сечений над M. Пусть $d_j\colon C^\infty(M, V_j)\to C^\infty(M, V_{j+1})$ — классические ПДО одинаковых порядков m. Пусть $T_0^*(M)$ — кокасательное расслоение на M без нулевого сечения, $\pi_0\colon T_0^*M\to M$ — естественная проекция. Предположим, что отображения

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} C^\infty(M, V_0) \xrightarrow{d_0} C^\infty(M, V_1) \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{N-1}} C^\infty(M, V_N) \xrightarrow{d_N} 0 \quad (8.14)$$

образуют комплекс. Пусть $\sigma^0_{d_j}\colon \pi_0^*V_j\to\pi_0^*V_{j+1}$ — главные символы операторов d_j (однородные функции по ξ порядка m). Комплекс (8.14) называется *эллиптическим*, если последовательность расслоений

$$0\to\pi_0^*V_0 \xrightarrow{\sigma^0_{d_0}} \pi_0^*V_1 \xrightarrow{\sigma^0_{d_1}} \ldots \xrightarrow{\sigma^0_{d_{N-1}}} \pi_0^*V_N\to 0$$

точна (т. е. точны последовательности векторных пространств над каждой точкой $(x, \xi)\in T_0^*M$).

а) Доказать, что эллиптичность комплекса (8.14) равносильна эллиптичности всех лапласианов $\Delta_j=\delta_j d_j+d_{j-1}\delta_{j-1}$, где δ_j — ПДО, сопряженный к d_j при каком-нибудь введении плотности на M и метрики в расслоениях V_j.

б) Доказать, что если (8.14) — эллиптический комплекс, то при любом $s\in\mathbb{R}$ комплекс

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} H^s(M, V_0) \xrightarrow{d_0} H^{s-m}(M, V_1) \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{N-1}} H^{s-Nm}(M, V_n) \xrightarrow{d_N} 0$$

является фредгольмовым, причем размерности его когомологий (и, следовательно, эйлерова характеристика) не зависят от s. Сами когомологии можно определить также как когомологии комплекса (8.14), т. е. положить

$$H^j = \mathrm{Ker}\ d_j|_{C^\infty(M,V_j)}/d_{j-1}(C^\infty(M,\ V_{j-1})).$$

З а д а ч а 8.8. Показать, что комплекс де Рама над n-мерным вещественным многообразием M

$$0 \to \Lambda^0(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Lambda^n(M) \to 0$$

($\Lambda^j(M)$ — пространство гладких внешних j-форм над M, d — внешний дифференциал) и комплекс Дольбо над комплексным многообразием M комплексной размерности n

$$0 \to \Lambda^{p,\,0}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{p,\,1}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{p,\,n}(M) \to 0$$

($\Lambda^{p,\,q}(M)$ — пространство гладких форм типа $(p,\ q)$ на M, $\bar\partial$ — оператор Коши—Римана—Дольбо) являются эллиптическими комплексами.

Вывести отсюда конечномерность когомологий де Рама и Дольбо в случае, когда M замкнуто.

ГЛАВА II

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 9. Псевдодифференциальные операторы с параметром. Резольвента

9.1. Определение и простейшие свойства. Пусть Λ — некоторое подмножество комплексной плоскости (в приложениях это, как правило, угол с вершиной в точке 0). В спектральной теории полезно рассматривать операторы, зависящие от параметра $\lambda \in \Lambda$ (примером такого оператора является резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$).

Мы введем вначале необходимые классы символов.

Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, и пусть на $X \times \mathbb{R}^N \times \Lambda$ задана функция $a(x, \theta, \lambda)$, $x \in X$, $\theta \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \Lambda$.

Определение 9.1. Пусть m, ρ, δ, d — действительные числа, причем $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, $0 < d < +\infty$. *Класс* $S^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X \times \mathbb{R}^N, \Lambda)$ состоит из таких функций $a(x, \theta, \lambda)$, что

1) $a(x, \theta, \lambda_0) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ при каждом фиксированном $\lambda_0 \in \Lambda$;

2) для любых мультииндексов α, β и для любого компакта $K \subset X$ существуют такие постоянные $C_{\alpha,\beta,K}$, что при $x \in K$, $\theta \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \Lambda$ справедлива оценка

$$|\partial_\theta^\alpha\, \partial_x^\beta a(x, \theta, \lambda)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1 + |\theta| + |\lambda|^{1/d})^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{9.1}$$

Как обычно, мы полагаем

$$S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N, \Lambda) = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X \times \mathbb{R}^N, \Lambda)$$

(правая часть не зависит от ρ, δ и d).

Если $a(x, y, \xi, \lambda) \in S^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X \times X \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$, то по функции $a(x, y, \xi, \lambda)$ можно построить ПДО A_λ, зависящий от параметра $\lambda \in \Lambda$:

$$(A_\lambda u)(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi, \lambda)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{9.2}$$

$u \in C_0^\infty(X)$. Мы будем писать в этом случае, что

$$A_\lambda \in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X, \Lambda).$$

Отметим, что $A_\lambda \in L^{-\infty}(X, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном $\lambda \in \Lambda$ оператор A_λ имеет гладкое ядро $K_\lambda(x, y)$ и существуют такие постоянные $C^{(N)}_{\alpha,\beta,K}$ (K — компакт в X, α, β —

мультииндексы, N — натуральное число), что выполнены оценки

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_\lambda(x, y)| \leqslant C^{(N)}_{\alpha, \beta, K}(1+|\lambda|)^{-N}, \quad x, y \in K. \tag{9.3}$$

Многие из утверждений о ПДО без параметра (см. §§ 3–7) могут быть доказаны с учетом зависимости от λ. Мы укажем сейчас несколько таких утверждений, необходимых для дальнейшего.

Прежде всего, заметим, что на символы, зависящие от параметра, переносится вся теория асимптотического суммирования (определение 3.4 и предложения 3.5 и 3.6). Соответствующие формулировки получаются заменой $S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ на $S^m_{\rho,\delta;d}(X \times \mathbb{R}^N, \Lambda)$, а доказательства, получающиеся почти дословным повторением рассуждений п. 3.3, предоставляются читателю в виде упражнения. Укажем лишь, что роль $\langle\theta\rangle$ в этих доказательствах (как и в дальнейшем) играет здесь $(1+|\theta|^2+|\lambda|^{2/d})^{1/2}$.

Далее, будем называть оператор $A_\lambda \in L^m_{\rho,\delta;d}(X, \Lambda)$ *собственным*, если он собственный равномерно по λ, т. е. существует такое замкнутое множество $L \subset X \times X$, имеющее собственные проекции на оба сомножителя в $X \times X$, что $\operatorname{supp} K_{A_\lambda} \subset L$ при всех $\lambda \in \Lambda$.

Отметим, что всякий оператор $A \in L^m_{\rho,\delta;d}(X, \Lambda)$ может быть разложен в сумму $A = A_1 + R_1$, где оператор A_1 (зависящий от параметра) является собственным в описанном смысле, а $R_1 \in L^{-\infty}_{\rho,\delta;d}(X, \Lambda)$. Для собственных, зависящих от параметра ПДО A_λ определен символ $\sigma_{A_\lambda}(x, \xi) = \sigma_A(x, \xi, \lambda)$, для которого верна теорема типа 3.1. Разумеется, формулу (3.21) надо понимать с учетом параметра, т. е.

$$\sigma_A(x, \xi, \lambda) - \sum_{|\alpha| \leqslant N-1} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi, \lambda)|_{y=x} \in S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta;d}(X \times \mathbb{R}^n, \Lambda).$$

Аналогично обобщаются теоремы 3.2—3.4 о транспонированном и сопряженном операторах и о композиции.

Упражнение 9.1. Провести аккуратно все рассуждения § 3 для случая символов и операторов, зависящих от параметра.

Далее, повторяя рассуждения § 4, можно при $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ ввести классы $L^m_{\rho,\delta;d}(M, \Lambda)$ на многообразии M. Перейдем теперь к рассмотрению гипоэллиптичности и эллиптичности.

Введем класс $HS^{m, m_0}_{\rho,\delta;d}(X \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$ символов $\sigma(x, \xi, \lambda)$ (мы будем называть их *гипоэллиптическими с параметром*), принадлежащих $S^m_{\rho,\delta;d}(X \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$ и удовлетворяющих оценкам

$$C_1(|\xi|+|\lambda|^{1/d})^{m_0} \leqslant |\sigma(x, \xi, \lambda)| \leqslant C_2(|\xi|+|\lambda|^{1/d})^m, \tag{9.4}$$

$x\in K$ (K — компакт в X), $|\xi|+|\lambda|\geqslant R$, $C_1>0$, R, C_1, C_2 могут зависеть от K;

$$\left|\left[\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\sigma(x,\,\xi,\,\lambda)\right]\sigma^{-1}(x,\,\xi,\,\lambda)\right|\leqslant C_{\alpha,\,\beta,\,K}(|\xi|+|\lambda|^{1/d})^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\tag{9.5}$$

$x\in K$, $|\xi|+|\lambda|\geqslant R$ (здесь, как и выше, R может зависет от K).

Через $HL^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta;\,d}(X,\,\Lambda)$ будем обозначать класс собственных ПДО (зависящих от параметра $\lambda\in\Lambda$), символы которых принадлежат $HS^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta;\,d}(X\times\mathbb{R}^n,\,\Lambda)$. Имеет место аналог теоремы 5.1: если $A_\lambda\in$ $\in HL^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta;\,d}(X,\,\Lambda)$, то существует такой оператор $B_\lambda\in HL^{-m_0,\,-m}_{\rho,\,\delta;\,d}(X,\,\Lambda)$, называемый *параметриксом* оператора A_λ, что

$$B_\lambda A_\lambda=I+R'_\lambda,\qquad A_\lambda B_\lambda=I+R''_\lambda,\tag{9.6}$$

где R'_λ, $R''_\lambda\in L^{-\infty}(X,\,\Lambda)$. Это же утверждение верно и в случае, когда X — многообразие.

Упражнение 9.2. Доказать только что сформулированный аналог теоремы 5.1.

Естественно рассмотреть еще классические ПДО, зависящие от параметра. Соответствующие символы $a(x,\,\xi,\,\lambda)$ допускают асимптотические разложения (при $|\xi|+|\lambda|^{1/d}\geqslant 1$) вида

$$a(x,\,\xi,\,\lambda)\sim\sum_{j=0}^{+\infty}a_{m-j}(x,\,\xi,\,\lambda),\tag{9.7}$$

где $a_{m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ положительно однородна по $(\xi,\,\lambda^{1/d})$ порядка $m-j$, т. е.

$$a_{m-j}(x,\,t\xi,\,t^d\lambda)=t^{m-j}a_{m-j}(x,\,\xi,\,\lambda),\tag{9.8}$$

если $t>0$, $\lambda\in\Lambda$ и $t^d\lambda\in\Lambda$. Здесь m может быть любым комплексным числом. Этот класс символов будем обозначать через $CS^m_d(X\times\mathbb{R}^n,\,\Lambda)$, а соответствующий класс операторов — через $CL^m_d(X,\,\Lambda)$. Этот класс устойчив относительно взятия композиции, транспонированного и сопряженного операторов.

Оператор $A_\lambda\in CL^m_d(X,\,\Lambda)$ мы будем называть *эллиптическим с параметром*, если он собственный и

$$a_m(x,\,\xi,\,\lambda)\neq 0\quad\text{при}\quad x\in X\text{ и }|\xi|+|\lambda|^{1/d}\neq 0.\tag{9.9}$$

Отсюда очевидным образом следует включение $A_\lambda\in HL^{m,\,m}_{1,\,0;\,d}(X,\,\Lambda)$.

У классического эллиптического оператора с параметром существует параметрикс $B_\lambda\in CL^{-m}_d(X,\,\Lambda)$, также являющийся эллиптическим оператором с параметром.

Пример 9.1. Пусть A — дифференциальный оператор в X порядка m, I — тождественный оператор. Тогда $A-\lambda I\in CL^m_m(X, \mathbb{C})$, причем главный символ здесь дается формулой

$$a_m(x, \xi, \lambda)=a_m(x, \xi)-\lambda, \tag{9.10}$$

где $a_m(x, \xi)$ — главный символ оператора A. Если Λ — такой замкнутый угол в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с вершиной в точке 0, что $a_m(x, \xi)$ при $|\xi|=1$ не принимает значений в Λ, то оператор $A-\lambda I$ эллиптичен с параметром (и, в частности, принадлежит $HL^{m,\,m}_{1,\,0;\,m}(X,\ \Lambda)$).

9.2. Нормы операторов с параметром. Мы будем рассматривать в этом пункте два варианта операторов с параметром:

1) операторы A_λ в $\mathbb{R}^n$, у которых $\operatorname{supp} K_{A_\lambda}$ лежит в фиксированном компакте $\hat{K}\subset\mathbb{R}^{2n}$ (при этом $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$);

2) операторы на замкнутом многообразии M (при этом, как всегда, предполагается, что $1-\rho\leqslant\delta<\rho$).

В дальнейшем мы будем писать $A_\lambda\in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X, \Lambda)$, имея в виду, что $X=\mathbb{R}^n$ или $X=M$ и выполнены условия 1) или 2).

Обозначим через $\|A\|_{s,\,s-l}$ норму оператора A, рассматриваемого как оператор из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-l}(\mathbb{R}^n)$ или из $H^s(M)$ в $H^{s-l}(M)$ (здесь s, l — вещественные числа). Наша цель — изучить зависимость $\|A_\lambda\|_{s,\,s-l}$ от λ при больших $|\lambda|$.

Теорема 9.1. *Пусть* $A_\lambda\in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X, \Lambda)$, $l\geqslant m$ *и* $s, l\in\mathbb{R}$. *Пусть одно из чисел* δ, s, $s-l$ *равно* 0. *Тогда*

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-l}\leqslant C_{s,\,l}(1+|\lambda|^{1/d})^m, \quad \text{если} \quad l\geqslant 0, \tag{9.11}$$

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-l}\leqslant C_{s,\,l}(1+|\lambda|^{1/d})^{-(l-m)}, \quad \text{если} \quad l\leqslant 0. \tag{9.12}$$

Следствие 9.1. *Если* $A_\lambda\in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X, \Lambda)$, *где* $m\leqslant 0$, *то*

$$\|A_\lambda\|\leqslant C(1+|\lambda|^{1/d})^m, \tag{9.13}$$

где $\|A_\lambda\|$ *означает операторную норму* A_λ *в* $L^2(X)$.

Лемма 9.1 (Лемма Шура). *Если* A — *оператор с таким интегральным ядром* K_A, *что*

$$\sup_x\int|K_A(x, y)|\,dy\leqslant C, \quad \sup_y\int|K_A(x, y)|\,dx\leqslant C,$$

то

$$\|A\colon L^2\to L^2\|\leqslant C.$$

(*Эта лемма верна для интегральных операторов в* L^2 *на любом пространстве с мерой и даже для интегральных операторов* $L^2(Y)\to\to L^2(X)$ *для любых пространств с мерой* X, Y.)

Доказательство. Согласно неравенству Коши—Буняковского мы получаем

$$|Au(x)|^2 \leqslant \left(\int |K_A(x, y)||u(y)|\,dy\right)^2 =$$
$$= \left(\int |K_A(x, y)|^{1/2}|K_A(x, y)|^{1/2}|u(y)|\,dy\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int |K_A(x, y)|\,dy \int |K_A(x, y)||u(y)|^2\,dy \leqslant C \int |K_A(x, y)||u(y)|^2\,dy.$$

Интегрируя по x и меняя порядок интегрирований, мы получаем требуемую оценку нормы. ■

Доказательство теоремы 9.1. 1. Отметим прежде всего, что разбиение единицы сводит случай $X = M$ к случаю $X = \mathbb{R}^n$, который мы будем сейчас рассматривать.

2. Рассмотрим вначале случай $s = l = m = 0$. Утверждение теоремы сводится к оценке

$$\|A_\lambda\| \leqslant C, \tag{9.14}$$

доказательство которой получается дословным повторением расуждений § 6 (мы рекомендуем читателю проделать это в качестве упражнения). Отметим здесь, что оценку (9.14) можно было бы доказать, прямо используя результаты § 6, если бы постоянные

$$C_{\alpha,\beta}(\lambda) = \sup_{x,\xi} |\partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta a(x, \xi, \lambda)|\, \langle\xi\rangle^{\rho|\alpha| - \delta|\beta|} \tag{9.15}$$

были ограничены при $|\lambda| \to +\infty$. Это, очевидно, вытекает из оценок (9.1) при $\delta = 0$, но при $\delta > 0$ часть констант $C_{\alpha,\beta}(\lambda)$ может расти при $|\lambda| \to +\infty$. Поэтому при $\delta > 0$ здесь действительно необходимо повторение рассуждений § 5.

3. Рассмотрим теперь в $\mathbb{R}^n$ стандартную операторную функцию $\Phi_m(\lambda) \in L^m_{1,0;d}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ с символом $\varphi_m(x, \xi, \lambda) = (1 + |\xi|^2 + |\lambda|^{2/d})^{m/2}$. Этот ПДО с параметром будет нам полезен, хотя он и не удовлетворяет условию 1).

Оценим норму $\Phi_m(\lambda)$. Оператор $\Phi_m(0)$ осуществляет изометрический изоморфизм $H^m(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\|\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l} = \|\Phi_{s-l}(0)\,\Phi_m(\lambda)\,\Phi_{-s}(0)\|.$$

Но $\Phi_{s-l}(0)\,\Phi_m(\lambda)\,\Phi_{-s}(0) = \Phi_m(\lambda)\,\Phi_{-l}(0)$ есть просто оператор умножения преобразования Фурье $\tilde{u}(\xi)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ на функцию $(1 + |\xi|^2 + |\lambda|^{2/d})^{m/2}(1 + |\xi|^2)^{-l/2}$, и его норма поэтому равна

$$\psi_{ml}(\lambda) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2 + |\lambda|^{2/d})^{m/2}(1 + |\xi|^2)^{-l/2}.$$

Имеем, очевидно,

$$\psi_{ml}(\lambda) \leqslant C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi| + |\lambda|^{1/d})^m (1 + |\xi|)^{-l},$$

где C зависит лишь от m и l (но не от λ).

Теперь из легко проверяемого соотношения

$$\sup_{x \geqslant 0} (1 + x + t)^m (1 + x)^{-l} = \begin{cases} (1+t)^m, & \text{если} \quad l \geqslant 0, \\ C_{ml} t^{m-l}, & \text{если} \quad l \leqslant 0 \quad \text{и} \quad t \geqslant R_{ml} \end{cases}$$

(всюду подразумевается, что $m \leqslant l$), вытекает, что

$$\psi_{ml}(\lambda) \leqslant C_{ml} (1 + |\lambda|^{1/d})^m, \qquad \text{если} \quad l \geqslant 0,$$
$$\psi_{ml}(\lambda) \leqslant C_{ml} (1 + |\lambda|^{1/d})^{m-l}, \qquad \text{если} \quad l \leqslant 0,$$

т. е. для $\Phi_m(\lambda)$ справедлива одна из оценок норм (9.11), (9.12), как утверждается в формулировке теоремы.

4. Рассмотрим теперь общий случай $A_\lambda \in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(\mathbb{R}^n, \Lambda)$. Имеем, очевидно,

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-l} = \|\Phi_m(\lambda) \cdot (\Phi_{-m}(\lambda) \cdot A_\lambda)\|_{s,\,s-l} \leqslant \\ \leqslant \|\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l} \cdot \|\Phi_{-m}(\lambda) A_\lambda\|_{s,\,s} \tag{9.16}$$

и аналогично

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-l} = \|(A_\lambda \Phi_{-m}(\lambda)) \Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l} \leqslant \\ \leqslant \|A_\lambda \cdot \Phi_{-m}(\lambda)\|_{s-l,\,s-l} \|\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l}. \tag{9.17}$$

Учитывая уже доказанную оценку нормы $\|\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l}$, мы видим, что для окончания доказательства теоремы при $s = 0$ или $s - l = 0$ достаточно проверить, что

$$\|\Phi_{-m}(\lambda) A_\lambda\| \leqslant C, \qquad \|A_\lambda \cdot \Phi_{-m}(\lambda)\| \leqslant C. \tag{9.18}$$

5. Определим $\tilde{\Phi}_{-m}(\lambda)$ как оператор с ядром Л. Шварца, полученным с помощью умножения ядра оператора $\Phi_{-m}(\lambda)$ на $\varphi(x - y)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ в окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\tilde{\Phi}_{-m}(\lambda)$ является равномерно собственным ПДО, принадлежащим классу $L^m_{1,\,0;\,d}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Запишем

$$\Phi_{-m}(\lambda) = \tilde{\Phi}_{-m}(\lambda) + R_{-m}(\lambda) \tag{9.19}$$

и исследуем остаточный член $R_{-m}(\lambda)$, который имеет ядро Л. Шварца $K_{R_{-m}}$, обращающееся в 0 в ε-окрестности диагонали. Ясно, что он является оператором свертки, так как $K_{R_{-m}}$ зависит только от $x - y$

и λ. Из построения оператора $R_{-m}(\lambda)$ вытекает, что $K_{R_{-m}}(x, y; \lambda) = r_{-m}(x-y, \lambda)$, где

$$r_{-m}(z, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}(1-\varphi(z))\,(1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{-m/2}\,đ\xi,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ в окрестности точки 0.

Теперь легко доказать, что $r_{-m}(\cdot, \lambda) \in S(\mathbb{R}^n)$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$. Более того, все полунормы функции $r_{-m}(\cdot, \lambda)$ в $S(\mathbb{R}^n)$ убывают при $|\lambda| \to \infty$ быстрее любой степени $|\lambda|$. В самом деле, применяя стандартное интегрирование по частям, мы получаем

$$r_{-m}(z, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}|z|^{-2N}(1-\varphi(z))\,\left[(-\Delta_\xi)^N(1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{-m/2}\right]đ\xi,$$

следовательно,

$$z^\alpha D_z^\beta r_{-m}(z, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} z^\alpha D_z^\beta\left[e^{iz\cdot\xi}|z|^{-2N}(1-\varphi(z))\right]\times \left[(-\Delta_\xi)^N(1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{-m/2}\right]đ\xi,$$

для любого целого $N \geqslant 0$ и любых фиксированных мультииндексов α, β.

Подинтегральное выражение можно оценить через

$$C(1+|z|)^{|\alpha|-2N}(1+|\xi|)^{|\beta|}(1+|\xi|+|\lambda|^{1/d})^{-m-2N},$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Мы можем предположить, что $m+2N \geqslant 0$ и использовать очевидное неравенство

$$(1+|\xi|+|\lambda|^{1/d})^{-m-2N} \leqslant (1+|\xi|)^{-m/2-N}(1+|\lambda|^{1/d})^{-m/2-N},$$

что приведет к оценке

$$|z^\alpha D_z^\beta r_{-m}(z, \lambda)| \leqslant C_{\alpha\beta N}(1+|\lambda|^{1/d})^{-m/2-N},$$

верной при достаточно большом N и приводящей к желаемому результату.

6. Теперь мы приведём эскиз доказательства оценок типа (9.18) для $R_{-m}(\lambda)A_\lambda$ и $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$.

Напомним, что, как мы предположили, ядра операторов A_λ сосредоточены в фиксированном (не зависящем от λ) компактном подмножестве пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

а) Заметим, что рассуждения из доказательства ограниченности (см., например, предложение (7.5)) приводят к оценке

$$\|A_\lambda\|_{s,\, s-m} \leqslant C(1+|\lambda|)^M,$$

где $M = M(s, A)$ не зависит от λ. Это — грубая оценка, и её легко получить, повторяя доказательство предложения 7.5 и соответствующих результатов из параграфа § 6.

Заметим теперь, что оператор $R_{-m}(\lambda)$ является бесконечно сглаживающим в соболевской шкале $H^s(\mathbb{R}^n)$. Точнее,

$$\|R_{-m}(\lambda)\|_{s,\,t} \leqslant C_{s,\,t,\,N}(1+|\lambda|)^{-N}$$

при всех $s,\,t \in \mathbb{R}$ и $N \geqslant 0$. Это вытекает из того, что оператор свёртки $R_{-m}(\lambda)$ представляется как оператор умножения преобразования Фурье на функцию $\tilde{r}_{-m}(\xi,\,\lambda) = F_{z\to\xi}r(z,\,\lambda)$, принадлежащую $S(\mathbb{R}^n)$ по ξ с полунормами, убывающими при $|\lambda| \to \infty$ быстрее любой степени $|\lambda|$ благодаря оценкам, полученным в первой части приведённых выше рассуждений по этому поводу.

Комбинируя два последних неравенства, мы получаем желаемые оценки типа (9.18) для $R_{-m}(\lambda)A_\lambda$ и $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$.

б) Другой способ доказательства нужных оценок основан на описании структуры операторов $R_{-m}(\lambda)A_\lambda$ и $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$. Достаточно рассмотреть операторы $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$ и использовать соотношение

$$(R_{-m}(\lambda)\,A_\lambda)^* = A_\lambda^* R_{-m}(\lambda)$$

для доказательства тех же оценок для операторов вида $R_{-m}(\lambda)A_\lambda$.

Ясно, что оператор $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$ можно записать в стандартной форме (3.9) с символом $\sigma_{\lambda,\,m}(x,\,\xi) = \sigma_{A_\lambda}(x,\,\xi)\,\tilde{r}_{-m}(\xi,\,\lambda)$, где функция $\tilde{r}$ была определена выше. Заметим, что $\sigma_{A_\lambda}(x,\,\xi)$ имеет компактный носитель по x равномерно по ξ. Принимая во внимание поведение $\tilde{r}$, мы видим, что для $\sigma_{\lambda,\,m}(x,\,\xi)$ выполнены оценки

$$|\partial_\xi^\alpha\, D_x^\beta \sigma_{\lambda,\,m}(x,\,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\,\beta,\,m,\,M,\,N}(1+|\xi|)^{-M}(1+|\lambda|)^{-N}$$

при любых $M,\,N \geqslant 0$ и любых мультииндексах $\alpha,\,\beta$. Ядро Л. Шварца оператора $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$ имеет вид

$$K_\lambda(x,\,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_\lambda(x,\,\xi)\,đ\xi.$$

Из оценок для σ_λ немедленно следует, что

$$|K_\lambda(x,\,y)| \leqslant C_N(1+|x-y|)^{-N},$$

и требуемые оценки норм следуют из леммы Шура.

7. Теперь предположим, что $\delta = 0$. Как видно из (9.16), нам надо доказать, что

$$\|\Phi_{-m}(\lambda)\,A_\lambda\|_{s,\,s} \leqslant C, \tag{9.20}$$

где C не зависит от λ (но может зависеть от s). Ясно, что

$$\|\Phi_{-m}(\lambda)\,A_\lambda\|_{s,\,s} = \|\Phi_s(0)\,(\Phi_{-m}(\lambda)\,A_\lambda)\,\Phi_{-s}(0)\|. \tag{9.21}$$

Действуя, как в части 5 этого доказательства, мы можем заменить $\Phi_t(\lambda)$ на собственный ПДО $\tilde\Phi_t(\lambda)$ (для любого $t\in\mathbb{R}$) и вместо (9.20) доказывать оценки

$$\|\tilde\Phi_s(0)\,\tilde\Phi_{-m}(\lambda)\,A_\lambda\tilde\Phi_{-s}(0)\| \leqslant C, \tag{9.22}$$

Обозначим символ оператора $\tilde\Phi_{-m}(\lambda)\,A_\lambda$ через $b(x,\,\xi,\,\lambda)$. Тогда

$$b(x,\,\xi,\,\lambda)\in S^0_{\rho,\,0;\,d}(\mathbb{R}^n;\,\Lambda)$$

в смысле равномерных классов в $\mathbb{R}^n$ (см. задачи 3.1 и 3.2. В частности, $b(x,\,\xi,\,\lambda)\in S^0_{\rho,\,0}(\mathbb{R}^{2n})$ равномерно по λ, т. е.

$$\sup_{x,\,\xi,\,\lambda}\left[|\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta b(x,\,\xi,\,\lambda)|\,\langle\xi\rangle^{\rho|\alpha|}\right] < +\infty.$$

Используя подходящую формулу композиции (например, в равномерных классах, указанных в задачах 3.1 и 3.2), мы видим, что те же самые оценки выполняются и для символа $a(x,\,\xi,\,\lambda)$ оператора $\tilde\Phi_s(0)\,\tilde\Phi_{-m}(\lambda)\,A_\lambda\tilde\Phi_{-s}(0)$.

Теперь, применяя теорему об ограниченности (тоже распространённую на классы равномерных псевдодифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$), мы получаем требуемую оценку (9.22) для операторной нормы.

Возможен и другой способ рассуждений (обходящий использование равномерных операторов в $\mathbb{R}^n$): ввести подходящие срезающие функции, чтобы свести всё к функциям с носителем в фиксированном компакте, а затем оценить остаточные члены, используя лемму Шура. ■

9.3. Обращение оператора с параметром. В этом пункте мы будем рассматривать лишь операторы на замкнутом многообразии M.

Теорема 9.2. *Пусть* $A_\lambda\in HL^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta;\,d}(M,\,\Lambda)$. *Тогда существует такое* $R>0$, *что при* $|\lambda|\geqslant R$ *оператор* A_λ *обратим, причем*

$$A_\lambda^{-1}\in HL^{-m_0,\,-m}_{\rho,\,\delta;\,d}(M,\,\Lambda_R), \tag{9.23}$$

где $\Lambda_R=\Lambda\cap\{\lambda\colon|\lambda|\geqslant R\}$. *Точнее, если* B_λ — *параметрикс оператора с параметром* A_λ, *т. е. выполнены условия* (9.6), *то*

$$A_\lambda^{-1}-B_\lambda\in L^{-\infty}(M,\,\Lambda_R). \tag{9.24}$$

Доказательство. Пусть B_λ — параметрикс оператора A_λ. Из (9.6) видно, что достаточно уметь доказывать, что оператор $I+R_\lambda$, где $R_\lambda\in L^{-\infty}(M,\,\Lambda_R)$, обратим при больших λ, причем

$$(I+R_\lambda)^{-1}-I\in L^{-\infty}(M,\,\Lambda_R). \tag{9.25}$$

Заметим, что для любого $N>0$ и для любых $s,\, t\in\mathbb{R}$

$$\|R_\lambda\|_{s,\,t} \leqslant C_{s,\,t}^{(N)}(1+|\lambda|)^{-N}. \tag{9.26}$$

Отсюда следует, в частности, что существует такое $R>0$, что $\|R_\lambda\|<1/2$ при $|\lambda|\geqslant R$, так что $(I+R_\lambda)^{-1}$ существует при $\lambda\in\Lambda_R$ по крайней мере в пространстве $L^2(M)$. Но оператор $I+R_\lambda$ фредгольмов в каждом из пространств $H^s(M)$ (этот результат формально является следствием эллиптичности $I+R_\lambda$ и теоремы 8.1, хотя, конечно, легко может быть получен непосредственно) и имеет всюду одно и то же ядро и коядро, так что обратимость $I+R_\lambda$ при $|\lambda|\geqslant R$ имеется и в каждом из пространств $H^s(M)$.

Для доказательства (9.25) удобно воспользоваться формулой

$$(I+R_\lambda)^{-1}-I=-R_\lambda(I+R_\lambda)^{-1} \tag{9.27}$$

и соотношениями (9.26). Обозначая через Q_λ левую часть (9.27), мы видим, что для Q_λ выполнены оценки вида (9.26).

Ядро $Q_\lambda(x,\, y)$ оператора Q_λ выражается через Q_λ формулой

$$Q_\lambda(x,\, y)=[Q_\lambda\delta(\cdot-y)]\,(x), \tag{9.28}$$

где $\delta(z-y)$ — δ-функция (от z) в точке $y\in M$, от которой она зависит как от параметра. Оператор Q_λ в (9.28) применяется по переменной z и результат берется в точке x. Заметим, что если $s<-n/2$, то $\delta(\cdot-y)\in H^s(M)$. Далее, $\delta(\cdot-y)$ — дифференцируемая функция от y со значениями в $H^{s-1}(M)$ и вообще, k раз дифференцируемая функция от $y\in M$ со значениями в $H^{s-k}(M)$. Поэтому из оценок (9.26) вытекают оценки вида (9.3) для ядра $Q_\lambda(x,\, y)$, что и доказывает требуемое включение $Q_\lambda\in L^{-\infty}(M,\, \Lambda_R)$. Отсюда и вытекают требуемые включения (9.23) и (9.24). ■

9.4. Резольвента эллиптического оператора. Вернемся к примеру 9.1, перейдя к случаю оператора на многообразии, и применим полученные результаты.

Теорема 9.3. *Пусть A — дифференциальный оператор на замкнутом многообразии M, $a_m(x,\, \xi)$ — его главный символ, Λ — замкнутый угол в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с вершиной в точке $0\in\mathbb{C}$. Пусть A эллиптичен с параметром относительно Λ, т. е. $a_m(x,\, \xi)$ при $\xi\neq 0$ не принимает значений, принадлежащих Λ. Тогда*

а) *существует такое $R>0$, что при $\lambda\in\Lambda_R$ оператор $A-\lambda I$ обратим и притом*

$$(A-\lambda I)^{-1}\in CL_m^{-m}(M,\, \Lambda_R); \tag{9.29}$$

б) *имеет место оценка нормы*

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|_{s,\,s+l} \leqslant C_{s,\,l}/|\,\lambda\,|^{1-l/m}, \quad 0 \leqslant l \leqslant m, \quad \lambda \in \Lambda_R, \tag{9.30}$$

где s — любое вещественное число.

Доказательство. Утверждение п. а) вытекает из теоремы 9.1, а утверждение п. б) — из п. а) и теоремы 9.2. ■

Следствие 9.2. *В условиях теоремы* 9.3

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant C/|\,\lambda\,|, \quad \lambda \in \Lambda_R. \tag{9.31}$$

Следствие 9.3. *Пусть A — эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор на замкнутом многообразии M, $a_m(x,\,\xi)$ — его главный символ. Предположим, что $a_m(x,\,\xi) > 0$ при всех $(x,\,\xi)$, $\xi \neq 0$. Тогда A полуограничен снизу, т. е. существует такая постоянная $C > 0$, что $A \geqslant -CI$, т. е.*

$$(Au,\,u) \geqslant -C(u,\,u), \quad u \in C^\infty(M). \tag{9.32}$$

Мы отметим здесь еще то важное обстоятельство, что при условии эллиптичности с параметром резольвента $(A-\lambda I)^{-1}$ лишь оператором из $L^{-\infty}(M,\,\Lambda)$ отличается от параметрикса. Это используется в теории комплексных степеней вместе с явной конструкцией параметрикса, даваемой эллиптической теорией (см. п. 5.5).

Задача 9.1. Распространить теорию эллиптических операторов с параметром на случай матричных операторов, т. е. систем.

Указание. Условие эллиптичности с параметром матричной функции $a_m(x,\,\xi)$ означает, что $\det(a_m(x,\,\xi)-\lambda) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ и $\lambda \in \Lambda$ или, что то же самое, собственные значения матрицы $a_m(x,\,\xi)$ при $\xi \neq 0$ не попадают в угол Λ.

Задача 9.2. Пусть на замкнутом многообразии дан эллиптический дифференциальный оператор оператор A, и пусть для некоторого угла Λ оператор $A-\lambda I$ удовлетворяет условию эллиптичности с параметром при $\lambda \in \Lambda$. Доказать, что $\operatorname{index} A = 0$.

§ 10. Определение и простейшие свойства комплексных степеней эллиптического оператора

10.1. Определение голоморфной полугруппы A_z. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m на замкнутом многообразии M размерности n. Пусть $a_m(x,\,\xi)$ — главный символ оператора A. Предположим, что $a_m(x,\,\xi)$ не принимает (при $\xi \neq 0$) значений в замкнутом угле Λ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (вершина угла Λ — точка $0 \in \mathbb{C}$). Иными словами, в обозначениях § 9 $A-\lambda I \in CL^m_m(M,\,\Lambda)$ и выполнено условие эллиптичности с параметром.

Из теоремы 9.3 следует, что резольвента $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ определена при $|\lambda| \geqslant R$, $\lambda \in \Lambda$, т. е. при $\lambda \in \Lambda_R$. Теперь в силу теоремы 8.4 спектр $\sigma(A)$ оператора A — дискретное подмножество $\mathbb{C}$. Поэтому в угле Λ может находиться лишь конечное число точек $\sigma(A)$. Мы можем тогда так провести луч L_0, начинающийся в точке O и содержащийся в Λ, что $\sigma(A) \cap L_0$ либо пусто, либо состоит лишь из точки 0. В дальнейшем мы будем для удобства предполагать, во-первых, что $0 \notin \sigma(A)$, т. е. существует оператор A^{-1} (см. § 8), и, во-вторых, что $L_0 = (-\infty, 0]$. Оба эти предположения не очень существенны: от первого можно освободиться, заменяя A на $A+\varepsilon I$, а от второго — переходя от A к оператору $e^{i\theta}A$.

Итак, окончательно наши предположения таковы:

1) $a_m(x, \xi) - \lambda \neq 0$ при $\xi \neq 0$ и $\lambda \in (-\infty, 0]$; (10.1)
2) $\sigma(A) \cap (-\infty, 0] = \varnothing$. (10.2)

Из условий 1) и 2) вытекает, что для некоторого угла Λ вида $\{\pi - \varepsilon \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi + \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, выполнены условия:

1′) $a_m(x, \xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ и $\lambda \in \Lambda$; (10.1′)
2′) $\sigma(A) \cap \Lambda = \varnothing$. (10.2′)

В дальнейшем мы будем считать, что угол Λ выбран именно таким образом.

Поскольку $0 \notin \sigma(A)$, то угол $\sigma(A)$ не пересекается с целым кругом $|\lambda| < 2\rho$ в комплексной λ-плоскости. Выберем теперь в этой плоскости контур $\Gamma = \Gamma_\rho$ вида $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, где

$$\lambda = re^{i\pi} \quad (+\infty > r > \rho) \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$
$$\lambda = \rho e^{i\varphi} \quad (\pi > \varphi > -\pi) \quad \text{на} \quad \Gamma_2,$$
$$\lambda = re^{-i\pi} \quad (\rho < r < +\infty) \quad \text{на} \quad \Gamma_3$$

(рис. 1).

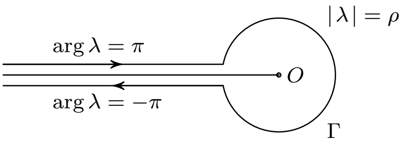


Рис. 1.

Рассмотрим интеграл

$$A_z = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z (A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda, \tag{10.3}$$

где $z \in \mathbb{C}$, λ^z определяется как голоморфная функция от λ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, равная $e^{z \ln \lambda}$ при $\lambda > 0$ (здесь подразумевается, что $\ln \lambda \in \mathbb{R}$ при $\lambda > 0$). Иными словами, на Γ мы полагаем

$$\lambda^z = e^{z \ln \lambda} = e^{z \ln|\lambda| + iz \arg \lambda} = |\lambda|^z e^{iz \arg \lambda}, \tag{10.4}$$

где $-\pi \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi$ (более точно $\arg \lambda$ указан в определении контура Γ).

Отметим, что ввиду оценки (9.31) (следствие 9.2) интеграл (10.3) при $\operatorname{Re} z<0$ сходится по операторной норме в $L^2(M)$ и тем самым A_z — ограниченный оператор в $L^2(M)$. На самом деле по теореме 9.3 интеграл (10.3) сходится и по операторной норме в $H^s(M)$ при любом $s\in\mathbb{R}$ и тем самым A_z при $\operatorname{Re} z<0$ отображает $H^s(M)$ в $H^s(M)$. Поэтому A_z отображает $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$ и $\mathscr{D}'(M)$ в $\mathscr{D}'(M)$, поскольку $C^\infty(M)=\bigcap\limits_s H^s(M)$, $\mathscr{D}'(M)=\bigcup\limits_s H^s(M)$.

П р е д л о ж е н и е 10.1. а) *При* $\operatorname{Re} z<0$ *и* $\operatorname{Re} w<0$ *справедливо полугрупповое свойство*

$$A_zA_w=A_{z+w}. \tag{10.5}$$

б) *Если* $k\in\mathbb{Z}$ *и* $k>0$, *то*

$$A_{-k}=(A^{-1})^k. \tag{10.6}$$

в) A_z *при любом* $s\in\mathbb{R}$ *представляет собой голоморфную оператор-функцию от* z (*при* $\operatorname{Re} z<0$) *со значениями в алгебре ограниченных операторов в гильбертовом пространстве* $H^s(M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Образуем контур Γ' (рис. 2) вида $\Gamma'=\Gamma_1'\cup\Gamma_2'\cup\Gamma_3'$, где

$$\lambda=re^{i(\pi-\varepsilon)}\quad\left(+\infty>r>\frac{3}{2}\rho\right)\quad\text{на}\quad\Gamma_1',$$

$$\lambda=\frac{3}{2}\rho e^{i\varphi}\quad(\pi-\varepsilon>\varphi>-\pi+\varepsilon)\quad\text{на}\quad\Gamma_2',$$

$$\lambda=re^{i(-\pi+\varepsilon)}\quad\left(\frac{3}{2}\rho<r<+\infty\right)\quad\text{на}\quad\Gamma_3'.$$

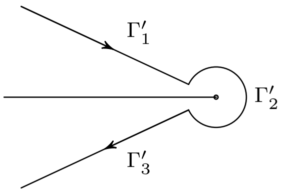


Рис. 2.

Число $\varepsilon>0$ выбрано так, что выполнены условия (10.1′) и (10.2′). Контур Γ содержится «внутри» контура Γ', но ввиду оценки (9.31) и условий на Γ' ясно, что интеграл (10.5) не изменится, если в нем заменить Γ на Γ'.

Используя это обстоятельство, получаем

$$\begin{aligned}A_zA_w&=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma'}\int\limits_{\Gamma}(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1}\lambda^z\mu^w\,d\mu\,d\lambda=\\&=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma'}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda^z\mu^w}{\lambda-\mu}\left[(A-\lambda I)^{-1}-(A-\mu I)^{-1}\right]d\mu\,d\lambda=\\&=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'}\lambda^{w+z}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma'}(A-\mu I)^{-1}\frac{\lambda^z\mu^w}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu=\\&=A_{z+w}+0=A_{z+w}.\end{aligned}$$

В этой выкладке использовались формула Коши и так называемое *тождество Гильберта*

$$(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1}=\frac{1}{\lambda-\mu}\,[(A-\lambda I)^{-1}-(A-\mu I)^{-1}], \tag{10.7}$$

которое становится очевидным, если, например, умножить обе его части на $(A-\lambda I)\,(A-\mu I)$.

б) Заметим, что если $z=-1,\ -2,\ \ldots$, то $(re^{i\pi})^z=(re^{-i\pi})^z$ и интегралы по прямолинейным частям Γ в (10.3) сокращаются. Поэтому

$$A_{-k}=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\lambda^{-k}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda,$$

где Γ_2 — окружность $\{|\,\lambda\,|=\rho\}$, пробегаемая по часовой стрелке. Сделаем здесь замену переменных, полагая $\lambda=1/\mu$. Получим

$$A_{-k}=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2'}\mu^k(A-\mu^{-1}I)^{-1}\mu^{-2}\,d\mu,$$

где Γ_2' — окружность $\{|\,\mu\,|=1/\rho\}$, также проходимая по часовой стрелке. Учитывая, что $(A-\mu^{-1}I)^{-1}=\mu A^{-1}(\mu I-A^{-1})^{-1}$, мы можем написать теперь

$$A_{-k}=-\frac{iA^{-1}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2'}\mu^{k-1}(\mu I-A^{-1})^{-1}\,d\mu=A^{-1}(A^{-1})^{k-1}=(A^{-1})^k,$$

поскольку весь спектр ограниченного оператора A^{-1} лежит внутри контура Γ_2' и можно воспользоваться формулой Коши.

в) Дифференцируя интеграл (10.3) по z, мы получим интеграл

$$\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z(\ln\lambda)\,(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda, \tag{10.8}$$

который сходится по операторной норме (в $H^s(M)$) равномерно при $\operatorname{Re} z\leqslant-\varepsilon<0$. Отсюда следует, что оператор-функция A_z голоморфна по z, причем производная $\dfrac{d}{dz}A_z$ равна интегралу (10.8). ■

10.2. Определение комплексных степеней оператора.

О п р е д е л е н и е 10.1. Пусть $z\in\mathbb{C}$ и $k\in\mathbb{Z}$ выбрано так, что $\operatorname{Re} z<k$. Положим на $C^\infty(M)$ или на $\mathscr{D}'(M)$

$$A^z=A^k\cdot A_{z-k}. \tag{10.9}$$

Нуждается в проверке корректность этого опеределения. Эта корректность — первое утверждение следующей теоремы.

Теорема 10.1. а) *Оператор* A^z, *опеределяемый формулой* (10.9), *не зависит от выбора целого числа* k, *для которого* $\operatorname{Re} z < k$.

б) *Если* $\operatorname{Re} z < 0$, *то* $A^z = A_z$.

в) *Имеет место групповое свойство*

$$A^z A^w = A^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{10.10}$$

г) *Если* $k \in \mathbb{Z}$, *то из* (10.9) *при* $z = k$ *получается обычная* k*-я степень оператора* A (*в частности*, $A^0 = I$, $A^1 = A$ *и* A^{-1} — *оператор, обратный к* A).

д) *Для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *и для любого* $s \in \mathbb{R}$ *функция* $A^{\,z}$ *является голоморфной оператор-функцией от* z *в полуплоскости* $\operatorname{Re} z < k$ *со значениями в банаховом пространстве* $\mathscr{L}(H^s(M), H^{s-mk}(M))$ *ограниченных линейных операторов из* $H^s(M)$ *в* $H^{s-mk}(M)$.

Доказательство. а) Пусть $z \in \mathbb{C}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, причем $\operatorname{Re} z < k$, $\operatorname{Re} z < l$. Нужно доказать, что

$$A^k A_{z-k} = A^l A_{z-l}. \tag{10.11}$$

Предположим, что $k > l$. Положим $k - l = p$ и $z - k = w$. Тогда (10.11) сведется к тождеству $A_w = A^{-p} A_{w+p}$, где p — натуральное число, $\operatorname{Re}(w + p) < 0$. Но это сразу следует из предложения 10.1, ибо $A^{-p} = A_{-p}$ в силу (10.6), и остается воспользоваться полугрупповым свойством (10.5).

б)—г) Эти свойства очевидным образом вытекают из п. а) этой теоремы и предложения 10.1.

д) Это утверждение просто получается из п. а) этой теоремы и п. в) предложения 10.1, если вспомнить, что A^k при целом k непрерывно отображает $H^s(M)$ в $H^{s-mk}(M)$ (это вытекает из теоремы об об ограниченности 7.3 и того факта, что $A^{-1} \in CL^{-m}(M)$ в силу теоремы 8.2 об обратном операторе). ■

10.3. Самосопряженный случай. Пусть на M введена гладкая положительная плотность, определяющая скалярное произведение в $L^2(M)$. Пусть A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка m на M. Его главный символ $a_m(x, \xi)$ вещественнозначен, и условия (10.1) и (10.2), которые мы будем предполагать выполненными, означают в данном случае, что

$$a_m(x, \xi) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0, \tag{10.12}$$

$$A \geqslant \delta I, \quad \text{где} \quad \delta > 0, \tag{10.13}$$

т. е. $(Au, u) \geqslant \delta(u, u)$ для любой функции $u \in C^\infty(M)$. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ — полная ортонормированная система собственных функций оператора A с собственными значениями $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$. Напомним, что $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to \infty$ (см. теорему 8.3). Из (10.13) следует, что $\lambda_j \geqslant \delta > 0$ при всех $j = 1, 2, \ldots$

Каждой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(M)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f \sim \sum_{j=1}^\infty f_j \varphi_j(x), \quad x \in M, \tag{10.14}$$

где

$$f_j = (f, \varphi_j). \tag{10.15}$$

Здесь для $f \in L^2(M)$ в формуле (10.15) стоит обычное скалярное произведение в $L^2(M)$. Если же $f \in \mathscr{D}'(M)$, то (f, φ_j) означает $\langle f, \bar{\varphi}_j d\mu\rangle$, где $d\mu$ — фиксированная плотность на M (вспомним, что обобщенные функции являются линейными непрерывными функционалами на пространстве гладких плотностей). Мы опишем сейчас свойства рядов Фурье гладких и обобщенных функций.

П р е д л о ж е н и е 10.2. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{j=1}^\infty c_j \varphi_j(x) \tag{10.16}$$

с комплексными коэффициентами c_j. Тогда следующие свойства эквивалентны:

а) *ряд* (10.16) *сходится в топологии $C^\infty(M)$*;

б) *ряд* (10.16) *является рядом Фурье некоторой обобщенной функции $f \in C^\infty(M)$*;

в) *для любого целого N*

$$\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 \lambda_j^{2N} < +\infty. \tag{10.17}$$

Далее, следующие условия г), д) *и* е) *также эквивалентны*:

г) *ряд* (10.16) *сходится в слабой топологии $\mathscr{D}'(M)$*;

д) *ряд* (10.16) *является рядом Фурье некоторой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(M)$*;

е) *существует такое целое N (быть может, отрицательное), что выполнено условие* (10.17).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Основная идея доказательства состоит в том, что верны соотношения

$$C^\infty(M) = \bigcap_s H^s(M), \quad \mathscr{D}'(M) = \bigcup_s H^s(M),$$

а оператор A^N осуществляет топологический изоморфизм $H^{mN}(M)$ и $L^2(M)$. Но $L^2(M)$ очень просто описывается в терминах коэффициентов Фурье ввиду равенства Парсеваля. Поэтому топологию в $C^\infty(M)$ можно задать полунормами $\|f\|_{A;\,N}$, где

$$\|f\|^2_{A;\,N} = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 \lambda_j^{2N},$$

поскольку $A^N f$ имеет коэффициенты Фурье $\lambda_j^N f_j$. Теперь эквивалентность а), б) и в) очевидна.

Проверим эквивалентность г), д) и е). Если выполнено г), то обозначим через f сумму ряда (10.16), так что $f \in \mathscr{D}'(M)$ и

$$(f,\, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\varphi_j,\, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$. В частности, беря $\varphi = \varphi_j$, мы получим, что $c_j = f_j$, т. е. выполнено д). Далее, если выполнено д), т. е. $c_j = (f,\, \varphi_j)$, где $f \in \mathscr{D}'(M)$, то, выбирая целое число N таким, что $A^N f \in L^2(M)$, мы получим, что выполнено е). Наконец, если е) выполнено, то ряд (10.16) сходится по норме $H^{mN}(M)$, что дает выполнение п. г). ■

Теперь приведем «спектральное» описание комплексных степеней самосопряженного оператора A в терминах коэффициентов разложения по собственным функциям φ_j.

П р е д л о ж е н и е 10.3. *Пусть $f \in \mathscr{D}'(M)$, $f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j \varphi_j(x)$ — разложение f в ряд Фурье по собственным функциям оператора A. Тогда*

$$A^z f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^z f_j \varphi_j(x). \tag{10.18}$$

В частности, $\varphi_j(x)$ — собственные функции оператора A^z с собственными значениями λ_j^z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор A^z непрерывно отображает $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$. Ввиду легко проверяемого соотношения $(A^z)^* = A^{\bar z}$ отсюда следует, что оператор A^z, как сопряженный оператор к $A^{\bar z}$, непрерывно отображает $\mathscr{D}'(M)$ в $\mathscr{D}'(M)$, если $\mathscr{D}'(M)$ рассматривать со слабой топологией. Поскольку ряд, стоящий в правой части (10.18), слабо сходится в $\mathscr{D}'(M)$ в силу предложения 10.2, для проверки (10.18) в общем случае достаточно проверить это соотношение при $f = \varphi_j$, Re $z<0$. Но при $f=\varphi_j$, Re $z<0$ имеем

$$A^z\varphi_j=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z(A-\lambda I)^{-1}\varphi_j\,d\lambda=\frac{i\varphi_j}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z(\lambda_j-\lambda)^{-1}\,d\lambda=\lambda_j^z\varphi_j$$

в силу формулы Коши. Но это и означает (10.18) для $f=\varphi_j$. ■

Упражнение 10.1. Пусть A удовлетворяет условию (10.1), а вместо (10.2) потребуем, чтобы было выполнено более слабое условие

$$\sigma(A)\cap(-\infty,\,0)=\varnothing,$$

так что Ker A может быть ненулевым конечномерным подпространством в $C^\infty(M)$. Определим A_z контурным интегралом (10.3). Пусть E_0, E_0' — инвариантные подпространства оператора A, о которых говорится в теореме 8.4.

а) Доказать, что $A_zE_0=0$ и E_0' — инвариантное подпространство для A_z при Re $z<0$.

б) Доказать, что для оператора A_z выполнено полугрупповое свойство $A_zA_w=A_{z+w}$, Re $z<0$, Re $w<0$, позволяющее корректно определить оператор A_z при всех z по формуле (10.9), причем для операторов A^z выполнено групповое свойство (10.10).

в) Проверить, что A^z при достаточно большом натуральном z есть обычная степень оператора A, в то время как

$$A^0=I-P_0,$$

где P_0 — проектор на E_0 параллельно E_0', и аналогично A_{-k} при достаточно большом натуральном k является обратным оператором к A^k на E_0' и равен 0 на E_0.

Задача 10.1. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор на замкнутом многообразии M, $a_m(x,\,\xi)$ — его главный символ. Предположим, что Re $a_m(x,\,\xi)<0$ при $\xi\neq0$. Доказать, что задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au,\quad t>0;\quad u|_{t=0}=\varphi(x); \tag{10.19}$$

однозначно разрешима в $C^\infty(M)$ и в $\mathscr{D}'(M)$.

Указание. Решение $u(t,\,x)$ надо строить в виде

$$u=e^{At}\varphi, \tag{10.20}$$

где оператор e^{At} строится с помощью контурного интеграла

$$e^{At}=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda. \tag{10.21}$$

Считая, что спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости Re $\lambda<0$ (этого можно достичь заменой A на $A-CI$ или заменой $u=ve^{ct}$ в задаче (10.19)), надо выбрать $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — следующие лучи:

$$\lambda=re^{i(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}\quad(+\infty>r>0)\quad\text{на}\quad\Gamma_1,$$
$$\lambda=re^{i(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}\quad(0<r<+\infty)\quad\text{на}\quad\Gamma_2.$$

Единственность обобщенного решения задачи (10.19) доказывается с помощью принципа Хольмгрена (см., например, Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. [1], вып. 3, стр. 41).

§ 11. Структура комплексных степеней эллиптического оператора

11.1. Символ резольвенты. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор на замкнутом многообразии M. Мы построим сейчас в локальных координатах символ специального параметрикса оператора с параметром $A-\lambda I$ (мы рассматриваем его здесь как оператор из $CL_m^m(M, \Lambda)$, где Λ — замкнутый угол в $\mathbb{C}$ с вершиной в точке 0). Мы считаем, что A удовлетворяет условию эллиптичности с параметром относительно Λ, причем угол Λ такой же, как в § 10 (т. е. выполнены условия (10.1) и (10.2), а Λ содержит внутри себя полуось $(-\infty, 0]$).

Параметрикс будем строить в некоторой координатной окрестности $X \subset M$. Будем отождествлять X с областью в $\mathbb{R}^n$ с помощью заданной на X системы координат.

Пусть на X оператор A имеет вид

$$A = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha. \tag{11.1}$$

Его полный символ

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \tag{11.2}$$

можно разбить на однородные компоненты

$$a_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = j} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha, \quad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{11.3}$$

Полный символ $a(x, \xi, \lambda) = a(x, \xi) - \lambda$ оператора $A - \lambda I$ разбивается на однородные по $(\xi, \lambda^{1/m})$ компоненты, задаваемые формулами

$$a_m(x, \xi, \lambda) = a_m(x, \xi) - \lambda, \tag{11.4}$$

$$a_j(x, \xi, \lambda) = a_j(x, \xi), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{11.5}$$

Условие эллиптичности с параметром означает, что

$$a_m(x, \xi, \lambda) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in X, \ \lambda \in \Lambda, \ |\xi| + |\lambda|^{1/m} \neq 0. \tag{11.6}$$

Символ параметрикса оператора $A - \lambda I$ естественно искать в виде асимптотической суммы функций, однородных по $(\xi, \lambda^{1/m})$. Обозначим эти функции через $b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где нижний индекс означает степень однородности:

$$b^0_{-m-j}(x, t\xi, t^m\lambda) = t^{-m-j} b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda), \quad t > 0, \ |\xi| + |\lambda|^{1/m} \neq 0. \tag{11.7}$$

Эти функции определяются рекуррентным образом из соотношений

$$a_m(x,\,\xi,\,\lambda)\,b^0_{-m}(x,\,\xi,\,\lambda)=1, \tag{11.8}$$

$$a_m(x,\,\xi,\,\lambda)\,b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)+\\ +\sum_{\substack{k+l+|\alpha|=j\\ l<j}}\partial^\alpha_\xi a_{m-k}(x,\,\xi,\,\lambda)\,D^\alpha_x b^0_{-m-l}(x,\,\xi,\,\lambda)/\alpha!=0,\quad j=1,\,2,\,\ldots \tag{11.9}$$

(ср. построение параметрикса классического эллиптического ПДО в § 5 — формулы (5.17′) и (5.17″)).

Чтобы получить из построенных функций $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ настоящий параметрикс, нужно, во-первых, умножением на срезающую функцию ликвидировать их особенность при $|\,\xi\,|+|\,\lambda\,|^{1/m}=0$ и, во-вторых, произвести склейку разных локальных параметриксов с помощью разбиения единицы (см. § 5).

11.2. Символы комплексных степеней. Мы построим однородные компоненты $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)$ символа оператора A^z по построенным выше однородным компонентам параметрикса точно так же, как сами степени A^z строились по резольвенте $(A-\lambda I)^{-1}$. Именно, из условия эллиптичности с параметром вытекает существование такого $\rho=\rho(x,\,\xi)$, что $a_m(x,\,\xi,\,\lambda)\neq 0$ при $|\,\lambda\,|<2\rho$, $\xi\neq 0$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Из уравнений (11.8), (11.9) ясно тогда, что $b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфно по λ в круге $|\,\lambda\,|<2\rho$. Образуя контур Γ, как в § 10, мы определим функции $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)$ при $\operatorname{Re} z<0$ формулами

$$b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda,\quad j=0,\,1,\,2,\,\ldots, \tag{11.10}$$

где ветвь λ^z выбирается так же, как в § 10.

В частности, при $j=0$ мы получаем по формуле Коши

$$b^{(z),\,0}_{mz}(x,\,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z(a_m(x,\,\xi)-\lambda)^{-1}\,d\lambda=a^z_m(x,\,\lambda). \tag{11.11}$$

Отметим, что при достаточно малом ρ интеграл (11.10) не зависит от выбора ρ (в круге $|\,\lambda\,|<2\rho$ уже нет особенностей функции $b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$).

Функция $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)$ положительно однородна по ξ порядка $mz-j$, т. е.

$$b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,t\xi)=t^{mz-j}\,b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi),\quad t>0,\quad \xi\neq 0. \tag{11.12}$$

Для того чтобы в этом убедиться, надо сделать в интеграле (11.10) замену переменной и воспользоваться однородностью $b^0_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$:

$$b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,t\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z b^0_{-m-j}(x,\,t\xi,\,\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^t}(t^m\mu)^z b_{-m-j}(x,t\xi,t^m\mu)\,t^m\,d\mu=t^{mz-j}\,\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^t}\mu^z b^0_{-m-j}(x,\xi,\mu)\,d\mu=$$

$$=t^{mz-j}\,\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu^z b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\mu)\,d\mu=t^{mz-j}b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi).$$

Здесь Γ^t — контур $t^{-m}\Gamma$ (он имеет тот же вид, что и Γ, но с радиусом круговой части $t^{-m}\rho$ вместо ρ).

Теперь необходимо распространить определение $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)$ на все $z\in\mathbb{C}$. Это делается так же, как построение A^z при $z\in\mathbb{C}$, проведенное в § 10. Имеет место следующий аналог предложения 10.1.

Предложение 11.1. а) *При* $\mathrm{Re}\,z<0$ *и* $\mathrm{Re}\,w<0$ *справедливо полугрупповое свойство*

$$\sum_{|\alpha|+p+q=j}\partial^\alpha_\xi b^{(z),\,0}_{mz-p}(x,\,\xi)\,D^\alpha_x b^{(w),\,0}_{mw-q}(x,\,\xi)/\alpha!=b^{(z+w),\,\theta}_{m(z+w)-j}(x,\,\xi),$$

$$j=0,\,1,\,2,\,\ldots \qquad (11.13)$$

б) *Если* $k\in\mathbb{Z}$ *и* $k>0$, *то набор* $b^{(-k)}_{-mk-j}(x,\,\xi)$, $j=0,\,1,\,2,\,\ldots$, *представляет собой набор однородных компонент параметрикса оператора* A^k.

в) *Для любых мультииндексов* $\alpha,\,\beta$ *производная* $\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)$ *при* $\xi\neq 0$ *является голоморфной функцией от* z *при* $\mathrm{Re}\,z<0$.

Доказательство этого предложения получается повторением на уровне символов доказательства предложения 10.1, что предоставляется читателю в качестве полезного упражнения. ■

Для дальнейшего полезно обозначить через $a^{(k)}_j(x,\,\xi)$ при целом $k\geqslant 0$ однородную компоненту (порядка j) символа $a^{(k)}(x,\,\xi)$ оператора A^k, так что

$$a^{(k)}(x,\,\xi)=\sum_{j=0}^{mk}a^{(k)}_j(x,\,\xi).$$

Если k — целое, $k<0$, то через $a^{(k)}_j(x,\,\xi)$ обозначаются однородные компоненты символа параметрикса оператора A^k или, что то же самое, однородные компоненты символа оператора A^{-k}. Они определяются рекурентным образом из соотношений

$$a^{(-k)}_{-mk}(x,\,\xi)\cdot a^{(k)}_{mk}(x,\,\xi)=1, \tag{11.14}$$

$$a^{(-k)}_{-mk}(x,\,\xi)\cdot a^{(k)}_{mk-j}(x,\,\xi)+\sum_{\substack{p+q+|\alpha|=j\\ q<j}}\partial^\alpha_\xi a^{(-k)}_{-mk-p}(x,\,\xi)\cdot D^\alpha_x a^{(k)}_{mk-q}(x,\,\xi)/\alpha!=0,$$

$$j=1,\,2,\,\ldots \tag{11.15}$$

Определение 11.1. Пусть $z\in\mathbb{C}$ и $k\in\mathbb{Z}$ выбрано так, что $\operatorname{Re} z<k$. Положим

$$b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)=\sum_{p+q+|\alpha|=j}\partial^\alpha_\xi a^{(k)}_{mk-p}(x,\,\xi)\cdot D^\alpha_x b^{(z-k),\,0}_{m(z-k)-q}(x,\,\xi)/\alpha!,$$

$$j=0,\,1,\,\ldots \tag{11.16}$$

Теорема 11.1. а) *Функции* $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)$, *определяемые формулой* (11.16), *не зависят от выбора целого* k, *для которого* $\operatorname{Re} z<k$.

б) *Если* $\operatorname{Re} z<0$, *то функции* $b^{(z),\,0}_{mz-j}$, *получаемые по формуле* (11.16), *совпадают с так же обозначенными функциями, получаемыми с помощью контурного интеграла* (11.10).

в) *Групповое свойство* (11.13) *имеет место при всех* $z,\,w\in\mathbb{C}$.

г) *Если* $k\in\mathbb{Z}$, *то* $b^{(k),\,0}_{mk-j}(x,\,\xi)=a^{(k)}_{mk-j}(x,\,\xi)$.

д) *Для любых мультииндексов* $\alpha,\,\beta$ *для любых* $x,\,\xi$ $(\xi\neq0)$ *и для любого* $j=0,\,1,\,\ldots$ *функция* $\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)$ *является целой функцией от* z.

Доказательство пунктов а)—г) идентично доказательству соответствующих пунктов теоремы 10.1 (необходимо лишь перейти от алгебры операторов к алгебре символов, являющихся формальными рядами однородных функций и перемножающихся по формуле композиции). Доказательство пункта д) получается непосредственным рассмотрением формул, определяющих функции $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)$. ■

11.3. Сглаженные символы резольвенты. Пусть $\omega(\tau)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, причем $\omega(\tau)=0$ при $\tau<1/2$, $\omega(\tau)=1$ при $\tau\geqslant1$. Положим

$$\theta(\xi,\,\lambda)=\omega(|\,\xi\,|^2+|\,\lambda\,|^{2/m}) \tag{11.17}$$

и определим

$$b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)=\theta(\xi,\,\lambda)\,b^0_{m-j}(x,\,\xi,\,\lambda). \tag{11.18}$$

С помощью функций $b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ мы построим на многообразии M параметрикс оператора с параметром $A-\lambda I$ аналогично второй части доказательства теоремы 5.1. Пусть $M = \bigcup\limits_{\gamma} X^\gamma$ — конечное покрытие M координатными окрестностями, φ^γ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, функции $\psi^\gamma \in C_0^\infty(X^\gamma)$ таковы, что $\psi^\gamma \equiv 1$ в окрестности $\operatorname{supp} \varphi^\gamma$. Пусть Φ^γ, Ψ^γ — операторы умножения на φ^γ и ψ^γ, а $B^\gamma_{-m-j}(\lambda)$ — ПДО в X^γ с символом $b^\gamma_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$, построенным по формуле (11.18) в координатной окрестности X^γ.

Мы положим

$$B_{-m-j}(\lambda) = \sum_{\gamma} \Phi^\gamma B^\gamma_{-m-j}(\lambda)\, \Psi^\gamma \tag{11.19}$$

и

$$B_{(N)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} B_{-m-j}(\lambda). \tag{11.20}$$

П р е д л о ж е н и е 11.2.

$$(A - \lambda I)^{-1} - B_{(N)}(\lambda) \in CL_m^{-m-N}(M, \Lambda). \tag{11.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы построим вначале полный параметрикс $B(\lambda)$ оператора $A - \lambda I$, полагая

$$B(\lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} B_{-m-j}(\lambda). \tag{11.22}$$

Точный смысл этой формулы состоит в том, что надо для любого γ построить в X^γ асимптотическую сумму

$$b^\gamma(x, \xi, \lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b^\gamma_{-m-j}(x, \xi, \lambda), \tag{11.23}$$

затем взять оператор $B^\gamma(\lambda)$ в X^γ с символом $b^\gamma(x, \xi, \lambda)$ и, наконец, положить

$$B(\lambda) = \sum_{\gamma} \Phi^\gamma B^\gamma \Psi^\gamma, \tag{11.24}$$

где Φ^γ, Ψ^γ те же, что и в формуле (11.19).

Мы имеем, очевидно

$$B(\lambda) - B_{(N)}(\lambda) \in CL_m^{-m-N}(M, \Lambda). \tag{11.25}$$

Но из теоремы 9.2 следует, что

$$(A - \lambda I)^{-1} - B(\lambda) \in L^{-\infty}(M, \Lambda). \tag{11.26}$$

Сравнивая (11.25) и (11.26), мы приходим к (11.21). ■

11.4. Сглаженные символы комплексных степеней и структурная теорема. Пусть $\omega(\tau)$ — та же функция на $\mathbb{R}^1$, что и в начале п. 11.3. Положим

$$\theta(\xi) = \omega(|\xi|) \tag{11.27}$$

и определим

$$b^{(z)}_{mz-j}(x, \xi) = \theta(\xi)\, b^{(z),\,0}_{mz-j}(x, \xi). \tag{11.28}$$

Конструкцию $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x, \xi)$ и $b^{(z)}_{mz-j}(x, \xi)$ можно проделать в любой координатной окрестности X^γ (соответствующие функции будут обозначаться $b^{(z),\,0,\,\gamma}_{mz-j}(x, \xi)$ и $b^{(z),\,\gamma}_{mz-j}(x, \xi)$, если нужно будет точно указать, в какой координатной окрестности мы находимся). Обозначая через $B^{(z),\,\gamma}_{mz-j}$ оператор в X^γ с символом $b^{(z),\,\gamma}_{mz-j}(x, \xi)$, мы опять-таки положим

$$B^{(z)}_{mz-j} = \sum_\gamma \Phi^\gamma B^{(z),\,\gamma}_{mz-j} \Psi^\gamma \tag{11.29}$$

и

$$B^{(z)}_{(N)} = \sum_{j=0}^{N-1} B^{(z)}_{mz-j}. \tag{11.30}$$

Для формулировки основной структурной теоремы нам понадобится еще определение голоморфных семейств ПДО, которые будут обозначаться $\mathscr{O}\big(G, L^m_{\rho,\,\delta}(M)\big)$, где G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Определение 11.2. Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, G — область в $\mathbb{C}$, $a(x, \xi, z) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n \times G)$, причем $a(x, \xi, z)$ голоморфна по z. Мы будем писать, что $a(x, \xi, z) \in \mathscr{O}\big(G, S^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$, если для любых мультииндексов α, β, для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ и для любых компактов $K_1 \subset X$ и $K_2 \subset G$ существует такая постоянная $C = C(\alpha, \beta, k, K_1, K_2)$, что

$$\big|\, \partial^\alpha_\xi\, \partial^\beta_x\, \partial^k_z a(x, \xi, z)\big| \leqslant C \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{11.31}$$

если $(x, \xi, z) \in K_1 \times \mathbb{R}^n \times K_2$. Если $A(z)$ — зависящий от параметра z ПДО в области X, то мы будем писать, что $A(z) \in \mathscr{O}\big(G, L^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$, если $A(z) = A_1(z) + R(z)$, где $A_1(z)$ — собственный ПДО на X с символом $a(x, \xi, z) \in \mathscr{O}\big(G, S^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$, а оператор $R(z)$ имеет ядро $R(x, y, z) \in C^\infty(X \times X \times G)$, голоморфное по z. Наконец, мы будем писать, что $A(z) \in \mathscr{O}\big(G, L^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$, если $A(z)$ — ПДО на M, зависящий от параметра $z \in G$, причем для любой координатной окрестности $X \subset M$ и любого координатного диффеоморфизма $\varkappa\colon X \to X_1$, где X_1 — область в $\mathbb{R}^n$, операторное семейство $A^{\varkappa}(z)$ операторов на X_1, индуцированных операторами $A(z)$ на M с помощью диффеоморфизма $\varkappa$, таково, что

$$A^{\varkappa}(z)\in\mathscr{O}\big(G,\,L^m_{\rho,\,\delta}(X_1)\big).$$

Повторение рассуждений § 4 показывает, что включение $A(z)\in\in\mathscr{O}\big(G,\,L^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$ при $1-\rho\leqslant\delta<\rho$ достаточно проверять, используя какое-нибудь фиксированное покрытие M координатными окрестностями и фиксированные координатные диффеоморфизмы.

Повторение же рассуждений § 3 и § 5 показывает, что композиция голоморфных семейств, сопряженное и транспонированное семейства, а также параметрикс гипоэллиптического голоморфного семейства (условие гипоэллиптичности считается выполненным равномерно по z) также являются голоморфными семействами в смысле определения 11.2.

Мы можем теперь сформулировать основную структурную теорему.

Т е о р е м а 11.2. *При любом* $z\in\mathbb{C}$

$$A^z\in CL^{mz}(M),\tag{11.32}$$

причем для любого целого $N\geqslant 0$ *и при любом* $t\in\mathbb{R}$

$$A^z-B^{(z)}_{(N)}\in\mathscr{O}\big(\operatorname{Re}z<t,\,L^{mt-N}_{1,\,0}(M)\big).\tag{11.33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Докажем вначале, что (11.32) следует из (11.33). Мы положим при фиксированном $z\in\mathbb{C}$

$$B^{(z)}\sim\sum_{j=0}^{\infty}B^{(z)}_{mz-j}\tag{11.34}$$

(смысл этой формулы расшифровывается так же, как для (11.22)). Тогда ясно, что мы можем считать

$$B^{(z)}\in CL^{mz}(M).\tag{11.35}$$

Но если в (11.33) фиксировать такое $t\in\mathbb{R}$, что $t>\operatorname{Re}z$, и затем устремить N к $+\infty$, то мы получим

$$A^z-B^{(z)}\in L^{-\infty}(M),\tag{11.36}$$

откуда и следует (11.32).

2. Докажем (11.33). Введем обозначение

$$R^{(z)}_{(N)}=A^z-B^{(z)}_{(N)}.\tag{11.37}$$

Отметим прежде всего, что групповые свойства комплексных степеней A^z и их пока гипотетических символов $b^{(z),0}_{mz-j}$ (теоремы 10.1 и 11.1), а также голоморфность композиции голоморфных семейств позволяют свести доказательство к случаю $t=0$ (N должно быть произвольным). Иными словами, достаточно проверить, что

$$R^{(z)}_{(N)} \in \mathscr{O}\big(\mathrm{Re}\, z<0,\ L^{-N}_{1,0}(M)\big). \tag{11.38}$$

Для того чтобы воспользоваться предложением 11.2, удобно при $\mathrm{Re}\, z<0$, наряду с оператором $B^{(z)}_{(N)}$, рассмотреть оператор

$$'B^{(z)}_{(N)} = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \lambda^z B_{(N)}(\lambda)\, d\lambda. \tag{11.39}$$

Легко проверить, что

$$'B^{(z)}_{(N)} - B^{(z)}_{(N)} \in \mathscr{O}\big(\mathrm{Re}\, z<0,\ L^{-\infty}(M)\big). \tag{11.40}$$

В самом деле, мы имеем, очевидно,

$$'B^{(z)}_{(N)} = \sum_{j=0}^{N-1} {}'B^{(z)}_{mz-j}, \tag{11.41}$$

где

$$'B^{(z)}_{(mz-j)} = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \lambda^z B_{-m-j}(\lambda)\, d\lambda, \tag{11.42}$$

и потому символ $'b^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)$ оператора $'B^{(z)}_{mz-j}$ в какой-нибудь локальной системе координат выражается формулой

$$'b^{(z)}_{(mz-j)}(x,\xi) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \lambda^z b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda. \tag{11.43}$$

Отсюда очевидным образом следует, что

$$'b^{(z)}_{(mz-j)}(x,\xi) = b^{(z),0}_{mz-j}(x,\xi) \quad \text{при} \quad |\xi|\geqslant 1. \tag{11.44}$$

Но то же самое верно и для символов $b^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)$ операторов $B^{(z)}_{mz-j}$, сумма которых дает $B^{(z)}_{(N)}$ (см. формулы (11.28)—(11.30)). С учетом очевидных оценок производных по z отюда сразу получается (11.40).

Теперь ввиду (11.40) ясно, что достаточно для оператора $'R^{(z)}_{(N)} = A^z - {}'B^{(z)}_{(N)}$ проверить включение вида (11.38). Обозначим через

${}'r^{(z)}_{(N)}(x,\,\xi)$ символ оператора ${}'R^{(z)}_{(N)}$ в какой-нибудь локальной системе координат, а через $r_{(N)}(x,\,\xi,\,\lambda)$ — такой же символ оператора $R_{(N)}(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}-B_{(N)}(\lambda)$. Тогда

$$ {}'r^{(z)}_{(N)}(x,\,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z r_{(N)}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda \tag{11.45}$$

и мы имеем

$$\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x\,\partial^k_z\,{}'r^{(z)}_{(N)}(x,\,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z(\ln\,\lambda)^k\,\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x r_{(N)}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{11.46}$$

Но в силу предложения 11.2 имеют место оценки

$$\left|\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x r_{(N)}(x,\,\xi,\,\lambda)\right|\leqslant C_{\alpha,\,\beta,\,K}(1+|\,\xi\,|+|\,\lambda\,|^{1/m})^{-m-N-|\alpha|},\quad x\in K, \tag{11.47}$$

где K — некоторый компакт, лежащий в рассматриваемой координатной окрестности. Отсюда следует, что

$$\left|\,\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x r_{(N)}x,\,\xi,\,\lambda)\right|\leqslant C_{\alpha,\,\beta,\,K}(1+|\,\xi\,|)^{-N-|\alpha|}(1+|\,\lambda\,|)^{-1},\quad x\in K, \tag{11.48}$$

и из (11.46) мы получаем теперь для ${}'R^{(z)}_{(N)}$ включение (11.38). ■

Упражнение 11.1. Распространить теорему 11.2 на ситуацию, описанную в упражнении 10.1.

§ 12. Аналитическое продолжение ядер комплексных степеней

12.1. Постановка задачи. Выражение ядра через символ. Пусть M — замкнутое многообразие, A — эллиптический оператор на M, удовлетворяющий условиям (10.1) и (10.2), обеспечивающим возможность построения комплексных степеней. При $\mathrm{Re}\,z<-n/m$ мы обозначим через $A_z(x,\,y)\,dy$ ядро оператора A^z (это зависящая от параметра $x\in M$ плотность на M, которую в локальных координатах, определенных при $y\in Y$, можно записать в виде $A_z(x,\,y)\,dy$, где dy — мера Лебега, определяемая локальными координатами, а $A_z(x,\,y)$ — некоторая непрерывная числовая функция на $M\times Y$). Используя некоторую вольность речи, мы будем называть ядром саму функцию $A_z(x,\,y)$, зависящую от параметра z и от локальных координат в окрестности точки Y.

Наша цель — построить аналитическое продолжение (по z) ядер $A_z(x,\,y)$ во всю комплексную z-плоскость $\mathbb{C}$.

Отметим, что если X, Y — открытые подмножества M, то $A_z(x,\,y)$ при $x\in X$ и $y\in Y$ однозначно определяется значениями $(A^z u,\,v)$, где $u\in C^\infty_0(Y)$, $v\in C^\infty_0(X)$.

Пусть теперь X — некоторая координатная окрестность (не обязательно связная), которую мы будем отождествлять с открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$. Если ПДО $B \in L^m(X)$ записывается в виде

$$Bu(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b(x, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi,$$

где $b \in S^l(X \times \mathbb{R}^n)$, то при $l < -n$ его ядро $A(x, y)$ непрерывно и имеет вид

$$A(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b(x, y)\, đ\xi.$$

Ограничение ПДО A^z на X (см. п. 4.3) можно представить в виде $A^z = A_{1,z} + R_{1,z}$, где $A_{1,z}$ — собственный ПДО, а $R_{1,z}$ — оператор с ядром $R_1(x, y, z) \in C^\infty(X \times X \times \mathbb{C})$, голоморфным по z и равным 0 при близких x и y. Обозначим символ оператора $A_{1,z}$ через $a(x, \xi, z)$ и будем, используя вольность речи, называть его символом оператора A^z. Ядро $A_z(x, y)$ при близких $x, y \in X$ можно записать в виде

$$A_z(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi, z)\, đ\xi. \tag{12.1}$$

Ядро $A_z(x, y)$ при $\operatorname{Re} z < -n/m$ непрерывно и голоморфно по z. При $x = y$ получаем

$$A_z(x, y) = \int a(x, \xi, z)\, đ\xi. \tag{12.2}$$

Отметим, что результат интегрирования в (12.2) (и в (12.1) при близких x и y) не зависит от выбора «символа» $a(x, \xi, z)$.

12.2. Формулировка результата. В формулировке результата будут участвовать построенные в § 11 однородные компоненты $b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)$ символа оператора A^z. Отметим здесь, что при $\operatorname{Re} z < j/m$ они задаются формулами

$$b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_\Gamma \lambda^z b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12.3}$$

где $b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$ — однородные компоненты символа параметрикса оператора $A - \lambda I$, также построенные в § 11. Ранее формула (12.3) употреблялась лишь при $\operatorname{Re} z < 0$, но интеграл в (12.3) сходится при $\operatorname{Re} z < j/m$, так что обе части (12.3) голоморфны по z при $\operatorname{Re} z < j/m$, что и доказывает их совпадение при этих z.

Нужны будут также функции

$$d^{(z),0}_{mz-j}(x,\,\xi)=\int\limits_0^\infty r^z b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,-r)\,dr,\quad j=0,\,1,\,2,\,\ldots, \tag{12.4}$$

определенные при $-1<\operatorname{Re} z<j/m$ и положительно однородные по ξ порядка $mz-j$.

Т е о р е м а 12.1. *Пусть X — любая фиксированная координатная окрестность на M, $A_z(x,\,y)$ — определенные при $\operatorname{Re} z<-n/m$ и при $x,\,y\in X$ ядра комплексных степеней A^z эллиптического оператора A. Тогда*

1) *при $x\neq y$ функция $A_z(x,\,y)$ продолжается до целой функции от z, равной 0 при $z=0,\,1,\,2,\,\ldots$;*

2) *$A_z(x,\,x)$ продолжается до мероморфной функции во всей комплексной z-плоскости с не более чем простыми полюсами, которые могут быть расположены лишь в точках арифметической прогресии $z_j=\dfrac{j-n}{m}$, $j=0,\,1,\,\ldots$, причем вычет $A_z(x,\,x)$ в точке z_j равен*

$$\gamma_j(x)=-\frac{1}{m}\int\limits_{|\xi|=1} b^{(z_j),\,0}_{-n}(x,\,\xi)\,\text{đ}\xi', \tag{12.5}$$

где $\text{đ}\xi'=(2\pi)^{-n}\,d\xi'$, а $d\xi'$ — элемент площади поверхности сферы $|\,\xi\,|=1$;

3) *если $z_j=l$ — неотрицательное целое число, то $\gamma_j(x)=0$ и значение $\varkappa_l(x)=A_l(x,\,x)$ аналитического продолжения ядра в точке $z=l$ дается формулой*

$$\varkappa_l(x)=(-1)^l\,\frac{1}{m}\int\limits_{|\xi|=1} d^{(l),\,0}_{-n}(x,\,\xi)\,\text{đ}\xi'. \tag{12.6}$$

Утверждение 1) имеет место равномерно при $x\in K_1$, $y\in K_2$, где K_1, K_2 — непересекающиеся компакты, лежащие в X, т. е. $K_z(x,\,y)$ продолжается до целой функции z со значениями в $C(K_1\times K_2)$. Аналогично, утверждения 2) и 3) равномерны по $x\in K$, где K — компакт в X, т. е. отображение $z\mapsto A_z(x,\,x)$, рассматриваемое как функция от z со значениями в $C(K)$, мероморфно продолжается во всю комплексную z-плоскость с полюсами в точках z_j, $j=0,\,1,\,\ldots$, вычетами в этих полюсах $\gamma_j(x)|_K$ и значениями $\varkappa_l(x)|_K$ в точках $l=0,\,1,\,2,\,\ldots$

З а м е ч а н и я. 1) В формуле (12.5) фигурирует функция $b^{(z_j),\,0}_{-n}(x,\,\xi)$, которую можно в соответствии с обозначениями § 11 записать также в виде

$$b_{-n}^{(z_j),\,0}(x,\,\xi)=b_{mz_j-j}^{(z_j),\,0}(x,\,\xi), \tag{12.7}$$

поскольку $mz_j-j=-n$.

2) Поскольку $z_j<j/m$, то вместо (12.5) мы можем написать непосредственное выражение $\gamma_j(x)$ через $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$:

$$\gamma_j(x)=-\frac{i}{m\cdot 2\pi}\int\limits_{|\xi|=1} đ\xi'\int\limits_{\Gamma}\lambda^{\frac{j-n}{m}}b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.8}$$

Аналогичное выражение пишется и для $\varkappa_l(x)$:

$$\varkappa_l(x)=(-1)^l\,\frac{1}{m}\int\limits_{|\xi|=1} đ\xi'\int\limits_0^\infty r^l b^0_{-m(l+1)-n}(x,\,\xi,\,-r)\,dr, \tag{12.9}$$

где l — неотрицательное целое число (индекс $-m(l+1)-n$) в (12.9) получается, если выразить j через l из соотношения $\dfrac{j-m}{n}=l$.

3) Отметим особо формулу вычета в самом левом полюсе $z_0=-n/m$:

$$\gamma_0(x)=-\frac{1}{m}\int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x,\,\xi)\,đ\xi'. \tag{12.10}$$

В важном частном случае, когда $a_m(x,\,\xi)>0$ при $\xi\neq 0$, из этой формулы следует, что $\gamma_0(x)\neq 0$. В дальнейшем мы преобразуем в этом случае формулу (12.10) к более естественному для приложений виду.

Доказательство теоремы 12.1. 1. Мы будем пользоваться структурной теоремой 11.2 и использованными там обозначениями $B^{(z)}_{(N)}$ и $R^{(z)}_{(N)}=A^z-B^{(z)}_{(N)}$. Обозначим через $R^{(z)}_{(N)}(x,\,y)$ ядро оператора $R^{(z)}_{(N)}$, а через $r^{(z)}_{(N)}(x,\,\xi)$ — его символ в какой-нибудь координатной окрестности X. Тогда, если $x,\,y\in X$, то

$$R^{(z)}_{(N)}(x,\,y)=\int r^{(z)}_{(N)}(x,\,\xi)\,e^{i(x-y)\cdot\xi}\,đ\xi. \tag{12.11}$$

Этот интеграл сходится при $\operatorname{Re} z<\dfrac{N-n}{m}$ и определяет при этих z голоморфную функцию от z со значениями в $C(K_1\times K_2)$, где $K_1,\,K_2$ — любые компакты в X.

Поэтому утверждения о голоморфности, полюсах и вычетах сводятся к соответствующим утверждениям для ядер операторов $B^{(z)}_{(N)}$.

Ядро оператора $B^{(z)}_{(N)}$ в свою очередь является суммой слагаемых вида

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)=\int e^{i(x-y)\cdot\xi}b^{(z)}_{mz-j}(x,\,\xi)\,đ\xi, \tag{12.12}$$

так что мы будем в дальнейшем изучать интегралы вида (12.12).

2. Пусть K_1, K_2 — непересекающиеся компакты в X. Докажем, что $B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ является целой функцией от z со значениями в $C(K_1\times K_2)$.

Интегрируя в (12.12) по частям при $x\neq y$, мы получим

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)=\int e^{i(x-y)\cdot\xi}|\,x-y\,|^{-2M}\Delta^M_\xi b^{(z)}_{mz-j}(x,\,\xi)\,đ\xi, \tag{12.13}$$

где M — натуральное число. Этот интеграл сходится уже при $\operatorname{Re} z<\dfrac{2M+j-n}{m}$ и определяет голоморфную при этих z функцию со значениями в $C(K_1\times K_2)$, поскольку $|\,x-y\,|\geqslant\varepsilon>0$ при $x\in K_1$, $y\in K_2$. Ввиду произвольности M ясно, что $B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ является целой функцией от z со значениями в $C(K_1\times K_2)$.

3. При $x=y$ мы имеем

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\,x)=\int b^{(z)}_{mz-j}(x,\,\xi)\,đ\xi,$$

или

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\,x)=\int \theta(\xi)\,b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)\,đ\xi, \tag{12.14}$$

где $\theta(\xi)=\omega(|\,\xi\,|)$, $\omega(\tau)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\omega(\tau)=0$ при $\tau\leqslant 1/2$, $\omega(\tau)=1$ при $\tau\geqslant 1$. Перейдем в интеграле (12.14) к полярным координатам. Получим тогда

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\,x)=\left(\int\limits_0^\infty \omega(r)\,r^{mz-j+n-1}\,dr\right)\left(\int\limits_{|\xi|=1} b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)\,đ\xi'\right). \tag{12.15}$$

Ясно, что второй сомножитель является целой функцией от z со значениями в $C(K)$ (K — любой компакт в X). Первый же можно разбить в сумму

$$\int\limits_0^\infty \omega(r)\,r^{mz-j+n-1}\,dr=\int\limits_0^1 \omega(r)\,r^{mz-j+n-1}\,dr+\int\limits_1^\infty r^{mz-j+n-1}\,dr. \tag{12.16}$$

Первый интеграл в (12.16) — целая функция от z, а второй явно вычисляется:

$$\int\limits_1^\infty r^{mz-j+n-1}\,dr=-\frac{1}{mz-j+n}=-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{z-z_j}, \tag{12.17}$$

где $z_j = \dfrac{j-n}{m}$. Тем самым $B^{(z)}_{mz-j}(x, x)$ имеет единственный полюс с вычетом $\gamma_j(x)$, заданным формулой (12.5).

Проверим, что $\gamma_j(x)=0$, если $z_j=l$ — неотрицательное и целое. Это ясно из теоремы 11.1, п. г) (функции $b^{(l),\,0}_{ml-j}(x, \xi)$ являются однородными компонентами символа дифференциального оператора A^l и тем самым равны 0 при $ml-j<0$ и, в частности, при $ml-j=-n$).

4. Для окончания доказательства п. 1) и 2) теоремы 12.1 осталось показать, что $A_l(x, y)=0$ при $x\neq y$ и $l\in\mathbb{Z}_+$. Для этого достаточно проверить, что если $u, v\in C_0^\infty(X)$ и $\operatorname{supp} u\cap\operatorname{supp} v=\varnothing$, то

$$\int A_l(x, y)\, u(y)\, v(x)\, dy\, dx=0. \tag{12.18}$$

Но это равенство равносильно тому, что $\langle A^l u, v\rangle=0$, поскольку в силу теоремы 10.1, п. д) функция $\langle A^z u, v\rangle$ является целой функцией от z.

Таким образом, п. 1) и 2) теоремы 12.1 и отсутствие полюсов при $z\in\mathbb{Z}_+$ доказаны. В дальнейшем фактически будет дано новое независимое (хотя и более сложное) доказательство, позволяющее вычислить $A_l(x, x)$ при $l\in\mathbb{Z}_+$. Читатель, не интересующийся этим вычислением, может опустить дальнейшую часть доказательства без ущерба для понимания дальнейшего содержания книги.

5. Для изучения значений $A_z(x, x)$ при $z\in\mathbb{Z}_+$ удобна другая аппроксимация ядер $A_z(x, y)$, получающаяся, если срезку делать не в символах $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x, \xi)$ комплексных степеней, а еще в символе параметрикса $b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$. По существу, это уже делалось в п. 11.3. Именно, там мы ввели операторы $B_{-m-j}(\lambda)$, $B_{(N)}(\lambda)$, $R_{(N)}(\lambda)$, ${}'B^{(z)}_{mz-j}$, ${}'B^{(z)}_{(N)}$, ${}'R^{(z)}_{(N)}$ и их символы, определенные в произвольной координатной окрестности X: $b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$, $b_{(N)}(x, \xi, \lambda)$, $r_{(N)}(x, \xi, \lambda)$, ${}'b^{(z)}_{mz-j}(x, \xi)$, ${}'b^{(z)}_{(N)}(x, \xi)$, ${}'r^{(z)}_{(N)}(x, \xi)$ (см. формулы (11.17)—(11.48)). В качестве аппроксимации ядер $A_z(x, y)$ мы будем использовать теперь ядра ${}'B^{(z)}_{(N)}(x, y)$ операторов ${}'B^{(z)}_{(N)}$:

$${}'B^{(z)}_{(N)}(x, y)=\sum_{j=0}^{N-1} {}'B^{(z)}_{mz-j}(x, y), \tag{12.19}$$

где ${}'B^{(z)}_{mz-j}(x, y)$ — ядро оператора ${}'B^{(z)}_{mz-j}$, выражающееся формулой

$${}'B^{(z)}_{mz-j}(x, y)=\int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, {}'b^{(z)}_{mz-j}(x, \xi)\, đ\xi, \tag{12.20}$$

или

$$'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)=\frac{i}{2\pi}\int đ\xi\int\limits_{\Gamma}\lambda^z e^{i(x-y)\cdot\xi}b_{mz-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.21}$$

Здесь важную роль играет выбор контура Γ, поскольку интеграл в (12.21) зависит, вообще говоря, от выбора радиуса его круговой части (срезающая функция $\theta(\xi,\,\lambda)$, входящая в определение $b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$, не голоморфна по λ). Будем обозначать радиус круговой части Γ через ρ^m, где $\rho>0$. Ввиду однородности $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ по $(\xi,\,\lambda^{1/m})$ ясно, что существует такая постоянная $L>0$, что $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфна по λ при $|\lambda|<L^m|\xi|^m$. Мы выберем радиус круговой части Γ равным ρ^m, где $\rho>0$ таково, что

$$\rho<L/(2\sqrt{L^2+1}). \tag{12.22}$$

Тогда, если $|\xi|^2+|\lambda|^{2/m}\geqslant 1/4$ и $\lambda\in\Gamma$, то либо $|\lambda|>\rho^m$ (т. е. λ принадлежит прямолинейной части Γ), либо $|\lambda|=\rho^m$ и

$$L^m|\xi|^m\geqslant L^m\left(\frac{1}{4}-|\lambda|^{2/m}\right)^{m/2}=L^m\left(\frac{1}{4}-\rho^2\right)^{m/2}>\rho^m=|\lambda|$$

(последнее неравенство равносильно (12.22)). Таким образом, ввиду того, что $\theta(\xi,\,\lambda)=0$ при $|\xi|^2+|\lambda|^{2/m}\leqslant 1/2$, при рассмотрении круговой части Γ всегда можно считать $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфной внутри этой круговой части.

Ядра $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ определены и голоморфны при $\operatorname{Re} z<j/m$ (при этих z интеграл (12.21) абсолютно сходится). Наша цель в настоящий момент — аналитически продолжить эти ядра во всю комплексную z-плоскость.

Докажем прежде всего, что при $x\neq y$ ядро $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ продолжается до целой функции от z (и, более того, если K_1, K_2 — непересекающиеся компакты в X, то ядро $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ продолжается до целой функции от z со значениями в $C(K_1\times K_2)$). В самом деле, стандартное интегрирование по частям дает

$$'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)=\frac{i}{2\pi}\int đ\xi\int\limits_{\Gamma}\lambda^z e^{i(x-y)\cdot\xi}|x-y|^{-2M}\Delta^M_\xi\big(b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\big)\,d\lambda, \tag{12.23}$$

где M — любое натуральное число, а из записи в таком виде очевидна голоморфность $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ по z при $\operatorname{Re} z<\dfrac{j+2M}{m}$.

6. Теперь покажем, что $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)=0$ при $x\neq y$ и $z\in\mathbb{Z}_+$. Если $z\in\mathbb{Z}_+$, то λ^z — однозначная функция и интегралы по прямолинейным

частям контура Γ в (12.23) сокращаются. Интеграл же по круговой части Γ равен 0 по теореме Коши, поскольку

$$\Delta_\xi^M(b_{-m-\xi}(x,\,\xi,\,\lambda)) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2M} C_{\alpha\beta}[\,\partial_\xi^\alpha b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)]\,[\,\partial_\xi^\beta\theta(\xi,\,\lambda)],$$

функция $\partial_\xi^\alpha b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфна по λ внутри круговой части Γ, а любая производная $\partial_\xi^\beta\theta(\xi,\,\lambda)$ постоянна по λ при $|\,\lambda\,| = \mathrm{const}$.

7. Займемся теперь аналитическим продолжением интеграла

$$'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,x) = \frac{i}{2\pi}\int đ\xi \int_\Gamma \lambda^z\theta(\xi,\,\lambda)\,b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.24}$$

Пусть Γ^1 — часть контура Γ, лежащая там, где $|\,\xi\,|^2 + |\,\lambda\,|^{2/m} > 1$, а Γ^2 — часть, лежащая там, где $|\,\xi\,|^2 + |\,\lambda\,|^{2/m} \leqslant 1$ (при $|\,\xi\,| > 1$ это пустое множество). Мы имеем, очевидно,

$$\int_\Gamma \lambda^z\theta b^0_{-m-j}\,d\lambda = \int_{\Gamma^1} \lambda^z b^0_{-m-j}\,d\lambda + \int_{\Gamma^2} \lambda^z\theta b^0_{-m-j}\,d\lambda.$$

Ясно, что интеграл

$$\frac{i}{2\pi}\int đ\xi \int_{\Gamma^2} \lambda^z\theta(\xi,\,\lambda)\,b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda$$

представляет собой целую функцию от z. Эта целая функция равна 0 при $z = 0,\,1,\,2,\,\ldots$, поскольку тогда интегралы по прямолинейным частям Γ^2 сокращаются ввиду однозначности λ^z, а интеграл по круговой части равен 0 в силу теоремы Коши ($\theta(\xi,\,\lambda)$ постоянна при $|\,\xi\,| = \mathrm{const}$ и $|\,\lambda\,| = \mathrm{const}$, а $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфна по λ внутри круговой части Γ^2). Поэтому можно доказывать все утверждения о продолжении для интеграла

$$I(z) = \frac{i}{2\pi}\int đ\xi \int_{\Gamma^1} \lambda^z b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.25}$$

Ясно, что $\Gamma^1 = \Gamma$ при $|\,\xi\,| \geqslant \sqrt{1-\rho^2}$ и Γ^1 состоит из двух лучей при $|\,\xi\,| < \sqrt{1-\rho^2}$. Положим $\Gamma^1_\xi = \Gamma^1$ при $|\,\xi\,| < \sqrt{1-\rho^2}$ и $\Gamma^1_\xi = |\,\xi\,|^m(1-\rho^2)^{-m/2}\Gamma$ при $|\,\xi\,| \geqslant \sqrt{1-\rho^2}$. Поскольку из (12.22) вытекает, что $\rho/\sqrt{1-\rho^2} < L$, то $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ не имеет особенностей при

$|\lambda| < \rho|\xi|/\sqrt{1-\rho^2}^{\,m}$ и по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma^1} \lambda^z b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\Gamma^1_\xi} \lambda^z b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.26}$$

Сделаем теперь замену переменных, полагая

$\lambda = e^{\pm i\pi} t^m$ на прямолинейной части Γ_ξ;

$\lambda = \alpha^m |\xi|^m e^{i\varphi}$, где $\alpha = \dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, на круговой части Γ^1_ξ.

Цель этой замены — получить из (12.25) интеграл от однородной функции по $(\xi,\,t)$ и дальше действовать, как в п. 3 этого доказательства.

После замены получается, что

$$\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1_\xi} \lambda^z b^0_{-m-j}\,d\lambda = I_1 \qquad \text{при} \quad |\xi| < \sqrt{1-\rho^2},$$

$$\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1_\xi} \lambda^z b^0_{-m-j}\,d\lambda = I_2 + I_3 \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant \sqrt{1-\rho^2},$$

где

$$I_1 = m\frac{\sin\,\pi z}{\pi} \int\limits_{\sqrt{1-|\xi|^2}}^{+\infty} t^{mz+m-1} b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,-t^m)\,dt,$$

$$I_2 = m\frac{\sin\,\pi z}{\pi} \int\limits_{\alpha|\xi|}^{+\infty} t^{mz+m-1} b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,-t^m)\,dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\alpha|\xi|)^{mz+m} e^{i\varphi(z+1)} b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\alpha^m|\xi|^m e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Заметим, что сумма

$$\int\limits_{|\xi|<\sqrt{1-\rho^2}} I_1\,d\xi + \int\limits_{|\xi|\geqslant\sqrt{1-\rho^2}} I_2\,d\xi \tag{12.27}$$

является интегралом функции от $(\xi,\,t)$, однородной порядка $mz + m - 1 - m - j$, по области, являющейся пересечением конической области с дополнением шара (рис. 3).

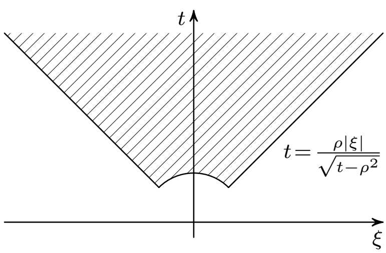


Рис. 3.

Вводя в пространстве $(\xi,\, t)$ полярные координаты, мы видим, что интеграл (12.27) абсолютно сходится при $\mathrm{Re}(mz-j-1)<-n-1$ и в силу (12.17) записывается в виде

$$-\frac{m\sin\pi z}{\pi(mz-j+n)}\int\limits_{\substack{|\xi|^2+t=1\\ t>\rho}} t^{mz+m-1}b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,-t^m)\,d(\xi,\,t)', \tag{12.28}$$

где $d(\xi,\,t)'$ — элемент площади единичной сферы S^n в $(\xi,\,t)$-пространстве. Ввиду того, что $\rho>0$, а $t>\rho$, интеграл в (12.28) определен и является целой функцией от z, а все это выражение может иметь лишь один полюс при $z=z_j=\dfrac{j-n}{m}$, причем если $z_j\neq 0,\,1,\,2,\,\ldots$, то оно обращается в 0 при всех $z\in\mathbb{Z}_+$, а если $z_j=l\in\mathbb{Z}_+$, то при всех $z\neq l$, но при этом в точке $z=l$ полюса уже нет.

Здесь можно, разумеется, написать и значение (12.28) при $z=z_j=$ $=l\in\mathbb{Z}_+$, но нам удобнее будет сделать это в дальнейшем сразу для всего интеграла (12.25).

Рассмотрим оставшийся член $\displaystyle\int\limits_{|\xi|>\sqrt{1-\rho^2}} I_3\,d\xi$. Здесь удобно перейти к полярным координатам в ξ-пространстве. Мы получим тогда

$$\int\limits_{|\xi|>\sqrt{1-\rho^2}} I_3\,d\xi=\frac{C}{mz-j+n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(z+1)}\int\limits_{|\xi|=1} b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\alpha^m e^{i\varphi})\,d\xi'\,d\varphi, \tag{12.29}$$

где $C=\mathrm{const}$. Отсюда очевидна мероморфность этого интеграла с единственным возможным полюсом при $z=z_j$. Если $z=l\in\mathbb{Z}_+$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(z+1)}b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\alpha^m e^{i\varphi})\,d\varphi=i^{-1}\int\limits_{|w|=1} w^l b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\alpha^m w)\,dw=0,$$

поскольку функция $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфна по λ при $|\lambda|<\alpha^m$. Отсюда ясно, что при $z=l\in\mathbb{Z}_+$ интеграл (12.29) обращается в 0, за исключением, быть может, точки $z=z_j$ (если $z_j\in\mathbb{Z}_+$), в которой в этом случае нет полюса.

8. Таким образом, доказано, что интеграл (12.24) мероморфно продолжается во всю комплексную плоскость, имея не более одного простого полюса, который возможен лишь при $z=z_j=\dfrac{j-n}{m}$. Более того, при $z=l\in\mathbb{Z}_+$ значение этого интеграла обращается в 0, кроме, быть

может, случая $z=l=z_j$, но тогда в точке z_j нет полюса. Рассмотрим именно этот случай $z=l=z_j\in\mathbb{Z}_+$ и вычислим значение аналитического продолжения (12.24) в точке $z=l=z_j$.

Заметим, что интеграл по λ в (12.24) является при $z=z_j$ сходящимся, поскольку $z_j=\dfrac{j-n}{m}<j/m$. Разобьем интеграл по ξ в сумму интегралов по шару $|\xi|\leqslant 1$ и по внешности $|\xi|>1$. Стандартное рассуждение, уже использованное выше, показывает, что интеграл по шару $|\xi|\leqslant 1$ обращается в 0 при $z=z_j$. При $|\xi|\geqslant 1$ мы имеем $\theta(\xi,\lambda)=1$ и вместо (12.24) достаточно рассмотреть интеграл

$$I=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\geqslant 1} d\!\!\!{}^-\xi\int\limits_{\Gamma}\lambda^z b^0_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.30}$$

Переходя к полярным координатам в ξ-пространстве, получим

$$I=-\frac{1}{mz-j+n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z b^0_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda\,d\!\!\!{}^-\xi'. \tag{12.31}$$

При $\operatorname{Re} z>-1$ мы можем, пользуясь теоремой Коши, стянуть в точку 0 круговую часть контура Γ. Тогда вместо (12.31) мы получим выражение

$$I=\frac{\sin\pi z}{\pi(mz-j+n)}\int\limits_{|\xi|=1}\int\limits_0^\infty r^z b^0_{-m-j}(x,\xi,-r)\,dr\,d\!\!\!{}^-\xi'.$$

Значение этого выражения при $z=z_j=l\in\mathbb{Z}_+$ равно в точности $\varkappa_l(x)$, где $\varkappa_l(x)$ задается формулой (12.6) или (12.9). Поэтому ${}'B^{(l)}_{-n}(x,x)=$ $=\varkappa_l(x)$.

9. Заметим теперь, что разность

$$\begin{aligned}{}'R^{(z)}_{(N)}(x,y)&=A_z(x,y)-{}'B^{(z)}_{(N)}(x,y)=\\&=\frac{i}{2\pi}\int d\!\!\!{}^-\xi\int\limits_{\Gamma}\lambda^z e^{i(x-y)\cdot\xi}r_{(N)}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda\end{aligned} \tag{12.32}$$

продолжается до голоморфной функции от z при $\operatorname{Re} z<\dfrac{N-n}{m}$ со значениями в $C(K\times K)$, где K — любой компакт в X. Отсюда видно, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z<\dfrac{N-n}{m}$ функции $A_z(x,y)$ и ${}'B^{(z)}_{(N)}(x,y)$ имеют одни и те же полюсы с одинаковыми вычетами. Более того, если $z=l\in\mathbb{Z}_+$ и

$x\neq y$, то $A_l(x, y)={}'B^{(l)}_{(N)}(x, y)=0$ (см. пп. 4 и 6 этого доказательства). Поэтому ясно, что по непрерывности $A_l(x, y)\equiv{}'B^{(l)}_{(N)}(x, y)$ при всех x, y $\left(\text{если } l<\dfrac{N-n}{m}\right)$. В частности, $A_l(x, x)={}'B^{(l)}_{(N)}(x, x)$, что с учетом результата п. 8 заканчивает доказательство теоремы 12.1. ■

§ 13. ζ-функция эллиптического оператора и формальные асимптотики спектра

13.1. Определение и теорема о продолжении. Пусть A — эллиптический оператор на замкнутом многообразии M, удовлетворяющий тем же условиям, что и в предыдущем параграфе. Пусть $A_z(x, y)\,dy$ — ядро оператора A^z. При $x=y$ мы получаем из этого ядра плотность $A_z(x, x)\,dx$, корретно определенную на всем многообразии M. Ее можно проинтегрировать по M.

Определение 13.1. Функция

$$\zeta_A(z)=\int\limits_M A_z(x, x)\,dx \tag{13.1}$$

называется *ζ-функцией* эллиптического оператора A.

В следующем пункте будет показано, что $\zeta_A(z)$ выражается через собственные значения оператора A, что позволяет получить в самосопряженном случае простейшую теорему об асимптотике собственных значений. Пока же мы удовлетворимся формальным определением 13.1 и сформулируем теорему об аналитическом продолжении ζ-функции.

Теорема 13.1. *Функция $\zeta_A(z)$, определенная формулой* (13.1) *при* $\mathrm{Re}\, z<-n/m$, *продолжается до мероморфной функции во всей комплексной z-плоскости с не более чем простыми полюсами, которые могут быть расположены лишь в точках арифметической прогрессии $z_j=\dfrac{j-n}{m}$, $j=0, 1, 2, \ldots$, за исключением точек $z_j=l=0, 1, 2, \ldots$, причем вычет γ_j в точке z_j и значение $\varkappa_l=\zeta(l)$ в обозначениях теоремы* 12.1 *даются формулами*

$$\gamma_j=\int\limits_M \gamma_j(x)\,dx=-\frac{1}{m}\int\limits_M dx\int\limits_{|\xi|=1} b^{(z_j),\,0}_{-n}(x, \xi)\,đ\xi'=$$
$$=-\frac{i}{2\pi m}\int\limits_M dx\int\limits_{|\xi|=1} đ\xi'\int\limits_\Gamma \lambda^{\frac{j-n}{m}}\, b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)\,d\lambda, \tag{13.2}$$

$$\varkappa_l = \int\limits_M \varkappa_l(x)\,dx = (-1)^l \frac{1}{m} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} d^{(l),\,0}_{-n}(x,\,\xi)\,đ\xi' =$$

$$= (-1)^l \frac{1}{m} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} đ\xi' \int\limits_0^\infty r^l b^0_{-m(l+1)-n}(x,\,\xi,\,-r)\,dr. \quad (13.3)$$

Доказательство получается из теоремы 12.1 интегрированием по x формул (12.5) и (12.6) с учетом следующих за теоремой 12.1 замечаний. ■

13.2. Спектральный смысл ζ-функции. В этом пункте мы будем считать, что на M задана гладкая положительная плотность, которую мы, используя некоторую вольность в обозначениях, будем записывать как dx. Тогда ядро оператора можно отождествить с обычной функцией на $M\times M$. Кроме того, имеет смысл говорить о самосопряженности эллиптического оператора на M.

Теорема 13.2. *Пусть на M задан самосопряженный положительный эллиптический дифференциальный оператор A, и пусть λ_j ($j=1,\,2,\,\ldots$) — его собственные значения. Тогда*

$$\zeta_A(z) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^z, \qquad \operatorname{Re} z < -n/m, \quad (13.4)$$

причем ряд в правой части (13.4) *при указанных значениях z сходится абсолютно. Эта сходимость при любом $\varepsilon>0$ равномерна по z в полуплоскости* $\operatorname{Re} z < -n/m-\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} z<-n/m$ и $A_z(x,\,y)$ — ядро оператора A^z, являющееся непрерывной функцией на $M\times M$. Пусть $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированная полная система собственных функций A. Разлагая $A_z(x,\,y)$ в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций $\{\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_k(y)}\}_{j,\,k=1}^\infty$, мы получим

$$A_z(x,\,y) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^z \varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}, \quad (13.5)$$

где ряд сходится в $L^2(M\times M)$. Если при этом число z вещественно, то по теореме Мерсера (см. Рисс и Секефальви-Надь [1], § 98) ряд (13.5) сходится абсолютно и равномерно. Полагая в (13.5) $x=y$ и интегрируя по x, мы получим тождество (13.4). В случае же невещественного z необходимо заметить, что $|\lambda_j^z|=\lambda_j^{\operatorname{Re} z}$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость рядов в (13.4) и (13.5). Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что если $s_0 \in \mathbb{R}, s_0 < -n/m$, то ряд (13.5) при $\operatorname{Re} z < s_0$ мажорируется по модулю суммой рядов

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{s_0} |\varphi_j(x)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{s_0} |\varphi_j(y)|^2,$$

представляющих собой абсолютно и равномерно сходящиеся ряды с положительными членами. ■

З а м е ч а н и е 1. Можно доказать теорему 13.2 и без использования теоремы Мерсера, если заметить, что при $\operatorname{Re} z < -n/(2m)$ оператор A^z имеет ядро $A_z(x, y) \in L^2(M \times M)$ (или, как говорят, является оператором Гильберта–Шмидта), причем в силу равенства Парсеваля имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} = \int\limits_{M\times M} |A_s(x, y)|^2 \, dx\, dy, \quad s < -n/(2m). \tag{13.6}$$

Но из группового свойства следует, что при $s < -n$

$$A_s(x, y) = \int A_{s/2}(x, z)\, A_{s/2}(z, y)\, dz,$$

или

$$A_s(x, y) = \int A_{s/2}(x, z)\, \overline{A_{s/2}(y, z)}\, dz$$

в силу эрмитовости ядра $A_{s/2}(x, y)$. Полагая здесь $x = y$ и интегрируя по x, мы получим из (13.6), что тождество (13.4) верно при вещественных $z < -n/m$. Переход к комплексному z осуществляется так же, как и выше, или с помощью аналитического продолжения.

Отметим, однако, что из этого доказательства трудно получить точную информацию о разложении (13.5) (в частности, равномерную сходимость стоящего там ряда).

З а м е ч а н и е 2. Тождество (13.4) верно и без предположения о самосопряженности A. Доказательство легко получить из теоремы В. Б. Лидского (см. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. [1], теорема 8.4). Однако в несамосопряженном случае не удается извлечь из (13.4) какую бы то ни было содержательную информацию о собственных значениях. Исключение представляет собой случай нормального оператора A, где, впрочем, результаты могут быть просто выведены из результатов, относящихся к самосопряженному случаю.

13.3. Формальная асимптотика функции $N(t)$ в самосопряженном случае. Функция $V(t)$. Пусть оператор A такой же, как в теореме 3.2.

Обозначим для любого $t \in \mathbb{R}$

$$N(t) = \sum_{\lambda_j \leqslant t} 1, \tag{13.7}$$

т. е. $N(t)$ — количество собственных значений оператора A, не превосходящих t (с учетом кратности). Ясно, что $N(t)$ — неубывающая функция от t, равная 0 при $t < \lambda_1$. Мы считаем здесь для удобства, что собственные значения упорядочены по возрастанию:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \tag{13.8}$$

Имеется очевидная формула, выражающая $\zeta_A(z)$ через $N(t)$ в виде интеграла Стильтьеса:

$$\zeta_A(z) = \int_0^{\infty} t^z \, dN(t). \tag{13.9}$$

Предположим теперь, что при $t \to +\infty$ функция $N(t)$ допускает следующее асимптотическое разложение:

$$N(t) = c_1 t^{\alpha_1} + c_2 t^{\alpha_2} + \ldots + c_k t^{\alpha_k} + O(t^{\alpha_{k+1}}), \tag{13.10}$$

где $\mathrm{Re}\ \alpha_1 > \mathrm{Re}\ \alpha_2 > \ldots > \mathrm{Re}\ \alpha_k > \mathrm{Re}\ \alpha_{k+1}$. Тогда

$$\zeta_A(z) = \sum_{l=1}^{k} c_l \int_1^{\infty} t^z d(t^{\alpha_l}) + f_k(z), \tag{13.11}$$

где $f_k(z)$ голоморфна при $\mathrm{Re}\ z < -\mathrm{Re}\ \alpha_{k+1}$. Поскольку

$$\int_1^{\infty} t^z d(t^{\alpha_l}) = \int_1^{\infty} \alpha_l t^{z+\alpha_l-1} \, dt = -\frac{\alpha_l}{z+\alpha_l},$$

то (13.11) можно переписать в виде

$$\zeta_A(z) = -\sum_{l=1}^{k} \frac{c_l \alpha_l}{z+\alpha_l} + f_k(z). \tag{13.12}$$

Следовательно, $\zeta_A(z)$ имеет при $\mathrm{Re}\ z < -\mathrm{Re}\ \alpha_{k+1}$ простые полюсы в точках $-\alpha_l$ с вычетами $-c_l\alpha_l$, $l = 1, \ldots, k$. Поэтому знание полюсов функции $\zeta_A(s)$ и вычетов в них позволяет написать формальную асимптотику функции $N(t)$. Однако в действительности удается вычислить только первый член асимптотики. Этот член, диктуемый сопоставлением (13.10) и (13.12), должен иметь вид $-\dfrac{r_0}{s_0} t^{s_0}$, если $\zeta_A(s)$ имеет самыйлевый полюс в точке $-s_0 < 0$ с вычетом r_0.

Формула

$$N(t) \sim -\frac{r_0}{s_0} t^{s_0} \tag{13.13}$$

будет аккуратно доказана в следующем параграфе с помощью тауберовой теоремы Икехара, а пока мы займемся уточнением ее коэффициентов.

По теореме 13.1 мы имеем $s_0 = n/m$ и

$$r_0 = -\frac{1}{m} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x,\,\xi)\, đ\xi'. \tag{13.14}$$

Поскольку в рассматриваемой ситуации $a_m(x,\,\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$, то $r_0 \neq 0$, так что полюс в точке $-n/m$ действительно имеется. Формула (13.13) записывается теперь в виде

$$N(t) \sim \frac{1}{n} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x,\,\xi)\, đ\xi' \cdot t^{n/m}. \tag{13.15}$$

Мы преобразуем сейчас правую часть (13.15) к более естественному виду. Для этого введем функцию

$$V(t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{a_m(x,\xi)<t} dx\, d\xi. \tag{13.16}$$

Отметим, что она имеет инвариантный смысл: это умноженный на $(2\pi)^{-n}$ объем в T^*M множества тех $(x,\,\xi)$, где $a_m(x,\,\xi) < t$, причем объем берется по мере на T^*M, индуцированной кононической симплектической структурой (см. Арнольд [1]).

Л е м м а 13.1. *Имеет место формула*

$$V(t) = \frac{1}{n} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x,\,\xi)\, đ\xi' \cdot t^{n/m}, \tag{13.17}$$

и, таким образом, вместо (13.15) *можно написать*

$$N(t) \sim V(t). \tag{13.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что в силу однородности a_m условие $a_m(x,\,\xi) < t$ равносильно условию $a_m(x,\,t^{-1/m}\xi) < 1$, и делая в (13.16) замену $\eta = t^{-1/m}\xi$, мы получим

$$V(t) = \int\limits_{a_m(x,\eta)<1} dx\, đ\eta \cdot t^{n/m}.$$

Дальнейшие рассуждения будут идти при фиксированном x, и мы будем писать $a_m(\xi)$ вместо $a_m(x,\xi)$. Необходимо доказать, что

$$\int\limits_{a_m(\xi)<1} d\xi = \frac{1}{n} \int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(\xi')\, d\xi'. \qquad (13.19)$$

Пусть $|\xi'|=1$ и $d(\xi') = \sup\limits_{t>0}\{t\colon a_m(t\xi')\leqslant 1\}$ (рис. 4), т. е. $d(\xi')$ — расстояние от точки 0 до поверхности $a_m(\xi)=1$ по направлению ξ'. Рассмотрим бесконечно малый конус с вершиной в точке 0 и высотой $d(\xi')\cdot\xi'$, высекающий на сфере $|\xi'|=1$ площадь $d\xi'$.

Тогда его объем будет равен $\frac{1}{n}\,(d(\xi'))^n\cdot d\xi'$. Поэтому

$$\int\limits_{a_m(\xi)<1} d\xi = \frac{1}{n} \int\limits_{|\xi'|=1} (d(\xi'))^n\, d\xi'. \qquad (13.20)$$

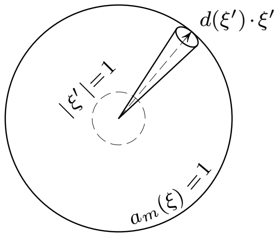


Рис. 4.

Но ввиду однородности $a_m(\xi)$

$$a_m = a_m\left(|\xi|\cdot\frac{\xi}{|\xi|}\right) = |\xi|^m a_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right),$$

так что если $a_m(\xi)=1$, то $a_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) = |\xi|^{-m}$, откуда $d(\xi') = |\xi| = a_m(\xi')^{-1/m}$. Подставляя это выражение $d(\xi')$ в (13.20), мы получаем (13.19). ■

13.4. Асимптотика собственного числа. Мы укажем сейчас асимптотическую формулу для λ_k при $k\to+\infty$, эквивалентную асимптотической формуле для $N(t)$ ((13.13), (13.15) или (13.18)) и вытекающую из того, что, по существу, $N(t)$, как функция t, и λ_k, как функция k, являются взаимно обратными функциями.

Обозначим через V_1 коэффициент при $t^{n/m}$ в формуле (13.17), так что $V_1 = V(1)$. Тогда искомая формула имеет вид

$$\lambda_k \sim V_1^{-m/n}\cdot k^{m/n} \quad \text{при} \quad k\to+\infty. \qquad (13.21)$$

Предложение 13.1. *Асимптотические формулы* (13.21) *и* (13.18) *эквивалентны* (*т. е. вытекают одна из другой*).

Доказательство. 1. Пусть верна формула (13.18), т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое $t_0>0$, что

$$1-\varepsilon \leqslant N(t)\,V_1^{-1}t^{-n/m} \leqslant 1+\varepsilon \qquad (13.22)$$

при $t > t_0$. Выберем теперь такое целое $k_0 > 0$, что $\lambda_{k_0} > t_0$ и $\lambda_{k_0+1} > \lambda_{k_0}$. Покажем, что тогда

$$1 - \varepsilon \leqslant k V_1^{-1} \lambda_k^{-n/m} \leqslant 1 + \varepsilon \tag{13.23}$$

при $k \geqslant k_0$. В самом деле, для любого $k \geqslant k_0$ существуют такие целые числа k_1, k_2, что $k_0 \leqslant k_1 < k \leqslant k_2$ и $\lambda_{k_1} < \lambda_{k_1+1} = \lambda_{k_2} < \lambda_{k_2+1}$. В частности, мы имеем $N(\lambda_{k_1}) = k_1$ и $N(\lambda_{k_2}) = k_2$, так что из (13.22) следует, что

$$1 - \varepsilon \leqslant k_1 V_1^{-1} \lambda_{k_1}^{-n/m} \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{13.24}$$

$$1 - \varepsilon \leqslant k_2 V_1^{-1} \lambda_{k_2}^{-n/m} \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{13.25}$$

Более того, $N(t) = k_1$ при $\lambda_{k_1} \leqslant t < \lambda_{k_2}$, так что при этих t

$$1 - \varepsilon \leqslant k_1 V_1^{-1} t^{-n/m} \leqslant 1 + \varepsilon$$

и по непрерывности

$$1 - \varepsilon \leqslant k_1 V_1^{-1} \lambda_{k_2}^{-n/m} \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{13.26}$$

Из (13.25) и (13.26) следует, что

$$1 - \varepsilon \leqslant k V_1^{-1} \lambda_{k_2}^{-n/m} \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{13.27}$$

и остается заметить, что $\lambda_k = \lambda_{k_2}$. Итак, соотношение (13.23) доказано. Но из него вытекает, что

$$(1+\varepsilon)^{-m/n} V_1^{-m/n} k^{m/n} \leqslant \lambda_k \leqslant (1-\varepsilon)^{-m/n} V_1^{-m/n} k^{m/n}, \tag{13.28}$$

откуда и следует (13.21).

2. Пусть выполнено (13.21). Выберем $\varepsilon > 0$, и пусть целое число k_0 таково, что при целом $k > k_0$ справедливы неравенства (13.28).

Пусть $\lambda_{k_1} \leqslant t < \lambda_{k_2}$, где k_1, k_2 такие же, как и в п. 1. Из (13.28) следует, в частности, что

$$1 - \varepsilon \leqslant k_1 V_1^{-1} \lambda_{k_1}^{-n/m} \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{13.29}$$

$$1 - \varepsilon \leqslant (k_1 + 1) V_1^{-1} \lambda_{k_2}^{-n/m} \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{13.30}$$

поскольку $\lambda_{k_1+1} = \lambda_{k_2}$. Выберем число k_0 столь большим, что $V_1^{-1} \lambda_k^{-n/m} \leqslant \varepsilon$ при $k \geqslant k_0$. Тогда из (13.30) получается, что

$$1 - 2\varepsilon \leqslant k_1 V_1^{-1} \lambda_{k_2}^{-n/m} \leqslant 1 + 2\varepsilon. \tag{13.31}$$

Но $N(t) = k_1$, поэтому из (13.29) и (13.31) мы получаем, что

$$1 - 2\varepsilon \leqslant N(t) V_1^{-1} \lambda_{k_1}^{-n/m} \leqslant 1 + 2\varepsilon,$$

$$1 - 2\varepsilon \leqslant N(t) V_1^{-1} \lambda_{k_2}^{-n/m} \leqslant 1 + 2\varepsilon,$$

откуда ввиду того, что $\lambda_{k_1} \leqslant t < \lambda_{k_2}$, следует

$$1 - 2\varepsilon \leqslant N(t) V_1^{-1} t^{-n/m} \leqslant 1 + 2\varepsilon,$$

что и требовалось. ■

13.5. Задачи.

Задача 13.1. Найти полюсы, вычеты и значения в неотрицательных целых точках для ζ-функции оператора $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ Выразить классическую ζ-функцию Римана

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{13.32}$$

через $\zeta_A(z)$ и найти все полюсы и вычеты $\zeta(z)$ и ее значения при $z = 0, -2, -4, \ldots$

Задача 13.2. На торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ рассмотреть оператор Шредингера $A = -\Delta + q(x)$, где $q(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, и написать выражение $\zeta_A(0)$ через $q(x)$.

Задача 13.3. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор, действующий из $C^\infty(M, E)$ в $C^\infty(M, F)$, где E, F — гладкие векторные расслоения над M. Пусть на M дана гладкая плотность, а в E и F — эрмитовы структуры (эрмитова метрика в каждом слое). Доказать, что

$$\operatorname{index} A = \zeta_{I+A^*A}(z) - \zeta_{I+AA^*}(z), \tag{13.33}$$

где правая часть не зависит от z. Эта формула позволяет в принципе выписать выражение $\operatorname{index} A$ через символ оператора A, используя теорему 13.1, дающую возможность вычислять значение $\zeta_B(0)$ при $B = I + A^*A$ или $B = I + AA^*$.

Указание. Все ненулевые собственные значения операторов AA^* и A^*A имеют одинаковую кратность, поскольку оператор A отображает собственное подпространство оператора A^*A в собственное подпространство оператора AA^*, а оператор A^* — наоборот.

Задача 13.4. Показать, что оператор e^{At} из задачи 10.1 имеет ядро $K(t, x, y)$, бесконечно дифференцируемое по t, x, y при $t > 0$ и при всех $x \in M$, $y \in M$. При этом $t \to +0$ имеют место следующие асимптотические свойства $K(t, x, y)$.

а) Если $x \neq y$, то $K(t, x, y) = O(t^N)$ при любом $N > 0$.

б) $K(t, x, x)$ при $t \to +0$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$K(t, x, x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(x)\, t^{\frac{j-n}{m}}, \tag{13.34}$$

где $\alpha_j(x) \in C^\infty(M)$. Выразить $\alpha_j(x)$ через $\gamma_j(x)$ и $\varkappa_l(x)$ (см. теорему 12.1) и написать выражение $\alpha_j(x)$ через символ оператора A.

Проверить, что если $A^* = A$, то

$$K(t,\, x,\, y) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \varphi_j(x)\, \overline{\varphi_j(y)} \tag{13.35}$$

и θ-функция

$$\theta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \int\limits_M K(t,\, x,\, x)\, dx \tag{13.36}$$

имеет асимптотическое разложение

$$\theta(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^{\frac{j-n}{m}}. \tag{13.37}$$

Выразить index A через θ-функции операторов A^*A и AA^*.

З а д а ч а 13.5. Пусть E — эрмитово расслоение на замкнутом многобразии M с гладкой положительной плотностью, A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор из $C^\infty(M,\, E)$ в $C^\infty(M,\, E)$ (не обязательно полуограниченный).

Рассмотрим функцию

$$\eta_A(z) = \sum_{\lambda} (\operatorname{sign} \lambda) \cdot |\,\lambda\,|^z, \tag{13.38}$$

где сумма берется по всем собственным значениям оператора A. Доказать, что ряд (13.38) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} z < -n/m$ и определяемая им функция $\eta_A(z)$ мероморфно продолжается во всю комплексную z-плоскость с простыми полюсами в точках $z_j = \dfrac{j-n}{m}$, $j = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ Выразить вычеты этих полюсов через символ оператора A.

У к а з а н и е. Выразить $\eta_A(z)$ через $\zeta'_A(z)$ и $\zeta''_A(z)$ — две ζ-функции оператора A, полученные с помощью различных выборов ветви λ^z с разрезами по верхней и нижней полуосям мнимой оси.

§ 14. Тауберова теорема Икехара

14.1. Формулировка. Тауберова теорема Икехара позволяет вывести из мероморфности ζ-функции асимптотические формулы для $N(t)$ при $t \to +\infty$ или для λ_k при $k \to +\infty$ (см. § 13). Приведем ее точную формулировку.

Т е о р е м а 14.1. *Пусть* $N(t)$ — *неубывающая функция, равная* 0 *при* $t \leqslant 1$ *и такая, что интеграл*

$$\zeta(z) = \int\limits_1^\infty t^z\, dN(t) \tag{14.1}$$

сходится при $\operatorname{Re} z < -k_0$, *где* $k_0 > 0$, *причем функция* $\zeta(z) + \dfrac{A}{z+k_0}$ *непрерывно продолжается в замкнутую полуплоскость* $\operatorname{Re} z \leqslant -k_0$. *Тогда при* $t \to +\infty$

$$N(t) \sim \frac{A}{k_0}\, t^{k_0} \tag{14.2}$$

(*напомним, что запись* $f_1(t) \sim f_2(t)$ *при* $t \to +\infty$ *означает, что* $\lim\limits_{t\to+\infty} f_1(t)/f_2(t) = 1$).

С л е д с т в и е 14.1. *Пусть функция* $\zeta(z)$, *определенная при* $\operatorname{Re} z < -k_0$ *интегралом* (14.1), *мероморфно продолжается в более широкую полуплоскость* $\operatorname{Re} z < -k_0 + \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$, *причем на прямой* $\operatorname{Re} z = -k_0$ *имеется единственный и притом простой полюс в точке* $-k_0$ *с вычетом* $-A$. *Тогда верна асимптотическая формула* (14.2).

14.2. Начало доказательства теоремы 14.1: редукции.

1-я р е д у к ц и я. Удобно вместо $\zeta(z)$ рассмотреть $f(z) = \zeta(-z)$. Тогда мы получаем

$$f(z) = \int\limits_1^\infty t^{-z}\, dN(t), \tag{14.3}$$

причем интеграл сходится при $\operatorname{Re} z \geqslant k_0$, а функция $f(z) - \dfrac{A}{z-k_0}$ непрерывна при $\operatorname{Re} z \geqslant k_0$.

2-я р е д у к ц и я. Сведем дело к случаю $k_0 = 1$. Именно, введем функцию $f_1(z) = f(k_0 z)$. Тогда мы получим

$$f_1(z) = \int\limits_1^\infty t^{-k_0 z}\, dN(t) = \int\limits_1^\infty \tau^{-z}\, dN_1(\tau),$$

где $N_1(\tau) = N(\tau^{1/k_0})$. Поскольку

$$f(k_0 z) - \frac{A}{k_0 z - k_0} = f_1(z) - \frac{A}{k_0} \cdot \frac{1}{z-1}$$

и асимптотика $N(t) \sim \dfrac{A}{k_0}\, t^{k_0}$ эквивалентна асимптотике $N_1(\tau) \sim \dfrac{A}{k_0}\, \tau$, то теорема 14.1 сводится к следующему утверждению:

Пусть $N(t)$ — неубывающая функция и интеграл

$$f(z) = \int\limits_1^\infty t^{-z}\, dN(t) \tag{14.4}$$

сходится при $\operatorname{Re} z > 1$, причем функция $f(z) - \dfrac{A}{z-1}$ непрерывна при $\operatorname{Re} z \geqslant 1$. Тогда при $t \to +\infty$

$$N(t) \sim At. \tag{14.5}$$

Отметим, что из условия непрерывности $f(z) - \dfrac{A}{z-1}$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 1$ и того, что $f(z) \geqslant 0$ при вещественном $z \geqslant 1$, вытекает, что $A > 0$. Заменяя $N(t)$ на $A^{-1}N(t)$, что приводит к замене $f(z)$ на $A^{-1}f(z)$, мы видим, что утверждение достаточно доказывать при $A = 1$.

3-я редукция. Перейдем от преобразования Меллина к преобразованию Лапласа, т. е. сделаем замену переменной $t = e^x$. Положим $N(e^x) = \varphi(x)$. Тогда мы получим, что $\varphi(x)$ — неубыващая функция, равная 0 при $x < 0$, причем интеграл

$$f(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zx}\, d\varphi(x) \tag{14.6}$$

сходится при $\operatorname{Re} z > 1$, причем функция $f(z) - \dfrac{1}{z-1}$ непрерывна при $\operatorname{Re} z \geqslant 1$. Надо доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\varphi(x) = 1. \tag{14.7}$$

4-я редукция. Обозначим $H(x) = e^{-x}\varphi(x)$. Условие монотонности $\varphi(x)$ принимает вид

$$H(y) \geqslant H(x)\, e^{x-y} \quad \text{при} \quad y \geqslant x. \tag{14.8}$$

Интегрируя по частям в (14.6), мы получаем при $\operatorname{Re} z > 1$

$$f(z) = z \int\limits_0^\infty e^{-zx}\varphi(x)\, dx = z \int\limits_0^\infty e^{-(z-1)x} H(x)\, dx. \tag{14.9}$$

Мы положим теперь $z = 1 + \varepsilon + it$, где $\varepsilon > 0$ и t вещественно. Заметим, что $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-(z-1)x}\, dx = \frac{1}{z-1}$, поэтому из (14.9) следует $\dfrac{f(z)}{z} - \dfrac{1}{z-1} =$

$= \int\limits_0^\infty e^{-(z-1)\,x}(H(x)-1)\,dx$. Поскольку $\dfrac{f(z)}{z} - \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z}\Big(f(z) - \dfrac{1}{z-1} - 1\Big)$,

то, полагая

$$h_\varepsilon(t) = \frac{1}{z}\Big(f(z) - \frac{1}{z-1} - 1\Big)\Big|_{z=1+\varepsilon+it}, \tag{14.10}$$

мы получаем

$$h_\varepsilon(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon x - itx}(H(x)-1)\,dx. \tag{14.11}$$

Мы можем теперь дать следующую переформулировку теоремы 14.1.

Т е о р е м а 14.1$'$. *Пусть* $H(x)$ — *функция, равная* 0 *при* $x<0$ *и удовлетворяющая при всех вещественных* x *и* y *условию* (14.8). *Пусть интеграл* (14.11) *абсолютно сходится при любом* $\varepsilon>0$ *и определяемая им функция* $h_\varepsilon(t)$ *такова, что предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(t) = h(t) \tag{14.12}$$

существует и равномерен на любом конечном отрезке $|t| \leqslant 2\lambda$. *Тогда*

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1. \tag{14.13}$$

З а м е ч а н и е. Если функция $H(x)$ стремится к 1 достаточно быстро (например, если $H(x)-1\in L^1([0,+\infty)))$, то (14.12) получается из (14.13) предельным переходом под знаком интеграла, который можно выполнить в силу теоремы Лебега (функция $h(t)$ равна тогда преобразованию Фурье от $\theta(x)\,(H(x)-1)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда). Тауберово условие (14.8) позволяет в некотором смысле обратить это утверждение.

14.3. Основная лемма. Ясно, что для доказательства теоремы 14.1$'$ нужно каким-то образом выразить $H(x)-1$ через $h(t)$, что, формально говоря, делается с помощью обращения преобразования Фурье. Поскольку, однако, мы ничего не знаем о поведении $h(t)$ при $t\to+\infty$ и о характере сходимости $h_\varepsilon(t)$ к $h(t)$ на всей прямой, нужно вначале умножить предельное равенство (14.12) на финитную срезающую функцию $\tilde\rho(t)$. Соображения, связанные с удобством обращения с положительными ядрами (типа ядер Фейера), показывают, что удобно считать функцию $\tilde\rho(t)$ преобразованием Фурье неотрицательной функции $\rho(v)\in L^1(\mathbb{R}^1)$:

$$\tilde\rho(t) = \int e^{-itv}\rho(v)\,dv. \tag{14.14}$$

Мы будем считать, что $\tilde{\rho}(t)$ — такая финитная непрерывная функция, что $\tilde{\rho}(0)=1$ и $\rho(v)\geqslant 0$, причем $\rho(v)\in L^1(\mathbb{R}^1)$. Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v)\,dv = 1. \tag{14.15}$$

Существование функции $\tilde{\rho}(t)$ описанного типа может быть доказано так же, как в п. 6.3 (в начале доказательства теоремы 6.3 была построена функция $\tilde{\rho}(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющая всем требуемым условиям). Кроме того, можно выбрать $\tilde{\rho}(t)$ явно, полагая

$$\tilde{\rho}(t) = \begin{cases} 1-\dfrac{|\,t\,|}{2} & \text{при} \quad |\,t\,|\leqslant 2, \\ 0 & \text{при} \quad |\,t\,|>2. \end{cases}$$

В самом деле, тогда при фиксированном $v\neq 0$ имеем

$$\rho(v) = \int_{-2}^{2} e^{itv}\Big(1-\frac{|\,t\,|}{2}\Big)\,đt = -\int_{-2}^{2} \frac{e^{itv}}{iv}\,đ\Big(1-\frac{|\,t\,|}{2}\Big) + \frac{e^{itv}}{2\pi iv}\ \Big(1-\frac{|\,t\,|}{2}\Big)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \int_{-2}^{2} \frac{e^{itv}}{2iv}\ \operatorname{sign} t\,đt = -\frac{e^{itv}}{4\pi v^2}\Big|_0^2 - \frac{e^{itv}}{4\pi v^2}\Big|_0^{-2} = \frac{1-\cos 2v}{2\pi v^2} = \frac{1}{\pi}\ \frac{\sin^2 v}{v^2},$$

откуда очевидны все необходимые свойства $\rho(v)$.

Л е м м а 14.1. *Для любого фиксированного* $\lambda>0$

$$\lim_{y\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv = 1. \tag{14.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Положим $\tilde{\rho}_\lambda(t)=\tilde{\rho}(t/\lambda)$ и $\rho_\lambda(v)=\lambda\rho(\lambda v)$, так что $\tilde{\rho}_\lambda(t)$ — преобразование Фурье функции $\rho_\lambda(v)$. Ясно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} H(y-v)\,\rho_\lambda(v)\,dv, \tag{14.17}$$

и поскольку функция $\rho_\lambda(v)$ обладает теми же свойствами, что и $\rho(v)$, то достаточно доказать (14.16) при $\lambda=1$.

2. Полагая $F_\varepsilon(t)=\tilde{\rho}(t)\,h_\varepsilon(t)$, вычислим обратное преобразование Фурье от финитной функции $F_\varepsilon(t)$, учитывая, что $\tilde{\rho}(t)$ и $h_\varepsilon(t)$ являются преобразованиями Фурье абсолютно интегрируемых функций $\rho(v)$ и

$\theta(v)\,(H(v)-1)\,e^{-\varepsilon v}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}F_\varepsilon(t)\,đt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\tilde\rho(t)\left[\int\limits_0^{\infty}(H(x)-1)\,e^{-\varepsilon x-itx}\,dx\right]đt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}(H(x)-1)\,e^{-\varepsilon x}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde\rho(t)\,e^{it(y-x)}\,đt\right]dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}(H(x)-1)\,e^{-\varepsilon x}\rho(y-x)\,dx. \quad (14.18)$$

В итоге, как и следовало ожидать, получилась свертка, но при этом мы удостоверились, что формула (14.18) имеет место всюду и в обычном смысле (перестановка интегрирований законна по теореме Фубини).

Перепишем теперь (14.18) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}F_\varepsilon(t)\,đt + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x}\rho(y-x)\,dx = \int\limits_0^{\infty} H(x)\,e^{-\varepsilon x}\rho(y-x)\,dx \quad (14.19)$$

и совершим здесь предельный переход при $\varepsilon\to+0$. Поскольку $\operatorname{supp} F_\varepsilon(t)\subset\operatorname{supp}\tilde\rho(t)$ и $F_\varepsilon(t)\to F(t)$ равномерно по $t\in\operatorname{supp}\tilde\rho(t)$ (здесь $F(t)=\tilde\rho(t)\,h(t)$), то 1-й интеграл в левой части имеет предел при $\varepsilon\to+0$ и при любом y. То же верно (например, по теореме Лебега) и для 2-го интеграла. Поэтому интеграл в правой части (14.19) имеет при любом y предел при $\varepsilon\to+0$. Поскольку $H(x)e^{-\varepsilon x}\rho(y-x)$ монотонно сходится при $\varepsilon\to+0$ к пределу $H(x)\rho(y-x)$, то мы получаем теперь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}F(t)\,đt + \int\limits_0^{+\infty}\rho(y-x)\,dx = \int\limits_0^{\infty} H(x)\,\rho(y-x)\,dx. \quad (14.20)$$

Устремим теперь y к $+\infty$. По лемме Римана

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}F(t)\,đt = 0.$$

Кроме того, ясно, что $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_0^{\infty}\rho(y-x)\,dx = 1$. Поэтому из (14.20) следует, что

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} H(x)\,\rho(y-x)\,dx=1. \tag{14.21}$$

Но

$$\int\limits_0^{+\infty} H(x)\,\rho(y-x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\rho(y-x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(y-v)\,\rho(v)\,dv,$$

так что (14.21) означает утверждение леммы. ■

14.4. Доказательство теоремы 14.1′. 1. Докажем вначале, что

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\, H(y)\leqslant 1. \tag{14.22}$$

Поскольку

$$\int\limits_{-a}^{a} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv$$

при любом $a>0$, то из леммы 14.1 следует, что

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\int\limits_{-a}^{a} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv\leqslant 1. \tag{14.23}$$

Но в силу тауберова условия (14.8) мы имеем

$$H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\geqslant H\Big(y-\frac{a}{\lambda}\Big)\,e^{-\frac{2a}{\lambda}}\quad\text{при}\quad v\in[-a,\,a].$$

Из (14.23) теперь следует, что

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\, H\Big(y-\frac{a}{\lambda}\Big)e^{-\frac{2a}{\lambda}}\int\limits_{-a}^{a}\rho(v)\,dv\leqslant 1,$$

или

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\, H(y)\leqslant e^{\frac{2a}{\lambda}}\Bigg(\int\limits_{-a}^{a}\rho(v)\,dv\Bigg)^{-1}. \tag{14.24}$$

Неравенство (14.24) верно для любых $a>0$ и $\lambda>0$. Пусть в нем $a\to+\infty$ и $\lambda\to+\infty$, причем $a/\lambda\to 0$. Тогда из (14.24) получается требуемая оценка (14.22).

2. Докажем теперь, что

$$\varliminf_{y\to+\infty} H(y) \geqslant 1. \tag{14.25}$$

Заметим прежде всего, что из (14.22) вытекает ограниченность $H(y)$:

$$|H(y)| \leqslant M, \quad y \in \mathbb{R}^1, \tag{14.26}$$

в силу которой

$$\int\limits_{|v|\geqslant b} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\rho(v)\,dv \leqslant \alpha(b), \tag{14.27}$$

где $\alpha(b)\to 0$ при $b\to+\infty$ (это означает, в частности, что интеграл в левой части (14.27) стремится к 0 при $b\to+\infty$ равномерно по y и λ).

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv = \int\limits_{-b}^{b}\ldots + \int\limits_{|v|\geqslant b}\ldots,$$

то в силу (14.27) и леммы 14.1 мы получаем при любом $b>0$

$$\varliminf_{y\to+\infty} \int\limits_{|v|\leqslant b} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv \geqslant 1-\alpha(b). \tag{14.28}$$

Теперь опять воспользуемся условием (14.8). Имеем

$$H\Big(y+\frac{b}{\lambda}\Big) \geqslant H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)e^{-\frac{2b}{\lambda}} \quad \text{при} \quad v\in[-b,\,b],$$

откуда в силу (14.28)

$$\varliminf_{y\to+\infty} H\Big(y+\frac{b}{\lambda}\Big)\,e^{\frac{2b}{\lambda}} \int\limits_{-b}^{b} \rho(v)\,dv \geqslant 1-\alpha(b),$$

или

$$\varliminf_{y\to+\infty} H(y) \geqslant (1-\alpha(b))\,e^{-\frac{2b}{\lambda}} \Bigg(\int\limits_{-b}^{b}\rho(v)\,dv\Bigg)^{-1}. \tag{14.29}$$

Пусть теперь $b\to+\infty$ и $\lambda\to+\infty$, причем $b/\lambda\to 0$. Тогда из (14.29) получается требуемое неравенство (14.25). ■

З а д а ч а 14.1. Пусть $N(t)$ — неубывающая функция, равная 0 при $t\leqslant 1$, и пусть интеграл (14.1) сходится при $\operatorname{Re} z < -k_0$, где $k_0>0$. Пусть функция $\zeta(z)$, определенная формулой (14.1), мероморфно продолжается в более широкую полуплоскость $\operatorname{Re} z < -k_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, причем на прямой $\operatorname{Re} z = -k_0$ имеется единственный полюс в точке $-k_0$ с главным членом разложения Лорана, равным $A(z+k_0)^{-l}$ (здесь l — натуральное число, равное порядку полюса в точке $-k_0$). Доказать, что тогда

$$N(t) \sim \frac{(-1)^{l-1}A}{(l-1)!} \cdot t^{k_0}(\ln t)^{l-1}$$

при $t \to +\infty$.

Задача 14.2. Доказать тауберову теорему Карамата:

Пусть $N(t)$ — неубывающая функция от $t \in \mathbb{R}^1$, равная 0 при $t < 1$ и такая, что интеграл

$$\theta(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}\, dN(t) \tag{14.30}$$

сходится при всех $z > 0$, причем

$$\theta(z) \sim Az^{-\alpha} \quad \text{при} \quad z \to +0 \tag{14.31}$$

(здесь $A > 0$ и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные).

Тогда

$$N(t) \sim \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\, t^{\alpha} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{14.32}$$

§ 15. Асимптотика спектральной функции и собственных значений (грубые теоремы)

15.1. Спектральная функция и ее асимптотика на диагонали. Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, на котором задана гладкая положительная плотность, A — самосопряженный эллиптический оператор на M, причем

$$a_m(x, \xi) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0. \tag{15.1}$$

Тогда оператор A полуограничен, и мы обозначим через λ_j его собственные значения, занумерованные в порядке возрастания (с учетом кратности):

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots,$$

а через $\varphi_j(x)$ — соответствующие собственные функции, образующие ортонормированную систему.

Пусть E_t — спектральный проектор оператора A (ортогональный проектор на линейную оболочку всех собственных векторов с собственными значениями, не превосходящими t). Ясно, что

$$E_t u = \sum_{\lambda_j \leqslant t} (u, \varphi_j)\, \varphi_j. \tag{15.2}$$

Определение 15.1. *Спектральной функцией* оператора A называется ядро (в смысле Л. Шварца) оператора E_t.

Учитывая имеющееся на M соответствие между функциями и плотностями, мы можем считать спектральную функцию не плотностью, а функцией. Из (15.2) ясно, что эта функция $e(x, y, t)$ задается формулой

$$e(x, y, t) = \sum_{\lambda_j \leqslant t} \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}. \tag{15.3}$$

и, в частности, принадлежит $C^\infty(M \times M)$ при каждом фиксированном t. Отметим сразу же следующие свойства $e(x, y, t)$:

1) $e(x, x, t)$ — неубывающая функция от t при каждом фиксированном $x \in M$;

2) функция $N(t)$, введенная в п. 13.3, выражается через $e(x, x, t)$ по формуле

$$N(t) = \int\limits_M e(x, x, t)\, dx, \tag{15.4}$$

где dx — фиксированная плотность на M.

Будем теперь считать, что локальные координаты в окрестности точки x выбраны так, что плотность dx совпадает с мерой Лебега локальных координат, и положим тогда

$$V_x(t) = \int\limits_{a_m(x,\xi) < t} đ\xi. \tag{15.5}$$

Теорема 15.1. *При $t \to +\infty$ и при любом $x \in M$ имеет место асимптотика*

$$e(x, x, t) \sim V_x(t). \tag{15.6}$$

Доказательство. 1. Заметим прежде всего, что без ущерба для общности можно считать, что $\lambda_1 \geqslant 1$. В самом деле, такому условию удовлетворяет оператор $A_1 = A + MI$ при достаточно большом M. Но если $e_1(x, y, t)$ — спектральная функция оператора A_1, то $e(x, y, t) = e_1(x, y, t + M)$. Поэтому из асимптотики $e_1(x, x, t) \sim V_x(t)$ вытекает асимптотика $e_1(x, x, t) \sim V_x(t + M)$. Но

$$V_x(t+M) = V_x(1)\,(t+M)^{n/m} = V_x(1)\, t^{n/m}(1 + O(t^{-1})) \sim V_x(1)\, t^{n/m} = V_x(t),$$

откуда и следует (15.6).

2. Итак, пусть $\lambda_1 \geqslant 1$. Тогда мы можем определить комплексные степени A^z оператора A по схеме § 10. Используя формулу (13.5), мы можем при $x = y$ выразить ядро $A_z(x, y)$ оператора A^z через спектральную

функцию формулой

$$A_z(x,\,x) = \int\limits_0^\infty t^z\,de(x,\,x,\,t), \tag{15.7}$$

где d означает дифференциал по t (при фиксированном x здесь написан просто интеграл Стильтьеса). В силу теорем 12.1 и 14.1 мы получаем теперь для $e(x,\,x,\,t)$ асимптотическую формулу

$$e(x,\,x,\,t) \sim \left[\frac{1}{n}\int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x,\,\xi')\,đ\xi'\right]\cdot t^{n/m}. \tag{15.8}$$

Элементарное преобразование правой части этой формулы, сделанное в доказательстве леммы 13.1, показывает, что правая часть (15.8) равна $V_x(t)$, что и доказывает (15.6). ■

15.2. Асимптотика собственных значений.

Теорема 15.2. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям, описанным в начале этого параграфа. Тогда имеют место асимптотические соотношения*

$$N(t) \sim V(t), \qquad t \to +\infty, \tag{15.9}$$

$$\lambda_k \sim V(1)^{-m/n} k^{m/n}, \quad k \to +\infty, \tag{15.10}$$

где функция $V(t)$ определяется формулой (13.16).

Доказательство. В § 13 была доказана эквивалентность (15.9) и (15.10) (предложение 13.1). Мы будем доказывать (15.9). Это делается на основе тауберовой теоремы Икехара аналогично доказательству теоремы 15.1.

Именно, опять-таки можно считать, что $\lambda_1 \geqslant 1$. Тогда очевидно, что при $\operatorname{Re} z < -n/m$ имеет место формула

$$\zeta_A(z) = \int\limits_1^\infty t^z\,dN(t). \tag{15.11}$$

Остается воспользоваться теоремами 13.1, 14.1 и леммой 13.1. ■

Замечание. Формулу (15.9) можно получить из (15.6) интегрированием по x. Однако для обоснования этого интегрирования нужно уметь доказывать равномерность по x асимптотики (15.6), что требует в ряде мест (в частности, в доказательстве теоремы Икехара) проверки равномерности по параметру. Чтобы избежать этой громоздкой проверки, мы предпочли дать независимое доказательство.

15.3. Задачи.

З а д а ч а 15.1. Доказать в ситуации этого параграфа оценку

$$|e(x, y, t)| \leqslant Ct^{n/m},$$

где $x, y \in M$, а постоянная $C > 0$ не зависит от x, y и t $(t \geqslant 1)$.

З а д а ч а 15.2. Пусть на замкнутом многообразии M с гладкой положительной плотностью дан эллиптический оператор A, и пусть A нормален, т. е.

$$A^* A = AA^*. \tag{15.12}$$

а) Доказать, что A имеет ортонормированный базис из собственных функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, с собственными значениями $\lambda_j \in \mathbb{C}$ такими, что

$$|\lambda_j| \to +\infty \quad \text{при} \quad j \to +\infty. \tag{15.13}$$

б) Доказать, что если $N(t)$ означает количество таких λ_j, что $|\lambda_j| \leqslant t$, а $V(t)$ определяется формулой

$$V(t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|a_m(x,\xi)|<t} dx\, d\xi, \tag{15.14}$$

то при $t \to +\infty$ имеет место асимптотика

$$N(t) \sim V(t). \tag{15.15}$$

З а д а ч а 15.3. Вывести теоремы 15.1 и 15.2 из результатов задачи 13.4 и тауберовой теоремы Карамата (задача 14.2).

З а д а ч а 15.4. Пусть M — замкнутое многообразие, A—такой эллиптический дифференциальный оператор на M, что $a_m(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Пусть λ_j — его собственные значения, $N_1(t)$ — число таких собственных значений, что $\operatorname{Re} \lambda_j \leqslant t$ (при этом кратностью собственного значения λ_0 мы считаем размерность корневого подпространства E_{λ_0} — см. теорему 8.4), $N_2(t)$ — число таких собственных значений, что $|\lambda_j| \leqslant t$. Доказать, что при $t \to +\infty$

$$N_1(t) \sim N_2(t) \sim V(t), \tag{15.16}$$

где $V(t)$ определяется также, как и выше. Доказать, что

$$\lambda_k \sim V(1)^{-m/n} k^{m/n}, \quad k \to +\infty \tag{15.17}$$

(это означает, в частности, что $\operatorname{Im} \lambda_k$ имеет меньший порядок роста, чем $\operatorname{Re} \lambda_k$).

ГЛАВА III

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

§ 16. Формулировка теоремы Хёрмандера и комментарии.

16.1. Формулировка и пример. Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, на котором задана гладкая положительная плотность dx, A — такой самосопряженный эллиптический оператор порядка m на M, что $a_m(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Будем использовать введенные в § 15 обозначения $e(x, y, \lambda)$, $N(t)$, $V_x(\lambda)$, $V(\lambda)$. Следующая теорема уточняет теоремы 15.1 и 15.2.

Теорема 16.1 (Л. Хёрмандер). *Имеет место оценка*

$$|e(x, x, \lambda) - V_x(\lambda)| \leqslant C\lambda^{(n-1)/m}, \quad \lambda \geqslant 1, \quad x \in M, \tag{16.1}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от x и λ.

Следствие 16.1. *При $\lambda \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$N(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-1/m})). \tag{16.2}$$

Замечание 16.1. Оценка остатка в формулах (16.1) и (16.2) является неулучшаемой. В этом можно убедиться, например, из рассмотрения оператора $A = -d^2/dx^2$ на окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ Собственные функции здесь имеют вид $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а собственные значения равны $\lambda_k = k^2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Далее, поскольку $|\psi_k(x)|^2 = (2\pi)^{-1}$, то ясно, что $e(x, x, \lambda) = (2\pi)^{-1}N(\lambda)$. Поскольку при этом $V_x(\lambda) = (2\pi)^{-1}V(\lambda)$, то формулы (16.1) и (16.2) равносильны. Поэтому достаточно проверить неулучшаемость оценки остатка в формуле (16.2), которая имеет здесь вид $N(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-1/2}))$ или $N(\lambda) = 2\sqrt{\lambda} + O(1)$. Но неулучшаемость последней асимптотики очевидна из целочисленности $N(\lambda)$.

В дальнейшем (§ 22) мы приведем более содержательный пример, являющийся обобщением изложенного (оператор Лапласа на сфере) и позволяющий получить неулучшаемость оценки (16.1) в случае произвольных n и m.

16.2. Схема доказательства. Во-первых, теория комплексных степеней позволяет свести дело к случаю, когда A — ПДО порядка 1. В этой ситуации мы покажем, что e^{itA} при малых t представляет собой ИОФ с фазовой функцией, являющейся решением некоторого нелинейного уравнения 1-го порядка. Заметим теперь, что ядро оператора e^{itA} представляет собой преобразование Фурье (по λ) спектральной функции $e(x, y, \lambda)$ оператора A. Отсюда асимптотика (16.1) получается, если применить рассуждение типа тауберовой теоремы для преобразования Фурье.

Дальнейший план этой главы таков: § 17 содержит необходимые сведения о нелинейных уравнениях 1-го порядка; в § 18 доказана важная теорема о действии ПДО на экспоненту, из которой вытекает, в частности, формула композиции ПДО и ИОФ; в § 19 изучаются фазовые функции, отвечающие классу ПДО; в § 20 мы строим оператор e^{itA} в виде ИОФ для оператора A 1-го порядка; в § 21 теорема 16.1 доказана в общем случае (имеется также информация об $e(x, y, \lambda)$ при $x \neq y$); наконец, § 22 содержит определение оператора Лапласа на римановом многообразии и вычисление его спектральной функции в случае сферы.

Задача 16.1. Для оператора

$$A = -\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$$

на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ вычислить $N(t)$ и $e(x, x, \lambda)$ и убедиться в справедливости асимптотических формул (16.1) и (16.2).

§ 17. Нелинейные уравнения 1-го порядка

17.1. Бихарактеристики. Пусть M — n-мерное многообразие, $a(x, \xi)$ — гладкая вещественнозначная функция, определенная на открытом подмножестве в T^*M. Рассмотрим гамильтонову систему в T^*M, порожденную функцией $a(x, \xi)$ как гамильтонианом:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_\xi, \\ \dot{\xi} = -a_x. \end{cases} \tag{17.1}$$

где $a_\xi = \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial a}{\partial \xi_n}\right)$, $a_x = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial a}{\partial x_n}\right)$, (x, ξ) — координаты в T^*M, индуцированные некоторой локальной системой координат в M. Как известно (см., например, Арнольд В. И. [1]), векторное поле на T^*M, определяемое правыми частями (17.1), не зависит от выбора локальных координат в M.

Определение 17.1. Кривая $(x(t), \xi(t))$, являющаяся решением (17.1), называется *бихарактеристикой* функции $a(x, \xi)$.

Бихарактеристика не обязана быть определена при всех $t \in \mathbb{R}$. В этом случае мы будем считать ее определенной на максимальном возможном интервале (см. по этому поводу также задачи 17.1 и 17.2).

Предложение 17.1. *Функция* $a(x, \xi)$ *является первым интегралом системы* (17.1), *т. е. если* $(x(t), \xi(t))$ — *бихарактеристика функции* $a(x, \xi)$, *то* $a(x(t), \xi(t)) = \text{const}$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt}\, a(x(t), \xi(t)) = a_x \dot{x} + a_\xi \dot{\xi} = a_x a_\xi - a_x a_\xi = 0. \quad \blacksquare$$

Предложение 17.1 делает осмысленным следующее

Определение 17.2. Бихарактеристика $(x(t), \xi(t))$ функции $a(x, \xi)$ называется *нулевой* бихарактеристикой, если $a(x(t), \xi(t)) \equiv 0$.

17.2. Уравнение Гамильтона—Якоби. Рассмотрим уравнение в частных производных 1-го порядка

$$a(x, \varphi_x(x)) = 0, \tag{17.2}$$

где φ — гладкая вещественнозначная функция, определенная на открытом подмножестве в M, φ_x — ее градиент. Такое уравнение называется *уравнением Гамильтона—Якоби*. Для его рассмотрения удобно ввести график φ_x, т. е. множество

$$\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi_x(x)),\ x \in M\} \subset T^*M. \tag{17.3}$$

Предложение 17.2. *Если* φ — *решение уравнения* (17.2), *то многообразие* Γ_φ *инвариантно относительно фазового потока системы* (17.1), *т. е. если* $(x(t), \xi(t))$ — *бихарактеристика функции* a, $x(t)$ *при* $t \in [0, b]$ *лежит в области определения* φ *и* $(x(0), \xi(0)) \in \Gamma_\varphi$, *то* $(x(t), \xi(t)) \in \Gamma_\varphi$ *при всех* $t \in [0, b]$.

Доказательство. В силу теоремы единственности достаточно проверить, что гамильтоново поле $(a_\xi, -a_x)$ касается многообразия Γ_φ во всех его точках. Последнее равносильно тому, что если $(x(t), \xi(t))$ — бихарактеристика и $(x(0), \xi(0)) \in \Gamma_\varphi$ (т. е. $\xi(0) = \varphi_x(x(0))$), то $\left\{\frac{d}{dt}[\xi(t) - \varphi_x(x(t))]\right\}\Big|_{t=0} = 0$. Но это вытекает из следующей выкладки:

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d}{dt}[\xi(t) - \varphi_x(x(t))]\right\}\Big|_{t=0} &= (\dot{\xi} - \varphi_{xx} \cdot \dot{x})|_{t=0} = \\ &= -a_x(x(0), \xi(0)) - \varphi_{xx}(x(0))\, a_\xi(x(0), \xi(0)) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}[a(x, \varphi_x(x))]_{x=x(0)} = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

В дальнейшем для нас будет существен лишь случай, когда функция $a(x, \xi)$ положительно однородна по ξ порядка m, т. е.

$$a(x, t\xi) = t^m a(x, \xi), \qquad t > 0,\ \xi \neq 0, \tag{17.4}$$

где m — пока любое вещественное число. Такие функции характеризуются теоремой Эйлера:

$$\xi \cdot a_\xi = ma. \tag{17.5}$$

Предложение 17.3. *Пусть $a(x, \xi)$ однородна порядка m, $\varphi(x)$ — решение уравнения* (17.2). *Тогда функция φ постоянна вдоль проекции нулевых бихарактеристик функции $a(x, \xi)$, лежащих на Γ_φ, т. е. если $(x(t), \xi(t))$ — нулевая бихарактеристика и $\xi(0) = \varphi_x(x(0))$, то $\varphi(x(t)) = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt}\,\varphi(x(t)) = \varphi_x \dot{x} = \varphi_x a_\xi = \varphi_x(x(t))\, a_\xi(x(t),\, \xi(t)) = \\ = \varphi_x(x(t))\, a_\xi(x(t),\, \varphi_x(x(t))) = ma(x(t),\, \varphi_x(x(t))) = 0. \quad \blacksquare$$

17.3. Задача Коши. Задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби (17.2) состоит в том, что надо найти решение $\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$\varphi|_S = \psi, \tag{17.6}$$

где S — гиперповерхность (подмногообразие коразмерности 1) в M, $\psi \in C^\infty(S)$. Гиперповерхность S локально можно считать гиперплоскостью, т. е. выбором локальной системы координат в окрестности точки $x_0 \in S$ можно добиться того, что

$$S = \{x : x_n = 0\}, \tag{17.7}$$

так что $\psi = \psi(x')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. В этой системе координат удобно сформулировать условие *нехарактеристичности*, гарантирующее локальную разрешимость задачи Коши в окрестности точки $x' \in S$: уравнение

$$a(x',\, 0,\, \psi_{x'}(x'),\, \lambda) = 0 \tag{17.8}$$

имеет простой корень λ, т. е. такой корень $\lambda \in \mathbb{R}$, что вместе с (17.8) выполнено условие

$$\frac{\partial a}{\partial \xi_n}\,(x',\, 0,\, \psi_{x'}(x'),\, \lambda) \neq 0. \tag{17.9}$$

Пусть фиксирована точка $0 \in S$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение

$$a(x,\, \xi',\, \lambda) = 0 \tag{17.10}$$

при $|x| < \varepsilon$ и $|\xi' - \psi_{x'}(0)| < \varepsilon$ имеет решение $\lambda = a'(x, \xi')$, являющееся гладкой функцией от x и ξ'. Легко проверить, что функция $a'(x, \xi')$ однородна 1-го порядка по ξ', так что мы можем считать, что она определена при $|x| < \varepsilon$ и при всех $\xi' \neq 0$ в конической окрестности $\psi_{x'}(0)$.

Уравнение (17.10) при $|x|<\varepsilon$ и для векторов (ξ',λ), близких по направлению к $(\psi'_{x'}(0),\, a'(0,\, \psi'_{x'}(0)))$, можно переписать в виде

$$\lambda - a'(x,\, \xi') = 0. \tag{17.11}$$

Локальная задача Коши ставится тогда следующим образом: найти такое решение $\varphi=\varphi(x)$ уравнения (17.2), что выполнено условие (17.6) и, кроме того,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(0,\, 0) = a'(0,\, \psi'_{x'}(0)). \tag{17.12}$$

Поскольку в описанной ситуации возможен переход от (17.10) к (17.11), то нашу задачу можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} - a'\left(x,\, \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right) = 0, \tag{17.13}$$

$$\varphi|_{x_n=0} = \psi(x'), \tag{17.14}$$

т. е. дело сводится к случаю

$$a(x,\, \xi) = \xi_n - a'(x,\, \xi'). \tag{17.15}$$

Рассмотрим бихарактеристики функции $a(x,\xi)$ вида (17.15). Их уравнения таковы

$$\begin{cases} \dot{x}' = -a'_{\xi'}(x,\, \xi'), \\ \dot{x}_n = 1, \\ \dot{\xi} = a'_x(x,\, \xi'). \end{cases} \tag{17.16}$$

Рассмотрим нулевую бихарактеристику $(x(t),\, \xi(t))$, лежащую на Γ_φ и начинающуюся на S, т. е. такую, что $x_n(0)=0$. Тогда из (17.16) ясно, что $x_n(t)=t$. Фиксируем еще точку $x'=x'(0)\in S$. Ясно, что условие $(x(0),\, \xi(0))\in\Gamma_\varphi$ означает следующее:

$$\xi'(0) = \psi'_{x'}(x'), \qquad \xi_n(0) = \frac{\partial\varphi}{x_n}(x',\, 0), \tag{17.17}$$

а условие $a(x(0),\, \xi(0))=0$ дает

$$\xi_n(0) = a'(x',\, 0,\, \psi'_{x'}(x')). \tag{17.18}$$

Таким образом, нулевая бихарактеристика, лежащая на Γ_φ и такая, что $x_n(0)=0$, $x'(0)=x'$, однозначно определена. Из формул (17.17), (17.18) очевидна ее гладкая зависимость от x'. Кроме того, если рассмотреть отображение

$$g\colon (x',\, x_n) \mapsto (x'(x_n),\, x_n), \tag{17.19}$$

определенное при $|x|<\varepsilon$, то из начального условия $x'(0)=x'$ вытекает, что его якобиан обращается в 1 при $x_n=0$, так что g является локальным диффеоморфизмом. Но из предложения 17.3 тогда с необходимостью вытекает, что

$$\varphi(x) = \psi([g^{-1}(x)]\,'), \tag{17.20}$$

где $[g^{-1}(x)]\,'$ — вектор, полученный из $g^{-1}(x)$ отбрасыванием последней компоненты (в соответствии с обозначением x' для $x = (x', x_n)$.

Таким образом, мы доказали единственность решения локальной задачи Коши и получили формулу (17.20) для этого решения. Существование же решения может быть получено простой проверкой. Мы рекомендуем читателю

Упражнение 17.1. Показать, что формула (17.20) действительно задает решение локальной задачи Коши, описанной выше.

17.4. Глобальная формулировка. Мы хотим сформулировать условия, достаточные для существования решения задачи Коши в окрестности S, уже не ограничиваясь малой окрестностью точки на S (хотя окрестность гиперповерхности S может быть и очень малой в смысле, например, какого-нибудь расстояния до S). Они состоят, конечно, во-первых, в выполнении условий разрешимости локальной задачи в каждой точке $x \in S$ и, во-вторых, грубо говоря, в существовании непрерывно зависящего от x корня λ уравнения (17.8). Последнее означает, что на S можно определить поле ковекторов $\xi = \xi(x') \in T^*_{x'}M$, непрерывно зависящих от $x' \in S$ и таких, что

1) $i^*\xi(x') = \psi_{x'}(x')$ где $i\colon S \to M$, $\psi_{x'}(x')$ — градиент функции $\psi(x')$ в точке $x' \in S$, рассматриваемый как ковектор на S (элемент $T^*_{x'}S$);

2) если ввести локальные координаты, описанные в п. 17.3, в окрестности какой-нибудь точки $x' \in S$, то мы получим

$$\xi(x') = (\psi_{x'}(x'), \lambda(x')),$$

где $\lambda(x')$ — корень уравнения (17.8), удовлетворяющий условию (17.9), т. е. выполнены все условия разрешимости локальной задачи Коши. Заметим, что условие (17.12) можно без локальных координат записать здесь в виде

$$\varphi_x(x') = \xi(x'), \qquad x' \in S. \tag{17.21}$$

Таким образом, окончательная формулировка задачи Коши: найти определенное в связной окрестности гиперповерхности S решение уравнения (17.2), удовлетворяющее начальному условию (17.6) и дополнительному условию (17.21). В такой формулировке эта задача имеет единственное решение, гладко зависящее от параметров (если таковые имеются), при условии, что сами ее данные a, S, ψ и ξ гладко зависят от этих же параметров.

З а м е ч а н и е 17.1. Условие 1) очевидным образом необходимо (если считать выполненными все остальные) для разрешимости задачи Коши и означает просто отсутствие топологических препятствий для глобального существования поля $\xi(x')$, локальное существование и гладкость которого обеспечиваются условиями разрешимости локальных задач в точках $x' \in S$.

17.5. Линейные однородные уравнения. Уравнение (17.2) называется *линейным однородным*, если фунция $a(x,\, \xi)$ линейна по ξ, т. е.

$$a(x,\, \xi) = V(x) \cdot \xi, \tag{17.22}$$

где $V(x)$ — векторное поле на M. Проекции бихарактеристик на M являются в этом случае решениями системы

$$\dot{x} = V(x), \tag{17.23}$$

а решения системы (17.2) — это просто первые интегралы системы (17.23). Сама система (17.1) содержит вместе с (17.23) еще уравнения

$$\dot{\xi} = -V_x(x) \cdot \xi, \tag{17.24}$$

линейные по ξ. Стандартная оценка роста $|\xi(t)|$ показывает, что если $x(t) \in K$, где K — компакт в M, то $|\xi(t)|$ ограничено на любом конечном интервале оси t. Поэтому либо бихарактеристика определена для всех t, либо ее проекция $x(t)$ выходит за пределы любого компакта $K \subset M$. Условие нехарактеристичности S означает, что $V(x)$ трансверсально к S во всех точках S.

Рассмотрим отображение g, переводящее $(x',\, t)$ в $x(t)$, где $x(t)$ — решение системы (17.23) с начальным условием $x(0) = x'$. Если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого x' решение $x(t)$ определено при $|t| < \varepsilon$, то g задает отображение

$$g\colon S \times (-\varepsilon,\, \varepsilon) \to M. \tag{17.25}$$

Если g является диффеоморфизмом, то решение задачи Коши с начальными данными на S определено на образе g. Поэтому важно уметь оценивать снизу число $\varepsilon > 0$, для которого отображение (17.25) является диффеоморфизмом. Один важный случай, когда такая оценка возможна, мы укажем ниже.

17.6. Неоднородные линейные уравнения. Это уравнения вида

$$V(x) \cdot \varphi_x(x) + b(x)\, \varphi(x) = f(x), \tag{17.26}$$

где $b(x)$, $f(x) \in C^\infty(M)$, $V(x)$ — векторное поле на M, $\varphi(x)$ — неизвестная функция, φ_x — ее градиент. Если $x(t)$ — решение системы (17.23), то ясно, что $\dfrac{d}{dt}\varphi(x(t))+b(x(t))\varphi(x(t))=f(x(t))$, откуда $\varphi(x(t))$ находится решением обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка, если известно $\varphi(x(0))$. Основное обстоятельство, вытекающее отсюда, состоит в том, что область, в которой существует решение задачи Коши, зависит лишь от $V(x)$ и S, но не зависит от правой части $f(x)$ и начального данного $\psi\in C^\infty(S)$.

В частности, в дальнейшем нам понадобится уравнение специального вида

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}-\sum_{j=1}^{n-1}a_j(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+b(x)\,\varphi=f(x), \tag{17.27}$$

где $x=(x',\,x_n)$, $x'\in M'$, M' — некоторое $(n-1)$-мерное замкнутое многообразие, $x_n\in(-a,\,a)$, где $a>0$. Система (17.23) (для соответствующего однородного уравнения) имеет вид

$$\begin{cases}\dot x'=V'(x),\\ \dot x_n=1.\end{cases} \tag{17.28}$$

Решения $x(t)$ этой системы, начинающиеся при $x_n=0$, определены при $t\in(-a,\,a)$, и если мы положим $S=M'=\{x\colon x_n=0\}$, то отображение g из предыдущего пункта осуществляет диффеоморфизм $g\colon M\to M$, где $M=M'\times(-a,\,a)$, причем из (17.28) ясно, что «слой» $M'\times\{x_0\}$ диффеоморфно отображается на себя. По этой причине задача Коши для уравнения (17.27) с начальным условием

$$\varphi|_{x_n=0}=\psi(x'),\qquad x'\in M, \tag{17.29}$$

имеет решение $\varphi\in C^\infty(M)$.

В ряде случаев аналогичное расуждение можно провести и для некомпактного M'.

З а д а ч а 17.1. Пусть функция $a(x,\,\xi)$ определена при $x\in M$, $\xi\neq0$, имеет по ξ порядок однородности 1. Доказать, что если $(x(t),\,\xi(t))$ — бихарактеристика, то либо она определена при всех t, либо $x(t)$ выходит за пределы любого компакта $K\subset M$. В частности, если M компактно, то все бихарактеристики определены при всех $t\in\mathbb{R}$.

З а д а ч а 17.2. Доказать, что то же самое верно, если порядок однородности m функции $a(x,\,\xi)$ произволен, но зато выполнено условие эллиптичности

$$a(x,\,\xi)\neq0\quad\text{при}\quad\xi\neq0,\ x\in M.$$

§ 18. Действие псевдодифференциального оператора на экспоненту

18.1. Формулировка результата. Речь идет об описании асимптотического поведения при $\lambda \to +\infty$ выражения вида $A(e^{i\lambda\psi(x)})$, где A — ПДО, а ψ — гладкая функция, не имеющая критических точек.

Теорема 18.1. *Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, оператор A собственный и $a(x,\xi)$ — его символ. Пусть $\psi(x) \in C^\infty(X)$ и $\psi'_x(x) \neq 0$ при $x \in X$ (здесь ψ'_x означает градиент функции ψ). Тогда для любой функции $f \in C^\infty(X)$ и для любого целого $N \geqslant 0$ при $\lambda \geqslant 1$ справедлива формула*

$$A(fe^{i\lambda\psi}) = e^{i\lambda\psi}\left[\sum_{|\alpha|<N} a^{(\alpha)}(x, \lambda\psi'_x(x))\, \frac{D_z^\alpha(f(z)\, e^{i\lambda\rho_x(z)})}{\alpha!}\Big|_{z=x} + \lambda^{m-(\rho-1/2)\,N} R_N(x,\lambda)\right], \quad (18.1)$$

где $\rho_x(y) = \psi(y) - \psi(x) - (y-x)\cdot\psi'_x(x)$, $a^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$, а для $R_N(x,\lambda)$ выполнены оценки

$$|\partial_x^\gamma R_N(x,\lambda)| \leqslant C_{\gamma,N,K}\lambda^{\delta|\gamma|}, \quad x \in K, \quad (18.2)$$

где K — компакт в X, а постоянные $C_{\gamma,N,K}$ не зависят от λ.

Если есть семейства функций $f(x)$, $\psi(x)$, ограниченные в $C^\infty(X)$ (т. е. производные $\partial^\gamma f(x)$, $\partial^\gamma\psi(x)$ равномерно ограничены на каждом компакте при любом фиксированном γ), и если градиенты ψ'_x равномерно отделены (по модулю) от нуля на каждом компакте, то постоянные $C_{\gamma,N,K}$ в оценках (18.2) не зависят от выбора функций f, ψ этих семейств.

Замечание 18.1. Эта теорема похожа по формулировке на теорему 4.2 о преобразовании символа ПДО при диффеоморфизме и, как видно из дальнейшего, эквивалентна ей. Однако ввиду важности теоремы 18.1 мы приведем два ее доказательства: вывод из теоремы 4.2 и независимое доказательство, основанное, по существу, на методе стационарной фазы. Последнеее позволяет вывести из теоремы 18.1 инвариантность класса ПДО при диффеоморфизмах и формулы замены переменных. Мы рекомендуем читателю реализовать этот путь в качестве упражнения (исторически это был первый путь доказательства инвариантности класса ПДО при диффеоморфизмах).

Замечание 18.2. Полезно сразу же заметить, почему формула (18.1) является асимптотической при $\lambda \to +\infty$.

Ясно, что условие $\psi'_x(x)\neq 0$ обеспечивает оценку

$$|\,a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\psi'_x(x))\,|\leqslant C_{\alpha,\,K}\lambda^{m-\rho|\alpha|},\qquad x\in K. \tag{18.3}$$

Проверим теперь, что $D_z^\alpha(f(z)e^{i\lambda\rho_x(z)})|_{z=x}$ является многочленом по λ степени не более $|\,\alpha\,|/2$. В самом деле, имеем, очевидно,

$$D_z^\alpha(f(z)\,e^{i\lambda\rho_x(z)})=\sum_{\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_k=\alpha}c_{\gamma_0\ldots\gamma_k}(D_z^{\gamma_0}f(z))\cdot\lambda^k(D_z^{\gamma_1}\rho_x(z))\ldots$$
$$\ldots(D_z^{\gamma_k}\rho_x(z))\,e^{i\lambda\rho_x(z)}, \tag{18.4}$$

причем в этой сумме $|\,\gamma_j\,|\geqslant 1$ при $j=1,\,\ldots,\,k$. Поскольку $\rho_x(z)$ имеет при $x=z$ нуль 2-го порядка, то при $x=z$ в (18.4) остаются лишь слагаемые, в которых $|\,\gamma_j\,|\geqslant 2$, $j=1,\,\ldots,\,k$. Но $\sum\limits_{j=1}^{k}|\,\gamma_j\,|\leqslant|\,\alpha\,|$, так что отсюда получаем $2k\leqslant|\,\alpha\,|$, что и требовалось.

Теперь, учитывая (18.3), мы видим, что

$$\left|a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\psi'_x(x))\,\frac{D_z^\alpha(f(z)\,e^{i\lambda\rho_x(z)})}{\alpha!}\Big|_{z=x}\right|\leqslant C_{\alpha,\,K}\lambda^{m-(\rho-1/2)|\alpha|},\qquad x\in K,$$

что и дает требуемое убывание порядков роста конечных членов формулы (18.4), поскольку $\rho>1/2$.

18.2. Первое доказательство теоремы 18.1. Сделаем замену переменных $y=\varkappa(x)=(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,\psi(x))$. Эта замена имеет якобиан, равный ψ'_{x_n}. Поэтому мы можем ее сделать лишь там, где $\psi'_{x_n}\neq 0$. Однако общий случай легко сводится к этому разбиением единицы и перестановкой осей координат. В самом деле, оператор A — собственный и, следовательно, для любого компакта K_1 существует такой компакт K_2, что $Au|_{K_1}$ зависит только от $u|_{K_2}$. Поэтому $A(fe^{i\lambda\psi})|_{K_1}$ можно записать в виде конечной суммы слагаемых вида $A(f_je^{i\lambda\psi})$, где $f_j\in C_0^\infty(X)$ и для любого j существует такое целое k, $1\leqslant k\leqslant n$, что $\psi'_{x_k}(x)\neq 0$ при $x\in\operatorname{supp}f_j$.

Итак, пусть $\psi'_{x_n}(x)\neq 0$, $x\in X$. Пусть оператор A_1 — это оператор A, записанный в координатах $y=\varkappa(x)$ (см. § 4). Пусть $a_1(y,\,\eta)$ — символ оператора A_1. По теореме 4.2 мы имеем

$$a_1(y,\,\eta)|_{y=\varkappa(x)}=e^{-i\varkappa(x)\cdot\eta}A(e^{i\varkappa(x)\cdot\eta})=$$
$$=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\,a^{(\alpha)}(x,\,{}^t\varkappa'(x)\,\eta)\,(D_z^\alpha e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta})|_{z=x}+r_N(x,\,\eta),$$

где $\varkappa''_{x_n}(z)=\varkappa(z)-\varkappa(x)-\varkappa'(x)\,(z-x)$, $r_N\in S^{m-(\rho-1/2)N}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$. В частности, полагая здесь $\eta=(0,\,\ldots,\,0,\,\lambda)$, мы в точности получаем формулу (18.1) при $f\equiv 1$, где R_N оценивается в соответствии с (18.2). Утверждения о равномерности и случай произвольной функции f получаются повторением доказательства теоремы 4.2, что мы предоставляем читателю в качестве упражнения. ■

18.3. Второе доказательство теоремы 18.1. В этом доказательстве мы будем считать для простоты, что $\delta=0$ и $\rho=1$.

Заметим опять-таки, что поскольку оператор A является собственным, то мы можем считать, что $f\in C_0^\infty(X)$. Положим для краткости $I(\lambda)=e^{-i\lambda\psi(x)}A(fe^{i\lambda\psi})\,(x)$ (точку x мы считаем фиксированной). Имеем

$$I(\lambda)=\int a(x,\,\xi)\,f(y)\,e^{i\lambda(\psi(y)-\psi(x))+i(x-y)\cdot\xi}\,dy\,đ\xi. \tag{18.5}$$

Сделаем здесь замену переменной $\xi=\lambda\zeta$:

$$I(\lambda)=\lambda^n\int a(x,\,\lambda\zeta)\,f(y)\,e^{i\lambda[\psi(y)-\psi(x)-(y-x)\cdot\zeta]}\,dy\,đ\zeta. \tag{18.6}$$

Мы хотим найти асимптотику этого интеграла при $\lambda\to+\infty$. Далее мы увидим (в этом суть метода стационарной фазы), что главную роль здесь играют окрестности критических точек функции

$$g(y,\,\zeta)=\psi(y)-\psi(x)-(y-x)\cdot\zeta. \tag{18.7}$$

Но поскольку $g'_\zeta=x-y$, $g'_y=\psi'_y(y)-\zeta$, то имеется ровно одна критическая точка этой функции — точка $y=x$, $\zeta=\psi'_x(x)$. Положим для краткости $\xi_x=\psi'_x(x)$. Введем срезающую функцию $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(z)=1$ при $|z|<\varepsilon/2$, $\chi(z)=0$ при $|z|>\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, и рассмотрим интеграл

$$\tilde I(\lambda)=\lambda^n\int a(x,\,\lambda\zeta)\,\chi(y-x)\,\chi(\zeta-\xi_x)\,f(y)\,e^{i\lambda g(y,\,\zeta)}\,dy\,đ\zeta. \tag{18.8}$$

Тогда для любого $N>0$

$$|I(\lambda)-\tilde I(\lambda)|\leqslant C_N\lambda^{-N}. \tag{18.9}$$

В самом деле, полагая

$${}^tL=\lambda^{-1}[(\psi'(y)-\zeta)^2+(x-y)^2]^{-1}[(\psi'(y)-\zeta)\cdot D_y+(x-y)\cdot D_\zeta],$$

мы видим, что ${}^tLe^{i\lambda g(y,\,\zeta)}=e^{i\lambda g(y,\,\zeta)}$. Выполняя в осциллирующем интеграле $I(\lambda)-\tilde I(\lambda)$ интегрирование по частям с учетом того, что

$$|(\psi'(y)-\zeta)^2+(x-y)^2|\geqslant\varepsilon_1>0 \quad \text{на } \operatorname{supp}[1-\chi(y-x)\,\chi(\zeta-\xi_x)],$$

мы видим, что

$$I(\lambda)-\tilde{I}(\lambda)=\lambda^n \int e^{i\lambda g(y,\,\zeta)}L^N[a(x,\,\lambda\zeta)\,(1-\chi(y-x)\,\chi(\zeta-\xi_x))\,f(y)]\,dy\,đ\zeta,$$

и, преобразуя этот осциллирующий интеграл в абсолютно сходящийся (см. § 1), мы легко получаем отсюда оценку (18.9) за счет множителя λ^{-1}, присутствующего в выражении для L. Аналогично получаются оценки и для производных по x от разности $I(\lambda)-\tilde{I}(\lambda)$. Отметим, впрочем, что они вытекают из оценок $I(\lambda)-\tilde{I}(\lambda)$, если воспользоваться рассуждением, аналогичным доказательству предложения 3.6. В дальнейшем мы опускаем оценки производных, предоставляя читателю воспроизвести любой из указанных путей их получения.

Итак, вместо $I(\lambda)$ можно рассматривать $\tilde{I}(\lambda)$. Делая еще одну замену переменной $\zeta=\xi_x+\lambda^{-1}\eta$, мы получим

$$\tilde{I}(\lambda)=\int e^{i(x-y)\cdot\eta}a(x,\,\lambda\xi_x+\eta)\,\chi\Big(\frac{\eta}{\lambda}\Big)\,\chi(y-x)\,f(y)\,e^{i\lambda\rho_x(y)}\,dy\,đ\eta. \quad (18.10)$$

Разложим $a(x,\,\lambda\xi_x+\eta)$ по формуле Тейлора при $\eta=0$:

$$a(x,\,\lambda\xi_x+\eta)=\sum_{|\alpha|<N} a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\xi_x)\,\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}+r_N(x,\,\eta,\,\lambda),$$

где

$$r_N(x,\,\eta,\,\lambda)=\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha \int_0^1 (1-t)^{N-1}\eta^\alpha a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\xi_x+t\eta)\,dt.$$

Умножая это разложение на срезающую функцию $\chi\Big(\dfrac{\eta}{\lambda}\Big)\,\chi(y-x)$ и подставляя результат в (18.10), мы получаем

$$\tilde{I}(\lambda)=\sum_{|\alpha|<N}\int e^{i(x-y)\cdot\eta}a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\xi_x)\times$$
$$\times\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\chi\Big(\frac{\eta}{\lambda}\Big)\,\chi(y-x)\,f(y)\,e^{i\lambda\rho_x(y)}\,dy\,đ\eta+R'_N(x,\,\lambda). \quad (18.11)$$

где

$$R'_N(x,\,\lambda)=\sum_{|\alpha|<N} c_\alpha \int dy\,đ\eta\int_0^1 (1-t)^{N-1}\eta^\alpha a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\xi_x+t\eta)\times$$
$$\times\chi(y-x)\,\chi\Big(\frac{\eta}{\lambda}\Big)\,e^{i(x-y)\cdot\eta}f(y)\,e^{i\lambda\rho_x(y)}\,dt. \quad (18.12)$$

Как следует из приведенных выше рассуждений, асимптотика конечных членов формулы (18.11) не изменится, если отпустить срезающие множители $\chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)$. Но тогда эти члены просто преобразуются по формуле обращения преобразования Фурье:

$$\int e^{i(x-y)\cdot\eta} a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x)\, \frac{\eta^\alpha}{\lambda!}\, \chi(y-x)\, f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)}\, dy\, đ\eta = \\ = a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x)\, D_y^\alpha(f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)})|_{y=x},$$

так что остается лишь оценить остаток R'_N или равномерно по $t (0<t\leqslant 1)$ оценить интеграл

$$r_\alpha(x,\, \lambda,\, t) = \int \eta^\alpha a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x + t\eta)\, \chi(y-x)\, \chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)\times \\ \times e^{i(x-y)\cdot\eta} D_y^\alpha\left(f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)}\right) dy\, đ\eta = \\ = \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} c_{\alpha'\alpha''} \int e^{i(x-y)\cdot n} a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x + t\eta)\times \\ \times \chi^{(\alpha')}(y-x)\, \chi\left(\frac{n}{\lambda}\right) D^{\alpha''}(f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)})\, dy\, đ\eta, \quad (18.13)$$

где $|\alpha| = N$.

Введем еще обозначение

$$\tilde{a}_\alpha(x,\, \eta,\, \lambda,\, t) = \chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right) a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x + t\eta).$$

Если число ε в определении $\chi(z)$ выбрано так, что $\varepsilon < |\xi_x|/2$, то для $\tilde{a}_\alpha$ выполнены оценки

$$|\partial_\eta^\gamma\, \partial_x^\beta \tilde{a}_\alpha(x,\, \eta,\, \lambda,\, t)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma}\lambda^{m-N-|\gamma|}. \quad (18.14)$$

Теперь воспользуемся формулой (18.4) и подставим в (18.13) даваемое ею выражение для $D_y^\alpha(f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)})$. В этом выражении все члены содержат произведение

$$\lambda^k (D_y^{\gamma_1}\rho_x(y))\ldots(D_y^{\gamma_k}\rho_x(y)), \quad (18.15)$$

в котором $|\gamma_1| + \ldots + |\gamma_k| \leqslant N$. Если $k \leqslant N/2$, то не будем никак преобразовывать это произведение. Если $k > N/2$, то по принципу Дирихле в (18.15) есть не менее чем $k - N/2$ таких индексов γ_j, что $|\gamma_j| = 1$. Но тогда по лемме Адамара

$$(D_y^{\gamma_1}\rho_x(y))\ldots(D_y^{\gamma_k}\rho_x(y)) = \sum_{|\gamma|\geqslant k-N/2} g_\gamma(y,\, x)\, (x-y)^\gamma,$$

где $g_\gamma(y, x)$ — гладкая (по x и y) функция, определенная, когда y достаточно близко к x. Подставляя это выражение в (18.13) и интегрируя по частям (с использованием экспоненты $e^{i(x-y)\cdot\eta}$, позволяющей заменить $(x-y)^\gamma$ на $(-D_\eta)^\gamma$), мы получаем, что $r_\alpha(x, \lambda, t)$ есть линейная комбинация слагаемых вида

$$I_1(\lambda) = \lambda^k \int \tilde{a}_\alpha^{(\gamma)}(x, \eta, \lambda, t)\, e^{i(x-y)\cdot\eta} e^{i\lambda\rho_x(y)} \tilde{f}(y, x)\, dy\, d\eta, \tag{18.16}$$

где $\tilde{a}_\alpha^{(\gamma)} = \partial_\eta^\gamma \tilde{a}_\alpha$, $\tilde{f}(y, x)$ — гладкая (по x и y) функция, сосредоточенная при $|y-x| \leqslant \varepsilon$, а индексы k и γ связаны соотношением $|\gamma| \geqslant k - N/2$. Учитывая, что объем области интегрирования по η в (18.16) не превосходит $C\lambda^n$, и используя (18.14), мы получаем для $I_1(\lambda)$ оценку

$$|I_1(\lambda)| \leqslant C\lambda^{k+m-(N+|\gamma|)+n} \leqslant C\lambda^{m+n-N/2},$$

которая позволяет завершить доказательство применением рассуждения типа доказательства предложения 3.6. ■

18.4. Произведение псевдодифференциального оператора и интегрального оператора Фурье. Пусть X, Y — область в $\mathbb{R}^{n_X}$ и $\mathbb{R}^{n_Y}$, и пусть P — ИОФ вида

$$Pu(x) = \int p(x, y, \theta)\, e^{i\varphi(x, y, \theta)} u(y)\, dy\, d\theta, \tag{18.17}$$

где $p(x, y, \theta) \in S^{m'}(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$, $\varphi(x, y, \theta)$ — операторная фазовая функция (см. § 2, определение 2.3). Пусть еще на X дан собственный ПДО $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$ с символом $a(x, \xi)$. Поскольку P отображает $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$ и $\mathscr{E}'(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$, а оператор A переводит пространства $C^\infty(X)$ и $\mathscr{D}'(X)$ в себя, то композиция $A \circ P$ определена как оператор, переводящий $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$ и $\mathscr{E}'(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$.

Теорема 18.2. *Пусть $1-\rho \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$. Тогда композиция $Q = A \circ P$ также имеет вид* (18.17) *с той же фазовой функцией $\varphi(x, y, \theta)$, что и у оператора P, и с амплитудой $q(x, y, \theta)$ вида*

$$q(x, y, \theta) = e^{-i\varphi(x, y, \theta)} a(x, D_x)\, [p(x, y, \theta)\, e^{i\varphi(x, y, \theta)}], \tag{18.18}$$

которая при $|\theta| \to +\infty$ разлагается в следующий асимптотический ряд:

$$q(x, y, \theta) \sim \sum_\alpha a^{(\alpha)}(x, \varphi_x(x, y, \theta))\, \frac{D_z^\alpha(p(z, y, \theta)\, e^{i\rho(z, x, y, \theta)})}{\alpha!}\Big|_{z=x}, \tag{18.19}$$

где $\rho(z, x, y, \theta) = \varphi(z, y, \theta) - \varphi(x, y, \theta) - (z-x)\cdot\varphi_x(x, y, \theta)$.

З а м е ч а н и е 18.3. Поскольку $\varphi(x, y, \theta)$ не является гладкой функцией при $\theta=0$, то из (18.18) не видно сразу, что Q — это ИОФ. Однако это все-таки верно, поскольку, добавляя к P оператор с гладким ядром, мы можем считать, что $p(x, y, \theta)=0$ при $|\theta|<1$. Тогда выражение (18.18) определяет гладкую функцию по всем переменным и таковы же все члены в разложении (18.19), которое имеет обычный смысл (см. определение 3.4). Однако оператор с гладким ядром всегда можно записать в виде (18.17) с финитной по θ амплитудой $p(x, y, \theta)$, равной 0 при $|\theta|<1$ (см. указание к упражнению 2.4). Таким образом, Q является ИОФ с фазовой функцией φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 18.2. Введем использовавшееся в § 1 и § 2 множество

$$C_\varphi=\{(x, y, \theta)\colon \varphi'_\theta(x, y, \theta)=0\}.$$

Заметим, что $\varphi'_x(x, y, \theta)\neq 0$ при $(x, y, \theta)\in C_\varphi$ по определению операторной фазовой функции. Меняя P на оператор с гладким ядром, мы можем считать, что $\operatorname{supp} p(x, y, \theta)$ лежат в сколь угодно малой конической окрестности множества C_φ (см. предложение 2.1) и, в частности, что $\varphi'_x\neq 0$ на $\operatorname{supp} p$. Кроме того, в соответствии с замечанием 18.3 мы будем предполагать, что $p(x, y, \theta)=0$ при $|\theta|<1$.

Заметим теперь, что поскольку A непрерывно отображает $C^\infty(X)$ в $C^\infty(X)$, то мы можем применить его под знаком интеграла в (18.17) (для этого надо вначале преобразовать этот интеграл в абсолютно сходящийся, как в § 1; заметим, что переменная x в этом преобразовании не учавствует, являясь просто параметром). Теперь нужно лишь проверить формулу (18.19), понимаемую в смысле определения 3.4 (см. также замечание 18.3). Но она есть банальное следствие теоремы 18.1, если положить $\lambda=|\theta|$ и считать параметрами y и θ. В самом деле, имеем

$$q(x, y, \theta)=\lambda^{m'}e^{-i\lambda\varphi(x, y, \theta')}a(x, D_x)\,[\lambda^{-m'}p(x, y, \theta)\,e^{i\lambda\varphi(x, y, \theta')}],$$

где $\theta'=\theta/|\theta|$. Замечая теперь, что при изменении параметров y, θ функции $\varphi(x, y, \theta')$, $\lambda^{-m'}p(x, y, \theta)$ лежат в ограниченном подмножестве $C^\infty(X)$, мы видим, что применима теорема 18.1. ■

У п р а ж н е н и е 18.1. Получить из теоремы 18.2 фомулу композиции двух собственных ПДО класса $L^m(X)$ (см. теорему 3.4).

У п р а ж н е н и е 18.2. Пусть A и P такие же, как в теореме 18.2. Доказать утверждение, аналогичное теореме 18.2, для оператора $Q_1=P\circ A$.

У к а з а н и е. Воспользоваться операцией транспонирования.

З а д а ч а 18.1. Получить из теоремы 18.1 формулы замены переменной в ПДО (см. теорему 4.2).

§ 19. Фазовые функции, определяющие класс псевдодифференциальных операторов

19.1. В формулировке теоремы 4.1 содержится пример некоторого класса фазовых функций, для которых соответствующий класс ИОФ совпадает с классом ПДО. Для дальнейшего нам необходим следующий вариант этой теоремы для нелинейных фазовых функций.

Теорема 19.1. *Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x, y, \xi)$ — такая фазовая функция на $X \times X \times \mathbb{R}^n$, что*

1) $\varphi'_\xi(x, y, \xi) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\varphi_x(x, x, \xi) = \xi$.

Тогда, если $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, то класс ИОФ *с фазовой функцией φ и с амплитудами $p(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ совпадает с классом $L^m_{\rho,\,\delta}(X)$. Класс* ИОФ, *у которых фазовая функция равна φ, а амплитуда $a(x, y, \xi)$ является классическим символом, совпадает с классом классических* ПДО.

Замечание 19.1. Условия 1) и 2) при близких x и y можно записать в виде одного условия:

$$\varphi(x, y, \xi) = (x-y)\cdot\xi + O(|x-y|^2|\xi|). \tag{19.1}$$

19.2. Доказательство теоремы 19.1. 1. Поскольку ядра ИОФ с фазовыми функциями, удовлетворяющими условию 1) теоремы 19.1, являются гладкими при $x \neq y$ в силу предложения 2.1, то мы можем считать все амплитуды $a(x, y, \xi)$ сосредоточенными в сколь угодно малой окрестности диагонали $x = y$.

2. Пусть φ, φ_1 — две фазовые функции, удовлетворяющие условиям теоремы 19.1. Обозначая через $L^m_{\rho,\,\delta}(X, \varphi)$ класс ИОФ с фазовой функцией φ и с амплитудами из $S^m_{\rho,\,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$, мы видим, что достаточно проверить включение

$$L^m_{\rho,\,\delta}(X, \varphi) \subset L^m_{\rho,\,\delta}(X, \varphi_1), \tag{19.2}$$

ибо из него, конечно, вытекает совпадение всех классов $L^m_{\rho,\,\delta}(X, \varphi)$ и, в частности, их совпадение с $L^m_{\rho,\,\delta}(X)$.

3. Обозначим через $\mathscr{K}_k$ класс функций $\psi(x, y, \xi)$, положительно однородных по ξ порядка k, гладких при $\xi \neq 0$ и определенных при близких x и y. Заметим, что $\mathscr{K}_0$ является алгеброй, содержащей гладкие функции от x и y в качестве подалгебры, а $\mathscr{K}_1$ является $\mathscr{K}_0$-модулем.

Для нас существенно, что разность $\varphi_1 - \varphi$ можно при близких x и y записать в виде

$$\varphi_1 - \varphi = \sum_{j,\,k=1}^{n} b_{jk} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}, \qquad b_{jk} \in \mathscr{K}_1. \tag{19.3}$$

Проверим это. Из формулы Тейлора находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j} = (x_j - y_j) + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x_k - y_k),$$

где $a_{jk} \in \mathscr{K}_0$, $a_{jk}(x, x, \xi) = 0$. Это можно также записать в виде

$$\varphi'_\xi = (I + A)(x - y),$$

где I — единичная матрица, A — матрица с элементами из $\mathscr{K}_0$, равная 0 при $x = y$. Но тогда при близких x и y существует матрица $(I + A)^{-1}$ с элементами из $\mathscr{K}_0$. Это означает, что мы можем написать

$$x_j - y_j = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}, \qquad \tilde{a}_{jk} \in \mathscr{K}_0. \tag{19.4}$$

Теперь, учитывая условие (19.1) для φ и φ_1, мы видим, что $\varphi_1 - \varphi$ на диагонали (при $x = y$) имеет нуль 2-го порядка и по формуле Тейлора

$$\varphi_1 - \varphi = \sum_{j,\,k=1}^{n} \tilde{b}_{jk}(x_j - y_j)(x_k - y_k), \qquad \tilde{b}_{jk} \in \mathscr{K}_1.$$

Подставляя сюда выражение $x_j - y_j$ из (19.4), мы получаем (19.3).

4. Рассмотрим теперь гомотопию

$$\varphi_t = \varphi + t(\varphi_1 - \varphi), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{19.5}$$

Каждая из функций φ_t удовлетворяет условию (19.1). Банальное повторение только что проведенного рассуждения показывает, что вместо (19.3) можно написать

$$\varphi_1 - \varphi = \sum_{j,\,k=1}^{n} b^t_{jk} \frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi_j} \frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi_k}, \tag{19.6}$$

где $b^t_{jk} \in \mathscr{K}_1$ и b^t_{jk} гладко зависит от t.

Пусть теперь P_t — ИОФ, заданный формулой

$$P_t\, u(x) = \int e^{i\varphi_t(x,y,\xi)} p(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi.$$

Тогда

$$\frac{d^r}{dt^r}(P_t\, u) = \iint p(x, y, \xi)\, i^r (\varphi_1 - \varphi)^r e^{i\varphi_t}\, u(y)\, dy\, d\xi =$$
$$= \sum_{j_1,\dots,j_{2r}} \iint d_{j_1,\dots,j_{2r}} \frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi_{j_1}} \cdots \frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi_{j_{2r}}} e^{i\varphi_t} pu\, dy\, d\xi, \tag{19.7}$$

где $d_{j_1,\ldots,j_{2r}} \in \mathscr{K}_r$. Без ограничения общности можно считать, что $p(x, y, \xi) = 0$ при $|\xi| < 1$, так что $d_{j_1,\ldots,j_{2r}} p \in S^{m+r}_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$. Теперь интегрируем в (19.7) по частям, пользуясь формулой

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi_j} e^{i\varphi_t} = i^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{i\varphi_t}.$$

Это интегрирование показывает, что

$$\frac{d^r}{dt^r} P_t \in L^{m+r(1-2\rho)}_{\rho,\delta}(X, \varphi_t), \tag{19.8}$$

причем все оценки равномерны по t. Но если теперь положить

$$Q_j = \frac{(-1)^j}{j!} \left. \frac{d^j P_t}{dt^j} \right|_{t=1} \in L^{m+j(1-2\rho)}_{\rho,\delta}(X, \varphi_1),$$

то по формуле Тейлора

$$P_0 = \sum_{j=0}^{k-1} Q_j + (-1)^k \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^k P_t}{dt^k} dt. \tag{19.9}$$

Остаток в (19.9) имеет ядро, гладкость которого увеличивается при $k \to +\infty$. Поэтому ясно, что если $Q \sim \sum_{j=0}^{\infty} Q_j$ (асимптотически суммируем амплитуды), то $Q \in L^m_{\rho,\delta}(X, \varphi_1)$, и $P_0 - Q \in L^{-\infty}(X)$, что и доказывает включение (19.2).

Тот факт, что классические амплитуды при этом переходят в классические, очевиден из построения. ■

З а д а ч а 19.1. Пусть φ_1, φ_2 — две фазовые функции, причем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_k},$$

где $b_{jk} \in C^\infty(X \times X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ и b_{jk} однородно по ξ порядка 1. Показать, что $L^m_{\rho,\delta}(X, \varphi_2) \subset L^m_{\rho,\delta}(X, \varphi_1)$.

§ 20. Оператор $\exp(-itA)$

20.1. Определение и формулировка. Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, на котором задана гладкая плотность, A — самосопряженный классический ПДО порядка 1 на M с главным символом $a_1(x, \xi)$, удовлетворяющим условию

$$a_1(x, \xi) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0 \tag{20.1}$$

(в частности, оператор A эллиптичен). Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\ldots}$ — полная ортонормированная система собственных функций оператора A, λ_k — соответствующие собственные значения. Если $u(x)\in C^\infty(M)$, то обозначим через u_k коэффициенты Фурье функции $u(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}$:

$$u_k=(u,\,\varphi_k). \tag{20.2}$$

П р е д л о ж е н и е 20.1. *Если $u(x)\in C^\infty(M)$, то*

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k\varphi_k(x), \tag{20.3}$$

где ряд сходится в топологии C^∞(M).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы имеем, очевидно,

$$u_k\lambda_k^N=(u,\,A^N\varphi_k)=(A^Nu,\,\varphi_k),$$

и поскольку $A^Nu\in C^\infty(M)$, то к ряду (20.3) можно почленно применять A^N при любом $N\in\mathbb{Z}_+$, получая все время ряды, сходящиеся в $L^2(M)$. Но отсюда сразу следует, что при любом $s\in\mathbb{R}$ ряд (20.3) сходится по норме $H^s(M)$, поскольку при $s=N\in\mathbb{Z}_+$ эта норма эквивалентна $\|u\|+\|A^Nu\|$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(M)$. Отсюда и из теоремы вложения 7.6 следует искомое утверждение. ■

Это предложение позволяет дать

О п р е д е л е н и е 20.1. Оператор $\exp(-itA)$ при $t\in\mathbb{R}$ определяется формулой

$$\exp(-itA)\,u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-it\lambda_k)\,u_k\varphi_k(x). \tag{20.4}$$

Легко видеть, что ряд (20.4) при $u\in C^\infty(M)$ сходится в топологии $C^\infty(M)$. Более того, если $u\in H^s(M)$, где s — целое число, то этот ряд сходится по норме пространства $H^s(M)$ (см. доказательство предложения 10.2). Оператор $\exp(-itA)$ представляет собой ограниченный оператор в $H^s(M)$ при целом s. Заметим, что он также является унитарным оператором в $L^2(M)$.

Другой способ определения состоит в том, чтобы рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+iAu=0, & (20.5)\\ u|_{t=0}=u_0, & (20.6)\end{cases}$$

где $u=u(t,\,x)\in C^\infty(\mathbb{R}\times M)$, $u_0\in C^\infty(M)$ и оператор A в (20.5) применяется по переменным x при каждом фиксированном t. Решая задачу «методом Фурье», мы видим, что решение задается формулой (20.4), где вместо u надо подставить u_0, т. е.

$$u(t,\,x)=\exp(-itA)\,u_0(x). \tag{20.7}$$

Но решение задачи (20.5)—(20.6) единственно. Это можно увидеть, например, написав для какого-то решения $u(t,\,x)$ разложение

$$u(t,\,x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,\varphi_k(x),$$

подстановка которого в (20.5)—(20.6) приводит к уравнениям $c_k'(t)+$ $+i\lambda_k c_k(t)=0$ с начальными условиями $c_k(0)=(u_0,\,\varphi_k)$, откуда однозначно находятся $c_k(t)$.

Теорема 20.1. *Если $\varepsilon>0$ достаточно мало, то при $|t|<\varepsilon$ оператор $U(t)=\exp(-itA)$ можно представить в виде суммы оператора с гладким по t, x, y ядром и* ИОФ, *который задается с помощью линейной по t фазовой функции*

$$\varphi(t,\,x,\,y,\,\xi)=\psi(x,\,y,\,\xi)-ta_1(y,\,\xi) \tag{20.8}$$

и амплитуды $p(t,\,x,\,y,\,\xi)$, являющейся гладким по t классическим символом 0-го порядка, так что выполнены оценки

$$|\partial_\xi^\alpha\,\partial_{x,\,y,\,t}^\beta p(t,\,x,\,y,\,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}. \tag{20.9}$$

Пример 20.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ оператор $A=\sqrt{-\Delta}$, имеющий символ $|\xi|$. Задача Коши (20.5)—(20.6) на убывающих при $|x|\to+\infty$ функциях решается с помощью преобразования Фурье по x. А именно, поскольку $Au(x)=F_{\xi\to x}^{-1}(|\xi|\tilde{u}(\xi))$, то

$$u(t,\,x)=\exp(-itA)\,u_0(x)=F_{\xi\to x}^{-1}(e^{-it|\xi|}\tilde{u}_0(\xi))=\iint e^{i(x-y)\,\xi-it|\xi|}u(y)\,dy\,đ\xi.$$

Мы видим, что в этом случае (формально не соответствующем, впрочем, изложенной схеме) оператор $\exp(-itA)$ — ИОФ с фазовой функцией $(x-t)\cdot\xi-t|\xi|$.

20.2. Доказательство теоремы 20.1. 1. Построим оператор $Q(t)$, аппроксимирующий $U(t)$ и являющийся ИОФ вида

$$Q(t)\,f(x)=\iint q(t,\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i\varphi(t,\,x,\,y,\,\xi)}f(y)\,dy\,đ\xi. \tag{20.10}$$

Оператор $U(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases}(D_t+A)\,U(t)=0, & (20.11)\\ U(0)=I. & (20.12)\end{cases}$$

Мы попробуем подобрать $Q(t)$ так, чтобы были выполнены условия

$$\begin{cases} (D_t + A)\,Q(t) \in L^{-\infty}(M), & (20.13)\\ Q(0) - I \in L^{-\infty}(M). & (20.14)\end{cases}$$

Точнее, левая часть (20.13) будет также гладкой функцией от t со значениями в $L^{-\infty}(M)$.

Линейность задачи позволяет с помощью разбиения единицы свести дело к построению q и φ в локальной системе координат.

В силу теоремы 18.2 соотношение (20.13) будет выполнено, если

$$e^{-i\varphi}[D_t + A]\,(qe^{i\varphi}) \in S^{-\infty}, \tag{20.15}$$

где A применяется по переменной x.

Напишем асимптотические разложения символов $a(x, \xi)$ и $q(t, x, y, \xi)$ по однородным функциям:

$$a \sim a_1 + a_0 + a_{-1} + \ldots,$$
$$q \sim q_0 + q_{-1} + q_{-2} + \ldots$$

Тогда по теореме 18.2

$$e^{-i\varphi}[D_t + A]\,(qe^{i\varphi}) \sim (\varphi_t + a_1(x,\, \varphi_x))\,q_0 + r_0 + r_{-1} + \ldots,$$

где r_j — сумма членов порядков однородности j.

Потребуем, чтобы было

$$\varphi_t + a_1(x,\, \varphi_x) = 0. \tag{20.16}$$

Начальные условия

$$\varphi|_{t=0} = \psi(x,\, y,\, \xi) \tag{20.17}$$

должны быть выбраны так, чтобы при $t = 0$ мы могли обеспечить выполнение условия (20.14). Но тогда от ψ нужно требовать, чтобы она была фазовой функцией, соответствующей классу ПДО (см. § 19), т. е. при близких x и y

$$\psi(x,\, y,\, \xi) = (x - y)\cdot\xi + O(|\,x - y\,|^2|\,\xi\,|). \tag{20.18}$$

Саму функцию $\psi(x,\, y,\, \xi)$ мы будем искать в окрестности диагонали $x = y$. Добавок $O(|\,x - y\,|^2|\,\xi\,|)$ в (20.18) необходим для того, чтобы можно было добиться линейности функции $\varphi(t,\, x,\, y,\, \xi)$ по t, а это, в свою очередь, полезно, поскольку в дальнейшем по t придется делать преобразование Фурье.

Итак, ищем φ в виде

$$\varphi(t,\, x,\, y,\, \xi) = \psi(x,\, y,\, \xi) - ta'(y,\, \xi).$$

Это еще одно требование на φ. Мы увидим, что ему можно удовлетворить. Подставим это выражение для φ в (20.16):

$$-a'(y,\,\xi)+a_1(x,\,\psi_x(x,\,y,\,\xi))=0.$$

Полагая здесь $x=y$, получаем в силу (20.18), что $a'(y,\,\xi)=a_1(y,\,\xi)$. Итак,

$$\varphi(t,\,x,\,y,\,\xi)=\psi(x,\,y,\,\xi)-ta_1(y,\,\xi), \tag{20.19}$$

где $\psi(x,\,y,\,\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$a_1(x,\,\psi_x(x,\,y,\,\xi))=a_1(y,\,\xi). \tag{20.20}$$

Вместо условия (20.18) мы потребуем выполнения условий

$$\psi(x,\,y,\,\xi)|_{(x-y)\cdot\xi=0}=0, \tag{20.21}$$

$$\psi_x(x,\,y,\,\xi)|_{x=y}=\xi, \tag{20.22}$$

из которых (20.18) сразу следует. Соотношения (20.20)—(20.22) определяют для ψ задачу Коши, в которой y и ξ являются параметрами. При этом можно считать, что $|\xi|=1$, так как, решив эту задачу при $|\xi|=1$, мы можем затем продолжить ψ по однородности (порядка 1) на все значения ξ.

Отметим, что плоскость $(x-y)\cdot\xi=0$ не является характеристической, так как $\partial_\xi a_1(x,\,\xi)\neq 0$ ввиду формулы Эйлера $\xi\cdot\partial_\xi a_1(x,\,\xi)=$ $=a_1(x,\,\xi)$. Из результатов § 17 ясно, что решение существует при x, близком к y, и, более того, соответствующая окрестность точки y, в которой существует решение, может быть выбрана равномерно по y, ξ, так что функция $\psi(x,\,y,\,\xi)$ определена в некоторой окрестности диагонали $x=y$.

2. Из теоремы 19.1 вытекает теперь, что существует такой классический символ $I(x,\,y,\,\xi)\in CS^0$, что $I(x,\,y,\,\xi)$ сосредоточен в сколь угодно малой окрестности диагонали $x=y$ и

$$\iint I(x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}f(y)\,dy\,đ\xi-f(x)=kf(x), \tag{20.23}$$

где k — оператор с гладким ядром.

Из (20.23) и (20.14) вытекает теперь, что мы должны задать следующие начальные условия для q:

$$q(0,\,x,\,y,\,\xi)=I(x,\,y,\,\xi)\quad(\mathrm{mod}\ S^{-\infty}). \tag{20.24}$$

Если ввести разложение $I(x,\,y,\,\xi)$ по однородным компонентам

$$I\sim I_0+I_{-1}+\ldots,$$

то можно переписать (20.24) в виде

$$q_{-j}(0,\,x,\,y,\,\xi)=I_{-j}(x,\,y,\,\xi),\qquad j=0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{20.25}$$

Теперь выпишем уравнения для функций q_{-j} даваемые соотношением (20.13) и условиями (20.25). Члены 1-го порядка обращаются в 0 в силу (20.16). Для членов 0-го порядка получим

$$\begin{cases} \partial_t q_0+\sum\limits_{|\alpha|=1} a_1^{(\alpha)}(x,\,\varphi_x)\,\partial_x^\alpha q_0+\sum\limits_{|\alpha|=2} a_1^{(\alpha)}(x,\,\varphi_x)\,\dfrac{\partial_x^\alpha\varphi}{\alpha!}\,q_0+ia_0(x,\,\varphi_x)\,q_0=0,\\ q_0|_{t=0}=I_0, \end{cases} \tag{20.26}$$

где $a_1^{(\alpha)}=\partial_\xi^\alpha a$. Эта задача Коши позволяет определить $q_0(t,\,x,\,y,\,\xi)$ при малых t. Далее, при любом целом $j\geqslant 0$ мы получаем следующие уравнения, называемые *уравнениями переноса*:

$$\begin{cases} \partial_t q_{-j}+\sum\limits_{|\alpha|=1} a_1^{(\alpha)}(x,\,\varphi_x)\partial_x^\alpha q_{-j}+\sum\limits_{|\alpha|=2} a_1^{(\alpha)}(x,\,\varphi_x)\dfrac{\partial_x^\alpha\varphi}{\alpha!}q_{-j}+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +ia_0(x_1,\,\varphi_x)q_{-j}R_j=0,\\ q_{-j}|_{t=0}=I_{-j}, \end{cases} \tag{20.27}$$

где R_j зависит только от $q_0,\,q_{-1},\,\ldots,\,q_{-(j-1)}$.

В силу рассуждений п. 17.6 решение задачи (20.27) может быть определено на том же интервале значений t, что и решение задачи (20.26).

Итак, в конечном счете мы получим определенный при $|t|<\varepsilon$ оператор $Q(t)$, который является ИОФ и для которого

$$(D_t+A)\,Q(t)=K(t), \tag{20.28}$$

$$Q(0)=I+k, \tag{20.29}$$

где $K(t)$ имеет гладкое ядро, гладко зависящее от t, k — оператор с гладким ядром.

3. Докажем теперь, что $[U(t)-Q(t)]$ — оператор с ядром, бесконечно дифференцируемым по t, x, y (при $|t|<\varepsilon$). Для этого рассмотрим оператор

$$R(t)=U(-t)\,Q(t)-I \tag{20.30}$$

и продифференцируем его по t:

$$\begin{aligned} D_tR(t)&=-(D_tU)\,(-t)\,Q(t)+U(-t)\,(D_tQ)\,(t)=\\ &=AU(-t)\,Q(t)-U(-t)\,AQ(t)+U(-t)\,K(t). \end{aligned} \tag{20.31}$$

Законность этой выкладки следует из описанной структуры $Q(t)$ и из замечаний об $U(t)$, сделанных в начале этого параграфа (производную нужно, конечно, брать после применения оператора $R(t)$ к какой-нибудь функции $u(x) \in C^\infty(M)$). Поскольку $U(t)\,A = AU(t)$, то из (20.31) следует, что

$$D_t R(t) = U(-t)\,K(t). \tag{20.32}$$

С другой стороны, из (20.29) ясно, что

$$R(0) = k. \tag{20.33}$$

Поскольку $U(-t)\,K(t)$ — оператор с ядром, гладким по t, x, y, то, интегрируя (20.32) с учетом (20.33), мы видим, что тем же свойством обладает и $R(t)$, а тогда из (20.30) ясно, что оператор $U(t) - Q(t) = -U(t)\,R(t)$ также имеет гладкое по t, x, y ядро при $|t| < \varepsilon$. ■

Задача 20.1. Пусть A — классический ПДО 1-го порядка на M, удовлетворяющий условию (20.1), но не обязательно самосопряженный. Проведя для него построение параметрикса $Q(t)$, доказать, что задача Коши (20.5)—(20.6) имеет единственное решение, причем для определяемого этой задачей оператора $U(t) = \exp(-itA)$ также справедливо утверждение теоремы 20.1.

Указание. Составить для $U(t)$ интегральное уравнемие типа Вольтерра, пользуясь оператором $U_0(t) = \exp(-itA_0)$, где $A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*)$.

§ 21. Точная формулировка и доказательство теоремы Хёрмандера

21.1. Особенности преобразования Фурье спектральной функции вблизи нуля и оценки усреднения спектральной функции. Пусть $e(x, y, \lambda)$—спектральная функция такого же оператора A (1-го порядка), как в § 20, $U(t, x, y)$ — ядро оператора $\exp(-itA)$. Если $\varphi_j(x)$ — собственные функции A с собственными значениями λ_j, то мы имеем

$$e(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} \varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}, \tag{21.1}$$

$$U(t, x, y) = \sum_j e^{-i\lambda_j t} \varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}, \tag{21.2}$$

где последний ряд суммируется в смысле, например, обобщенных функций на $M \times M$, гладко зависящих от t (это легко доказать рассуждением, аналогичным тому, которое приведено после определения 20.1). Из формул (21.1) и (21.2) следует, что

$$U(t, x, y) = \int e^{-i\lambda t} d_\lambda e(x, y, \lambda), \tag{21.3}$$

где интеграл понимается как преобразование Фурье (от λ к t) в смысле обобщенных функций.

Пусть $\rho(\lambda) \in S(\mathbb{R}^1)$, $\hat{\rho}(t) = F_{\lambda \to t}\rho(\lambda)$ — преобразование Фурье $\rho(\lambda)$. Тогда из известных свойств преобразования Фурье вытекает, что

$$\hat{\rho}(t)\, U(t,\, x,\, y) = F_{\lambda \to t} \int \rho(\lambda - \mu)\, d_\mu e(x,\, y,\, \mu). \tag{21.4}$$

Выберем теперь $\rho(\lambda)$ так, что

1) $\rho(\lambda) > 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$;

2) $\hat{\rho}(0) = 1$;

3) $\operatorname{supp} \hat{\rho}(t) \subset (-\varepsilon,\, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Упражнение 21.1. Доказать существование такой функции $\rho(\lambda)$.

Указание. Это делается аналогично построению функции $\chi(x)$ в начале доказательства теоремы 6.3.

Пусть теперь $Q(t,\, x,\, y)$ — обобщенное ядро оператора $Q(t)$, построенного (при малых $|\,t\,|$) в § 20. В силу теоремы 20.1 мы имеем

$$U(t,\, x,\, y) - Q(t,\, x,\, y) \in C^\infty((-\varepsilon,\, \varepsilon) \times M \times M). \tag{21.5}$$

Таким образом, функции $U(t,\, x,\, y)$ и $Q(t,\, x,\, y)$ имеют вблизи точки $t = 0$ одинаковые особенности.

Из (21.4) вытекает теперь

Лемма 21.1. *Функция*

$$\int \rho(\lambda - \mu)\, d_\mu e(x,\, y,\, \mu) - F^{-1}_{t \to \lambda}(\hat{\rho}(t)\, Q(t,\, x,\, y)) \tag{21.6}$$

является гладкой функцией по всем переменным, убывающей быстрее любой степени λ при $\lambda \to +\infty$ равномерно относительно $x,\, y \in M$.

Вычислим теперь 2-й член в (21.6). Это можно легко сделать благодаря линейности по t фазовой функции $\varphi(t,\, x,\, y,\, \xi)$, входящей в определение оператора $Q(t)$.

Вначале произведем вычисление формально, не заботясь о сходимости получающихся интегралов. В обозначениях § 20 имеем

$$Q(t,\, x,\, y) = \int q(t,\, x,\, y,\, \xi)\, e^{i(\psi(x,\, y,\, \xi) - a_1(y, \xi) t)}\, đ\xi, \tag{21.7}$$

$$F^{-1}_{t \to \lambda}(\hat{\rho}(t)\, Q(t,\, x,\, y))\,(\lambda) =$$
$$= (2\pi)^{-1} \int \hat{\rho}(t)\, q(t,\, x,\, y,\, \xi)\, e^{it\lambda - ita_1(y, \xi) + i\psi(x, y, \xi)}\, dt\, đ\xi. \tag{21.8}$$

Обозначим

$$R(\lambda,\, x,\, y,\, \xi) = (2\pi)^{-1} \int \hat{\rho}(t)\, q(t,\, x,\, y,\, \xi)\, e^{it\lambda}\, dt. \tag{21.9}$$

Тогда

$$F^{-1}_{t\to\lambda}(\hat{\rho}(t)\,Q(t,\,x,\,y))\,(\lambda)=\int R(\lambda-a_1(y,\,\xi),\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\,đ\xi. \quad (21.10)$$

Заметим теперь, что $R(\lambda,\,x,\,y,\,\xi)$ — гладкая функция всех переменных и, более того, так как $q(t,\,x,\,y,\,\xi)$ — гладкая функция всех переменных (в том числе и t), то R — быстро убывающая функция от λ, для которой при любом $N>0$ выполнены оценки

$$|\partial_x^\alpha\,\partial_y^\beta\,\partial_\xi^\gamma\,\partial_\lambda^\delta R(\lambda,\,x,\,y,\,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta\gamma\delta N}\langle\xi\rangle^{-|\gamma|}\langle\lambda\rangle^{-N}. \quad (21.11)$$

При этом R допускает асимптотическое разложение по однородным функциям переменной ξ. Из оценок (21.11) ясно, что ввиду эллиптичности $a_1(y,\,\xi)$ функция $R(\lambda-a_1(y,\,\xi),\,x,\,y,\,\xi)$ быстро убывает при $|\,\xi\,|\to+\infty$, так что интеграл в (21.10) абсолютно сходится.

Для обоснования перехода от (21.8) к (21.10), который был сделан формально, остается заметить, что он законен для финитных по ξ символов $q(t,\,x,\,y,\,\xi)$, и сделать стандартный предельный переход, как в определении осциллирующего интеграла (см. § 1).

Принимая во внимание лемму 21.1, мы видим, что доказана

Л е м м а 21.2. *Если K определено формулой* (21.9), *то при любом* $N>0$

$$\left|\int\rho(\lambda-\mu)\,d_\mu e(x,\,y,\,\mu)-\int R(\lambda-a_1(y,\,\xi),\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\,đ\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_N(1+|\,\lambda\,|)^{-N}, \quad (21.12)$$

где C_N не зависит от x и y.

Теперь оценим 2-й член в (21.12).

Л е м м а 21.3. *Имеем*

$$\left|\int R(\lambda-a_1(y,\,\xi),\,x,\,y,\,\xi)e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}đ\xi\right|\leqslant C(1+|\,\lambda\,|)^{n-1}, \quad (21.13)$$

где C не зависит от x и y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим, как в § 15:

$$V_y(\lambda)=\int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda}đ\xi. \quad (21.14)$$

Так как функция a_1 однородна по ξ порядка 1, то

$$V_y(\lambda)=V_y(1)\,\lambda^n. \quad (21.15)$$

Теперь воспользуемся очевидным тождеством

$$\int R(\lambda - a_1(y, \xi), x, y, \xi)\, e^{i\psi(x, y, \xi)} đ\xi = \int R(\lambda - \sigma, x, y, \xi)\, e^{i\psi(x, y, \xi)} dV_y(\sigma),$$

обе части которого определены благодаря оценкам (21.11). Принимая во внимание (21.15), мы видим теперь, что левая часть (21.13) оценивается через

$$C_N \int\limits_0^\infty (1 + |\lambda - \sigma|)^{-N} dV_y(\sigma) = C'_N \int\limits_0^\infty (1 + |\lambda - \sigma|)^{-N} \sigma^{n-1} d\sigma.$$

Но ввиду очевидного неравенства $1 + |\sigma| \leqslant (1 + |\lambda - \sigma|)(1 + |\lambda|)$ мы имеем

$$(1 + |\lambda - \sigma|)^{-N} \sigma^{n-1} \leqslant (1 + |\lambda - \sigma|)^{-N+n-1} (1 + |\lambda|)^{n-1}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^\infty (1 + |\lambda - \sigma|)^{-N} \sigma^{n-1} d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant (1 + |\lambda|)^{n-1} \int\limits_{-\infty}^\infty (1 + |\lambda - \sigma|)^{-N+n-1} d\sigma = C(1 + |\lambda|)^{n-1},$$

откуда и следует (21.13). ■

Следствие 21.1. *Справедлива оценка*

$$\left| \int \rho(\lambda - \mu)\, d_\mu e(x, y, \mu) \right| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{n-1}, \tag{21.16}$$

где C не зависит от x и y.

21.2. Переход к оценкам спектральной функции.

Лемма 21.4. *Имеет место оценка*

$$|e(x, x, \lambda + 1) - e(x, x, \lambda)| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{n-1}, \tag{21.17}$$

где C не зависит от x и λ.

Доказательство. Так как функция $\rho(\lambda)$ положительна и отделена от нуля на $[-2, 2]$, то

$$\int \rho(\lambda - \mu)\, d_\mu e(x, x, \mu) \geqslant C \int\limits_{\lambda - 1}^{\lambda + 2} d_\mu e(x, x, \mu) \geqslant C[e(x, x, \lambda + 1) - e(x, x, \lambda)],$$

где $C>0$, так что утверждение леммы вытекает теперь из следствия 21.1. ■

Л е м м а 21.5. *Справедлива оценка*

$$|e(x, y, \lambda+1)-e(x, y, \lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}, \tag{21.18}$$

где C не зависит от x, y и λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (21.1) следует, что

$$e(x, y, \lambda+1)-e(x, y, \lambda)=\sum_{\lambda<\lambda_j \leqslant \lambda+1} \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)},$$

и из неравенства Коши—Буняковского мы получаем

$$|e(x, y, \lambda+1)-e(x, y, \lambda)| \leqslant \\ \leqslant \left[\sum_{\lambda<\lambda_j \leqslant \lambda+1} |\varphi_j(x)|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{\lambda<\lambda_j \leqslant \lambda+1} |\varphi_j(y)|^2\right]^{1/2}= \\ =(e(x, x, \lambda+1)-e(x, x, \lambda))^{1/2}(e(y, y, \lambda+1)-e(y, y, \lambda))^{1/2} \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}$$

по лемме 21.4 (притом даже с той же константой C). ■

Л е м м а 21.6. *Имеет место оценка*

$$|e(x, y, \lambda+\mu)-e(x, y, \lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|+|\mu|)^{n-1}(1+|\mu|), \tag{21.19}$$

где C не зависит от x, y, λ, μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о получается разбиением $e(x, y, \lambda+\mu)-$ $-e(x, y, \lambda)$ в сумму не более чем $1+|\mu|$ слагаемых, оцениваемых, как в лемме 21.5. ■

Л е м м а 21.7. *Справедлива оценка*

$$\left|\int \rho(\lambda-\mu)\, e(x, y, \mu)\, d\mu-e(x, y, \lambda)\right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}, \tag{21.20}$$

где C не зависит от x, y, λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся тем, что $\rho \in S(\mathbb{R}^1)$ и $\int \rho(\lambda)\, d\lambda=1$. С помощью очевидного неравенства

$$1+|\lambda|+|\mu| \leqslant(1+|\lambda|)(1+|\mu|)$$

получаем

$$\left|\int \rho(\lambda-\mu)\, e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu - e(x,\, y,\, \lambda)\right| =$$
$$= \left|\int \rho(\lambda-\mu)\, [e(x,\, y,\, \mu) - e(x,\, y,\, \lambda)]\, d\mu\right| =$$
$$= \left|\int \rho(\mu)\, [e(x,\, y,\, \lambda-\mu) - e(x,\, y,\, \lambda)]\, d\mu\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int (1+|\lambda|+|\mu|)^{n-1}(1+|\mu|)^{-N} d\mu \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1},$$

что и требовалось. ■

Л е м м а 21.8. *Выполнена оценка*

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\lambda} d\lambda \int \rho(\lambda-\mu)\, d_\mu e(x,\, y,\, \mu) - e(x,\, y,\, \lambda)\right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}. \tag{21.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \rho(\lambda-\mu)\, d_\mu e(x,\, y,\, \mu) = \int \rho'(\lambda-\mu)\, e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu,$$

откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \left(\int \rho(\lambda-\mu)\, d_\mu e(x,\, y,\, \mu)\right) d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \left(\int \rho'(\lambda-\mu)\, e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu\right) d\lambda =$$
$$= \int \left(\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \rho'(\lambda-\mu)\, d\lambda\right) e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu = \int \rho(\lambda-\mu)\, e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu,$$

так что (21.21) вытекает теперь из (21.20). ■

Учитывая лемму 21.2, мы видим, что справедливо

П р е д л о ж е н и е 21.1. *Имеет место оценка*

$$\left|e(x,\, y,\, \lambda) - \iint\limits_{\sigma<\lambda} R(\sigma - a_1(y,\, \xi),\, x,\, y,\, \xi)\, e^{i\psi(x,\, y,\, \xi)} d\sigma\, đ\xi\right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}, \tag{21.22}$$

где C не зависит от x, y, λ.

21.3. Теорема Хёрмандера для операторов 1-го порядка. Мы хотим теперь преобразовать к более простому виду оценку (21.22). Заметим, что в силу (21.9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda, x, y, \xi)\, d\lambda = q(0, x, y, \xi) = I(x, y, \xi). \tag{21.23}$$

Поэтому, если положить

$$R_1(\tau, x, y, \xi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\tau} R(\sigma, x, y, \xi)\, d\sigma, & \tau < 0, \\ \displaystyle -\int_{\tau}^{\infty} R(\sigma, x, y, \xi)\, d\sigma = & \\ \displaystyle \qquad = \int_{-\infty}^{\tau} R(\sigma, x, y, \xi)\, d\sigma - I(x, y, \xi), & \tau > 0, \end{cases}$$

то из (21.11) вытекают следующие оценки для R_1:

$$|\partial_x^\alpha\, \partial_y^\beta\, \partial_\xi^\gamma R_1(\lambda, x, y, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma N} \langle \xi \rangle^{-|\gamma|} \langle \lambda \rangle^N. \tag{21.24}$$

Имеем очевидно,

$$\iint\limits_{\sigma<\lambda} R(\sigma - a_1(y, \xi), x, y, \xi)\, e^{i\psi(x, y, \xi)} d\sigma\, đ\xi =$$

$$= \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} I(x, y, \xi)\, e^{i\psi(x, y, \xi)}\, đ\xi + \int R_1(\lambda - a_1(y, \xi), x, y, \xi)\, e^{i\psi(x, y, \xi)}\, đ\xi.$$

Аналогично лемме 21.3 доказывается, что

$$\left| \int R_1(\lambda - a_1(y, \xi), x, y, \xi)\, e^{i\psi(x, y, \xi)}\, đ\xi \right| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{n-1},$$

Поэтому мы видим, что справедлива

Л е м м а 21.9. *Имеет место оценка*

$$\left| e(x, y, \lambda) - \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} I(x, y, \xi)\, e^{i\psi(x, y, \xi)}\, đ\xi \right| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{n-1}, \tag{21.25}$$

где C не зависит от x, y, λ.

Для дальнейшего упрощения нужна

Лемма 21.10. *При близких x и y справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} I(x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\,đ\xi - \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\,đ\xi\right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1},$$

где C не зависит от x, y, λ.

Доказательство. Из доказательства теоремы 19.1 легко извлечь, что при близких x и y

$$|\,I(x,\,y,\,\xi)-1\,| \leqslant C(1+|\,\xi\,|)^{-1}. \tag{21.26}$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} (I(x,\,y,\,\xi)-1)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\,đ\xi\right| \leqslant C \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} (1+|\,\xi\,|)^{-1}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{a_1<\lambda} (1+|\,a_1\,|)^{-1}\,d\xi = C \int\limits_{\mu<\lambda} (1+|\,\mu\,|)^{-1} dV_y(\mu) \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\lambda (1+|\,\mu\,|)^{-1}\mu^{n-1} d\mu \leqslant C \int\limits_0^\lambda (1+|\,\mu\,|)^{n-2} d\mu \leqslant C(1+|\,\lambda\,|)^{n-1},$$

что и требовалось. ■

Заметим, что если пара x, y принадлежит некоторому компакту в $M\times M$, не пересекающемуся с диагональю, то мы можем считать, что $I(x,\,y,\,\xi)=0$, так что в этом случае из леммы 21.9 следует, что $|\,e(x,\,y,\,\xi)\,| \leqslant C(1+|\,\lambda\,|)^{n-1}$.

Суммируем эти результаты в виде теоремы.

Теорема 21.1. 1) *Пусть функция $\psi(x,\,y,\,\xi)$ определена при близких x и y и такова, что*

$$a_1(x,\,\psi_x(x,\,y,\,\xi)) = a_1(y,\,\xi), \quad \psi|_{(x-y)\cdot\xi=0}=0, \quad \psi_x|_{x=y}=\xi. \tag{21.27}$$

Тогда при близких x и y

$$\left|e(x,\,y,\,\lambda) - \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)} đ\xi\right| \leqslant C(1+|\,\lambda\,|)^{n-1}, \tag{21.28}$$

где C не зависит от x, y и λ.

В частности,

$$|e(x,\,x,\,\lambda) - V_x(\lambda)| \leqslant C(1+|\,\lambda\,|)^{n-1}. \tag{21.29}$$

2) *Если пара* x, y *принадлежит некоторому компакту в* $M \times M$, *не пересекающемуся с диагональю, то*

$$|e(x, y, \lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}. \tag{21.30}$$

Следствие 21.2. *Справедлива асимптотическая формула для числа* $N(\lambda)$ *собственных значении оператора* A, *меньших чем* λ:

$$\left| N(\lambda) - \int\limits_{a_1(x,\xi)<\lambda} đ\xi\, dx \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}.$$

21.4. Случай операторов высокого порядка. Пусть A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка m на замкнутом многообразии M с главным символом $a_m(x, \xi) \geqslant 0$. Построим при близких x и y такую функцию $\psi(x, y, \xi)$, что

$$a_m(x, \psi_x(x, y, \xi)) = a_m(y, \xi), \tag{21.31}$$

$$\psi|_{(x-y)\cdot\xi=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=y} = \xi, \tag{21.32}$$

откуда следует, что ψ однородна по ξ порядка 1 и такова, что

$$\psi(x, y, \xi) = (x-y)\cdot\xi + O(|x-y|^2|\xi|) \tag{21.33}$$

при $x \to y$.

Теорема 21.2. *Для описанного выше оператора* A *порядка* m *имеем*:

1) *При близких* x *и* y

$$\left| e(x, y, \lambda) - \int\limits_{a_m(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi(x,y,\xi)} đ\xi \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{\frac{n-1}{m}}, \tag{21.34}$$

где C *не зависит от* x *и* y.

В частности,

$$\left| e(x, x, \lambda) - \int\limits_{a_m(x,\xi)<\lambda} đ\xi \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{\frac{n-1}{m}} \tag{21.35}$$

и, следовательно,

$$\left| N(\lambda) - \int\limits_{a_m(x,\xi)<\lambda} dx\, đ\xi \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{\frac{n-1}{m}}. \tag{21.36}$$

2) *Если пара* x, y *принадлежит некоторому компакту в* $M \times M$, *не пересекающемуся с диагональю, то*

$$|e(x, y, \lambda| \leqslant C(1+|\lambda|)^{\frac{n-1}{m}}. \tag{21.37}$$

Доказательство. Заметим, во-первых, что без ущерба для общности можно считать $A>0$ (если это неверно для самого оператора A, то в силу следствия 9.3 верно для оператора $A+cI$ при достаточно большом $c>0$). Введем оператор $A_1=A^{1/m}$. Это эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка 1 с главным символом $a_1(x, \xi)=$ $=a_m(x, \xi)^{1/m}$. Ясно, что уравнения (21.31), (21.32) для $\psi(x, y, \xi)$ просто совпадают с уравнениями (21.27). Кроме того, очевидно, что

$$e(x, y, \lambda)=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}=\sum_{\lambda_j^{1/m}\leqslant\lambda^{1/m}}\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}=e_1(x, y, \lambda^{1/m}),$$

где $e_1(x, y, \lambda)$ — спектральная функция оператора A_1. Все утверждения теоремы 21.2 вытекают теперь из соответствующих утверждений теоремы 21.1. ■

Задача 21.1. Рассмотреть случай однородного оператора $a_m(D)$ с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Записать $e(x, y, \lambda)$ в виде интеграла и проверить непосредственно оценки (21.34), (21.35) и (21.37).

§ 22. Оператор Лапласа на сфере

22.1. Оператор Лапласа на римановом многообразии. 1) Пусть M — многообразие, на котором введена риманова метрика, т. е. в любом касательном пространстве T_xM задана билинейная форма $\langle\cdot, \cdot\rangle$ с положительно определенной квадратичной формой. Если $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты в области $U\subset M$, то $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ — базис касательного пространства во всех точках U. Обозначив

$$g_{ij}(x)=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x\right\rangle, \tag{22.1}$$

мы получим симметрическую положительно определенную матрицу $g_{ij}(x)$. Если теперь $v=\sum\limits_{j=1}^{n} v^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\in T_xM$, то

$$\langle v, v\rangle=\sum_{i, j=1}^{n} g_{ij}(x)\,v^iv^j. \tag{22.2}$$

Кокасательное пространство T_x^*M — это, по определению, дуальное пространство к T_xM. Его базис (при $x\in U$) состоит из 1-форм dx^i, определенных соотношениями

$$\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta_j^i=\begin{cases}1 & \text{при} \quad i=j,\\ 0 & \text{при} \quad i\neq j.\end{cases}$$

Метрика на векторном пространстве E индуцирует изоморфизм E и E^*. С помощью этого изоморфизма можно перенести метрику с E на E^*. Фиксируя точку $x \in U$, вычислим $\langle dx^i,\, dx^j\rangle$ в точке x. Какой касательный вектор соответствует dx^i? Обозначим его координаты через a^{ik}, $k=1, \ldots, n$; тогда должно выполняться условие

$$\delta^i_j = \left\langle dx^i,\, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \left\langle \{a^{ik}\},\, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} g_{kj} a^{ik},$$

откуда $a^{ik} = g^{ik}$ — элементы матрицы, обратной к $\|g_{ik}\|$.

Теперь имеем

$$\langle dx^i,\, dx^j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k},\, dx^j\right\rangle = g^{ij}, \tag{22.3}$$

т. е. для любого кокасательного вектора $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, dx^i \in T^*_x M$

$$\langle a,\, a\rangle = \sum_{i,\,j=1}^{n} g^{ij} a_i a_j. \tag{22.4}$$

2) Введем на римановом многообразии гладкую плотность (объем) так, чтобы в касательном пространстве объем параллелепипеда из ортонормированной системы равнялся 1. Для любого параллелепипеда из векторов $e_1, \ldots, e_n$ объем будет равен

$$\mathrm{vol}\{e_1, \ldots, e_n\} = |\, \det\{e_1^{cm}, \ldots, e_n^{cm}\}\,|, \tag{22.5}$$

где e_i^{cm} — столбец координат e_i в ортонормированном базисе. Формула (22.5) вытекает из того, что объем должен быть аддитивным неотрицательным инвариантом параллелепипеда.

Что, если базис, в котором берутся координаты, не ортонормирован? Рассмотрим тогда преобразование A, переводящее ортобазис $e'_1, \ldots, e'_n$ в базис $e_1, \ldots, e_n$. В столбцах его матрицы (в базисе $e'_1, \ldots, e'_n$) будут стоять координаты векторов e_i в ортобазисе $\{e'_i\}$, так что $\mathrm{vol}\{e_1, \ldots, e_n\} = |\, \det\, A\,| = \sqrt{\det\,(A^* A)}$.

Но матричные элементы A^*A в базисе $\{e'_i\}$ имеют вид

$$\langle A^*Ae'_i,\, e'_j\rangle = \langle Ae'_i,\, Ae'_j\rangle = \langle e_i,\, e_j\rangle. \tag{22.6}$$

Поэтому параллелепипед $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$ имеет объем $\sqrt{g}$, где $g = \det\, \|g_{ij}(x)\|$, а объем любого множества F в локальных координатах U определяется как

$$\mathrm{vol}\,(F) = \int\limits_F \sqrt{g(x)}\,dx^1\ldots dx^n. \tag{22.7}$$

Непосредственно из формулы замены переменных в интеграле можно проверить, что интеграл в (22.7) не зависит от выбора локальных координат. Поэтому можно сразу принять его за определение $\mathrm{vol}(F)$, определяя гладкую положительную плотность dv на M по формуле

$$dv = \sqrt{g(x)}\,dx^1\ldots dx^n. \tag{22.8}$$

3) Для любого дифференциального оператора

$$A\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

существует единственный оператор A^* такой, что

$$(Af,\, g) = (f,\, A^* g), \qquad f,\, g \in C_0^\infty(M), \tag{22.9}$$

где

$$(f,\, g) = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,dv. \tag{22.10}$$

Аналогичное утверждение верно для операторов в сечениях векторных расслоений на M, если в слоях расслоений имеется эрмитова метрика (положительно определенная эрмитова форма), заменяющая $f(x)\,\overline{g(x)}$ в (22.10).

Определим в 1-формах $\Lambda^1(M)$ скалярное произведение, беря в $T_x^* M \otimes \mathbb{C}$ эрмитово скалярное произведение, индуцированное введенной выше метрикой на $T_x^* M$. Рассмотрим оператор

$$d\colon C^\infty(M) \to \Lambda^1(M), \tag{22.11}$$

переводящий функцию $f \in C^\infty(M)$ в ее дифференциал $df \in \Lambda^1(M)$, определяемый тем, что если $v \in T_x M$, то $\langle df,\, v\rangle = (vf)\,(x)$, где $(vf)\,(x)$ означает производную f по направлению v. В координатах:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i.$$

Оператор $\delta\colon \Lambda^1(M) \to C^\infty(M)$ определяется как сопряженный к d, т. е. $\delta = d^*$.

Определение 22.1. *Оператор Лапласа* (или *Лапласа—Бельтрами*) на функциях

$$\Delta\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

на римановом многообразии M определяется формулой

$$\Delta = -\delta \cdot d. \tag{22.12}$$

Аналогичным образом на p-формах $\Lambda^p(M)$ определен оператор Лапласа

$$\Delta = -(d\delta + \delta d)\colon \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M),$$

но мы не будем его рассматривать.

Сразу ясно, что оператор Лапласа Δ обладает следующими свойствами:

а) $\Delta^* = \Delta$;

б) если $T\colon M \to M$ сохраняет метрику в касательных пространствах и $\hat{T}\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ определено формулой $\hat{T}f = f \circ T$, то

$$\Delta\hat{T} = \hat{T}\Delta,$$

т. е. Δ перестановочен с изометриями;

в) если M замкнуто, то $(\Delta f, f) \leqslant 0$, причем из $\Delta f = 0$ вытекает, что $f = \mathrm{const}$.

4) Вычислим δ и Δ в локальных координатах. Имеем

$$\left(\delta\left(\sum_{i=1}^n a_i\, dx^i\right),\, f\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\, dx^i,\, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j\right) =$$

$$= \sum_{i,\,j=1}^n \int g^{ij} a_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^j} \sqrt{g}\, dx = \sum_{i,\,j=1}^n \int \bar{f}\left[-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} a_i\right)\right] dx =$$

$$= \int \bar{f} \cdot \sum_{i,\,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} \left[-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} a_i\right)\right] \sqrt{g}\, dx,$$

откуда

$$\delta\left(\sum_{i=1}^n a_i\, dx^i\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,\,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} a_i\right) \tag{22.13}$$

и

$$\Delta f = \delta\, df = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,\,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}\right). \tag{22.14}$$

П р и м е р 22.1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой получаем

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i^2}}.$$

Заметим, что все инварианты Δ — это инварианты риманова многообразия. В частности, таковы вычеты и значения ζ-функции.

Упражнение 22.1. Вычислить в локальных координатах главный символ оператора Лапласа на римановом многообразии.

22.2. Оператор Лапласа на сфере S^n. Сфера S^n — следующее подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S^n = \left\{ (x^0, \ldots, x^n) \colon \sum_{i=0}^{n} (x^i)^2 = 1 \right\}.$$

На S^n имеется метрика, индуцированная стандартной метрикой $\mathbb{R}^{n+1}$, и соответствующий оператор Лапласа, который мы будем обозначать Δ_S. Есть следующий способ вычислять Δ_S, используя оператор Δ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Предложение 22.1. *Пусть $f(\omega)$ — функция на S^n, продолжим ее на $\mathbb{R}^{n+1}$, полагая $\hat{f}(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$, т. е. по однородности 0-го порядка. Тогда*

$$\Delta_S f = \Delta \hat{f}|_{S^n}, \tag{22.15}$$

или

$$(\Delta \hat{f})\,(x) = r^{-2} \widehat{\Delta_S f}, \tag{22.16}$$

где $r = |x|$.

Доказательство. Равносильность (22.15) и (22.16) очевидна, так как $\Delta \hat{f}$ имеет порядок однородности –2.

Докажем формулу (22.15). Обозначим временно через Δ'_S оператор на S^n, определяемый правой частью (22.15).

На S^n действует группа изометрий $\mathrm{SO}(n+1)$, получаемая ограничением на S^n вращений пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. С помощью этой группы любой единичный касательный вектор можно перевести в любой другой. Поэтому главный символ оператора, перестановочного со всеми изометриями, постоянен на всех единичных кокасательных векторах (и, следовательно, однозначно определен с точностью до скалярного множителя). Ясно, что операторы Δ_S и Δ'_S перестановочны с действием $\mathrm{SO}(n+1)$ на функциях. Поэтому существует такая постоянная λ, что оператор $\Delta'_S - \lambda\Delta_S$ имеет порядок 1. Но оператор $\Delta'_S - \lambda\Delta_S$ также перестановочен с $\mathrm{SO}(n+1)$, а поскольку нет линейных функций, инвариантных относительно поворотов, а свободный член $\Delta'_S - \lambda\Delta_S$ из тех же соображений постоянен, то оператор $\Delta'_S - \lambda\Delta_S$ кратен единичному и, следовательно, нулевой, так как $\Delta'_S 1 = \Delta_S 1 = 0$. Итак, $\Delta'_S = \lambda\Delta_S$. Из дальнейшего будет ясно, что $\lambda = 1$, что, впрочем, можно проверить, вычислив Δ_S и Δ'_S на любой негармонической на сфере функции. ■

22.3. Собственные значения оператора Δ_S. Вычислим оператор Δ в полярных координатах. Пусть $r = |x|$, $\omega = x/|x|$. Тогда

$$\Delta(f(r)\,g(\omega)) = (\Delta f)\,g + f(\Delta g) + 2(\nabla f)\cdot(\nabla g) = (\Delta f)\,g + f(\Delta g), \quad (22.17)$$

так как $(\nabla f)\cdot(\nabla g) = 0$ (градиент ∇f направлен по радиусу, а градиент ∇g — по касательной).

Вычислим $\Delta f(r)$. Имеем

$$r'_{x^i} = \frac{x^i}{r}, \qquad r''_{x^i x^i} = \frac{1}{r} - \frac{(x^i)^2}{r^2}.$$

Отсюда

$$\Delta f(r) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\frac{x^i}{r} f'(r)\Big) = \sum_{i=0}^{n} f''(r)\frac{(x^i)^2}{r^2} + \\ + \sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{1}{r} - \frac{(x^i)^2}{r^3}\Big) f'(r) = f''(r) + \frac{n}{r} f'(r).$$

Поэтому

$$\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\Delta_S, \quad (22.18)$$

где Δ_S применяется на единичной сфере с последующим продолжением по нулевой однородности. Формула (22.18) верна уже на любых функциях (линейные комбинации функций вида $f(r)g(\omega)$ плотны в пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$).

В частности, при $f(r) = r^\mu$ получаем

$$\Delta(r^\mu g(\omega)) = r^{-2+\mu}[\Delta_S g + [\mu(\mu-1) + n\mu]\,g] = \\ = r^{-2+\mu}[\Delta_S g + \mu(\mu + n - 1)g]. \quad (22.19)$$

Из (22.19) вытекает, что справедливо

Предложение 22.2. *Равенство $\Delta(r^\mu g(\omega)) = 0$ (при $r \neq 0$) равносильно тому, что $g(\omega)$ — собственная функция оператора $-\Delta_S$ с собственным значением $\lambda = \mu(\mu + n - 1)$.*

Поскольку все собственные значения оператора $-\Delta_S$ неотрицательны, мы можем считать, что $\mu \geqslant 0$ или $\mu \leqslant 1 - n$. Заметим, что квадратный трехчлен $\lambda(\mu) = \mu(\mu + n - 1)$ принимает все значения $\lambda \geqslant 0$ при $\mu \geqslant 0$, причем ровно по одному разу. Поэтому ясно, что собственные значения $\lambda \geqslant 0$ находятся во взаимно однозначном соответствии с такими $\mu \geqslant 0$, что существует такая нетривиальная функция $g(\omega)$, что $r^\mu g(\omega)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$. Но тогда по теореме об устранимой особенности $r^\mu g(\omega)$ гармонична всюду в $\mathbb{R}^{n+1}$ и, следовательно, является по теореме Лиувилля гармоническим полиномом. В частности, μ — целое. Очевидно, верно и обратное, т. е. ограничения однородных гармонических полиномов на S^n являются собственными функциями оператора $-\Delta_S$ с собственными значениями $\lambda = k(k+n-1)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем по принципу максимума гармонический полином однозначно определяется своим ограничением на S^n. Итак, доказана

Теорема 22.1. *Собственные значения оператора $-\Delta_S$ равны $\lambda = k(k+n-1)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем кратность собственного значения $k(k+n-1)$ равна размерности пространства однородных гармонических полиномов степени k.*

22.4. Подсчет кратности. Пусть M_k — пространство однородных многочленов степени k. Вычислим $N_k = \dim M_k$. Базис в M_k образуют одночлены $x_0^{k_0} \ldots x_n^{k_n}$, где $k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k$. Количество упорядоченных разбиений числа k в сумму $n+1$ неотрицательных чисел равно количеству упорядоченных разбиений числа $k+n+1$ в сумму $n+1$ положительных чисел, что в свою очередь равно количеству способов расставить n перегородок на $n+k$ мест, т. е. равно

$$N_k = \binom{n+k}{n} = \frac{(n+k)!}{k!\,n!} = \frac{1}{n!}\,(k+n)\,(k+n-1)\ldots(k+1). \qquad (22.20)$$

Заметим, что оператор Δ задает отображение

$$\Delta\colon M_k \to M_{k-2} \qquad (22.21)$$

и есть точная последовательность

$$0 \to H_k \to M_k \to M_{k-2}, \qquad (22.22)$$

где $H_k = \operatorname{Ker} \Delta|_{M_k}$ — пространство однородных гармонических полиномов степени k, размерность которого мы хотим сосчитать.

Теорема 22.2. 1) *Оператор $\Delta\colon M_k \to M_{k-2}$ сюръективен.*

2) *Имеет место прямое разложение*

$$M_k = \bigoplus_{k-2l \geqslant 0} r^{2l} H_{k-2l}, \qquad (22.23)$$

где $r^2 = x_0^2 + \ldots + x_n^2$.

Следствие 22.1.

а) $\dim H_k = N_k - N_{k-2}$. $\qquad (22.24)$

б) *Если f, φ — два многочлена, то существует и единствен такой многочлен u, что*

$$\Delta u = f, \qquad u|_{|x|=1} = \varphi|_{|x|=1} \qquad (22.25)$$

(*т. е. задача Дирихле для уравнения Пуассона в шаре разрешима в многочленах*).

в) *Гармонический многочлен не может делиться на* r^2.

Вывод следствия 22.1 из теоремы 22.2. а) Соотношение (22.24) следует из того, что последовательность (22.22) можно переписать в виде

$$0 \to H_k \to M_k \to M_{k-2} \to 0. \tag{22.26}$$

б) В силу п. 1) теоремы утверждение о разрешимости задачи (22.25) сводится к случаю $f=0$, где оно очевидно в силу (22.23).

в) Также очевидно из (22.23). ■

Доказательство теоремы 22.2. Оба утверждения доказываются одновременно индукцией по k.

При $k=0, 1$ утверждения теоремы верны. Пусть они верны при всех $l<k$.

1°. Покажем, что $H_k \cap r^2 M_{k-2}=0$. Поскольку по индуктивному предположению $M_{k-2}=\bigoplus\limits_{k-2l-2\geqslant 0} r^{2l} H_{k-2l-2}$, то $r^2 M_{k-2}=\bigoplus\limits_{\substack{k-2l\geqslant 0\\ l>0}} r^{2l} H_{k-2l}$, и если $h_k \in H_k \cap r^2 M_{k-2}$, то

$$h_k=\sum_{\substack{l>0\\ k-2l\geqslant 0}} c_l r^{2l} h_{k-2l}. \tag{22.27}$$

Рассмотрим теперь гармонический многочлен $h=h_k-\sum\limits_{l>0} c_l h_{k-2l}$. Имеем $\deg h \leqslant k$, причем h_k — однородная компонента h степени k. Поскольку $h|_{|x|=1}=0$, то $h\equiv 0$, откуда $h_k\equiv 0$, что и требовалось.

2°. Из условия $M_k \supset H_k \dotplus r^2 M_{k-2}$ получаем

$$\dim H_k \leqslant N_k - N_{k-2}, \tag{22.28}$$

причем равенство равносильно разложению

$$M_k = H_k \dotplus r^2 M_{k-2}. \tag{22.29}$$

3°. Из точной последовательности (22.22) следует, что

$$\dim H_k = N_k - \dim \Delta(M_k) \geqslant N_k - N_{k-2}, \tag{22.30}$$

причем равенство равносильно сюръективности оператора

$$\Delta\colon M_k \to M_{k-2}.$$

4°. Из неравенств (22.28) и (22.30) следует, что $\dim H_k = N_k - N_{k-2}$, откуда вытекают сюръективность и разложение (22.29), из которого по предположению индукции уже следует и разложение (22.23). ■

Следствие 22.2. *Кратность собственного значения* $\lambda = k(k+n-1)$ *оператора* $-\Delta_S$ *равна* $N_k - N_{k-2}$, *где* N_k *задается формулой* (22.20).

22.5. Функция $N(t)$ для оператора $-\Delta_S$. Ясно, что

$$N(k(k+n-1)+0) = \sum_{l \leqslant k} \dim H_l = \sum_{l \leqslant k} (N_l - N_{l-2}) = N_k + N_{k-1}. \quad (22.31)$$

Но из (22.20) ясно, что N_k — многочлен степени n от k со старшим коэффициентом $\frac{1}{n!}$. Поэтому из (22.31) следует, что

$$N(k(k+n-1)+0) \sim \frac{2}{n!}\, k^n \sim \frac{2}{n!}\, [k(k+n-1)]^{n/2}. \quad (22.32)$$

Из (22.31) вытекает также, что

$$N(k(k+n-1)+0) - N(k(k+n-1)-0) = N_k - N_{k-2} = P_{n-1}(k).$$

где $P_{n-1}(k)$ — полином от k степенн $n-1$. Поэтому

$$N(k(k+n-1)+0) - N(k(k+n-1)-0) \geqslant ck^{n-1} \geqslant c[k(k+n-1)]^{\frac{n-1}{2}}, \quad (22.33)$$

где $c > 0$. Из (22.32) и (22.33) ясно, что

$$N(\lambda) = \frac{2}{n!}\lambda^{n/2}(1 + O(\lambda^{-1/2})), \quad (22.34)$$

причем добавка $O(\lambda^{-1/2})$ бывает больше, чем $c\lambda^{-1/2}$, т. е. оценка остатка неулучшаема (по крайней мере с точки зрения показателя степени).

Проверим, что (22.34) — это как раз асимптотика из теоремы 21.2 (это, в частности, даст нам и тот факт, что множитель λ из доказательства предложения 22.1 равен 1). Нужно проверить, что

$$\frac{2}{n!} = (2\pi)^{-n} V_n V_n', \quad (22.35)$$

где V_n — объем n-мерного единичного шара, V_n' — площадь S^n (риманов объем).

Ясно, что $V_n = \frac{V_{n-1}'}{n}$, откуда все сводится к тождеству

$$V_{n-1}' V_n' = \frac{2(2\pi)^n}{(n-1)!}. \quad (22.36)$$

Вычислим V'_{n-1} и докажем это соотношение. Обозначим $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$; тогда

$$I^n = \int\limits_{x_j \geqslant 0} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}dx_1\ldots dx_n$$

и, в частности,

$$I^2 = \int\limits_{x_i \geqslant 0} e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1\,dx_2 = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^\infty re^{-r^2}dr = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^\infty e^{-z}dz = \frac{\pi}{4},$$

откуда $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I^n = \dfrac{\pi^{n/2}}{2^n}$.

Теперь заметим, что

$$I^n = \frac{V'_{n-1}}{2^n}\int\limits_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}dr = \frac{V'_{n-1}}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty z^{n/2-1}e^{-z}dz = \frac{V'_{n-1}}{2^{n+1}}\,\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big),$$

откуда $V'_{n-1} = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

Как известно, интегрирование по частям дает $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ при $\alpha > 0$, откуда при $n = 2k$ получаем

$$\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) = \Gamma(k) = (k-1)! = \Big(\frac{n}{2}-1\Big)!.$$

Если же $n = 2k+1$, то

$$\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) = \Gamma\Big(k+\frac{1}{2}\Big) = \Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Big(k-\frac{3}{2}\Big)\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big),$$

но $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{V'_0} = \sqrt{\pi}$, откуда

$$\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) = \frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 2^{-\frac{n-1}{2}}(n-2)!!\,\sqrt{\pi}.$$

Пусть теперь n — четное. Тогда

$$\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) = \Big(\frac{n}{2}-1\Big)!\,2^{-n/2}(n-1)!!\,\sqrt{\pi} = \\ = 2^{-(n/2-1)}(n-2)!!\,2^{-n/2}(n-1)!!\,\sqrt{\pi} = 2\cdot 2^{-n}(n-1)!\,\sqrt{\pi},$$

откуда

$$V'_{n-1}V'_n = \frac{2\pi^{n/2}2\cdot\pi^{(n+1)/2}}{2\cdot 2^{-n}(n-1)!\,\sqrt{\pi}} = \frac{2(2\pi)^n}{(n-1)!},$$

что и требовалось. Случай нечетного n рассматривается аналогично.

Задача 22.1. Написать выражение для оператора Лапласа на плоскости Лобачевского.

Задача 22.2. Вычислить собственные значения для оператора Лапласа на n-мерном вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$ с естественной метрикой (индуцированной метрикой сферы S^n при двулистном накрытии $S^n \to \mathbb{R}P^n$).

Задача 22.3. Вычислить собственные значения оператора Лапласа на n-мерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ с естественной кэлеровой метрикой (см. Чжэнь Шэн-шэнь [1]).

ГЛАВА IV

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $\mathbb{R}^n$

§ 23. Алгебра псевдодифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$

Целью изучения ПДО в $\mathbb{R}^n$ является описание различных эффектов, связанных с поведением функций при $|x|\to+\infty$. При этом основную роль играют уже нелокальные эффекты, так что приходится отбросить требование собственности, которое почти без ущерба для общности можно было использовать в локальной теории (гл. I).

23.1. Классы символов и амплитуд.

Определение 23.1. Класс символов $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^N)$, где $m\in\mathbb{R}, 0<\rho\leqslant 1$, состоит из таких функций $a(z)\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, что выполнены оценки

$$|\partial_z^\alpha a(z)|\leqslant C_\alpha\langle z\rangle^{m-\rho|\alpha|}, \quad z\in\mathbb{R}^N. \tag{23.1}$$

Пример 23.1. Любой многочлен $a(z)$ степени m принадлежит $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^N)$.

Отметим сразу же, что если $a\in\Gamma_\rho^{m_1}(\mathbb{R}^N)$ и $b\in\Gamma_\rho^{m_2}(\mathbb{R}^N)$, то $ab\in$ $\in\Gamma_\rho^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^N)$ и $\partial_z^\alpha a\in\Gamma_\rho^{m_1-\rho|\alpha|}(\mathbb{R}^N)$. Далее, если задан линейный мономорфизм $j\colon\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^N$, $a\in\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^N)$ и $j^*a=a\circ j$, то $j^*a\in\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^l)$.

Заметим еще, что

$$\bigcap_m \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^N)=S(\mathbb{R}^N). \tag{23.2}$$

Определение 23.2. Пусть $a_j\in\Gamma_\rho^{m_j}(\mathbb{R}^N)$, $j=1, 2, \ldots, m_j\to-\infty$ при $j\to+\infty$, и пусть задана функция $a\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Будем писать, что

$$a\sim\sum_{j=1}^\infty a_j, \tag{23.3}$$

если для любого целого $r\geqslant 2$

$$a-\sum_{j=1}^{r-1} a_j\in\Gamma_\rho^{\bar{m}_r}(\mathbb{R}^N), \tag{23.4}$$

где $\bar{m}_r=\max\limits_{j\geqslant r} m_j$.

Следующие предложения являются аналогами предложений 3.5 и 3.6.

Предложение 23.1. *Пусть $a_j\in\Gamma_\rho^{m_j}(\mathbb{R}^N)$, $j=1, 2, \ldots,$ причем $m_j\to-\infty$ при $j\to+\infty$. Тогда существует такая функция a, что $a\sim\sum\limits_{j=1}^\infty a_j$. Далее, если другая функция a' обладает тем же свойством, то $a-a'\in S(\mathbb{R}^N)$.*

П р е д л о ж е н и е 23.2. *Пусть* $a_j \in \Gamma_\rho^{m_j}(\mathbb{R}^N)$, $j=1, 2, \ldots$, *причем* $m_j \to -\infty$ *при* $j \to +\infty$. *Пусть* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *и для любого мультииндекса* α *существуют такие постоянные* μ_α *и* C_α, *что*

$$|\partial_z^\alpha a(z)| \leqslant C_\alpha \langle z\rangle^{\mu_\alpha}. \tag{23.5}$$

Пусть, наконец, существуют такие числовые последовательности l_j *и* C_j, $j=1, 2, \ldots$, *что* $l_j \to -\infty$ *при* $j \to +\infty$ *и выполнены оценки*

$$\left|a(z) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j(z)\right| \leqslant C_r \langle z\rangle^{l_r}. \tag{23.6}$$

Тогда $a \sim \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$.

У п р а ж н е н и е 23.1. Доказать предложения 23.1 и 23.2.

Мы хотим теперь рассмотреть операторы вида

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{23.7}$$

где $a(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Однако, как видно из рассмотрений гл. I, полезно сразу же рассмотреть более общую формулу действия оператора

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{23.8}$$

где функция $a(x, y, \xi)$ называется *амплитудой*.

Опишем класс амплитуд, который будет нам полезен для дальнейшего.

О п р е д е л е н и е 23.3. Через $\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ будем обозначать множество функций $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$, для которых при некотором m' выполнены оценки

$$|\partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta\, \partial_y^\gamma a(x, y, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma} \langle z\rangle^{m-\rho|\alpha+\beta+\gamma|} \langle x-y\rangle^{m'+\rho|\alpha+\beta+\gamma|}, \tag{23.9}$$

где $z = (x, y, \xi) \in \mathbb{R}^{3n}$.

Ясно, что если $a \in \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$, то $\partial_z^\alpha a(z) \in \Pi^{m-\rho|\alpha|}(\mathbb{R}^{3n})$, а если есть еще $b \in \Pi_\rho^{m_1}(\mathbb{R}^{3n})$, то $ab \in \Pi_\rho^{m+m_1}(\mathbb{R}^{3n})$. Имеется включение $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{3n}) \subset \subset \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$. Поскольку $\langle z\rangle / \langle x-y\rangle \geqslant 1$, то между самими классами $\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ имеются включения

$$\Pi_{\rho'}^{m'}(\mathbb{R}^{3n}) \subset \Pi_{\rho''}^{m''}(\mathbb{R}^{3n}) \quad \text{при} \quad m' \leqslant m'', \ \rho' \geqslant \rho''.$$

Далее, если $a(x, y, \xi) \in \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$, то $a(x, x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$.

Важный пример амплитуд класса $\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ доставляет следующее

Предложение 23.3. *Пусть p — такое линейное отображение $p\colon \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n$, что линейное отображение $\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$, переводящее (x, y) в $(p(x, y), x-y)$, является изоморфизмом. Пусть $b(x, \xi)\in\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Определим амплитуду $a(x, y, \xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ формулой*

$$a(x, y, \xi)=b(p(x, y), \xi). \tag{23.10}$$

Тогда $a\in\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$.

Доказательство. Функции $|x|+|y|$ и $|p(x, y)|+|x-y|$ задают эквивалентные нормы в $\mathbb{R}^{2n}$. Поэтому для доказательства предложения остается воспользоваться легко проверяемым неравенством

$$\frac{(1+|p(x, y)|+|\xi|)^s}{(1+|p(x, y)|+|x-y|+|\xi|)^s}\leqslant C(1+|x-y|)^{|s|},\quad s\in\mathbb{R},$$

из которого оценки (23.9) следуют для $a(x, y, \xi)$ с $m'=|m|$. ■

Следствие 23.1. *Если $b\in\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$, то амплитуды $a(x, y, \xi)=b(x, \xi)$ и $a(x, y, \xi)=b(y, \xi)$ принадлежат пространству $\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$.*

23.2. Классы функций и действие оператора. Введем теперь пространство $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из таких функций $u(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что

$$|\partial^\alpha u(x)|\leqslant C_\alpha \tag{23.11}$$

для любого мультииндекса α. Наилучшие постоянные C_α в (23.11) образуют набор полунорм данной функции, определяющий в $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ структуру пространства Фреше.

Оператор A вида (23.8) удобно рассматривать в пространстве $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Чтобы дать корректное определение осциллирующего интеграла, входящего в (23.8), нужно поступить так же, как в § 1. А именно, пусть вначале $a(x, y, \xi)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$. Тогда интеграл (23.8) фактически берется по компакту и мы можем выполнить интегрирование по частям, пользуясь тождествами

$$\langle x-y\rangle^{-M}\langle D_\xi\rangle^M e^{i(x-y)\cdot\xi}=e^{i(x-y)\cdot\xi}, \tag{23.12}$$

$$\langle\xi\rangle^{-N}\langle D_y\rangle^N e^{i(x-y)\cdot\xi}=e^{i(x-y)\cdot\xi}, \tag{23.13}$$

где M, N — четные неотрицательные целые числа. Из (23.8) получается

$$Au(x)=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\langle x-y\rangle^{-M}\langle D_\xi\rangle^M\langle D_y\rangle^N\times$$
$$\times[\langle\xi\rangle^{-N}a(x, y, \xi)\,u(y)]\,dy\,đ\xi. \tag{23.14}$$

Если амплитуда $a\in\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ удовлетворяет оценкам (23.9) и $u\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, то ясно, что при $m-N<-n$, $m'+m-M<-n$ интеграл в (23.14) становится абсолютно сходящимся, причем он определяет непрерывную функцию от $x \in \mathbb{R}^n$. Увеличивая M и N, мы получим интегралы, сохраняющие сходимость и после дифференцирования по x. Поэтому определяемый формулой (23.14) оператор задает непрерывное отображение

$$A\colon C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{23.15}$$

При $m \leqslant 0$ мы получаем отображение

$$A\colon C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_b^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Это же отображение может быть определено с помощью срезающей функции $\chi(x, y, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$, $\chi(0, 0, 0) = 1$, по формуле

$$Au(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \chi(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon\xi)\, a(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi. \tag{23.16}$$

Идентичность определений (23.14) и (23.16) проверяется, как в § 1, и мы предоставляем эту проверку читателю в качестве упражнения.

В частности, оператор A определен на функциях $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что он определяет непрерывное отображение

$$A\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n). \tag{23.17}$$

В самом деле, пользуясь неравенством

$$(1 + |x|)^k \leqslant (1 + |y|)^k (1 + |x - y|)^k, \qquad k > 0,$$

мы получим из (23.14), что

$$(1 + |x|)^k |Au(x)| \leqslant C_k$$

при любом k, и аналогичная оценка верна с заменой $Au(x)$ на $\partial_x^\alpha(Au(x))$. Отсюда и следует тот факт, что $Au(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ при $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ с оценкой полунорм, обеспечивающей непрерывность отображения (23.17) (которая, впрочем, может быть выведена также из теоремы о замкнутом графике).

Наконец, заметим, что, поскольку транспонированный оператор

$${}^t\!Av(y) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi)\, v(x)\, dx\, đ\xi \tag{23.18}$$

по аналогичным причинам отображает $S(\mathbb{R}^n)$ в $S(\mathbb{R}^n)$, оператор A по двойственности продолжается до непрерывного отображения

$$A\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n).$$

Определение 23.4. Класс операторов A вида (23.8) с амплитудами $a \in \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ обозначается через $G_\rho^m(\mathbb{R}^n)$ или просто через G_ρ^m (если ясно или безразлично, какова размерность n).

Полезно описать операторы, принадлежащие пересечению $G^{-\infty}=\bigcap\limits_m G^m_\rho$. Мы покажем сейчас, что это пересечение не зависит от ρ и состоит из операторов с ядрами $K_A(x, y)\in S(\mathbb{R}^{2n})$. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $\rho<1$. Заметим, что операторы с амплитудами $a(x, y, \xi)$ и $\langle x-y\rangle^{-N}\langle D_\xi\rangle^N a(x, y, \xi)$ совпадают, откуда следует, что если $A\in G^{-\infty}$, то оператор A можно задать с помощью амплитуды $a(x, y, \xi)$, удовлетворяющей условиям (23.9) со сколь угодно малыми (сколь угодно близкими к $-\infty$) числами m и m'. Но тогда оператор A имеет ядро

$$K_A(x, y)=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x, y, \xi)\, đ\xi, \tag{23.19}$$

принадлежащее $S(\mathbb{R}^{2n})$. Отсюда следует, в частности, что A определяет непрерывное отображение

$$A\colon S'(\mathbb{R}^n)\to S(\mathbb{R}^n), \tag{23.20}$$

которое задается формулой

$$Au(x)=\langle K_A(x, \cdot), u(\cdot)\rangle. \tag{23.21}$$

В общем случае ядро $K_A(x, y)$ определено формулой

$$\langle K_A, \varphi\rangle=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x, y, \xi)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy\,đ\xi, \quad \varphi\in S(\mathbb{R}^{2n}), \tag{23.22}$$

и представляет собой обобщенную функцию $K_A\in S'(\mathbb{R}^{2n})$.

Упражнение 23.2. Обозначим через $C^\infty_t(\mathbb{R}^n)$ пространство таких функций $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что для любого мультииндекса α найдутся такие постоянные C_α и μ_α, что

$$|\partial^\alpha u(x)|\leqslant C_\alpha\langle x\rangle^{\mu_\alpha}. \tag{23.23}$$

Доказать, что оператор $A\in G^m$ определяет отображение

$$A\colon C^\infty_t(\mathbb{R}^n)\to C^\infty_t(\mathbb{R}^n). \tag{23.24}$$

Упражнение 23.3. Пусть $A\in G^m_\rho(\mathbb{R}^n)$, K_A — ядро оператора A. Доказать, что $K_A\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\backslash\Delta)$, где Δ — диагональ в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

23.3. Левый, правый и вейлевский символы.

Теорема 23.1. *Оператор $A\in G^m_\rho$ вида (23.8) может быть записан в любой из следующих трех форм*:

$$Au(x)=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_{A,l}(x, \xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi, \tag{23.25}$$

$$Au(x)=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_{A,r}(y, \xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi, \tag{23.26}$$

$$Au(x)=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_{A,w}\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big)\,u(y)\,dy\,đ\xi. \tag{23.27}$$

Здесь $\sigma_{A,\,l}$, $\sigma_{A,\,r}$ и $\sigma_{A,\,w}$ принадлежат $\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^{2n})$, однозначно определены и разлагаются в следующие асимптотические ряды:

$$\sigma_{A,\,l}(x,\,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi D^\alpha_y a(x,\,y,\,\xi)|_{y=x}, \tag{23.28}$$

$$\sigma_{A,\,r}(y,\,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi (-D_x)^\alpha a(x,\,y,\,\xi)|_{x=y}, \tag{23.29}$$

$$\sigma_{A,\,w}(x,\,\xi) \sim \sum_{\beta,\,\gamma} \frac{1}{\beta!\,\gamma!}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\beta+\gamma|}\partial^{\beta+\gamma}_\xi (-D_x)^\beta D^\gamma_y a(x,\,y,\,\xi)|_{y=x}. \tag{23.30}$$

Эта теорема позволяет ввести

Определение 23.5. Функции $\sigma_{A,l}$, $\sigma_{A,\,r}$ и $\sigma_{A,\,w}$ из формул (23.25)—(23.27) называются соответственно *левым, правым* и *вейлевским* символами оператора A.

Хотя мы и не будем использовать никаких других символов, докажем следующее обобщение теоремы 23.1, содержащее параметр $\tau \in \mathbb{R}$ и позволяющее обойтись без повторений в доказательстве теоремы 23.1.

Теорема 23.2. *Пусть дан оператор $A \in G^m_\rho$ вида* (23.8). *Тогда для любого $\tau \in \mathbb{R}$ оператор A может быть единственным образом записан в виде*

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y,\,\xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi, \tag{23.31}$$

где $b_\tau \in \Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^{2n})$. При этом b_τ разлагается в следующий асимптотический ряд:

$$b_\tau(x,\,\xi) \sim \sum_{\beta,\,\gamma} \frac{1}{\beta!\,\gamma!}\tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}\partial^{\beta+\gamma}_\xi (-D_x)^\beta D^\gamma_y a(x,\,y,\,\xi)|_{y=x}. \tag{23.32}$$

Определение 23.6. Функцию $b_\tau(x,\,\xi)$ мы будем называть *τ-символом* оператора A.

Доказательство теоремы 23.2. Полагая

$$\begin{cases} v = (1-\tau)\,x + \tau y, \\ w = x - y, \end{cases} \tag{23.33}$$

получим

$$\begin{cases} x = v + \tau w, \\ y = v - (1-\tau)\,w, \end{cases} \tag{23.34}$$

откуда

$$a(x,\,y,\,\xi) = a(v + \tau w,\,v - (1-\tau)\,w,\,\xi). \tag{23.35}$$

Разложим теперь правую часть (23.35) по формуле Тейлора при $w=0$:

$$a(x,\,y,\,\xi)=\sum_{|\beta+\gamma|\leqslant N-1}\frac{(-1)^{|\gamma|}}{\beta!\,\gamma!}\tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}(x-y)^{\beta+\gamma}(\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\,(v,\,v,\,\xi)+r_N, \tag{23.36}$$

где

$$r_N(x,\,y,\,\xi)=\sum_{|\beta+\gamma|=N}c_{\beta\gamma}(x-y)^{\beta+\gamma}\int_0^1(1-t)^{N-1}\times$$
$$\times(\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\,(v+t\tau w,\,v-t(1-\tau)\,w,\,\xi)\,dt, \tag{23.37}$$

$c_{\beta\gamma}$ — некоторые постоянные.

В формуле (23.36) выражение $(\partial_x^\beta\partial_y^\gamma a)\,(v,\,v,\,\xi)$ означает, что надо в функции $\partial_x^\beta\partial_y^\gamma a(x,\,y,\,\xi)$ вместо аргументов $x,\,y$ подставить $v=(1-\tau)\,x+\tau y$. Аналогичный смысл имеет выражение $(\partial_x^\beta\partial_y^\gamma a)\times\times(v+t\tau w,\,v-t(1-\tau)\,w,\,\xi)$ в формуле (23.37).

Заметим теперь, что оператор с амплитудой $(x-y)^{\beta+\gamma}(\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\times\times(v,\,v,\,\xi)$ совпадает с оператором, заданным с помощью амплитуды

$$(-D_\xi)^{\beta+\gamma}(\partial_x^\beta\partial_y^\gamma a)\,(v,\,v,\,\xi)=(-1)^{|\beta|+|\gamma|}(\partial_\xi^{\beta+\gamma}D_x^\beta D_y^\gamma a)\,(v,\,v,\,\xi).$$

Поэтому из (23.36) следует, что оператор A представим в виде суммы $A=A_N+R_N$, где A_N — оператор с τ-символом

$$b_N(x,\,\xi)=\sum_{|\beta+\gamma|\leqslant N-1}\frac{1}{\beta!\,\gamma!}\tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}\partial_\xi^{\beta+\gamma}(-D_x)^\beta D_y^\gamma a(x,\,y,\,\xi)|_{y=x},$$

а R_N — оператор с амплитудой $r_N(x,\,y,\,\xi)$. Отметим теперь, что R_N имеет вид линейной комбинации конечного числа слагаемых с амплитудами вида

$$\int_0^1(\partial_\xi^{\beta+\gamma}\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\,(v+t\tau w,\,v-t(1-\tau)\,w,\,\xi)\,(1-t)^{N-1}\,dt,\qquad|\beta+\gamma|=N.$$

Докажем, что эта амплитуда принадлежит классу $\Pi_\rho^{m-2N\rho}(\mathbb{R}^{3n})$. Для этого достаточно показать, что это верно для подынтегрального выражения, причем все оценки равномерны по t (заметим, что это очевидно при каждом фиксированном $t\neq0$ и верно при $t=0$ в силу предложения 23.3). Ввиду соотношений

$$v=(1-\tau)\,(v+t\tau w)+\tau(v-t(1-\tau)\,w),$$
$$tw=(v+t\tau w)-(v-t(1-\tau)\,w)$$

ясно, что

$$C^{-1} \leqslant \frac{|v + t\tau w| + |v - t(1-\tau)w|}{|v| + |tw|} \leqslant C,$$

где $C > 0$ и C не зависит от $t \in [0, 1]$. Поэтому

$$|(\partial_\xi^{\beta+\gamma} \partial_x^\beta \, \partial_y^\gamma a)\,(v + t\tau w,\, v - t(1-\tau)\, w),\, \xi| \leqslant \\ \leqslant C(1 + |v| + |tw| + |\xi|)^{m-2\rho N}(1 + |tw|)^{m'+2\rho N}.$$

Поскольку при $m' + 2\rho N \geqslant 0$ мы имеем

$$(1 + |tw|)^{m'+2\rho N} \leqslant \leqslant (1 + |v| + |tw| + |\xi|)^{m'+2\rho N}(1 + |v| + |\xi|)^{-(m'+2\rho N)},$$

то ясно, что если еще $m' + m \geqslant 0$ и $m - 2\rho N \leqslant 0$, то

$$\left|(\partial_\xi^{\beta+\gamma} \partial_x^\beta \, \partial_y^\gamma a)\,(v + t\tau w,\, v - t(1-\tau)\, w,\, \xi)\right| \leqslant \\ \leqslant C(1 + |v| + |\xi|)^{-m'-2\rho N}(1 + |v| + |tw| + |\xi|)^{m'+m} \leqslant \\ \leqslant C(1 + |v| + |\xi|)^{m-2\rho N}(1 + |w|)^{m'+m} \leqslant \\ \leqslant C(1 + |v| + |w| + |\xi|)^{m-2\rho N}(1 + |w|)^{m'+2m+2\rho N},$$

где C не зависит от t. Аналогично получаются оценки для производных.

Пусть теперь символ $b'(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ таков, что

$$b'(x, \xi) \sim \sum_{N=0}^{\infty} (b_N(x, \xi) - b_{N-1}(x, \xi)).$$

Тогда, если оператор A' имеет τ-символ $b'(x, \xi)$, то ясно, что $A - A' \in \in G^{-\infty}$, т. е. оператор $A - A'$ имеет ядро, принадлежащее пространству $S(\mathbb{R}^{2n})$.

Проверим теперь, что если оператор A имеет ядро $K_A \in S(\mathbb{R}^{2n})$, то он имеет τ-символ $b_\tau(x, \xi) \in S(\mathbb{R}^{2n})$, причем соответствие между ядрами и τ-символами взаимно однозначно. Но из формулы (23.31) ясно, что это соответствие имеет вид

$$K_A(x, y) = F^{-1}_{\xi \to x-y} b_\tau((1-\tau)\, x + \tau y,\, \xi), \tag{23.38}$$

$$b_\tau(v, \xi) = F_{w \to \xi} K_A(v + \tau w,\, v - (1-\tau)\, w) \tag{23.39}$$

(формула (23.39) получается из (23.38) с помощью замены переменных и формулы обращения Фурье). В частности, для любого $K_A \in S(\mathbb{R}^{2n})$ по формуле (23.39) можно найти $b_\tau(v, \xi) \in S(\mathbb{R}^{2n})$.

Докажем теперь единственность τ-символа в общей ситуации. Для этого заметим, что формула (23.38) верна всегда, когда оператор A задан с помощью τ-символа $b_\tau(v, \xi)$, если частичное преобразование

Фурье, входящее в эту формулу, понимать аналогично преобразованию Фурье обобщенных функций (см. § 1). При этом верна и формула обращения, приводящая после линейной замены аргументов (23.34) к (23.39). Из формулы же (23.39) единственность τ-символа очевидна в силу единственности ядра K_A. ■

Следствие 23.2. *Класс операторов G_ρ^m совпадает с классом операторов вида* (23.25) *с левым символом* $\sigma_{A,l}(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. *То же самое верно с заменой* (23.25) *на* (23.26) *или* (23.27) *и* $\sigma_{A,l}$ *на* $\sigma_{A,r}$ *или* $\sigma_{A,w}$.

23.4. Связи между различными символами. Символы транспонированного и сопряженного операторов. Выражение τ-символа через τ_1-символ в виде асимптотического ряда может быть легко получено из теоремы 23.2. В самом деле, если оператор A имеет τ_1-символ $b_{\tau_1}(x, \xi)$, то это значит, что он может быть задан с помощью амплитуды

$$a(x, y, \xi) = b_{\tau_1}((1-\tau_1)\,x + \tau_1 y, \xi).$$

Но тогда по теореме 23.2 его τ-символ имеет асимптотическое разложение

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_{\beta, \gamma} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\gamma!} \tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}(1-\tau_1)^{|\beta|}\tau_1^{|\gamma|}\partial_\xi^{\beta+\gamma} D_x^{\beta+\gamma} b_{\tau_1}(x, \xi),$$

или

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_\alpha c_\alpha \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha b_{\tau_1}(x, \xi), \tag{23.40}$$

где

$$c_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\gamma!} [\tau(1-\tau_1)]^{|\beta|}[(1-\tau)\,\tau_1]^{|\gamma|} \tag{23.41}$$

и, в частности, $c_0 = 1$. Преобразуем теперь (23.41), пользуясь формулой бинома Ньютона (лемма 3.4).

Обозначая $e = (1, 1, \ldots, 1)$, получим

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}[(1-\tau)\,\tau_1 e - \tau(1-\tau_1)e]^\alpha = \frac{1}{\alpha!}(\tau_1 - \tau)^{|\alpha|}.$$

Итак, доказана

Теорема 23.3. *Символы $b_\tau(x, \xi)$ и $b_{\tau_1}(x, \xi)$ одного и того же оператора $A \in G_\rho^m$ связаны соотношением*

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(\tau_1 - \tau)^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha b_{\tau_1}(x, \xi). \tag{23.42}$$

В частности, $b_\tau(x, \xi) - b_{\tau_1}(x, \xi) \in \Gamma_\rho^{m-2\rho}(\mathbb{R}^{2n})$.

Рассмотрим теперь транспонированный оператор ${}^tA$, определяемый формулой

$$\langle Au,\, v\rangle = \langle u,\, {}^tAv\rangle, \qquad u,\, v \in S(\mathbb{R}^n), \tag{23.43}$$

где

$$\langle u,\, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\, v(x)\, dx.$$

Из формулы

$$\langle Au,\, v\rangle = \iiint e^{i(x-y)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y,\, \xi)\, u(y)\, v(x)\, dy\, dx\, đ\xi =$$
$$= \iint e^{i(y-x)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y,\, -\xi)\, u(y)\, v(x)\, dy\, dx\, đ\xi$$

следует, что если оператор A имеет τ-символ $b_\tau(x,\, \xi)$, то оператор ${}^tA$ имеет $(1-\tau)$-символ ${}^tb_{1-\tau}(x,\, \xi)$, задаваемый формулой

$${}^tb_{1-\tau}(x,\, \xi) = b_\tau(x,\, -\xi). \tag{23.44}$$

Из теоремы 23.3 следует теперь

Теорема 23.4. *Если $A \in G^m_\rho$, то ${}^tA \in G^m_\rho$ и τ-символ ${}^tb_\tau(x,\, \xi)$ оператора ${}^tA$ выражается через τ-символ $b_\tau(x,\, \xi)$ оператора A формулой*

$${}^tb_\tau(x,\, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, (1-2\tau)^{|\alpha|} \partial^\alpha_\xi\, D^\alpha_x b_\tau(x,\, -\xi). \tag{23.45}$$

Пусть теперь A^* — сопряженный к A оператор, определенный соотношением

$$(Au,\, v) = (u,\, A^*v), \qquad u,\, v \in S(\mathbb{R}^n), \tag{23.46}$$

где

$$(u,\, v) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx. \tag{23.47}$$

Аналогично теореме 23.4 доказывается

Теорема 23.5. *Если $A \in G^m_\rho$, то $A^* \in G^m_\rho$, причем τ-символ $b^*_\tau(x,\xi)$ оператора A^* связан с $(1-\tau)$-символом $b_{1-\tau}(x,\xi)$ оператора A соотношением*

$$b^*_\tau(x,\, \xi) = \overline{b_{1-\tau}(x,\, \xi)}, \tag{23.48}$$

а через τ-символ $b_\tau(x,\, \xi)$ оператора A выражается асимптотическим рядом

$$b^*_\tau(x,\, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, (1-2\tau)^{|\alpha|} \partial^\alpha_\xi\, D^\alpha_x \overline{b_\tau(x,\, \xi)}. \tag{23.49}$$

Следствие 23.3. *Если* $A \in G_\rho^m$, *то*

$$\sigma_{A^*,w}(x,\,\xi) = \overline{\sigma_{A,\,w}(x,\,\xi)}. \tag{23.50}$$

В частности, условие $A^* = A$ *равносильно вещественности вейлевского символа* $\sigma_{A,\,w}(x,\,\xi)$.

23.5. Формула композиции.

Теорема 23.6. *Пусть* $A' \in G_\rho^{m_1}$, $A'' \in G_\rho^{m_2}$. *Тогда* $A' \cdot A'' \in G_\rho^{m_1+m_2}$, *причем если* $b'_{\tau_1}(x,\,\xi)$ — τ_1*-символ оператора* A', $b''_{\tau_2}(x,\,\xi)$ — τ_2*-символ оператора* A'', *то* τ*-символ* $b_\tau(x,\xi)$ *оператора* $A' \cdot A''$ *имеет асимптотическое разложение вида*

$$b_\tau(x,\,\xi) \sim \sum_{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta}(\partial_\xi^\alpha\, D_x^\beta b'_{\tau_1}(x,\,\xi))\,(\partial_\xi^\gamma\, D_x^\delta b''_{\tau_2}(x,\,\xi)), \tag{23.51}$$

где $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — *постоянные (зависящие от* τ, τ_1 *и* τ_2*), причем* $c_{0000} = 1$ *и сумма берется по таким наборам мультииндексов* α, β, γ, δ *что* $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

В частности, $b_\tau(x,\,\xi) - b'_{\tau_1}(x,\,\xi)\,b''_{\tau_2}(x,\,\xi) \in \Gamma_\rho^{m_1+m_2-2\rho}(\mathbb{R}^{2n})$.

Доказательство. Учитывая теорему 23.3, мы видим, что достаточно рассмотреть какой-нибудь один набор чисел τ, τ_1, τ_2. Возьмем для простоты случай $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$. Оператор A'' записывается через символ $b''_1(x,\,\xi)$ по формуле

$$A''u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} b''_1(y,\,\xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi.$$

или

$$\widehat{A''u}(\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} b''_1(y,\,\xi)\,u(y)\,dy. \tag{23.52}$$

Оператор A' имеет вид

$$A'v(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} b'_0(x,\,\xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi = \int e^{ix\cdot\xi} b'_0(x,\,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,đ\xi. \tag{23.53}$$

Из (23.52) и (23.53) находим

$$A' \circ A''u(x) = \iint e^{(x-y)\cdot\xi} b'_0(x,\,\xi)\,b''_1(y,\,\xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi, \tag{23.54}$$

т. е. оператор $A' \circ A''$ задается с помощью амплитуды

$$a(x,\,y,\,\xi) = b'_0(x,\,\xi)\,b''_1(y,\,\xi) \in \Pi_\rho^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^{3n}).$$

Отсюда $A' \circ A'' \in G_\rho^{m_1+m_2}$. Применяя теорему 23.2, мы получаем для $b_\tau(x, \xi)$

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_{\beta, \gamma} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\gamma!}\,\tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}\partial_\xi^{\beta+\gamma}[(D_x^\beta b_0'(x, \xi))\,(D_x^\gamma b_1''(y, \xi))]$$

и по формуле Лейбница (лемма 3.3)

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_{\substack{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \\ \delta+\varepsilon=\beta+\gamma}} \frac{(-1)^{|\beta|}(\beta+\gamma)!}{\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!}\tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}(\partial_\xi^\delta D_x^\beta b_0')\,(\partial_\xi^\varepsilon D_x^\gamma b_1''), \quad (23.55)$$

что и требовалось. ■

Подставляя в (23.55) выражения b_0', b_1'' через b_{τ_1}', b_{τ_2}'' мы получим для коэффициентов $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ из формулы (23.51) некоторые формулы, которые иногда удается упростить. Например, аналогично теореме 3.4 доказывается

Т е о р е м а 23.7. *В предположениях теоремы* 23.6

$$b_0(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,(\partial_\xi^\alpha b_0'(x, \xi))(D_x^\alpha b_0''(x, \xi)). \quad (23.56)$$

З а д а ч а 23.1. Доказать, что левый символ $\sigma_{A,l}(x, \xi)$ оператора $A \in G_\rho^m$ выражается через оператор A формулой

$$\sigma_{A,l}(x, \xi) = e^{-ix\cdot\xi}A(e^{ix\cdot\xi}), \quad (23.57)$$

где оператор A применяется по переменной x.

З а д а ч а 23.2. Доказать, что если $A' \in G_\rho^{m_1}$, $A'' \in G_\rho^{m_2}$, то

$$\sigma_{A'\circ A'',w}(x, \xi) \sim \sim \sum_{\alpha, \beta} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!}\,2^{-|\alpha+\beta|}(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_{A',w}(x, \xi))\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha \sigma_{A'',w}(x, \xi)). \quad (23.58)$$

З а д а ч а 23.3. Рассмотрим многочлен

$$(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n + \tau_1 D_{x_1} + \ldots + \tau_n D_{x_n})^N$$

от переменных $t, \tau \in \mathbb{R}^n$ с операторными коэффициентами (x_j рассматривается как оператор умножения на x_j) и запишем его в виде

$$\sum_{|\alpha+\beta|=N} \frac{N!}{\alpha!\,\beta!}\,t^\alpha\tau^\beta A_{\alpha\beta}.$$

Доказать, что $A_{\alpha\beta}$ — оператор с вейлевским символом $x^\alpha\xi^\beta$.

§ 24. Антивиковский символ. Теоремы об ограниченности и компактности

24.1. Определение и простейшие свойства антивиковского символа. Положим

$$\Phi_0(x) = \pi^{-n/4} \exp[-x^2/2], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{24.1}$$

Тогда $\Phi_0(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\|\Phi_0\| = 1$, где мы обозначили через $\|\cdot\|$ обычную норму в $L^2(\mathbb{R}^n)$, порожденную скалярным произведением (23.47). Обозначим через P_0 оператор ортогонального проектирования в $L^2(\mathbb{R}^n)$ на вектор Φ_0. Ясно, что ядро его имеет вид

$$K(x, y) = \pi^{-n/2} \exp[-(x^2 + y^2)/2]. \tag{24.2}$$

Вычислим вейлевский символ σ_0 оператора P_0, используя формулу (23.39) с $\tau = 1/2$, т. е.

$$\sigma_0(x, \xi) = F_{v \to \xi} K\Big(x + \frac{1}{2}v, \, x - \frac{1}{2}v\Big). \tag{24.3}$$

Учитывая, что

$$F_{v \to \xi} \pi^{-n/2} \exp(-\alpha v^2) = \Big(\frac{\pi}{\alpha}\Big)^{n/2} \exp\Big(-\frac{\xi^2}{4\alpha}\Big), \quad \alpha > 0, \tag{24.4}$$

мы получаем из (24.3), что

$$\sigma_0(x, \xi) = F_{v \to \xi} \pi^{-n/2} \exp\Big(-x^2 - \frac{v^2}{4}\Big) = 2^n \exp[-(x^2 + \xi^2)]. \tag{24.5}$$

Пусть теперь $z = (x, \xi)$, $z_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим оператор P_{z_0} с вейлевским символом $\sigma_{z_0}(z)$ вида

$$\sigma_{z_0}(z) = \sigma_0(z - z_0). \tag{24.6}$$

Легко проверить, что

$$P_{z_0} = M_{\xi_0} T_{x_0} P_0 T_{x_0}^{-1} M_{\xi_0}^{-1}, \tag{24.7}$$

где M_{ξ_0} — оператор умножения на $e^{ix \cdot \xi_0}$, T_{x_0} — оператор сдвига на x_0, в $L^2(\mathbb{R}^n)$, т. е. $T_{x_0} u(x) = u(x - x_0)$.

Полагая $U_{z_0} = M_{\xi_0} T_{x_0}$, мы видим, что оператор P_{z_0} записывается в виде

$$P_{z_0} = U_{z_0} P_0 U_{z_0}^{-1}, \tag{24.8}$$

откуда ввиду унитарности U_{z_0} ясно, что P_{z_0} является оператором ортогонального проектирования на вектор $\Phi_{z_0} = U_{z_0} \Phi_0$.

Мы хотим рассмотреть оператор, являющийся следующей линейной комбинацией операторов P_z, $z \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$A = \int a(x, \xi)\, P_{x,\xi}\, dx\, đ\xi, \tag{24.9}$$

где $a(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Для придания смысла этой формуле заметим, что непосредственно проверяется следующий факт: если $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, то $(P_{x,\xi} u)\,(x_0) \in S(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$. Благодаря этому (24.9) имеет смысл после применения к функции $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, и легко убедиться, что оператор A отображает $S(\mathbb{R}^n)$ в $S(\mathbb{R}^n)$.

Определение 24.1. Оператор A вида (24.9) называется *оператором с антивиковским символом $a(x, \xi)$.*

Удобство антивиковского символа показывает

Предложение 24.1. *Если $a(z) \geqslant 0$, то $A \geqslant 0$, т. е. $(Au, u) \geqslant 0$ при $u \in S(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Это вытекает из того, что $P_{z_0} \geqslant 0$ при любом $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$. ■

Следствие 24.1. *Если функция $a(z)$ вещественнозначна, то*

$$\|A\| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |\,a(z)\,|, \tag{24.10}$$

где

$$\|A\| = \sup_{u \in S(\mathbb{R}^n),\, u \neq 0} \|Au\| / \|u\|.$$

Доказательство. Утверждение $\|A\| \leqslant M$ равносильно для самосопряженного A неотрицательности операторов $M - A$ и $A + M$, очевидной при $M = \sup\limits_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |\,a(z)\,|$ из предложения 24.1. ■

Следствие 24.2. *Для комплекснозначной функции $a(z)$ имеет место оценка*

$$\|A\| \leqslant 2 \sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |\,a(z)\,|. \tag{24.11}$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться следствием 24.1 для $\mathrm{Re}\, a$ и $\mathrm{Im}\, a$. ■

Замечание 24.1. На самом деле оценка (24.10) верна и для комплекснозначных функций $a(z)$ (см. задачу 24.4), хотя мы не будем этого использовать.

24.2. Связь антивиковского символа с другими символами.

Теорема 24.1. *Пусть A — оператор с антивиковским символом $a(z) = a(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда $A \in G_\rho^m$ и вейлевский символ $b(z)$ оператора A выражается формулой*

$$b(z) = \pi^{-n} \int e^{-|z - z'|^2} a(z')\, dz'. \tag{24.12}$$

Далее, любой τ-символ $b_\tau(z)$ оператора A имеет асимптотическое разложение

$$b_\tau(z) \sim \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha a(z), \tag{24.13}$$

где c_α — некоторые постоянные (зависящие от τ), причем $c_0 = 1$ и $c_\alpha = 0$ при нечетном $|\alpha|$. В частности,

$$b_\tau(z) - a(z) \in \Gamma_\rho^{m-2\rho}(\mathbb{R}^{2n}). \tag{24.14}$$

Доказательство. Соотношение (24.12) очевидно из формул (24.9), (24.5) и (24.6).

Соотношение (24.13) достаточно в силу теоремы 23.3 доказывать при $\tau = 1/2$, т. е. для вейлевского символа. Разложим $a(z')$ по формуле Тейлора в точке z:

$$a(z') = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial^\alpha a(z)\right)(z'-z)^\alpha + r_N(z', z), \tag{24.15}$$

где

$$r_N(z', z) = \sum_{|\alpha|=N} c'_\alpha (z'-z)^\alpha \int_0^1 \partial^\alpha a(z + t(z'-z))\,(1-t)^{N-1}\,dt, \tag{24.16}$$

c'_α — некоторые постоянные.

Подставляя (24.15) в (24.12), мы получаем

$$b(z) = \sum_{|\alpha|<N} c_\alpha \partial^\alpha a(z) + R_N, \tag{24.17}$$

где

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!\,\pi^n} \int z^\alpha e^{-|z|^2}\,dz \tag{24.18}$$

(откуда, в частности, $c_0 = 1$ и $c_\alpha = 0$ при нечетном $|\alpha|$),

$$R_N(z) = \pi^{-n} \int e^{-|z-z'|^2} r_N(z', z)\,dz'$$

Докажем, что $R_N(z) \in \Gamma_\rho^{m-\rho N}(\mathbb{R}^{2n})$ (отсюда очевидным образом следует требуемое разложение (24.13)). Удобно записать $R_N(z)$ в виде

$$R_N(z) = \sum_{|\alpha|=N} c''_\alpha \int_0^1 dt \int dw \cdot w^\alpha e^{-|w|^2} (\partial^\alpha a)(z + tw)\,(1-t)^{N-1},$$

откуда $\partial_z^\gamma R_N(z)$ имеет вид суммы слагаемых вида

$$\int_0^1 dt \int dw \cdot w^\alpha e^{-|w|^2} (\partial^\beta a)\,(z+tw)\,(1-t)^{N-1}.$$

где $|\beta| = N + |\gamma|$. Ясно, что достаточно равномерно по $t \in [0,\,1]$ оценить выражение

$$I_{\alpha\beta}(z) = \int dw \cdot w^\alpha e^{-|w|^2} (\partial^\beta a)\,(z+tw). \tag{24.19}$$

Для оценки $I_{\alpha\beta}(z)$ разобьем интеграл в (24.19) в сумму двух интегралов:

$$I'_{\alpha\beta}(z) \ \text{– по области } |w| < |z|/2,$$
$$I''_{\alpha\beta}(z) \ \text{– по области } |w| > |z|/2.$$

Для $I'_{\alpha\beta}(z)$ имеется оценка

$$|I'_{\alpha\beta}(z)| \leqslant C_\beta \langle z\rangle^{m-\rho(N+|\gamma|)} \int \langle w\rangle^N e^{-|w|^2} dw = C'_\beta \langle z\rangle^{m-\rho(N+|\gamma|)}, \tag{24.20}$$

а $I''_{\alpha\beta}(z)$ оценивается следующим образом:

$$|I''_{\alpha\beta}(z)| \leqslant C_{\alpha\beta} \int\limits_{|w|>|z|/2} e^{-|w|^2} \langle w\rangle^{N+m} \langle z\rangle^m dw \leqslant C_k \langle z\rangle^{-k} \tag{24.21}$$

при любом k. Из (24.20) и (24.21) немедленно следует требуемая оценка для $I_{\alpha\beta}(z)$. ■

Т е о р е м а 24.2. *Пусть $A' \in G_\rho^m$. Тогда существует такой оператор $A \in G_\rho^m$, что A задается антивиковским символом*

$$a(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n}) \quad \textit{и} \quad A - A' \in G^{-\infty}, \tag{24.22}$$

т. е. оператор $A - A'$ имеет ядро $K_{A-A'}(x,\,y) \in S(\mathbb{R}^{2n})$.

З а м е ч а н и е 24.2. Не любой оператор $A \in G_\rho^m$ имеет антивиковский символ $a \in \Gamma_\rho^m$ (это видно, например, из того, что вейлевский символ $b(z)$, определяемый формулой (24.12), должен быть аналитической функцией от $z \in \mathbb{R}^{2n}$). Фактически нахождение антивиковского символа по вейлевскому требует решение обратного уравнения теплопроводности. Теорема 24.2 показывает, что если пренебречь символами из $S(\mathbb{R}^n)$, то эта процедура становится осуществимой.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 24.2. Пусть оператор A' имеет вейлевский символ $b'(x,\,\xi)$. Рассмотрим оператор A_0 с антивиковским символом $a_0(x,\,\xi) = b'(x,\,\xi)$ и положим $A'_1 = A' - A_0$. Тогда $A'_1 \in G_\rho^{m-2\rho}$ по теореме 24.1. Обозначим через A_1 оператор с антивиковским символом $a_1(x,\,\xi)$, равным вейлевскому символу оператора A_1'. Тогда имеем

$$A' = A_0 + A_1 + A_2', \qquad A_2' \in G_\rho^{m-4\rho}.$$

Продолжая, мы по индукции можем построить такую последовательность операторов A_j, $j=0,\,1,\,2,\,\ldots$, с антивиковскими символами $a_j(z) \in \Gamma_\rho^{m-2j\rho}(\mathbb{R}^{2n})$, что

$$A' - \sum_{j=0}^{N-1} A_j \in G_\rho^{m-2\rho N}. \tag{24.23}$$

Пусть символ $a(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ таков, что

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Тогда, если A — оператор с антивиковским символом $a(z)$, то из (24.23) вытекает (24.22), что и требовалось. ■

24.3. Теоремы об ограниченности и компактности.

Теорема 24.3. *Оператор $A \in G_\rho^0$ продолжается до ограниченого оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Утверждение в силу теоремы 24.2 и следствия 24.2 сводится к случаю, когда $A \in G^{-\infty}$, где оно получается из очевидной оценки

$$\|A\|^2 \leqslant \iint |K_A(x,\,y)|^2 dx\,dy, \tag{24.24}$$

вытекающей из неравенства Коши—Буняковского (см. также добавление 3). ■

Теорема 24.4. *Оператор $A \in G_\rho^m$, где $m<0$, продолжается до компактного оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что компактны операторы $A \in G^{-\infty}$, являющиеся операторами Гильберта—Шмидта (см. добавление 3).

Пусть теперь $A \in G_\rho^m$, $m<0$. Пользуясь теоремой 24.2, мы можем считать, что оператор A имеет антивиковский символ $a(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Пусть $\chi(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\chi(z)=1$ при $|z| \leqslant 1$. Положим $a_L(z) = \chi\left(\dfrac{z}{L}\right) a(z)$, и пусть A_L — оператор с антивиковским символом $a_L(z)$. Тогда $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^{2n}} |a(z) - a_L(z)| \to 0$ при $L \to +\infty$, и в силу следствия 24.2 отсюда вытекает, что $\|A - A_L\| \to 0$ при $L \to +\infty$. Но оператор A_L компактен при любом L, поскольку $A_L \in G^{-\infty}$. Отсюда следует и компактность оператора A. ■

24.4. Задачи.

Задача 24.1. Доказать теорему об ограниченности 24.3 тем же способом, что и теорему 6.1.

Задача 24.2. Доказать теорему о компактности 24.4, не используя теорию антивиковского символа.

Указание. С помощью полярного разложения оператора A проверить, что компактность A равносильна компактности A^*A; показать, что компактность A^*A равносильна компактности оператора $B_N = (A^*A)^N$, и получить последнюю при большом N из того, что $K_{B_N}(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

Задача 24.3. Рассмотрим систему векторов $\{\Phi_z\}_{z \in \mathbb{R}^{2n}}$, определенных в п. 24.1. Доказать, что отображение $I\colon f \mapsto (f, \Phi_z)$ определяет изометричное вложение $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, т. е.

$$\|f\|^2 = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} |(f, \Phi_z)|^2 dz \tag{24.25}$$

(в такой ситуации говорят, что векторы Φ_z образуют *переполненную* систему относительно меры $(2\pi)^{-n}dz$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$).

Задача 24.4. Показать, что оператор A с антивиковским символом $a(z)$ может быть записан в виде

$$A = I^* M_a I, \tag{24.26}$$

где M_a — оператор умножения на $a(z)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а оператор $I\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to$ $\to L^2(\mathbb{R}^{2n})$ введен в задаче 24.3. Вывести отсюда справедливость оценки (24.10) для комплекснозначной функции $a(z)$.

Задача 24.5. Введем *виковский символ* $c(z)$ оператора $A \in G^m_\rho$ с вейлевским символом $b(z)$ по формуле

$$c(z) = \pi^{-n} \int e^{-|z-z'|^2} b(z')\, dz'. \tag{24.27}$$

Доказать, что $c(z)$ выражается через $b(z)$ асимптотическим рядом

$$c(z) \sim \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha b(z), \tag{24.28}$$

где $c_0 = 1$ и $c_\alpha = 0$ при нечетном $|\alpha|$.

Проверить, что виковский символ $c(z)$ оператора A выражается формулой

$$c(z) = (A\Phi_z, \Phi_z). \tag{24.29}$$

Вывести из нее, что

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^{2n}} |\,c(z)\,| \leqslant \|A\|.$$

Задача 24.6. Пусть $a(z)\to 0$ при $|\,z\,|\to+\infty$. Доказать, что оператор A, определяемый формулой (24.26), компактен.

Задача 24.7. Пусть A — компактный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $c(z)$ определено формулой (24.29). Доказать, что $c(z)\to 0$ при $|\,z\,|\to+\infty$.

Задача 24.8. Пусть $A\in G^m_\rho$ при некотором $m\in\mathbb{R}$, $b(z)$ — вейлевский символ оператора A. Доказать, что ограниченность оператора A равносильна тому, что $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^{2n}} |\,b(z)\,| < +\infty$.

Указание. Использовать следствие 24.2, задачу 24.5 и конструкцию из доказательства теоремы 24.2.

Задача 24.9. Пусть A, $b(z)$ такие же, как и в предыдущей задаче. Доказать, что компактность A равносильна условию $b(z)\to 0$ при $|\,z\,|\to+\infty$.

Указание. Использовать задачи 24.6, 24.7 и конструкцию из доказательства теоремы 24.2.

Задача 24.10. Доказать, что дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ имеет антивиковский символ, являющийся многочленом по $z=(x,\,\xi)$.

Указание. В многочленах можно решать обратное уравнение теплопроводности, поскольку лапласиан Δ_z нильпотентен на многочленах данной степени; если $b(z)$ — вейлевский символ оператора A, являющийся многочленом, то его антивиковский символ имеет вид

$$a(z) = e^{-\frac{\Delta}{4}}\, b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\Delta}{4}\right)^k b(z). \tag{24.30}$$

Задача 24.11. Вычислить коэффициенты c_α в формуле (24.13) при $\tau=1/2$, т. е. при выражении вейлевского символа через антивиковский. Показать, что этот ряд может быть записан в виде

$$b(z) \sim e^{\frac{\Delta}{4}}\, a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^k a(z). \tag{24.31}$$

Указание. При вычислении коэффициентов c_α можно считать, что $a(z)$ — многочлен.

Задача 24.12. Пусть A — дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что оператор A единственным образом может быть записан в каждом из двух видов:

$$A=\sum_{\alpha,\,\beta} c_{\alpha\beta}a^{\alpha}(a^{+})^{\beta}, \tag{24.32}$$

$$A=\sum_{\alpha,\,\beta} c'_{\alpha\beta}(a^{+})^{\beta}a^{\alpha}, \tag{24.33}$$

где $a^{+}=\left(x_1-\dfrac{\partial}{\partial x_1},\,\ldots,\,x_n-\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $a=\left(x_1+\dfrac{\partial}{\partial x_1},\,\ldots,\,x_n+\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $\alpha,\,\beta$ — n-мерные мультинндексы, суммы (24.32) и (24.33) конечны и $c_{\alpha\beta}$, $c'_{\alpha\beta}$ — комплексные постоянные. Доказать, что в этом случае антивиковский символ $a(x,\,\xi)$ и виковский символ $c(x,\,\xi)$ оператора A задаются формулами

$$a(x,\,\xi)=\sum_{\alpha,\,\beta} c_{\alpha\beta}(x+i\xi)^{\alpha}(x-i\xi)^{\beta}, \tag{24.34}$$

$$c(x,\,\xi)=\sum_{\alpha,\,\beta} c'_{\alpha\beta}(x-i\xi)^{\beta}(x+i\xi)^{\alpha}. \tag{24.35}$$

§ 25. Гипоэллиптичность и параметрикс. Пространства Соболева. Фредгольмовость

25.1. Класс гипоэллиптических символов и операторов.

Определение 25.1. Будем писать, что $a(z)\in H\Gamma_{\rho}^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^N)$, если $a(z)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ и существует такое R, что при $|z|\geqslant R$ выполнены оценки

$$C|z|^{m_0}\leqslant|a(z)|\leqslant C_1|z|^{m}, \tag{25.1}$$

$$|\partial^{\alpha}a(z)|\leqslant C_{\alpha}|a(z)|\,|z|^{-\rho|\alpha|}, \tag{25.2}$$

где C, C_1, C_{α} — положительные постоянные.

В частности, отсюда следует, что $a(z)\in\Gamma_{\rho}^{m}(\mathbb{R}^N)$.

Описанный класс символов обладает свойствами, близкими к свойствам гипоэллиптических символов из § 5.

Определение 25.2. Через $HG_{\rho}^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^n)$ или $HG_{\rho}^{m,\,m_0}$ мы будем обозначать класс операторов A, задаваемых τ-символом

$$b_{\tau}\in H\Gamma_{\rho}^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Ясно, что $HG_{\rho}^{m,\,m_0}\subset G_{\rho}^{m}$.

Для оправдания определения 25.2 необходимо

Предложение 25.1. *Если при каком-то одном τ верно, что $b_{\tau}\in H\Gamma_{\rho}^{m,\,m_0}$, то это верно и при всех остальных $\tau\in\mathbb{R}$.*

Доказательство опирается на теорему 23.3 и следующую лемму, доказываемую аналогично леммам 5.1—5.3 и предложениям 5.2—5.4.

Лемма 25.1. 1) *Классы* $H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^N)$ *обладают следующими свойствами*:

а) *если* $a(z)\in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$, *то* $a^{-1}\in H\Gamma_\rho^{-m_0,-m}$ $(|z|\geqslant R)$ *и* $(\partial^\alpha a)/a\in\Gamma_\rho^{-\rho|\alpha|}$ $(|z|\geqslant R)$;

б) *если* $a\in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$, $a'\in H\Gamma_\rho^{m',m_0'}$, *то* $aa'\in H\Gamma_\rho^{m+m',m_0+m_0'}$;

в) *если* $a(z)\in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$ *и* $r\in\Gamma_\rho^{m_1}$, *где* $m_1<m_0$, *то* $a+r\in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$.

2) *Классы* $HG_\rho^{m,\,m_0}$ *обладают следующими свойствами*:

г) *если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$, $A'\in HG_\rho^{m',m_0'}$, *то* $A\circ A'\in HG_\rho^{m+m',m_0+m_0'}$;

д) *если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$, *то* ${}^tA\in HG_\rho^{m,\,m_0}$ *и* $A^*\in HG_\rho^{m,\,m_0}$;

е) *если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$ *и* $R\in G_\rho^{m_1}$, *где* $m_1<m_0$, *то* $A+R\in HG_\rho^{m,\,m_0}$.

Упражнение 25.1. Доказать лемму 25.1.

Упражнение 25.2. Доказать предложение 25.1.

25.2. Параметрикс и регулярность. Аналогично теореме 5.1 доказывается

Теорема 25.1. *Если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$, *то существует такой оператор* $B\in HG_\rho^{-m_0,-m}$, *что*

$$BA=I+R_1,\qquad AB=I+R_2, \tag{25.3}$$

где $R_j\in G^{-\infty}$, $j=1,\,2$.

Далее, если $B'\in G_\rho^{m'}$ — *другой оператор, для которого либо* $B'A-I\in G^{-\infty}$, *либо* $AB'-I\in G^{-\infty}$, *то* $B'-B\in G^{-\infty}$.

Упражнение 25.3. Доказать теорему 25.1.

Следствие 25.1. *Пусть* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$. *Тогда верны следующие утверждения*:

а) *Если* $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $Au\in S(\mathbb{R}^n)$, *то* $u\in S(\mathbb{R}^n)$.

б) *Если* $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $Au\in C_t^\infty(\mathbb{R}^n)$, *то* $u\in C_t^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Доказательство очевидным образом получается из теоремы 25.1 и результатов п. 23.2. ■

25.3. Пространства Соболева. Рассмотрим при любом $s\in\mathbb{R}$ оператор L_s, отличающийся от оператора с левым символом $b(x,\,\xi)=(1+|\xi|^2+|x|^2)^{s/2}$ на оператор из $G_1^{s'}$ с $s'<s$.

Легко видеть, что $L_s\in HG_1^{s,\,s}$.

Определение 25.3. Пространство $Q^s=Q^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких обобщенных функций $u\in S'(\mathbb{R}^n)$, что $L_su\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Аналогично теоремам 7.1 и 7.2 доказывается

Теорема 25.2. 1) *Если* $A\in G_\rho^m$, *то оператор* A *осуществляет отображение*

$$A\colon Q^s\to Q^{s-m}. \tag{25.4}$$

2) *Если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$, $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $Au\in Q^s$, *то* $u\in Q^{s+m_0}$.

Упражнение 25.4. Доказать теорему 25.2.

Поскольку класс $\bigcup\limits_m G_1^m$ содержит все дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами, то ясно, что из теоремы 25.2 вытекает

Следствие 25.2. $\bigcap\limits_s Q^s=S(\mathbb{R}^n)$, $\bigcup\limits_s Q^s=S'(\mathbb{R}^n)$.

Введем на Q^s структуру гильбертова пространства. Заметим, что мы можем считать, что L_{-s} — параметрикс оператора L_s в смысле теоремы 25.1. Тогда

$$L_{-s}L_s=I+R_s,\qquad R_s\in G^{-\infty}.$$

Пусть $p>s$, p — натуральное четное число. Положим

$$(u,\,v)_s=(L_su,\,L_sv)+\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant p}(x^\alpha D^\beta R_su,\,x^\alpha D^\beta R_sv). \tag{25.5}$$

Из представления

$$u=L_{-s}L_su-R_su \tag{25.6}$$

ясно, что формула (25.5) определяет на Q^s предгильбертову структуру. Аналогично предложению 7.5 проверяется

Предложение 25.2. *Скалярное произведение* (25.5) *определяет на* Q^s *структуру гильбертова пространства.*

Упражнение 25.5. Доказать предложение 25.2.

Наконец, аналогично рассуждениям § 7 доказываются следующие утверждения.

Предложение 25.3. *Скалярное произведение* $(u,\,v)$ *в* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *индуцирует двойственность между* Q^s *и* Q^{-s} (точная формулировка дается, как в теореме 7.7).

Предложение 25.4. *Оператор* $A\in G_\rho^m$ *продолжается до непрерывного оператора* $A\colon Q^s\to Q^{s-m}$ *и компактного оператора* $A\colon Q^s\to$ $\to Q^{s-m-\varepsilon}$ *при* $\varepsilon>0$.

Оператор вложения $Q^s\hookrightarrow Q^{s-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, *компактен при любом* $s\in\mathbb{R}$.

Упражнение 25.6. Доказать предложения 25.3 и 25.4.

25.4. Фредгольмовость. Аналогично теореме 8.1 доказывается

Предложение 25.5. *Если* $A \in HG_\rho^{m,\,m}$, *то* $A \in \mathrm{Fred}\,(Q^s,\,Q^{s-m})$ *при любом* $s \in \mathbb{R}$. *При этом* $\mathrm{Im}\,(A|_{Q^s})$ *в* Q^{s-m} *является ортогональным дополнением к* $\mathrm{Ker}\ A^*$ *относительно скалярного произведения* $(\cdot,\,\cdot)$ *в* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что

$$\mathrm{Ker}\,(A|_{Q^s}) = \mathrm{Ker}\,(A|_{S'(\mathbb{R}^n)}) = \mathrm{Ker}\,(A|_{S(\mathbb{R}^n)}) \tag{25.7}$$

для любого $A \in HG_\rho^{m,\,m_0}$.

Чтобы распространить предложение 25.5 на операторы $A \in HG_\rho^{m,\,m_0}$, (с $m_0 < m$) необходимо рассматривать A уже не как оператор из Q^s в Q^{s-m}, а как оператор в топологических векторных пространствах $S(\mathbb{R}^n)$, $S'(\mathbb{R}^n)$ и т. п. или как неограниченный оператор

$$A_{s,\,s'}\colon Q^s \to Q^{s'}, \tag{25.8}$$

где $s' \geqslant s - m_0$, с областью определения $D_{A_{s,\,s'}}$, состоящей из тех $u \in Q^s$, для которых $Au \in Q^{s'}$.

Определение 25.4. Пусть E_1, E_2 — два топологических векторных пространства, A — неограниченный оператор из E_1 в E_2 с областью определения D_A. Будем называть оператор A *фредгольмовым*, если выполнены следующие условия:

а) $\dim\,\mathrm{Ker}\ A < +\infty$;

б) $\mathrm{Im}\ A$ — замкнутое подпространство в E_2;

в) $\dim\,\mathrm{Coker}\ A < +\infty$.

Теорема 25.3. 1) *Оператор* $A \in HG_\rho^{m,\,m_0}$ *определяет фредгольмовы операторы из* $S(\mathbb{R}^n)$ *в* $S(\mathbb{R}^n)$ *и из* $S'(\mathbb{R}^n)$ *в* $S'(\mathbb{R}^n)$.

2) *Операторы* $A_{s,\,s'}$ *вида* (25.8), *определяемые оператором* A, *при* $s' \geqslant s - m_0$ *также являются фредгольмовыми.*

Замечание 25.1. В пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$ мы будем рассматривать слабую топологию. Поскольку в определении 25.4 топология участвует лишь в п. б), ясно, что фредгольмовость будет и для всех более сильных топологий.

Доказательство теоремы 25.3. Пусть двойственность между $S(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$ задана как продолжение скалярного произведения $(\cdot,\,\cdot)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что из теоремы 25.1 следует конечномерность $\mathrm{Ker}\ A$ и $\mathrm{Ker}\ A^*$, так как благодаря включению

$$\mathrm{Ker}\ A \subset \mathrm{Ker}\ BA \subset \mathrm{Ker}\,(I + R_1)$$

дело сводится к случаю $A = I + R_1$, в котором все очевидно. Теперь напишем включение

$$A(S'(\mathbb{R}^n)) \supset AB(S'(\mathbb{R}^n)) = (I + R_2)\,(S'(\mathbb{R}^n)).$$

Для оператора $I+R_2$ фредгольмовость на $S'(\mathbb{R}^n)$ вытекает из предложения 25.5. Поэтому подпространство $A(S'(\mathbb{R}^n))$ замкнуто в $S'(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{codim} A(S'(\mathbb{R}^n)) < +\infty$, что доказывает фредгольмовость A в $(S'(\mathbb{R}^n))$.

Докажем фредгольмовость A в $S(\mathbb{R}^n)$. Необходимо лишь проверить условия б) и в) определения 25.4. Мы покажем, что

$$A(S(\mathbb{R}^n)) = \{u\colon u \in S(\mathbb{R}^n),\ u \perp \operatorname{Ker} A^*\}, \tag{25.9}$$

где ортогональность понимается в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Заметим вначале, что

$$A(S'(\mathbb{R}^n)) = \{u\colon u \in S'(\mathbb{R}^n),\ u \perp \operatorname{Ker} A^*\}, \tag{25.10}$$

поскольку $A(S'(\mathbb{R}^n))$ замкнуто в $S'(\mathbb{R}^n)$, а $S(\mathbb{R}^n)$ — дуальное пространство к $S'(\mathbb{R}^n)$. Но теперь (25.9) вытекает из (25.10), потому что

$$A(S(\mathbb{R}^n)) = A(S'(\mathbb{R}^n)) \cap S(\mathbb{R}^n)$$

в силу следствия 25.1. Соотношение (25.9) доказывает фредгольмовость A в $S(\mathbb{R}^n)$.

Проверим, наконец, фредгольмовость оператора $A_{s,\,s'}$ при $s \geqslant s - m_0$. Опять-таки остается проверить лишь, что

$$\operatorname{Im} A_{s,\,s'} = \{u\colon u \in Q^{s'},\ u \perp \operatorname{Ker} A^*\}. \tag{25.11}$$

Пусть $u \in Q^{s'}$, $u \in (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$. Тогда $u = Av$, где $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ в силу уже доказанного соотношения (25.10). Но из следствия 25.1 мы получаем тогда, что $v \in Q^{s'+m_0}$, значит, $v \in Q^s$, поскольку $s \leqslant s' + m_0$. Это доказывает (25.11). ■

Аналогично теореме 8.2 доказывается

Т е о р е м а 25.4. *Пусть* $A \in HG_\rho^{m,\,m_0}$ *и* $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^* = \{0\}$. *Тогда существует оператор* $A^{-1} = HG_\rho^{-m_0,\,-m}$, *обратный к оператору* A.

У п р а ж н е н и е 25.7. Доказать теорему 25.4.

З а д а ч а 25.1. Доказать фредгольмовость оператора $A \in HG_\rho^{m,\,m_0}$ в пространствах $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $C_t^\infty(\mathbb{R}^n)$.

З а д а ч а 25.2. Доказать, что если дифференциальный оператор A с полиномиальными коэффициентами имеет τ-символ $a(z)$, эллиптический по $z = (x,\,\xi)$, то символ его параметрикса B допускает асимтотическое разложение по функциям, однородным по z при $|z| \geqslant 1$.

§ 26. Существенная самосопряженность. Дискретность спектра

26.1. Симметрические и самосопряженные операторы. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, и пусть дан, вообще говоря, неограниченный линейный оператор

$$A\colon H_1 \to H_2. \tag{26.1}$$

Как обычно, через D_A обозначается область определения оператора A (подразумевается, что она задана вместе с оператором A, представляющим собой линейное отображение линейного многообразия D_A в H_2; отметим, что запись (26.1) не означает, что оператор A определен всюду на H_1). *Сопряженный оператор*

$$A^*\colon H_2 \to H_1. \tag{26.2}$$

мы считаем определенным, если D_A плотно в H_1, и в этом случае D_{A^*} состоит из тех $v \in H_2$, для которых существует такой вектор $g \in H_1$, что

$$(Au, v) = (u, g), \quad u \in D_A \tag{26.3}$$

(в левой части (26.3) стоит скалярное произведение в H_2, а в правой — в H_1). При этом ясно, что вектор g однозначно определен и по определению $A^*v = g$. В частности, имеет место тождество

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad u \in D_A,\ v \in D_{A^*}. \tag{26.4}$$

Определение 26.1. Пусть H — гильбертово пространство. Оператор $A\colon H \to H$ называется *симметрическим*, если

$$(Au, v) = (u, Av), \quad u, v \in D_A. \tag{26.5}$$

Определение 26.2. Оператор $A\colon H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$.

Ясно, что самосопряженный оператор является симметрическим. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 26.3. Оператор $A\colon H_1 \to H_2$ называется *замкнутым*, если график G_A, состоящий из пар $\{u, Au\}$, где $u \in D_A$, представляет собой замкнутое подпространство в $H_1 \oplus H_2$.

Упражнение 26.1. Доказать, что если оператор A^* определен, то он замкнут.

Упражнение 26.2. Пусть оператор A ограничен, т. е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Au\| \leqslant C\|u\|$, $u \in D_A$. Доказать, что A замкнут тогда и только тогда, когда D_A — замкнутое подпространство в H_1.

Известная теорема о замкнутом графике (см. Рудин [1]) утверждает, что если $D_A = H_1$ и оператор A замкнут, то A ограничен. Разумеется, то же самое верно, если D_A — замкнутое подпространство в H_1.

Пусть дан оператор $A\colon H_1 \to H_2$. Будем говорить, что A допускает *замыкание* $\bar{A}$, если замыкание $\bar{G}_A$ графика G_A оператора A снова является графиком некоторого (уже замкнутого) оператора, который и обозначается $\bar{A}$. В частности, замыкание допускают любые симметрические операторы $A\colon H \to H$ с плотной областью определения D_A. В самом деле, достаточно проверить, что если u_n — такая последовательность векторов из D_A, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n = f$, то $f = 0$. Но при $v \in D_A$ мы получаем

$$(f,\, v) = \lim_{n\to\infty} (Au_n,\, v) = \lim_{n\to\infty} (u_n,\, Av) = 0,$$

откуда $f = 0$. Отметим, что если A — симметрический оператор, то оператор $\bar{A}$ также является симметрическим.

Определение 26.4. Оператор $A\colon H \to H$ называется *существенно самосопряженным*, если он имеет плотную в H область определения и $\bar{A} = A^*$.

В частности, оператор A^* является расширением A, и, значит, A — симметрический оператор.

Критерий существенной самосопряженности дает

Теорема 26.1. *Симметрический оператор $A\colon H \to H$ с плотной областью определения является существенно самосопряженным тогда и только тогда, когда справедливы включения*

$$\operatorname{Ker}(A^* - iI) \subset D_{\bar{A}}, \tag{26.6}$$

$$\operatorname{Ker}(A^* + iI) \subset D_{\bar{A}}. \tag{26.6$'$}$$

Доказательство. 1. Необходимость условий (26.6) и (26.6$'$) очевидна. Для проверки их достаточности заметим прежде всего, что поскольку оператор A^* является расширением A, то из условия (26.6) следует, что $\operatorname{Ker}(A^* - iI) = \operatorname{Ker}(\bar{A} - iI)$. Но $\operatorname{Ker}(\bar{A} - iI) = 0$ ввиду симметричности $\bar{A}$. Поэтому из условия (26.6) вытекает, что

$$\operatorname{Ker}(A^* - iI) = 0. \tag{26.7}$$

Аналогично из (26.6$'$) находим, что

$$\operatorname{Ker}(A^* + iI) = 0. \tag{26.7$'$}$$

2. Проверим, что оператор $(\bar{A} - iI)^{-1}$ (определенный на $(A - iI)(H)$) ограничен. Имеем

$$\|(\bar{A} - iI)f\|^2 = ((\bar{A} - iI)f,\ (\bar{A} - iI)\, f) = \|\bar{A}f\|^2 + \|f\|^2, \tag{26.8}$$

поскольку $(\bar{A}f,\, f)$ — вещественное число ввиду симметричности оператора $\bar{A}$. Из (26.8) следует, что $\|f\|^2 \leqslant \|\bar{A} - iI)f\|^2$, т. е.

$$\|(\bar{A} - iI)^{-1}g \leqslant \|g\|, \quad g \in (\bar{A} - iI)\,(H).$$

3. Ясно, что оператор $\bar{A} - iI$ замкнут. Поэтому замкнут и оператор $(\bar{A} - iI)^{-1}$, а поскольку оператор $(\bar{A} - iI)^{-1}$ ограничен, то его область

определения $(\bar{A}-iI)(H)$ замкнута в H. Но ортогональное дополнение к $(\bar{A}-iI)(H)$ равно, очевидно, $\operatorname{Ker}(\bar{A}-iI)^* = \operatorname{Ker}(A^*+iI)=0$. Поэтому оператор $(\bar{A}-iI)^{-1}$ всюду определен. По аналогичной причине всюду определен и оператор $(\bar{A}+iI)^{-1}$.

4. Проверим, что операторы $(\bar{A}-iI)^{-1}$ и $(\bar{A}+iI)^{-1}$ сопряжены друг к другу. Имеем, очевидно,

$$((\bar{A}-iI)\,u,\,v)=(u,\,(\bar{A}+iI)\,v),\qquad u,\,v\in D_{\bar{A}}.$$

Обозначая $(\bar{A}-iI)\,u=f$ и $(\bar{A}+iI)\,v=g$, мы получим требуемое соотношение

$$(f,\,(\bar{A}+iI)^{-1}g)=((\bar{A}-iI)^{-1}f,\,g),\qquad f,\,g\in H.$$

5. Проверим, наконец, что $\bar{A}=A^*$. Будем использовать следующий легко проверяемый факт: если B — такой оператор в H, что определены $(B^{-1})^*$ и $(B^*)^{-1}$, то $(B^{-1})^*=(B^*)^{-1}$. Имеем:

$$\begin{aligned} A^*=\bar{A}^*=(\bar{A}+iI)^*+iI=\{[(\bar{A}+iI)^{-1}]^{-1}\}+iI=\\ =\{[(\bar{A}+iI)^{-1}]^*\}^{-1}+iI=[(\bar{A}-iI)^{-1}]^{-1}+iI=\bar{A}-iI+iI=\bar{A},\end{aligned}$$

что и требовалось. ■

26.2. Существенная самосопряженность симметрических гипоэллиптических операторов. В этом пункте через A^+ мы будем обозначать оператор, формально сопряженный к оператору $A\in G_\rho^m$, т. е. такой оператор $A^+\in G_\rho^m$, что

$$(Au,\,v)=(u,\,A^+v),\qquad u,\,v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

В предыдущих параграфах вместо A^+ мы писали A^*, но здесь обозначение A^* зарезервировано для сопряженного оператора в смысле п. 26.1.

Т е о р е м а 26.2. *Пусть $A\in HG_\rho^{m,m_0}$, где $m_0>0$, и $A^+=A$. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R}^n)$ неограниченный оператор A_0, определяемый как оператор A на области определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор A_0 существенно самосопряжен и его замыкание совпадает с сужением оператора A (определенного на $S'(\mathbb{R}^n)$) на множество*

$$D_{\bar{A}_0}=\{u\colon u\in L^2(\mathbb{R}^n),\ Au\in L^2(\mathbb{R}^n)\}.\tag{26.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Обозначим временно через D правую часть соотношения (26.9). Поскольку верно тождество

$$(Au,\,v)=(u,\,Av),\qquad u\in S(\mathbb{R}^n),\qquad v\in S'(\mathbb{R}^n),\tag{26.10}$$

то ясно, что $D \subset D_{A_0^*}$ и, кроме того,

$$A|_D = A_0^*|_D.$$

Проверим, что на самом деле $D = D_{A_0^*}$. Пусть $v \in D_{A_0^*}$, т. е. $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и при некотором $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ верно тождество

$$(Au,\, v) = (u,\, f), \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{26.11}$$

Но из (26.10) следует, что то же тождество верно с заменой f на Av. Поэтому $f = Av$, т. е. $v \in D$, что и требовалось. Итак, мы доказали, что правая часть (26.9) равна $D_{A_0^*}$.

2. Для того чтобы применить теперь теорему 26.1, проверим включение

$$\mathrm{Ker}\,(A_0^* - iI) \subset D_{\bar{A}_0}. \tag{26.12}$$

Из уже доказанного ясно, что

$$\mathrm{Ker}\,(A_0^* - iI) = \{u\colon u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ (A - iI)\,u = 0\}.$$

Но ввиду того, что $A - iI \in HG_\rho^{m,\,m_0}$, из следствия 25.1 вытекает, что $\mathrm{Ker}\,(A_0^* - iI) \subset S(\mathbb{R}^n)$, откуда и следует (26.12), поскольку оператор A непрерывно отображает $S(\mathbb{R}^n)$ в $S(\mathbb{R}^n)$, а $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $S(\mathbb{R}^n)$. Аналогично доказываемое включение $\mathrm{Ker}\,(A_0^* + iI) \subset D_{\bar{A}_0}$ завершает доказательство теоремы 26.2. ■

26.3. Дискретность спектра.

Теорема 26.3. *Пусть $A \in HG_\rho^{m,\,m_0}$, где $m_0 > 0$, причем $A^+ = A$. Тогда оператор A имеет дискретный спектр в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$, точнее, существует ортонормированный базис из собственных функций $\varphi_j(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots$, с собственными значениями $\lambda_j \in \mathbb{R}$, причем $|\lambda_j| \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Спектр $\sigma(A)$ оператора $\bar{A}_0 = A_0^*$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ совпадает с множеством всех собственных значений $\{\lambda_j\}$.*

Доказательство. Мы будем действовать аналогично доказательству теоремы 8.3. В силу сепарабельности пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$ существует число $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\sigma(A)$. Но тогда из теоремы 25.4 следует, что $(A - \lambda_0 I)^{-1} \in HG_\rho^{-m_0,-m}$ и, в частности, $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ — компактный самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют доказательство теоремы 8.3. ■

Задача 26.1. Пусть оператор $A \in G_\rho^m$ таков, что существуют такие числа $\lambda_\pm \in \mathbb{C}$, что $\mathrm{Im}\,\lambda_+ > 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda_- < 0$,

$$(A - \lambda_+ I) \in HG_\rho^{m,\,m_0} \quad \text{и} \quad (A - \lambda_- I) \in HG_\rho^{m,\,m_0}$$

при некотором $m_0 \in \mathbb{R}$. Доказать, что если $A^+ = A$, то оператор существенно самосопряжен.

Задача 26.2. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, и пусть даны два таких оператора $A\colon H_1 \to H_2$ и $A^+\colon H_2 \to H_1$, что

$$(Au, v) = (u, A^+v), \quad u \in D_A, \ v \in D_{A^+}.$$

Доказать, что если оператор A^+A существенно самосопряжен, то $\overline{A^+} = A^*$ и $\bar{A} = (A^+)^*$.

Указание. Рассмотрим в пространстве $H_1 \oplus H_2$ оператор, определяемый матрицей

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда условия $\overline{A^+} = A^*$ и $\bar{A} = (A^+)^*$ равносильны его существенной самосопряженности. Вычислить $\operatorname{Ker}(\mathfrak{A} \pm iI)$.

Задача 26.3. Пусть $A \in HG_\rho^{m, m_0}$, $m_0 > 0$. Обозначим через A_0^+ оператор A^+, суженный на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что $\overline{A_0^+} = A_0^*$ и $\bar{A}_0 = (A_0^+)^*$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 26.2, предварительно продолжив операторы A_0 и A_0^+ на $S(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 26.1. Результат задачи 26.3 означает, что имеет место «совпадение сильного и слабого расширений» оператора $A \in HG_\rho^{m, m_0}$ при $m_0 > 0$: если $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то существует такая последовательность $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $u_j \to u$ и $Au_j \to Au$ при $j \to +\infty$ по норме пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Задача 26.4. Доказать для операторов $A \in HG_\rho^{m, m_0}$, $m_0 > 0$, аналог теоремы 8.4 об устройстве спектра, собственных и присоединенных функций.

Задача 26.5. Пусть оператор A имеет антививиковский символ $a(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ и оператор $\bar{A}_0$ самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $a(z) \to +\infty$ при $|z| \to \infty$. Доказать, что A_0 имеет дискретный спектр в смысле теоремы 26.3 и, более того, $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$.

Задача 26.6. Пусть оператор $A \in G_\rho^m$ таков, что оператор A_0 самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и имеет дискретный спектр, причем $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Пусть $c(z)$ — виковский символ оператора A. Доказать, что $c(z) \to +\infty$ при $|z| \to +\infty$.

§ 27. След и ядерная норма

27.1. Выражение следа и нормы Гильберта—Шмидта через символ. Мы будем использовать здесь обозначения и факты, касающиеся операторов Гильберта—Шмидта и ядерных операторов и изложенные в добавлении 3.

Приведем вначале формальное выражение следа через τ-символ. Пусть $A \in G_\rho^m$, $b_\tau(x, \xi)$ — τ-символ оператора A, K_A — его ядро. Формально имеем

$$K_A(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)x + \tau y, \xi)\, đ\xi, \tag{27.1}$$

откуда

$$K_A(x, x) = \int b_\tau(x, \xi)\, đ\xi$$

и

$$\mathrm{Sp}\, A = \int b_\tau(x, \xi)\, dx\, đ\xi. \tag{27.2}$$

Отметим, что, в частности, формула (27.2) означает, что правая ее часть не зависит от τ.

Проведем теперь формальное вычисление нормы Гильберта—Шмидта, основанное на предложении Д3.2 и формуле (27.1). Имеем

$$\|A\|_2^2 = \int |K_A(x, y)|^2 dx\, dy = \int |K_A(x, x+z)|^2 dx\, dz. \tag{27.3}$$

Но

$$K_A(x, x+z) = \int e^{-iz\cdot\xi} b_\tau(x + \tau z, \xi)\, đ\xi. \tag{27.4}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int |K_A(x, x+z)|^2 dx\, dz &= \int K_A(x, x+z)\, \overline{K_A(x, x+z)}\, dx\, dz = \\ &= \int e^{iz\cdot(\eta-\xi)} b_\tau(x+\tau z, \xi)\, \overline{b_\tau(x+\tau z, \eta)}\, đ\xi\, đ\eta\, dx\, dz = \\ &= \int e^{iz\cdot(\eta-\xi)} b_\tau(x, \xi)\, \overline{b_\tau(x, \eta)}\, đ\xi\, đ\eta\, dx\, dz = \\ &= \int \left| \int e^{-iz\cdot\xi} b_\tau(x, \xi)\, đ\xi \right|^2 dx\, dz = \int |b_\tau(x, \xi)|^2\, đ\xi\, dx \end{aligned} \tag{27.5}$$

(мы использовали здесь инвариантность интеграла относительно сдвигов и равенство Парсеваля для преобразования Фурье). Окончательно получаем

$$\|A\|_2^2 = \int |b_\tau(x, \xi)|^2 dx\, đ\xi, \tag{27.6}$$

где правая часть опять-таки не зависит от τ. Теперь мы легко сможем доказать

П р е д л о ж е н и е 27.1. *Соответствие между операторами $A \in G^{-\infty}$ и τ-символами $b_\tau \in S(\mathbb{R}^{2n})$ продолжается по непрерывности до* *изометрии* $S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$ *и* $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, *причем так, что выполнена формула* (27.6). *При этом, если* $A\in G_\rho^m$, *то условие* $A\in S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$ *равносильно тому, что при некотором* τ *будет* $b_\tau\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, *и тогда это включение верно при всех* τ, *причем справедлива формула* (27.6).

Доказательство. Выкладки (27.3)—(27.6) законны при $A\in G^{-\infty}$ или, что то же самое, при $K_A\in S(\mathbb{R}^{2n})$. Поскольку $G^{-\infty}$ плотно в $S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$, а $S(\mathbb{R}^{2n})$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, очевидны существование и единственность требуемой изометрии. Наконец, последнее утверждение очевидно из единственности τ-символа. ■

Следствие 27.1. *Если* $A\in G_\rho^m$ *и* $m<-n$, *то* $A\in S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Предложение 27.2. 1) *Если* $A\in G_\rho^m$ *и* $m<-2n$, *то* $A\in S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ *и для любых фиксированных* $m<-2n$ *и* $\tau\in\mathbb{R}$ *существуют такие постоянные* C *и* N, *что верна оценка*

$$\|A\|_1\leqslant C\sum_{|\gamma|\leqslant N}\sup_z\{|\,\partial_z^\gamma b_\tau(z)\,|\,\langle z\rangle^{-m+\rho|\gamma|}\}. \tag{27.7}$$

2) *При* $A\in G_\rho^m$, $m<-2n$, *для следа* $\operatorname{Sp} A$ *при любом* $\tau\in\mathbb{R}$ *верна формула* (27.2).

Доказательство. 1) Выберем какой-нибудь оператор $P\in HG_\rho^{m/2,\,m/2}$, для которого $\operatorname{Ker} P=\operatorname{Ker} P^*=0$, так что существует оператор $P^{-1}\in HG_\rho^{-m/2,\,-m/2}$ (существование оператора P указанного вида следует, например, из теоремы 26.3). В силу следствия 27.1 мы имеем $P^2\in S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$. Но из очевидного представления $A=P^2(P^{-2}A)$ ввиду включения $P^{-2}A\in G_\rho^0\subset\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ вытекает, что $A\in S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$. Таким образом, доказано включение

$$G_\rho^m\subset S_1(L^2(\mathbb{R}^n)),\qquad m<-2n. \tag{27.8}$$

Докажем теперь оценку (27.7). Она может быть получена двумя способами: непосредственным уточнением проведенных рассуждений (из аналогичных оценок в формуле композиции и в теореме об ограниченности) или из теоремы о замкнутом графике. Последний путь короче и является общим местом многих рассуждений такого типа, хотя и более груб. Проведем аккуратно соответствующие рассуждения.

Введем в пространстве G_ρ^m топологию пространства Фреше, определяемую полунормами вида

$$\|A\|_{(N)}=\sum_{|\gamma|\leqslant N}\sup_z\{|\,\partial_z^\gamma b_\tau(z)\,|\,\langle z\rangle^{-m+\rho|\gamma|}\}. \tag{27.9}$$

Нам нужно доказать, что если в $S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ рассматривать естественную банахову топологию, то вложение (27.8) непрерывно. Для этого в силу теоремы о замкнутом графике (см., например, Рудин [1]) достаточно показать, что это вложение имеет замкнутый график. Последнее удобнее всего доказывать, построив такое хаусдорфово пространство M, что

$$G_\rho^m \subset S_1(L^2(\mathbb{R}^n)) \subset M \tag{27.10}$$

и оба вложения $G_\rho^m \subset M$ и $S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ непрерывны. Но в качестве M можно взять, например, $S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$, поскольку непрерывность вложений G_ρ^m и $S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ в $S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$ следует из предложений 27.1 (формула (27.6) и Д3.7 (оценка (Д3.29)).

2) Докажем теперь формулу (27.2) при $A \in G_\rho^m$, $m < -2n$. Заметим, что обе ее части непрерывны на G_ρ^m. Но при любом $m' > m$ пространство $G^{-\infty}$ плотно в G_ρ^m по топологии $G_\rho^{m'}$. Поэтому формулу (27.2) достаточно доказать при $A \in G^{-\infty}$.

Мы хотим провести аккуратно рассуждения из п. Д3.5. Это банально делается, если представить оператор A в виде $A = L_1 L_2$ где операторы L_1 и L_2 имеют ядра, имеющих достаточно большое число непрерывных и быстро убывающих производных. Но последнее представление строится аналогично рассуждениям из п. 1) этого доказательства. ■

27.2. Более точная оценка ядерной нормы через $\boldsymbol{\tau}$-символ. Оценка (27.7) неудобна тем, что содержит растущий по z вес. В то же время $\|A\|_1$ не меняется при сдвиге τ-символа на некоторый вектор $z_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. В самом деле, если $b_\tau(x, \xi)$ — τ-символ оператора A, а через A_{z_0} обозначен оператор с τ-символом $b_\tau(x - x_0, \xi - \xi_0)$, то мы имеем

$$\begin{aligned}
A_{z_0} u(x) &= \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y - x_0,\, \xi - \xi_0)\, u(y)\, dy\, đ\xi = \\
&= \int e^{i[(x-x_0)-(y-x_0)]\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,(x-x_0) + \\
&\qquad + \tau(y - x_0),\, \xi - \xi_0)\, u((y-x_0)+x_0)\, dy\, đ\xi = \\
&= \int e^{i\xi_0\cdot(x'-y')} e^{i(x'-y')\cdot\xi'} b_\tau((1-\tau)\,x' + \tau y',\, \xi')\, u(y'+x_0)\, dy'\, đ\xi',
\end{aligned}$$

где $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $\xi' = \xi - \xi_0$. Обозначая через U унитарный оператор, переводящий $u(x)$ в $(Uu)\,(x) = e^{-i\xi_0\cdot x} u(x + x_0)$, мы видим, что $A_{z_0} = U^{-1} A U$, откуда

$$\|A_{z_0}\|_1 = \|A\|_1. \tag{27.11}$$

Оценку ядерной нормы, инвариантную относительно сдвига τ-символа, дает следующее

П р е д л о ж е н и е 27.3. *Существуют такие постоянные C и N, что при $A \in G^m_\rho$, $m < -2n$, выполнена оценка*

$$\|A\|_1 \leqslant C \sum_{|\gamma| \leqslant N} \int |\partial^\gamma_z b_\tau(z)|\, dz. \tag{27.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать оценку (27.12) в случае, когда $b_\tau(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Пусть вначале

$$\operatorname{supp} b_\tau \subset \{z\colon |z| \leqslant R_0\}, \tag{27.13}$$

где R_0 — некоторая фиксированная постоянная. Тогда из предложения 27.2 следует, что существуют такие постоянные C_1 и M (зависящие от R_0), что

$$\|A\|_1 \leqslant C_1 \sum_{|\gamma| \leqslant N} \sup_z |\partial^\gamma_z b_\tau(z)|. \tag{27.14}$$

Но поскольку при $b(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$b(z) = \int\limits_{\substack{t_j \leqslant z_j \\ j=1,\dots,2n}} \frac{\partial^{2n} b}{\partial z_1 \dots \partial z_{2n}}\,(t_1, \dots, t_{2n})\, dt_1 \dots dt_{2n}$$

и, следовательно,

$$\sup_z |b(z)| \leqslant \int \left| \frac{\partial^{2n} b(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_{2n}} \right| dz,$$

то из оценки (27.14) следует оценка (27.12) (с $N = M + 2n$) при условии, что выполнено (27.13).

Теперь, пользуясь инвариантностью ядерной нормы (формула (27.11)) и инвариантностью правой части (27.12) относительно сдвигов $b_\tau(z)$ по z, мы видим, что оценка (27.12) верна всегда и с одними и теми же C и N, если только выполнено условие

$$\operatorname{diam} \operatorname{supp} b_\tau \leqslant R_0. \tag{27.15}$$

Избавимся, наконец, от условия (27.15). Сделаем такое раэбиение единицы $1 \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)$, что $\operatorname{diam} \operatorname{supp} \varphi_j \leqslant R_0$, существует такое число l, что любой шар радиуса 1 пересекается не более чем с l множествами $\operatorname{supp} \varphi_j$, и, кроме того, $|\partial^\gamma \varphi_j(z)| \leqslant C_\gamma$, $j = 1, 2, \dots$, где постоянные C_γ

не зависят от j. Вводя оператор A_j с τ-символом $\varphi_j(z)b_\tau(z)$, мы получим

$$\|A\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_1 \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|\leqslant N} \int |\partial_z^\gamma(\varphi_j b_\tau)(z)|\, dz \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{|\gamma|\leqslant N} \int |\partial_z^\gamma b_\tau(z)|\, dz,$$

что и требовалось. ■

Задача 27.1. Пусть оператор A задан антивиковским символом $a(z) \in \Gamma_\rho^m$. Доказать, что

$$\|A\|_1 \leqslant \int |a(x, \xi)|\, dx\, đ\xi.$$

Задача 27.2. Пусть $c(z)$ — виковский символ оператора $A \in G_\rho^m$. Доказать, что

$$\int |c(x, \xi)|\, dx\, đ\xi \leqslant \|A\|_1.$$

Указание. Использовать полярное разложение A и результат задачи 24.5.

Задача 27.3. Пусть оператор A имеет антивиковский символ $a(z) \in \Gamma_\rho^m$, $m < -2n$. Доказать, что

$$\operatorname{Sp} A = \int a(x, \xi)\, dx\, đ\xi.$$

Задача 27.4. Пусть $A \in G_\rho^m$, $m < -2n$, $c(z)$ — виковский символ оператора A. Доказать, что

$$\operatorname{Sp} A = \int c(x, \xi)\, dx\, đ\xi.$$

Задача 27.5. Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, $A \in L_{\rho,\delta}^m(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. Доказать, что если $m < -n/2$, то $A \in S_2(L^2(M))$, а если $m < -n$, то $A \in S_1(L^2(M))$.

§ 28. Приближенный спектральный проектор

28.1. Лемма Глазмана. В этом параграфе мы опишем абстрактную схему еще одного метода получения асимптотики собственных значений, основанную на построении приближенного спектрального проектора. В основе этого метода лежит следующая известная вариационная лемма Глазмана.

Лемма 28.1. *Пусть A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в гильбертовом пространстве H с дискретным спектром, т. е. A имеет ортонормированный базис из собственных векторов $e_1, e_2, \ldots$ с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, причем $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.*

Пусть $N(\lambda)$ — количество собственных значений оператора A, не превосходящих λ (с учетом кратности).

Тогда

$$N(\lambda) = \sup_{\substack{L \subset D_A \\ (Au,u) \leqslant \lambda(u,u),\, u \in L}} \dim L \tag{28.1}$$

(L — линейное подмногообразие в D_A).

Доказательство. Пусть E_λ — спектральный проектор оператора A. Поскольку

$$\dim (E_\lambda H) = \mathrm{Sp}\ E_\lambda = N(\lambda), \tag{28.2}$$

то, полагая $L = E_\lambda H$, мы видим, что правая часть в (28.1) не меньше, чем левая.

Докажем теперь, что правая часть в (28.1) не больше, чем левая. Пусть линейное многообразие $L \subset D_A$ таково, что

$$(Au,\, u) \leqslant \lambda(u,\, u), \quad u \in L. \tag{28.3}$$

Поскольку

$$(Au,\, u) > \lambda(u,\, u), \quad u \in (I - E_\lambda)\, H \backslash 0, \tag{28.4}$$

то из (28.3) следует, что

$$L \cap (I - E_\lambda)\, H = 0.$$

Но тогда оператор E_λ мономорфно отображает L в $E_\lambda H$, откуда

$$\dim L \leqslant N(\lambda),$$

что и требовалось. ■

28.2. Свойства спектральных проекторов. Спектральные проекторы E_λ обладают следующими свойствами:

1) $E_\lambda^* = E_\lambda$;
2) $E_\lambda^2 = E_\lambda$;
3) $E_\lambda(A - \lambda I)\, E_\lambda \leqslant 0$;
4) $(I - E_\lambda)\,(A - \lambda I)\,(I - E_\lambda) > 0$

(это означает, что соответствующая квадратичная форма строго больше 0 на ненулевых векторах, принадлежащих D_A);

5) $\mathrm{Sp}\ E_\lambda = N(\lambda)$.

Идейной основой последующего будет служить

Предложение 28.1. *Пусть* E'_λ — *некоторое семейство операторов, для которого* $E'_\lambda H \subset D_A$ *и выполнены условия* 1)—4). *Тогда для него выполнено и условие* 5), *т. е.*

$$\operatorname{Sp} E'_\lambda = N(\lambda) = \operatorname{Sp} E_\lambda. \tag{28.5}$$

Доказательство. Из 1), 2) следует, что E'_λ — ортогональный проектор. Положим $L_\lambda = E'_\lambda H$, $M_\lambda = (I - E'_\lambda)\,H$. Имеем в силу 3) $(Au, u) \leqslant \lambda(u, u)$, $u \in L_\lambda$, откуда по лемме 28.1 $\operatorname{Sp} E'_\lambda = \dim L_\lambda \leqslant N(\lambda)$. Далее, из 4) вытекает, что $(E_\lambda H) \cap M_\lambda = 0$, откуда $\dim(E_\lambda H) = N(\lambda) \leqslant \leqslant \dim L_\lambda = \operatorname{Sp} E'_\lambda$, что и доказывает (28.5). ■

Замечание 28.1. Отметим, что в условиях предложения 28.1 вовсе не обязательно $E'_\lambda = E_\lambda$ (см. задачу 28.1).

28.3. Приближенный спектральный проектор.

Теорема 28.1. *Пусть* A — *такой оператор, как в лемме* 28.1, *и пусть существует такое семейство операторов* $\{\mathscr{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, *что* $\mathscr{E}_\lambda H \subset D_A$ *и при некоторых* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *выполнены условия*:

1°. $\mathscr{E}^*_\lambda = \mathscr{E}_\lambda$;

2°. $\mathscr{E}_\lambda$ — *ядерный оператор и при* $\lambda \to +\infty$

$$\|\mathscr{E}^2_\lambda - \mathscr{E}_\lambda\|_1 = O(V(\lambda)\cdot\lambda^{-\delta}), \tag{28.6}$$

где $V(\lambda)$ — *некоторая положительная неубываюшая функция, определенная при* $\lambda \geqslant \lambda_0$;

3°. $\mathscr{E}_\lambda(A - \lambda I)\,\mathscr{E}_\lambda \leqslant C\lambda^{1-\varepsilon}$;

4°. $(I - \mathscr{E}_\lambda)\,(A - \lambda I)\,(I - \mathscr{E}_\lambda) \geqslant -C\lambda^{1-\varepsilon}$;

5°. $\operatorname{Sp} \mathscr{E}_\lambda = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta}))$ *при* $\lambda \to +\infty$.

Предположим еще, что функция $V(\lambda)$, *участвующая в формулировке* пп. 2° *и* 5°, *такова, что при* $\lambda \to +\infty$

$$[V(\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}) - V(\lambda)]/V(\lambda) = O(\lambda^{-\delta}) \tag{28.7}$$

для любого $C > 0$.

Тогда при $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})). \tag{28.8}$$

Доказательство. Идея состоит в том, чтобы использовать лемму 28.1 в применении к линейному многообразию L, натянутому на собственные векторы оператора $\mathscr{E}_\lambda$ с собственными значениями, близкими к 1 (все они близки к 0 или к 1, как будет видно из дальнейшего).

Пусть α_j — собственные значения оператора $\mathscr{E}_\lambda$. Они вещественны в силу 1° и благодаря 2° и 5° удовлетворяют условиям

$$\sum_j |\,\alpha_j^2-\alpha_j\,| = O(\lambda^{-\delta}V(\lambda)),$$
$$\sum_j \alpha_j = V(\lambda)\,(1+O(\lambda^{-\delta})). \tag{28.9}$$

Л е м м а 28.2.

$$\sum_{|\alpha_j-1|\leqslant 1/2} \alpha_j = V(\lambda)\,(1+O(\lambda^{-\delta})). \tag{28.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $|\,\alpha_j-1\,|>1/2$ имеем $|\,\alpha_j^2-\alpha_j\,| = |\,\alpha_j\,|\,|\,\alpha_j-1\,| \geqslant |\,\alpha_j\,|/2$. Поэтому

$$\sum_{|\alpha_j-1|>1/2} |\,\alpha_j\,| \leqslant 2 \sum_{|\alpha_j-1|>1/2} |\,\alpha_j^2-\alpha_j\,| \leqslant 2\sum_j |\,\alpha_j^2-\alpha_j\,| = O(\lambda^{-\delta}V(\lambda)).$$

Отсюда и из (28.9) следует (28.10). ■

Л е м м а 28.3. *Пусть* $\tilde N(\lambda)$ — *число собственных значений* $\mathscr{E}_\lambda$, *лежащих на* $[1/2,\ 3/2]$. *Тогда*

$$\tilde N(\lambda) = V(\lambda)\,(1+O(\lambda^{-\delta})). \tag{28.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varepsilon_j = 1-\alpha_j$. Тогда условие 2° можно записать в виде

$$\sum_j |\,\varepsilon_j^2-\varepsilon_j\,| = O(\lambda^{-\delta}V(\lambda)), \tag{28.12}$$

а утверждение леммы 28.2 дает

$$\sum_{|\varepsilon_j|\leqslant 1/2} (1-\varepsilon_j) = V(\lambda)\,(1+O(\lambda^{-\delta})),$$

или

$$\tilde N(\lambda) = V(\lambda)\,(1+O(\lambda^{-\delta})) + \sum_{|\varepsilon_j|\leqslant 1/2} \varepsilon_j.$$

Но, как и в лемме 28.2, из (28.12) следует, что

$$\sum_{|\varepsilon_j|\leqslant 1/2} |\,\varepsilon_j\,| \leqslant 2 \sum_{|\varepsilon_j|\leqslant 1/2} |\,\varepsilon_j^2-\varepsilon_j\,| = O(\lambda^{-\delta}V(\lambda)),$$

что и дает (28.11). ■

Продолжим доказательство теоремы 28.1.

а) Пусть L_λ — линейное многообразие, натянутое на собственные векторы $\mathscr{E}_\lambda$ с такими собственными значениями α_j, что $|\alpha_j - 1| \leqslant 1/2$, так что

$$\tilde{N}(\lambda) = \dim L_\lambda = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})) \tag{28.13}$$

по лемме 28.3. Условие 3° означает, что

$$(\mathscr{E}_\lambda (A - \lambda I)\,\mathscr{E}_\lambda u,\, u) \leqslant C\lambda^{1-\varepsilon}(u,\, u), \quad u \in H. \tag{28.14}$$

Но, поскольку

$$(u,\, u) \leqslant 4(\mathscr{E}_\lambda u,\, \mathscr{E}_\lambda u), \quad u \in L_\lambda. \tag{28.15}$$

из (28.14) следует, что

$$([A - (\lambda + 4C\lambda^{1-\varepsilon})\,I]\,\mathscr{E}_\lambda u,\, \mathscr{E}_\lambda u) \leqslant 0, \quad u \in L_\lambda.$$

Так как оператор $\mathscr{E}_\lambda$ осуществляет изоморфизм L_λ на себя, отсюда следует, что

$$([A - (\lambda + 4C\lambda^{1-\varepsilon})\,I]\,v,\, v) \leqslant 0, \quad v \in L_\lambda.$$

Но отсюда по лемме 28.1 получаем

$$\tilde{N}(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})) \leqslant N(\lambda + 4C\lambda^{1-\varepsilon}).$$

Полагая $\lambda + 4C\lambda^{1-\varepsilon} t$, мы получим $t = \lambda(1 + O(\lambda^{-\varepsilon}))$, откуда $\lambda = t(1 + O(t^{-\varepsilon}))$ и, значит,

$$V(t(1 + O(t^{-\varepsilon})))\,(1 + O(t^{-\delta})) \leqslant N(t).$$

Пользуясь условием (28.7), мы видим, что

$$V(t(1 + O(t^{-\varepsilon}))) = V(t)\,(1 + O(t^{-\delta})),$$

откуда

$$V(t)\,(1 + O(t^{-\delta})) \leqslant N(t). \tag{28.16}$$

б) Пусть $M_\lambda = (L_\lambda)^\perp$. Имеем, очевидно,

$$(u,\, u) \leqslant 4((I - \mathscr{E}_\lambda)\,u,\, (I - \mathscr{E}_\lambda)\,u), \quad u \in M_\lambda. \tag{28.17}$$

Поэтому из условия 4° вытекает, что

$$([A - (\lambda - 4C\lambda^{1-\varepsilon})\,I]\,v,\, v) \geqslant 0, \quad v \in D_A \cap M_\lambda. \tag{28.18}$$

Из условия (28.18) вытекает, что для любого $\varepsilon' > 0$

$$(E_{\lambda - 4C\lambda^{1-\varepsilon} - \varepsilon'} H) \cap M_\lambda = 0,$$

откуда, аналогичяо рассуждению из доказательства леммы 28.1, мы находим, что

$$\tilde{N}(\lambda) \geqslant N(\lambda - 4C\lambda^{1-\varepsilon} - \varepsilon').$$

Теперь, рассуждая, как и в п. а), мы получаем, что

$$N(t) \leqslant V(t)\,(1 + O(t^{-\delta})). \tag{28.19}$$

Оценки (28.16) и (28.19) дают вместе требуемую асимптотику (28.8). ■

28.4. Достаточное условие на $V(\lambda)$. Условие (28.7) выглядит трудно проверяемым. Поэтому мы дадим более простое достаточное условие.

Предложение 28.2. *Пусть $V(\lambda)$ — положительная неубывающая функция, определенная и дифференцируемая при $\lambda \geqslant \lambda_0$. Предположим, что*

$$V'(\lambda)/V(\lambda) = O(\lambda^{\varepsilon-\delta-1}). \tag{28.20}$$

Тогда $V(\lambda)$ удовлетворяет условию (28.7).

Пример 28.1. Функция $V(\lambda) = \lambda^\alpha$, где $\alpha > 0$, удовлетворяет условию (28.20) при $\varepsilon \geqslant \delta$.

Доказательство предложения 28.2. Положим

$$\varphi(\lambda) = V'(\lambda)/V(\lambda).$$

Тогда

$$V(\lambda) = V(\lambda_0)\,\exp\left(\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \varphi(\tau)\,d\tau\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&V(\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}) - V(\lambda) = \\
&= V(\lambda_0)\left\{\exp\left(\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}} \varphi(\tau)\,d\tau\right) - \exp\left(\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \varphi(\tau)\,d\tau\right)\right\} = \\
&\qquad = V(\lambda)\left\{\exp\left(\int\limits_{\lambda}^{\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}} \varphi(\tau)\,d\tau\right) - 1\right\}.
\end{aligned} \tag{28.21}$$

Так как $|\varphi(\lambda)| \leqslant C\lambda^{\varepsilon-\delta-1}$, то при $\varepsilon \neq \delta$ мы получаем

$$\int\limits_{\lambda}^{\lambda+C\lambda^{1-\varepsilon}} \varphi(\tau)\,d\tau \leqslant C_1 \int\limits_{\lambda}^{\lambda+C\lambda^{1-\varepsilon}} \tau^{\varepsilon-\delta-1} d\tau = C_2[(\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon})^{\varepsilon-\delta} - \lambda^{\varepsilon-\delta}] =$$
$$= C_2\lambda^{\varepsilon-\delta}[(1 + C\lambda^{-\varepsilon})^{\varepsilon-\delta} - 1] \leqslant C_3\lambda^{\varepsilon-\delta} \cdot \lambda^{-\varepsilon} = C_3\lambda^{-\delta}.$$

При $\varepsilon = \delta$ получается та же самая оценка:

$$\int\limits_{\lambda}^{\lambda+C\lambda^{1-\varepsilon}} \varphi(\tau)\,d\tau \leqslant C_1 \int\limits_{\lambda}^{\lambda+C\lambda^{1-\varepsilon}} \tau^{-1} d\tau = C_1 \ln(1 + C\lambda^{-\varepsilon}) \leqslant C_2\lambda^{-\varepsilon} = C_2\lambda^{-\delta}.$$

Из (28.21) теперь следует, что

$$V(\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}) - V(\lambda) \leqslant CV(\lambda) \cdot \lambda^{-\delta}$$

(мы воспользовались тем, что $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$), но это и есть требуемое неравенство (28.7). ■

28.5. Идея применения теоремы 28.1 (эвристический набросок). Пусть оператор A имеет вейлевский символ $b(z)$, $z \in \mathbb{R}^{2n}$. Положим

$$V(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{b(z)<\lambda} dz. \tag{28.22}$$

Спектральный проектор E_λ оператора A — это оператор $\chi_\lambda(A)$, где $\chi_\lambda(\cdot)$ — характеристическая функция луча $(-\infty, \lambda]$. Рассмотрим оператор $\mathscr{E}_\lambda$ с вейлевским символом $\chi_\lambda(b(\cdot))$. Естестественно ожидать, что оператор $\mathscr{E}_\lambda$ должен при больших λ имитировать спектральный проектор E_λ. Остается заметить, что

$$\mathrm{Sp}\,\mathscr{E}_\lambda = (2\pi)^{-n} \int \chi_\lambda(b(z))\,dz = V(\lambda).$$

Техническая реализация этой идеи состоит в применении теоремы 28.1, однако ввиду необходимости рассматривать композиции операторов мы должны сгладить характеристическую функцию χ_λ. Вообще мы приходим здесь к необходимости рассматривать псевдодифференциальные операторы с параметром, дающие возможность проверить свойства 1°—5°.

28.6. Точная конструкция. Введем такую функцию $\chi(t, \lambda, \varkappa)$, t, λ, $\varkappa \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 1$, $\varkappa > 0$, что

$$\chi(t, \lambda, \varkappa) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant \lambda + 2\varkappa \end{cases} \tag{28.23}$$

и выполнены оценки производных

$$|(\partial/\partial t)^k \chi(t,\, \lambda,\, \varkappa)| \leqslant C_k \varkappa^{-k}. \tag{28.24}$$

Существование функции $\chi(t,\, \lambda,\, \varkappa)$ легко проверяется, например, следующим образом. Пусть $\psi(t,\, \lambda,\, \varkappa)$ — характеристическая функция множества $\{(t,\, \lambda,\, \varkappa)\colon t \leqslant \lambda + \varkappa\}$. Тогда можно положить

$$\chi(t,\, \lambda,\, \varkappa) = \frac{1}{\varkappa} \int \psi(\tau,\, \lambda,\, \varkappa)\, \chi_0((t-\tau)/\varkappa)\, d\tau,$$

где $\chi_0(\nu) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\chi_0(\nu) = 0$ при $|\nu| \geqslant 1$ и $\int \chi_0(\nu)\, d\nu = 1$.

Пусть теперь оператор A имеет вещественный вейлевский символ

$$b(z) \in H\Gamma_\rho^{m,\, m_0}(\mathbb{R}^{2n}), \qquad m_0 > 0, \tag{28.25}$$

причем при некоторых $C > 0$ и $R_0 > 0$

$$b(z) \geqslant C|z|^{m_0}, \qquad |z| \geqslant R_0 \tag{28.26}$$

(из (28.25) следует, что (28.26) верно либо для $b(z)$, либо для $-b(z)$; мы фиксируем знак так, чтобы оператор A оказался полуограгиченным снизу, — этот факт будет ясен из дальнейшего).

Положим

$$e(z,\, \lambda,\, \varkappa) = \chi(b(z),\, \lambda,\, \varkappa) \tag{28.27}$$

и теперь, выбирая $\varkappa = \lambda^{1-\nu}$, где $\nu > 0$, мы определим оператор $\mathscr{E}_\lambda$ как оператор с вейлевским символом

$$e(z,\, \lambda) = \chi(b(z),\, \lambda,\, \lambda^{1-\nu}), \tag{28.28}$$

где число $\nu > 0$ будет выбрано позже. Заметим сразу же, что

$$e(z,\, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad b(z) \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad b(z) \geqslant \lambda + 2\lambda^{1-\nu}. \end{cases} \tag{28.29}$$

Попытаемся написать оценки производных по z для $e(z,\, \lambda)$.

Заметим, что оценки класса $H\Gamma_\rho^{m,\, m_0}$ при $m_0 > 0$ могут быть записаны в виде

$$|\partial^\gamma b(z)| \leqslant C_\gamma b(z)^{1-\rho'|\gamma|}, \qquad \rho' > 0, \qquad |z| \geqslant R_0, \tag{28.30}$$

где в качестве ρ' можно взять, например, $\rho' = \rho/m$, но, быть может, возможно и большее значение.

Дифференцируем теперь (28.28):

$$\partial_z^\gamma e(z,\,\lambda)=\sum_{\substack{\gamma_1+\ldots+\gamma_k=\gamma\\ |\gamma_j|>0}} c_{\gamma_1\ldots\gamma_k}(\partial^{\gamma_1}b(z)\ldots(\partial^{\gamma_k}b(z))\left(\frac{\partial^k\chi}{\partial t^k}(t,\,\lambda,\,\lambda^{1-\nu})\Big|_{t=b(z)}\right), \tag{28.31}$$

где суммирование ведется по всевозможным разбиениям γ в сумму $\gamma_1+\ldots+\gamma_k$ с произвольным числом слагаемых $k\leqslant|\gamma|$.

Из (28.31), (28.30) и (28.24) вытекает, что

$$|\partial_z^\gamma e(z,\,\lambda)|\leqslant C_\gamma b(z)^{k-\rho'|\gamma|}\cdot\lambda^{-k(1-\nu)}. \tag{28.32}$$

Благодаря же (28.29) мы можем заменить λ на $b(z)$ и переписать (28.32) в виде

$$|\,\partial_z^\gamma e(z,\,\lambda)\,|\leqslant C_\gamma b(z)^{(\mu-\rho')|\gamma|}\cdot\lambda^{k\nu-\mu|\gamma|}. \tag{28.33}$$

где μ — любое вещественное число.

Поскольку $k\leqslant|\gamma|$, то отсюда следует, что

$$|\,\partial_z^\gamma e(z,\,\lambda)\,|\leqslant C_\gamma b(z)^{(\mu-\rho')|\gamma|}\cdot\lambda^{(\nu-\mu)|\gamma|}. \tag{28.34}$$

Эти оценки верны при $\lambda\geqslant1$ и при $|z|\geqslant R_0$. Кроме того, мы имеем очевидные соотношения

$$|\,e(z,\,\lambda)\,|\leqslant C,\qquad |z|\leqslant R_0, \tag{28.35}$$

$$\partial^\gamma e(z,\,\lambda)=0,\qquad |z|\leqslant R_0,\qquad \lambda\geqslant\lambda_0, \tag{28.36}$$

если λ_0 достаточно велико.

Из (28.34) ясно, что выгодно взять μ таким, что $\nu<\mu<\rho'$, откуда вытекает необходимость выбирать такое ν, что $\nu<\rho'$, что и будет предполагаться в дальнейшем. При некоторых дополнительных условиях это обеспечит и применимость теоремы 28.1.

28.7. Поверхности уровня символа и свойства $V(\lambda)$. В этом пункте мы считаем, что множество уровня $\{z\colon b(z)=\lambda\}$ при больших λ является гладкой гиперповерхностью и, более того, что

$$\nabla b(z)\neq0\quad\text{при}\quad |z|\geqslant R_0, \tag{28.37}$$

где $\nabla b(z)=\left(\dfrac{\partial b}{\partial z_1},\,\ldots,\,\dfrac{\partial b}{\partial z_{2n}}\right)$ — градиент функции $b(z)$.

Пусть функция $V(\lambda)$ определена формулой (28.22). Преобразуем интеграл в (28.22) в интеграл по поверхности $b(z)=\lambda$. Поскольку $2n$-форма

$$dz=dz_1\wedge\ldots\wedge dz_{2n}$$

является дифференциалом от $(2n-1)$-формы

$$\omega = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} z_j \, dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_j} \wedge \ldots \wedge dz_{2n}$$

(«птичка» над dz_j означает, что dz_j пропускается), то

$$\int\limits_{b(z)<\lambda} dz = \int\limits_{b(z)=\lambda} \omega. \tag{28.38}$$

Пусть n_z — единичный вектор внешней нормали к поверхности $b(z)=\lambda$ в точке z, т. е.

$$n_z = \frac{\nabla b(z)}{|\nabla b(z)|}.$$

Обозначая через dS_z элемент площади поверхности $b(z)=\lambda$, мы получаем из (28.38), что

$$V(\lambda) = \frac{(2\pi)^{-n}}{2n} \int\limits_{b(z)=\lambda} (z \cdot n_z) \, dS_z = \frac{(2\pi)^{-n}}{2n} \int\limits_{b(z)=\lambda} \frac{dS_z}{|\nabla b(z)|} \, (z \cdot \nabla b(z)). \tag{28.39}$$

Вычислим теперь $V'(\lambda)$. Заметим, что расстояние в точке z от поверхности $b(z)=\lambda$ до близкой поверхности уровня $b(z)=\lambda+\Delta\lambda$ равно $\dfrac{\Delta\lambda(1+o(1))}{|\nabla b(z)|}$. Поэтому

$$V'(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{b(z)=\lambda} \frac{dS_z}{|\nabla b(z)|}. \tag{28.40}$$

Сравнивая (28.39) и (28.40), мы видим, что

$$\frac{V'(\lambda)}{V(\lambda)} \leqslant \left[\min_{b(z)=\lambda} (z \cdot \nabla b(z)) \right]^{-1}. \tag{28.41}$$

Из (28.41) вытекает

П р е д л о ж е н и е 28.3. *Пусть*

$$|z \cdot \Delta b(z)| \geqslant C b(z)^{1-\varkappa}, \quad |z| \geqslant R_0, \quad C > 0. \tag{28.42}$$

Тогда

$$V'(\lambda)/V(\lambda) = O(\lambda^{\varkappa-1}). \tag{28.43}$$

З а м е ч а н и е 28.2. Из условия (28.42) вытекает, что $\nabla b(z) \neq 0$ при $|z| \geqslant R_0$, так что это не нужно требовать заранее. Более того, геометрически условие (28.42) обеспечивает «звездность» поверхности $b(z) =$

$=\lambda$ по отношению к началу координат, т. е. любой луч, начинающийся в точке 0, пересекает эту поверхность ровно в одной точке и притом под ненулевым углом.

Упражнение 28.1. Доказать, что условие (28.42) выполнено, если $b(z)$ — эллиптический многочлен.

Указание. Использовать тождество Эйлера для однородных функций.

Задача 28.1. Построить при $\dim H = 2$ такой оператор A, что при некотором λ существует оператор E'_λ, для которого выполнены условия 1)—4), но $E'_\lambda \neq E_\lambda$.

Задача 28.2. Рассмотрим на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ оператор $A = -\Delta + Q$, где Δ — оператор Лапласа, Q — любой ограниченный самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{T}^n)$, причем $\|Q\| < M$.

Пусть $N(\lambda)$ — число собственных значений оператора A, меньших чем λ.

Используя приближенный спектральный проектор $\mathscr{E}_\lambda$, равный точному спектральному проектору оператора $-\Delta$, доказать, что

$$N_0(\lambda - M) \leqslant N(\lambda) \leqslant N_0(\lambda + M),$$

где $N_0(\lambda)$ — число точек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, лежащих в шаре $|\,x\,| \leqslant \sqrt{\lambda}$. Вывести отсюда асимптотическую формулу

$$N(\lambda) = c_n \lambda^{n/2}(1 + O(\lambda^{-1/2})).$$

§ 29. Операторы с параметром

29.1. Класс символов и операторов. Полученные в § 28 оценки (28.34) для символа $e(z, \lambda)$ подсказывают следующее

Определение 29.1. Через $\Gamma^{m,\mu}_{\rho,\sigma}$ обозначается класс функций $a(z, \lambda)$, определенных при $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda \geqslant \lambda_0$, бесконечно дифференцируемых по z и удовлетворяющих оценкам

$$|\partial_z^\gamma a(z, \lambda)| \leqslant C_\gamma \langle z\rangle^{m-\rho|\gamma|} \lambda^{\mu-\sigma|\gamma|}. \tag{29.1}$$

Здесь $m, \mu, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $\sigma \geqslant 0$.

Ясно, что если $a_j \in \Gamma^{m_j,\mu_j}_{\rho_j,\sigma_j}$, $j = 1, 2$, то $a_1 a_2 \in \Gamma^{m_1+m_2,\mu_1+\mu_2}_{\rho,\sigma}$, где $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$. Далее, если $a \in \Gamma^{m,\mu}_{\rho,\delta}$, то $\partial_z^\gamma a \in \Gamma^{m-\rho|\gamma|,\,\mu-\sigma|\gamma|}_{\rho,\sigma}$.

Заметим, что если $a \in \Gamma^{m,\mu}_{\rho,\sigma}$, то при каждом фиксированном $\lambda \geqslant \lambda_0$ справедливо включение $a(z, \lambda) \in \Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^{2n})$, что позволяет определить класс зависящих от параметра операторов $A(\lambda)$ с вейлевскими символами $a(z, \lambda) \in \Gamma^{m,\mu}_{\rho,\delta}$. Этот класс операторных функций $A(\lambda)$, действующих, например, в $S(\mathbb{R}^n)$, мы будем обозначать через $G^{m,\mu}_{\rho,\sigma}$.

29.2. Формула композиции.

Теорема 29.1. *Пусть* $a_j \in \Gamma^{m_j, \mu_j}_{\rho_j, \sigma_j}$, $j=1, 2$; $A_j(\lambda)$ — *соответствующие операторные функции. Тогда* $A_1(\lambda) \circ A_2(\lambda) \in G^{m_1+m_2, \mu_1+\mu_2}_{\rho, \sigma}$, *где* $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$ *причем если* $b(z, \lambda)$ — *вейлевский символ композиции* $B(\lambda) = A_1(\lambda) \circ A_2(\lambda)$, *то*

$$b = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant N-1} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!}\, 2^{-|\alpha+\beta|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1)\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2) + r_N, \tag{29.2}$$

где

$$r_N \in \Gamma^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2), \mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)}_{\rho, \sigma}. \tag{29.3}$$

Доказательство. Можно было бы провести доказательство по той же схеме, что и доказательство теоремы 23.6, введя предварительно соответствующий класс амплитуд и повторив рассуждения из § 23. Но для краткости мы проведем доказательство непосредственно.

Вначале мы получим некоторую формулу композиции $B = A_1 \circ A_2$ операторов A_1 и A_2 с вейлевскими символами $a_1(z)$, $a_2(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Ясно, что

$$Bu(x) = \int a_1\Big(\frac{x+x_1}{2}, \zeta\Big) a_2\Big(\frac{x_1+y}{2}, \eta\Big) \times \\ \times e^{i[(x-x_1)\cdot\zeta + (x_1-y)\cdot\eta]}\, u(y)\, dy\, dx_1\, đ\eta\, đ\zeta.$$

Если $K_B(x, y)$ — ядро оператора B, то отсюда находим

$$K_B(x, y) = \int a_1\Big(\frac{x+x_1}{2}, \zeta\Big) a_2\Big(\frac{x_1+y}{2}, \eta\Big) \times \\ \times e^{i[(x-x_1)\cdot\zeta + (x_1-y)\cdot\eta]}\, dx_1\, đ\eta\, đ\zeta. \tag{29.4}$$

Используем теперь формулу (23.39) (с $\tau = 1/2$), дающую выражение символа через ядро:

$$b(x, \xi) = \int e^{-ix_2\cdot\xi} K_B\Big(x + \frac{x_2}{2}, x - \frac{x_2}{2}\Big)\, dx_2. \tag{29.5}$$

Полагая $x_2/2 = x_3$, можно также написать

$$b(x, \xi) = 2^n \int e^{-2ix_3\cdot\xi} K_B(x + x_3, x - x_3)\, dx_3. \tag{29.6}$$

Отсюда и из (29.4) находим

$$b(x, \xi) = 2^n \int a_1\Big(\frac{x+x_1+x_3}{2}, \zeta\Big)\, a_2\Big(\frac{x+x_1-x_3}{2}, \eta\Big) \times \\ \times e^{i[(x+x_3-x_1)\cdot\zeta + (x_1+x_3-x)\cdot\eta - 2x_3\xi]}\, dx_1\, dx_3\, đ\eta\, đ\zeta.$$

Введем вместо x_1 и x_3 новые переменные интегрирования

$$x_4 = \frac{x + x_1 + x_3}{2}, \qquad x_5 = \frac{x + x_1 - x_3}{2},$$

так что $x_1 = x_4 + x_5 - x$, $x_3 = x_4 - x_5$. Принимая во внимание, что $\left|\dfrac{\partial(x_1,\, x_3)}{\partial(x_4,\, x_5)}\right| = 2^n$, мы получаем

$$b(x,\, \xi) = 2^{2n} \int a_1(x_4,\, \zeta)\, a_2(x_5,\, \eta) \times \\ \times e^{2i[(x-x_5)\cdot\zeta + (x_4 - x)\cdot\eta + (x_5 - x_4)\cdot\xi]}\, dx_4\, dx_5\, đ\zeta\, đ\eta,$$

или

$$b(x,\, \xi) = 2^{2n} \int a_1(y,\, \eta)\, a_2(z,\, \zeta) \times \\ \times e^{2i[(x-z)\cdot\eta + (y-x)\cdot\zeta + (z-y)\cdot\xi]}\, dy\, dz\, đ\eta\, đ\zeta. \quad (29.7)$$

Отметим, что показатель экспоненты в (29.7) можно также записать в виде

$$2i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 2i \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & y_j & z_j \\ \xi_j & \eta_j & \zeta_j \end{vmatrix}$$

Из вида этого показателя вытекает возможность интегрирования по частям, приводящего к появлению убывающих множителей вида $\langle x - z\rangle^{-N}$, $\langle y - x\rangle^{-N}$, $\langle \eta - \xi\rangle^{-N}$, $\langle \zeta - \xi\rangle^{-N}$. Поэтому наиболее существенную роль в интеграле (29.7) играют те точки y, η, z, ζ, для которых $y = z = x$, $\eta = \zeta = \xi$. Это наводит на мысль разложить $a_1(y,\, \eta)$ и $a_2(z,\, \zeta)$ по формуле Тейлора при $y = x$ и $z = x$.

Вначале сделаем замену $y' = y - x$, $z' = z - x$, $\eta' = \eta - \xi$, $\zeta' = \zeta - \xi$. Опуская штрихи, получим

$$b(x,\, \xi) = 2^{2n} \int a_1(x + y,\, \xi + \eta)\, a_2(x + z,\, \xi + \zeta)\, e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz. \quad (29.8)$$

Будем рассматривать этот интеграл как повторный при порядке дифференциалов $đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz$. Напишем разложения

$$a_1(x + y,\, \xi + \eta) = \sum_{|\alpha| \leqslant N-1} \frac{y^\alpha}{\alpha!}\, \partial_x^\alpha a_1(x,\, \xi + \eta) + r_N^{(1)}(x,\, y,\, \xi,\, \eta), \quad (29.9)$$

$$a_2(x + z,\, \xi + \zeta) = \sum_{|\beta| \leqslant N-1} \frac{z^\beta}{\beta!}\, \partial_x^\beta a_2(x,\, \xi + \zeta) + r_N^{(2)}(x,\, z,\, \xi,\, \zeta), \quad (29.10)$$

где

$$r_N^{(1)}(x,\,y,\,\xi,\,\eta)=\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha \int\limits_0^1 (1-\tau)^{N-1}\,d\tau\cdot y^\alpha(\partial_x^\alpha a_1)\,(x+\tau y,\,\xi+\eta), \quad (29.11)$$

$$r_N^{(2)}(x,\,z,\,\xi,\,\zeta)=\sum_{|\beta|=N} c_\beta \int\limits_0^1 (1-\tau)^{N-1}\,d\tau\cdot z^\beta(\partial_x^\beta a_2)\,(x+\tau z,\,\xi+\zeta). \quad (29.12)$$

Подставляя в (29.8) эти разложения, мы получаем

$$b(x,\,\xi)=2^{2n}\sum_{|\alpha+\beta|\leqslant N-1}\int \frac{y^\alpha z^\beta}{\alpha!\,\beta!}\,[\partial_x^\alpha a_1(x,\,\xi+\eta)]\,[\partial_x^\beta a_2(x,\,\xi+\zeta)]\times$$
$$\times\, e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz+r_N^{(3)}(x,\,\xi), \quad (29.13)$$

где $r_N^{(3)}(x,\xi)$ имеет вид линейной комбинации слагаемых четырех типов:

$r_{\alpha,\beta}^{(4)}(x,\,\xi)$ — такой же интеграл, как под знаком суммы в (29.13), но с $|\,\alpha+\beta\,|\geqslant N$;

$$r_{\alpha,\,N}^{(5)}(x,\,\xi)=\int y^\alpha[\partial_x^\alpha a_1(x,\,\xi+\eta)]\,[r_N^{(2)}(x,\,z,\,\xi,\,\zeta)]\,e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz; \quad (29.14)$$

$$r_{N,\,\beta}^{(6)}(x,\,\xi)=\int z^\beta[r_N^{(1)}(x,\,y,\,\xi,\,\eta)]\,[\partial_x^\beta a_2(x,\,\xi+\zeta)]\,e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz; \quad (29.15)$$

$$r_N^{(7)}(x,\,\xi)=\int r_N^{(1)}(x,\,y,\,\xi,\,\eta)\,r_N^{(2)}(x,\,z,\,\xi,\,\zeta)\,e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz. \quad (29.16)$$

Вычислим один из интегралов под знаком суммы в (29.13). Для этого прежде всего заметим, что

$$y^\alpha e^{2iy\cdot\zeta}=\Big(\frac{1}{2}D_\zeta\Big)^\alpha(e^{2iy\cdot\zeta}), \quad (29.17)$$

$$z^\beta e^{-2iz\cdot\eta}=\Big(-\frac{1}{2}D_\eta\Big)^\beta(e^{-2iz\cdot\eta}), \quad (29.18)$$

и выполним интегрирование по частям, пользуясь этими тождествами.

Получим

$$
\begin{aligned}
2^{2n} \int \frac{y^\alpha z^\beta}{\alpha!\,\beta!}\, [\partial_x^\alpha a_1(x,\, \xi+\eta)]\, [\partial_x^\beta a_2(x,\, \xi+\zeta)]\, e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz = \\
= \frac{2^{2n-|\alpha+\beta|}\cdot(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!} \int [\partial_x^\alpha D_\xi^\beta a_1(x,\, \xi+\eta)]\, [\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a_2(x,\, \xi+\zeta)] \times \\
\times e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz = \\
= \frac{2^{-|\beta|}(-2)^{-|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!} \int \Big[\partial_x^\alpha D_\xi^\beta a_1\Big(x,\, \xi+\frac{\eta}{2}\Big)\Big] \times \Big[\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a_2\Big(x,\, \xi+\frac{\zeta}{2}\Big)\Big] \times \\
\times e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz = \\
= \frac{2^{-|\beta|}(-2)^{-|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!} \times \int \Big[\partial_x^\alpha D_\xi^\beta a_1\Big(x,\, \xi+\frac{\eta}{2}\Big)\Big]\, e^{-iz\cdot\eta}\, đ\eta\, dz \times \\
\int \Big[\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a_2\Big(x,\, \xi+\frac{\zeta}{2}\Big)\Big] \times e^{iy\cdot\zeta}\, đ\zeta\, dy = \\
= \frac{2^{-|\beta|}(-2)^{-|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!}\, [\partial_x^\alpha D_\xi^\beta a_1(x,\, \xi)]\, [\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a_2(x,\, \zeta)],
\end{aligned}
$$

что дает конечные члены в формуле (29.2).

Заметим теперь, что формула (29.8) и все последующие вычисления сохраняют силу для любых символов a_j классов Γ_ρ^m. Этот факт можно установить непосредственно, заменяя осциллирующий интеграл (29.8) сходящимся, а можно проверить стандартным предельным переходом от финитных символов, как в § 1.

Предположим теперь, что символы a_1 и a_2 такие, как в формулировке теоремы. Нужно доказать включение (29.3) для каждого из остатков $r_{\alpha,\beta}^{(4)}$, $r_{\alpha,N}^{(5)}$, $r_{N,\beta}^{(6)}$, $r_N^{(7)}$. Что касается $r_{\alpha,\beta}^{(4)}$, то для него это включение очевидно, поскольку он имеет тот же вид, что и конечные члены.

Для оценки $r_{\alpha,N}^{(5)}$, $r_{N,\beta}^{(6)}$ и $r_N^{(7)}$ удобно произвести в (29.14)—(29.16) то же интегрирование по частям (с помощью (29.17) и (29.18)). В результате y^α заменяется на D_ζ^α, а z^β — на D_η^β и мы приходим к необходимости оценивать равномерно по $\tau_1,\, \tau_2 \in [0,\, 1]$ символы вида

$$
\begin{aligned}
\int [\partial_x^\alpha\, D_\xi^\beta a_1(x+\tau_1 y,\, \xi+\eta,\, \lambda)]\, [\partial_x^\beta\, D_\xi^\alpha a_2(x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta,\, \lambda)] \times \\
\times e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz, \quad |\alpha+\beta| \geqslant N. \qquad (29.19)
\end{aligned}
$$

Дифференцируя (29.19) по x и ξ, мы получаем еще, что производная $\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta$ от этого выражения является линейной комбинацией слагаемых вида

$$\int \left[\partial_x^{\alpha+\gamma'}\partial_\xi^{\beta+\delta'} a_1(x+\tau_1 y,\, \xi+\eta,\, \lambda)\right]\left[\partial_x^{\beta+\gamma''}\partial_\xi^{\alpha+\delta''} a_2(x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta,\, \lambda)\right]\times$$
$$\times\, e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz, \quad \gamma'+\gamma''=\gamma, \quad \delta'+\delta''=\delta. \quad (29.20)$$

Пользуясь тождествами

$$e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)} = (1+|y|^2+|\eta|^2)^{-M}\left(1-\frac{1}{4}\,\Delta_{z,\,\zeta}\right)^M e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)},$$
$$e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)} = (1+|z|^2+|\zeta|^2)^{-M}\left(1-\frac{1}{4}\Delta_{y,\,\eta}\right)^M e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}$$

и используя обозначения

$$\langle z,\, \zeta\rangle = (1+|z|^2+|\zeta|^2)^{1/2}, \quad \langle y,\, \eta\rangle = (1+|y|^2+|\eta|^2)^{1/2},$$

мы видим, что (29.20) приводится к линейной комбинации выражений вида

$$\int \left[\partial_{x,\,\xi}^{\varkappa'+\nu'} a_1(x+\tau_1 y,\, \xi+\eta,\, \lambda)\right]\left[\partial_{x,\,\xi}^{\varkappa''+\nu''} a_2(x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta,\, \lambda)\right]\times$$
$$\times\,\langle y,\, \eta\rangle^{-2M}\langle z,\, \zeta\rangle^{-2M} e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz, \quad (29.21)$$

где $\varkappa'$, $\varkappa''$, ν', ν'' — $2n$-мерные мультииндексы, причем

$$|\varkappa'| \geqslant N, \quad |\varkappa''| \geqslant N, \quad |\nu'|+|\nu''| \geqslant |\gamma|+|\delta|. \quad (29.22)$$

Интеграл (29.21) оценивается по модулю через

$$C\int \langle x+\tau_1 y,\, \xi+\eta\rangle^{m_1-\rho_1|\varkappa'+\nu'|}\lambda^{\mu_1-\sigma_1|\varkappa'+\nu'|}\langle x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta\rangle^{m_2-\rho_2|\varkappa''+\nu''|}\times$$
$$\times\,\lambda^{\mu_2-\sigma_2|\varkappa''+\nu''|}\times\langle y,\, \eta\rangle^{-2M}\langle z,\, \zeta\rangle^{-2M}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz,$$

что благодаря (29.22) не превосходит выражения

$$C\lambda^{\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)-|\gamma+\delta|\sigma}\cdot\int \langle x+\tau_1 y,\, \xi+\eta\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|}\times$$
$$\times\,\langle x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta\rangle^{m_2-\rho_2 N-\rho_2|\nu''|}\langle y,\, \eta\rangle^{-2M}\langle z,\, \zeta\rangle^{-2M}\times đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz. \quad (29.23)$$

Здесь степень λ в точности соответствует утверждению теоремы, так что достаточно оценить интеграл в (29.23) через нужную степень $\langle x, \xi\rangle$.

Заметим, что интеграл в (29.23) распадается в произведение интегралов

$$\int \langle x+\tau_1 y,\, \xi+\eta\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|}\langle y,\, \eta\rangle^{-2M}\, đ\eta\, dy, \tag{29.24}$$

$$\int \langle x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta\rangle^{m_2-\rho_2 N-\rho_2|\nu''|}\langle z,\, \zeta\rangle^{-2M}\, đ\zeta\, dz. \tag{29.25}$$

Оценим интеграл (29.24). Разобьем область интегрирования в нем на две части:

$$\Omega_1=\left\{y,\, \eta\colon |y|+|\eta|\leqslant \frac{1}{2}(|x|+|\xi|)\right\},$$
$$\Omega_2=\left\{y,\, \eta\colon |y|+|\eta|> \frac{1}{2}(|x|+|\xi|)\right\},$$

и обозначим интеграл по Ω_j через I_j, $j=1, 2$. Так как лебегов объем Ω_1 не превосходит $C_1\langle x,\, \xi\rangle^n$, а подынтегральное выражение оценивается на Ω_1 через $C_2\langle x,\, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|}$, то для I_1 справедлива оценка

$$|I_1|\leqslant C_3\langle x,\, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|+n}. \tag{29.26}$$

Займемся интегралом I_2. Можно считать, что $|x|+|\xi|\geqslant 1$ (при $|x|+|\xi|<1$ требуемые оценки очевидны). Тогда, используя очевидную оценку

$$(1+|x+\tau_1 y|+|\xi+\eta|)^p\leqslant (1+|x|+|\xi|)^p(1+|y|+|\eta|)^{|p|}$$

и выбирая M достаточно большим, мы получаем

$$|I_2|\leqslant C_4\langle x,\, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|}. \tag{29.27}$$

Из (29.26) и (29.27) следует, что (29.24) оценивается через

$$C\langle x,\, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|+n}.$$

Учитывая, что для (29.25) справедлива аналогичная оценка, мы видим, что (29.23) не превосходит

$$C\langle x,\, \xi\rangle^{m_1+m_2-(\rho_1+\rho_2)N-\rho_1|\nu'|-\rho_2|\nu''|+2n}\cdot\lambda^{\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma|\gamma+\delta|}\leqslant$$
$$\leqslant C\langle x,\, \xi\rangle^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2)-\rho|\gamma+\delta|+2n}\cdot\lambda^{\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma|\gamma+\delta|},$$

что и обеспечивает включение

$$r_N\in\Gamma_{\rho,\,\sigma}^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2)+2n,\, \mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)}. \tag{29.28}$$

Но увеличивая здесь N и рассматривая возникающие дополнительные члены в сумме (29.2), мы видим, что из (29.28) следует (29.3), что и доказывает теорему. ■

29.3. Положительность операторов с параметром.

Теорема 29.2. *Пусть $a(z, \lambda) \in \Gamma^{m,\mu}_{\rho,\sigma}$, $\sigma > 0$, $a(z, \lambda) \geqslant \varepsilon > 0$, где ε — постоянная, и выполнены оценки*

$$|\partial^\gamma_z a(z, \lambda)| \leqslant C_\gamma a(z, \lambda) \cdot \lambda^{-\sigma_0|\gamma|}, \quad \lambda \geqslant \lambda_0,\ z \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{29.29}$$

где $\sigma_0 > 0$, σ_0 не зависит от γ. Тогда, если $A(\lambda)$ — оператор с вейлевским символом $a(z, \lambda)$, то при достаточно больших λ будет $A(\lambda) \geqslant 0$ (т. е. $(A(\lambda)\, u, u) \geqslant 0$, $u \in S(\mathbb{R}^n)$).

Для доказательства этой теоремы необходима следующая лемма, позволяющая использовать антивиковский символ.

Лемма 29.1. *Рассмотрим оператор $B(\lambda)$ с антивиковским символом $a(z, \lambda) \in \Gamma^{m,\mu}_{\rho,\sigma}$, и пусть $b(z, \lambda)$ — его вейлевский символ. Тогда*

$$a - b = \sum_{0<|\gamma|<N} c_\gamma (\partial^\gamma_z a) + r_N, \tag{29.30}$$

где $c_\gamma = 0$ при нечетных $|\gamma|$ и $r_N \in \Gamma^{m-\rho N,\, \mu-\sigma N}_{\rho,\sigma}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 24.1.

Упражнение 29.1. Доказать лемму 29.1.

Доказательство теоремы 29.2. Пусть $B_0(\lambda)$ — оператор с антивиковским символом $a(z, \lambda)$, и пусть $b_0(z, \lambda)$ — вейлевский символ $B_0(\lambda)$. Рассмотрим теперь оператор $B_1(\lambda)$ с антивиковским символом $a(z, \lambda) - b_0(z, \lambda)$ и обозначим через $b_1(z, \lambda)$ его вейлевский символ. По индукции строим такую последовательность операторов $B_0, B_1, B_2, \ldots$, что B_j — оператор с антивиковским символом $a - b_0 - b_1 - \ldots - b_{j-1}$, где $b_0, b_1, \ldots, b_{j-1}$ — вейлевские символы операторов $B_0, B_1, \ldots, B_{j-1}$.

Из леммы 29.1 вытекает, что если

$$A_k = A - B_0 - B_1 - \ldots - B_{k-1},$$

то $A_k \in \Gamma^{m-2\rho k,\, \mu-2\sigma k}_{\rho,\sigma}$. Положим еще

$$Q_k = B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1}.$$

Таким образом, $A = A_k + Q_k$.

Заметим теперь, что индукцией по k доказывается, что $b_j(z, \lambda)$ при $j > 0$ имеет вид

$$b_j = \sum_{2j\leqslant|\gamma|<N} c_\gamma (\partial^\gamma a) + r_{N,j}, \tag{29.31}$$

где $c_{\gamma,\,j}$ — постоянные и $r_{N,\,j}\in\Gamma_{\rho,\,\sigma}^{m-\rho N,\mu-\sigma N}$. Поэтому оператор Q_k имеет антивиковский символ вида

$$q_k(z,\,\lambda)=a(z,\,\lambda)+\sum_{2\leqslant|\gamma|<N} c_\gamma[\partial_z^\gamma a(z,\,\lambda)]+r'_N(z,\,\lambda), \tag{29.32}$$

где $r'_N(z,\,\lambda)\in\Gamma_{\rho,\,\sigma}^{m-\rho N,\,\mu-\sigma N}$. Учитывая (29.29), мы получаем

$$q_k(z,\,\lambda)=a(z,\,\lambda)\,(1+\lambda^{-2\sigma_0}s(z,\,\lambda)),$$

где $s(z,\,\lambda)$ таково, что

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^{2n}}|\,s(z,\,\lambda)\,|\leqslant C,\qquad \lambda\geqslant\lambda_0,$$

где C не зависит от λ. В частности, ясно, что $q_k(z,\,\lambda)\geqslant\varepsilon/2>0$ при достаточно больших λ, откуда мы получаем

$$Q_k\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\,I \tag{29.33}$$

в силу предложения 24.1.

Заметим теперь, что при большом k

$$\|A_k(\lambda)\|\to 0\quad \text{при}\quad \lambda\to+\infty. \tag{29.34}$$

В самом деле, достаточно проверить это же для нормы Гильберта — Шмидта $\|A_k(\lambda)\|_2$. Но

$$\|A_k(\lambda)\|_2^2=(2\pi)^{-n}\int|\,b_k(z,\,\lambda)\,|^2dz\to 0\quad \text{при}\quad \lambda\to+\infty,$$

если выбрать k столь большим, что

$$m-2\rho k<-n,\qquad \mu-2\sigma k<0.$$

Из (29.33) и (29.34) сразу следует, что $A\geqslant\dfrac{\varepsilon}{4}\,I$, что и доказывает теорему 29.2. ■

§ 30. Асимптотика собственных значений

Рассмотрим оператор A с вещественным вейлевским символом $b(z)\in \in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$, где $m_0>0$. Оператор A является существенно самосопряженным по теореме 26.2 и имеет дискретный спектр по теореме 26.3.

Поскольку $b(z)$ не имеет нулей при больших $|\,z\,|$, то, меняя в случае необходимости знак, можно считать, что выполнена оценка

$$C_1|\,z\,|^{m_0}\leqslant b(z)\leqslant C_2|\,z\,|^m,\qquad |\,z\,|\geqslant R_0,\qquad m_0>0, \tag{30.1}$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные.

Легко показать, что в этом случае оператор A полуограничен снизу. В самом деле, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 24.2 и используя теорему 24.1, мы видим, что существует такой оператор A' с антивиковским символом вида

$$b(z) + \sum_{0<|\gamma|<N} c_\gamma \partial^\gamma b(z), \tag{30.2}$$

что оператор $A - A'$ ограничен. Но тогда достаточно проверить полуограниченность снизу оператора A', которая вытекает из полуограниченности снизу любой функции вида (30.2), имеющей место ввиду того, что

$$b(z) + \sum_{0<|\gamma|<N} c_\gamma \partial^\gamma b(z) = b(z)\left(1 + \sum_{0<|\gamma|<N} c_\gamma \frac{\partial^\gamma b(z)}{b(z)}\right),$$

а все слагаемые в скобках, кроме первого, стремятся к 0 при $|z| \to +\infty$.

Пусть ρ' — такое положительное число, что выполнены оценки

$$|\partial^\gamma b(z)| \leqslant C_\gamma b(z)^{1-\rho'|\gamma|}, \quad |z| \geqslant R_0 \tag{30.3}$$

(как уже отмечалось в п. 28.6, можно взять, например, $\rho' = \rho/m$, но возможно, что это не наилучшее значение ρ').

Наконец, предположим, что

$$|z \cdot \nabla b(z)| \geqslant c b(z)^{1-\varkappa}, \quad |z| \geqslant R_0, \tag{30.4}$$

где $0 \leqslant \varkappa < 1$, $c > 0$. Положим

$$V(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{b(z)<\lambda} dz, \tag{30.5}$$

и пусть $N(\lambda)$ — число собственных значений оператора A, не превосходящих λ.

Т е о р е м а 30.1. *Пусть оператор A имеет вейлевский символ $b(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, удовлетворяющий сформулированным условиям* (30.1), (30.3) *и* (30.4), *причем $\varkappa < \rho'$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место асимптотическая формула*

$$N(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{\varkappa - \rho' + \varepsilon})). \tag{30.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Мы воспользуемся теоремой 28.1 в применении к приближенному спектральному проектору $\mathscr{E}_\lambda$, построенному в п. 28.6. Напомним, что оператор $\mathscr{E}_\lambda$ имеет вещественнозначный вейлевский символ $e(z, \lambda)$, равный 1 при $b(z) \leqslant \lambda$ и 0 при $b(z) \geqslant \lambda + 2\lambda^{1-\nu}$, и если $\nu < \rho'$, то оценки (28.34)—(28.36) обеспечивают включение

$$e(z,\,\lambda) \in \Gamma^{0,\,0}_{\tilde\rho,\,\tilde\sigma}, \quad \tilde\rho > 0, \quad \tilde\sigma > 0. \tag{30.7}$$

Мы должны проверить выполнение всех условий теоремы 28.1. Условие $\mathscr{E}_\lambda^* = \mathscr{E}_\lambda$ очевидно благодаря вещественности $e(z,\,\lambda)$. Из предложения 27.2 вытекает ядерность $\mathscr{E}_\lambda$.

Будем вейлевский символ любого оператора A обозначать через $\sigma(A)$. Имеем, очевидно,

$$\sigma(\mathscr{E}_\lambda^2 - \mathscr{E}_\lambda) = \sum_{0<|\alpha+\beta|<N} c_{\alpha\beta}[\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha e(z,\,\lambda)]\,[\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta e(z,\,\lambda)] + (e^2 - e) + r_N, \tag{30.8}$$

где $r_N \in \Gamma^{-2N\tilde\rho,\,-2N\tilde\sigma}_{\tilde\rho,\,\tilde\sigma}$. Заметим, что все члены суммы, кроме r_N, сосредоточены там, где $\lambda \leqslant a(z) \leqslant \lambda(1 + 2\lambda^{-\nu})$, и, применяя к каждому члену предложение 27.3, мы получим оценку

$$\|\mathscr{E}_\lambda^2 - \mathscr{E}_\lambda\|_1 = O(V(\lambda + 2\lambda^{1-\nu}) - V(\lambda)).$$

Но из предложения 28.3 вытекает, что

$$V'(\lambda)/V(\lambda) = O(\lambda^{\varkappa - 1}),$$

а это в силу предложения 28.2 дает оценку

$$V(\lambda + 2\lambda^{1-\nu}) - V(\lambda) = O(\lambda^{\varkappa-\nu} V(\lambda)).$$

Поэтому

$$\|\mathscr{E}_\lambda^2 - \mathscr{E}_\lambda\|_1 = O(\lambda^{\varkappa-\nu} V(\lambda)). \tag{30.9}$$

Кроме того, из предложения 27.2 вытекает, что

$$\operatorname{Sp} \mathscr{E}_\lambda = (2\pi)^{-n} \int e(z,\,\lambda)\,dz =$$
$$= V(\lambda) + O(V(\lambda + 2\lambda^{1-\nu}) - V(\lambda)) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{\varkappa-\nu})). \tag{30.10}$$

Заметим, что мы должны брать $\nu < \rho'$. Выбирая $\nu = \rho' - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, мы можем переписать (30.9) и (30.10) в виде

$$\|\mathscr{E}_\lambda^2 - \mathscr{E}_\lambda\|_1 = O(\lambda^{\varkappa-\rho'+\varepsilon} V(\lambda)), \tag{30.11}$$

$$\operatorname{Sp} \mathscr{E}_\lambda = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{\varkappa-\rho'+\varepsilon})) \tag{30.12}$$

2. Проверим теперь требование 3° теоремы 28.1:

$$\mathscr{E}_\lambda (A - \lambda I)\,\mathscr{E}_\lambda \leqslant C\lambda^{1-\nu}.$$

Запишем это неравенство в виде

$$\mathscr{E}_\lambda (\lambda I - A)\,\mathscr{E}_\lambda + C\lambda^{1-\nu} \geqslant 0. \tag{30.13}$$

Вычислим вейлевский символ оператора $\mathscr{E}_\lambda(\lambda I - A)\,\mathscr{E}_\lambda$. Имеем по теореме 29.1

$$\sigma(\mathscr{E}_\lambda(\lambda I - A)) = \sum_{|\alpha+\beta|<N} c_{\alpha\beta}(\partial_x^\alpha\,\partial_\xi^\beta e)\,(\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha(\lambda - a(z))) + r_N,$$

где $r_N \in \Gamma^{m-N(\rho+\tilde\rho),\,1-N\tilde\sigma}_{\min(\rho,\,\tilde\rho),\,0}$.

Применяя еще раз формулу композиции, получим

$$\sigma(\mathscr{E}_\lambda(\lambda I - A)\,\mathscr{E}_\lambda) = \sum c_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\partial_z^{\gamma_1} e)\,(\partial_z^{\gamma_2} e)\,(\partial_z^{\gamma_3}(\lambda - a(z))) + \tilde r_N, \quad (30.14)$$

где $\tilde r_N \in \Gamma^{m-N(\rho+\tilde\rho),\,1-N\tilde\sigma}_{\min(\rho,\,\tilde\rho),\,0}$, сумма конечна и $c_{000} = 1$.

Ясно, что остаток $\tilde r_N$ не может повлиять на выполнение (30.13), и мы займемся оценкой конечных членов.

Докажем, что при $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$ и при некоторых $\tilde\rho > 0$ и $\tilde\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|(\partial^{\gamma_1} e)\,(\partial^{\gamma_2} e)\,(\partial^{\gamma_3}(\lambda - a))| \leqslant C\langle z\rangle^{-\tilde\rho(|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\gamma_3|)}\lambda^{1-\nu-\tilde\sigma(|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\gamma_3|)}. \quad (30.15)$$

Пусть вначале $\gamma_3 = 0$. Тогда (30.15) верно ввиду того, что $|\lambda - a(z)| \leqslant 2\lambda^{1-\nu}$ на носителе $(\partial^{\gamma_1} e)\,(\partial^{\gamma_2} e)$. Пусть $\gamma_3 \neq 0$. Тогда

$$|(\partial^{\gamma_1} e)\,(\partial^{\gamma_2} e)\,(\partial^{\gamma_3} a)| \leqslant C\langle z\rangle^{-\tilde\rho(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{-\tilde\sigma(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{1-\rho'|\gamma_3|} = \\ = C\langle z\rangle^{-\tilde\rho(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{1-\nu}\lambda^{-|\gamma_3|(\rho'-\nu/|\gamma_3|)},$$

Заметим, что $\rho' - \nu/|\gamma_3| \geqslant \rho' - \nu > 0$. Поэтому

$$|(\partial^{\gamma_1} e)\,(\partial^{\gamma_2} e)\,(\partial^{\gamma_3} a)| \leqslant C\lambda^{1-\nu}\langle z\rangle^{-\tilde\rho(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{-\tilde\sigma(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{-\sigma_1|\gamma_3|},$$

где $\sigma_1 = \rho' - \nu$. Учитывая, что на носителе $(\partial^{\gamma_1} e)\,(\partial^{\gamma_2} e)$ справедливы неравенства $\lambda \leqslant a \leqslant \lambda + 2\lambda^{1-\nu}$и $\langle z\rangle^{m_0} \leqslant A\lambda$, мы получаем оценку (30.15) (но, быть может, с меньшими $\tilde\rho$ и $\tilde\sigma$, чем в (30.7)).

Таким образом, мы получаем

$$(\partial^{\gamma_1} e)\,(\partial^{\gamma_2} e)\,(\partial^{\gamma_3}(\lambda - a)) \in \Gamma^{0,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,\tilde\sigma}, \quad |\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0. \quad (30.16)$$

Но, повторяя рассуждение, проведенное вначале этого параграфа для доказательства полуограниченности A, мы получаем отсюда, что норма в $L^2(\mathbb{R}^n)$ оператора с вейлевским символом $(\partial^{\gamma_1} e)\,(\partial^{\gamma_2} e)\,(\partial^{\gamma_3}(\lambda - a))$ не превосходит $C\lambda^{1-\nu}$, так что этот член также не может повлиять на выполнение (30.13).

Аналогичными рассуждениями проверяется, что

$$e^2\partial^{\gamma_3}(\lambda - a) \in \Gamma^{0,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,0}, \quad \gamma_3 \neq 0, \quad (30.17)$$

так что и этот член не влияет на выполнение (30.13).

Наконец, исследуем функцию $e^2(\lambda - a) = q$. Функция $q(z, \lambda)$ обладает следующими свойствами:

$$q(z, \lambda) \geqslant -C\lambda^{1-\nu}, \quad \partial^\nu q \in \Gamma^{0,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,0}, \quad |\gamma| > 0.$$

Если P — оператор с антивиковским символом $q(z, \lambda)$ и $p(z, \lambda)$ — его вейлевский символ, то из леммы 29.1 следует, что $q - p \in \Gamma^{0,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,0}$. Но ясно, что $P \geqslant -C\lambda^{1-\nu}$ и $\|Q - P\| \leqslant C\lambda^{1-\nu}$. Отсюда и следует соотношение (30.13). Полагая в нем $\nu = \rho' - \varepsilon$, мы получаем

$$\mathscr{E}_\lambda (A - \lambda I)\, \mathscr{E}_\lambda \leqslant C\lambda^{1-\rho'+\varepsilon}. \tag{30.18}$$

3. Проверим теперь, что

$$(I - \mathscr{E}_\lambda)\,(A - \lambda I)\,(I - \mathscr{E}_\lambda) + C\lambda^{1-\nu} \geqslant 0 \tag{30.19}$$

при достаточно большом $C > 0$. Применяя теорему 29.1, мы видим, что символ левой части в (30.19) имеет вид

$$C\lambda^{1-\nu} + \sum c_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3} \partial^{\gamma_1}(1 - e) \cdot \partial^{\gamma_2}(1 - e) \cdot \partial^{\gamma_3}(a - \lambda) + r_N, \tag{30.20}$$

где $r_N \in \Gamma^{m-N(\rho+\tilde\rho),\,1-N\tilde\sigma}_{\min(\rho,\,\tilde\rho),\,0}$ и $c_{000} = 1$.

Оператор R_N с вейлевским символом r_N допускает оценку нормы $\|R_N\| \leqslant C\lambda^{1-N\tilde\sigma}$ и не может повлиять на выполнение (30.19).

Оценим главную часть в (30.20) — символ

$$q(z, \lambda) = (1 - e(z, \lambda))^2\,(a(z) - \lambda) + C\lambda^{1-\nu}. \tag{30.21}$$

Заметим прежде всего, что при достаточно большом C будет

$$q(z, \lambda) \geqslant \lambda^{1-\nu}. \tag{30.22}$$

Докажем теперь, что

$$|\,\partial_z^\gamma q(z, \lambda)\,| \leqslant C_\gamma q(z, \lambda)\,\langle z\rangle^{-\tilde\rho|\gamma|}\lambda^{-\tilde\sigma|\gamma|} \tag{30.23}$$

при некоторых $\tilde\rho > 0$ и $\tilde\sigma > 0$.

Имеем

$$\partial_z^\gamma q = \sum c_{\gamma'\gamma''}\partial_z^{\gamma'}(1 - e)^2 \partial_z^{\gamma''}(a - \lambda).$$

Если $\gamma' \neq 0$, то соответствующий член оценивается, как в п. 2 этого доказательства. Если $\gamma' = 0$, то при $\gamma \neq 0$ на носителе $1 - e$ выполнена оценка

$$|\,(1 - e)^2\partial^\gamma(a - \lambda)\,| \leqslant Ca(z)^{1-\rho'|\gamma|} \leqslant (q(z, \lambda) + 2\lambda)\,(a(z))^{-\rho'^{|\gamma|}}, \tag{30.24}$$

так как $a(z) \leqslant q(z,\, \lambda) + 2\lambda$. Далее,

$$(q(z,\, \lambda) + 2\lambda)\, (a(z))^{-\rho'|\gamma|} \leqslant q(z,\, \lambda)\, (a(z))^{-\rho'|\gamma|} + 2\lambda^{1-\nu}\lambda^{\nu} a(z)^{-\rho'|\gamma|} \leqslant \\ \leqslant q(z,\, \lambda)\, \lambda^{-\rho'|\gamma|/2} \langle z \rangle^{-\rho'|\gamma|/2m_0} + q(z,\, \lambda)\, (a(z))^{\nu - \rho'|\gamma|} \quad (30.25)$$

на $\operatorname{supp}(1-e)^2$, поскольку $\lambda^{1-\nu} \leqslant q(z,\, \lambda)$ и $\lambda^{\nu} \leqslant a(z)^{\nu}$. Наконец,

$$q(z,\, \lambda)\, (a(z))^{\nu - \rho'|\gamma|} \leqslant q(z,\, \lambda)\, (a(z))^{-|\gamma|(\rho' - \nu/|\gamma|)} \leqslant \\ \leqslant q(z,\, \lambda)\, (a(z))^{-|\gamma|\cdot(\rho'-\nu)/2} \langle z \rangle^{-|\gamma|(\rho'-\nu)/2m_0}. \quad (30.26)$$

Из (30.24)—(30.26) вытекает (30.23). Отметим еще, что ввиду очевидной оценки $|q(z,\, \lambda)| \leqslant C\langle z \rangle^m \lambda^{1-\nu}$ из (30.23) вытекает включение $q(z,\, \lambda) \in \Gamma^{m,\, 1-\nu}_{\tilde\rho,\, \tilde\sigma}$.

Аналогично оценивая остальные члены в сумме (30.20), мы видим, что если через $q(z,\, \lambda)$ обозначить всю эту сумму, то также будут выполнены оценки (30.22) и (30.23) и включение $q(z,\, \lambda) \in \Gamma^{m,\, 1-\nu}_{\tilde\rho,\, \tilde\sigma}$. При этом, как было видно из предыдущего, мы можем взять $\nu = \rho' - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Применяя теорему 29.2, мы видим, что справедливо (30.19), или

$$(I - \mathscr{E}_\lambda)\, (A - \lambda I)\, (I - \mathscr{E}_\lambda) + C\lambda^{1-\rho'+\varepsilon} \geqslant 0. \quad (30.27)$$

4. Для завершения доказательства теоремы 30.1 остается заметить, что требования 1°—5° теоремы 28.1 для построенного «почти-проектора» $\mathscr{E}_\lambda$ уже проверены (соотношения (30.11), (30.12), (30.18) и (30.27)), а свойство (28.7) функции $V(\lambda)$ вытекает из (30.4) и предложения 28.3. Применение теоремы 28.1 завершает доказательство асимптотической формулы (30.6). ■

Задача 30.1. Вычислить собственные значения оператора $A = -\Delta + |x|^2$ и проверить непосредственно справедливость асимптотической формулы (30.6).

Указание. Оператор $A = -\Delta + |x|^2$ является квантовомеханическим оператором энергии гармонического осциллятора, и вычисление его собственных значений можно найти в любом учебнике квантовой механики.

Задача 30.2. Доказать, что если вейлевский символ $b(z)$ оператора A является эллиптическим многочленом, главная однородная часть которого не принимает значений на луче $\arg \lambda = \varphi_0$, то можно определить комплексные степени A^z и ζ-функция $\zeta(z) = \operatorname{Sp} A^z$ допускает мероморфное продолжение во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Найти ее полюсы, их вычеты и значения $\zeta(z)$ в точках 0, 1, 2, … Получить в этой ситуации из тауберовой теоремы Икехара асимптотику $N(\lambda)$ (без оценки остаточного члена).

ДОБАВЛЕНИЕ 1

ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

В этом добавлении мы излагаем определение и простейшие свойства волнового фронта обобщенной функции, введенного Хёрмандером [6]. Важность понятия волнового фронта состоит в том, что оно позволяет дать микролокальную (локализованную в точке кокасательного расслоения) формулировку теоремы о регулярности решений дифференциальных уравнений, а также во многом проясняет вопросы, связанные с распространением особенностей. Существенную роль волновые фронты играют и в спектральной теории. Волновые фронты органически связаны с псевдодифференциальными операторами. Оставляя в стороне многие важные вопросы теории волновых фронтов, автор счел все же полезным написать это по необходимости краткое добавление.

Д1.1. Волновой фронт обобщенной функции

Определение Д1.1. Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$, $u \in \mathscr{D}'(X)$. Будем писать, что $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, если существует такое $v \in \mathscr{E}'(X)$, что $u = v$ в окрестности x_0 и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любого $N > 0$

$$|\tilde{v}(\xi)| \leqslant C_N \langle\xi\rangle^{-N} \quad \text{при} \quad \left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right| < \varepsilon, \tag{Д1.1}$$

т. е. $\tilde{v}(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности точки ξ_0.

Таким образом, $WF(u)$ — замкнутое коническое множество в $X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$, называемое *волновым фронтом* (wave front) обобщенной функции u.

Лемма Д1.1. *Если $\varphi(x) \in C_0^\infty(X)$, $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, то $(x_0, \xi_0) \notin WF(\varphi u)$.*

Доказательство. Надо проверить, что если $\tilde{v}$ быстро убывает в открытом конусе Γ, то то же самое верно для $\widetilde{\varphi v}$. Но

$$\widetilde{\varphi v}(\xi) = \int \tilde{v}(\xi - \eta)\, \tilde{\varphi}(\eta)\, d\eta = \int\limits_{|\eta| \leqslant R} \tilde{v}(\xi - \eta)\, \tilde{\varphi}(\eta)\, d\eta + \int\limits_{|\eta| \geqslant R} \tilde{v}(\xi - \eta)\, \tilde{\varphi}(\eta)\, d\eta$$

и

$$|\widetilde{\varphi v}(\xi)| \leqslant C \sup_{|\eta|\leqslant R} |\tilde{v}(\xi-\eta)| + C_L \int\limits_{|\eta|\geqslant R} (1+|\xi-\eta|)^p (1+|\eta|)^{-L}\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{|\eta|\leqslant R} |\tilde{v}(\xi-\eta)| + C_L (1+|\xi|)^p \int\limits_{|\eta|\geqslant R} (1+|\eta|)^{p-L}\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{|\eta|\leqslant R} |\tilde{v}(\xi-\eta)| + C_L (1+|\xi|)^p R^{n+p-L}.$$

Положим теперь $R=|\xi|^{1/2}$. Тогда получится, что если ξ принадлежит конусу, чуть меньшему чем Γ, то $\xi-\eta\in\Gamma$ при больших $|\xi|$ и при $|\eta|\leqslant R$, а кроме того, $|\xi-\eta|\sim|\xi|$, $R^{n+p-L}\sim|\xi|^{(n+p-L)/2}$. Выбирая большое L, мы получим быстрое убывание $\widetilde{\varphi v}(\xi)$ по ξ при $|\xi|\to+\infty$, $\xi\in\Gamma$. ■

Следствие Д1.1. *В определении* Д1.1 *можно считать, что* $v=\varphi u$, *где* $\varphi\in C_0^\infty(X)$.

Доказательство. Мы можем выбрать v, о котором идет речь в этом определении, и затем взять такое φ, что $\varphi=1$ в окрестности x_0 и $\varphi u=\varphi v$. Остается воспользоваться леммой Д1.1. ■

Лемма Д1.2. *Пусть* $\pi\colon X\times(\mathbb{R}^n\backslash 0)\to X$ — *естественная проекция,* $u\in\mathscr{D}'(X)$. *Тогда*

$$\pi WF(u)=\text{sing supp}\; u.$$

Доказательство. а) Если $x_0\notin\text{sing supp}\; u$, то, беря $\varphi\in C_0^\infty(X)$, $\varphi=1$ в окрестности x_0, $\varphi=0$ в окрестности sing supp u, мы получим, что $\varphi u\in C_0^\infty(X)$, откуда $\widetilde{\varphi u}\in S(\mathbb{R}^n)$, а значит, $x_0\notin\pi WF(u)$.

б) Пусть $x_0\notin\pi WF(u)$. Тогда для любого $\xi_0\in\mathbb{R}^n\backslash 0$ существуют такие функция $\varphi_{\xi_0}(x)\in C_0^\infty(X)$ и коническая окрестность Γ_{ξ_0}, точки ξ_0, что $\varphi_{\xi_0}(x)=1$ в окрестности x_0 и $\widetilde{\varphi_{\xi_0}u}(\xi)$ быстро убывает в Γ_{ξ_0}. Пусть $\Gamma_{\xi_1},\ldots,\Gamma_{\xi_N}$ — покрытие $\mathbb{R}^n\backslash 0$. Тогда, полагая $\varphi=\prod\limits_{j=1}^{N}\varphi_{\xi_j}$, мы получим, что $\widetilde{\varphi u}(\xi)$ быстро убывает всюду, откуда $\varphi u\in C_0^\infty(X)$, значит, $u\in C^\infty$ в окрестности точки x_0, т. е. $x_0\notin\text{sing supp}\; u$. ■

Предложение Д1.1. *Пусть* $u\in\mathscr{D}'(X)$, $(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$. *Тогда существует такой классический собственный* ПДО $A\in CL^0(X)$, *что* $\sigma_A\equiv 1\,(\mathrm{mod}\; S^{-\infty})$ *в конической окрестности* (x_0,ξ_0) *и* $Au\in C_0^\infty(X)$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(X)$, $\varphi=1$ в окрестности x_0, $\widetilde{\varphi u}(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности точки ξ_0. Пусть $\chi(\xi)$ сосредоточено в этой конической окрестности, $\chi(t\xi)=\chi(\xi)$ при $t\geqslant 1$, $|\xi|\geqslant 1$, $\chi(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\chi(\xi)=1$ в некоторой меньшей конической окрестности ξ_0. Тогда $\chi(\xi)\,\widetilde{\varphi u}\,(\xi)$ быстро убывает, откуда

$\chi(D)\,(\varphi(x)\,u(x)) \in C^\infty(X)$. Но тогда $\psi(x)\,\chi(D)\,(\varphi(x)\,u(x)) \in C_0^\infty(X)$, если $\psi \in C_0^\infty(X)$. Мы можем взять ψ таким, что $\psi(x)=1$ в окрестности точки x_0. Тогда ПДО $A=\psi(x)\,\chi(D)\,\varphi(x)$ удовлетворяет всем требуемым условиям. ■

П р е д л о ж е н и е Д1.2. *Пусть даны* $u \in \mathscr{D}'(X)$, $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$ *и оператор* $A \in CL^m(X)$ *с главным символом* $a_m(x, \xi)$. *Пусть либо* $u \in \mathscr{E}'$, *либо оператор* A *собственный, так что имеет смысл* Au. *Наконец, предположим, что* $a_m(x_0, \xi_0) \neq 0$ *и* $Au \in C^\infty(X)$. *Тогда* $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Проводя в конической окрестности точки (x_0, ξ_0) стандартную конструкцию параметрикса (см. § 5), мы можем построить такой собственный ПДО $B \in CL^{-m}(X)$, что $\sigma_{BA} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$ в конической окрестности точки (x_0, ξ_0). Ясно, что $BAu \in C^\infty(X)$, так что, заменяя A на BA, мы можем считать, что $\sigma_A \equiv 1\,(\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$ в конической окрестности точки (x_0, ξ_0).

б) Пусть теперь $\chi(\xi)=1$ в окрестности точки ξ_0, $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)$ однородна 0-го порядка по ξ при $|\xi| \geqslant 1$. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi=1$ в окрестности x_0 и носители φ и χ выбраны так, что

$$\varphi(x)\,\chi(\xi)\,\sigma_A(x, \xi) = \varphi(x)\,\chi(\xi) \quad (\mathrm{mod}\ S^{-\infty}).$$

Отсюда

$$\chi(D)\,\varphi(x)\,A - \chi(D)\,\varphi(x) \in L^{-\infty}, \tag{Д1.2}$$

но поскольку $\chi(D)\,\varphi(x)\,Au \in C^\infty(X)$, то из (Д1.2) следует, что

$$\chi(D)\,\varphi(x)\,u \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{Д1.3}$$

в) Докажем теперь, что

$$\chi(D)\,\varphi(x)\,u \in S(\mathbb{R}^n), \tag{Д1.4}$$

откуда будет следовать, что $\chi(\xi)\,\widetilde{\varphi u}\,(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, $\widetilde{\varphi u}\,(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности ξ_0, что и требуется. Включение (Д1.4) в силу доказанного включения (Д1.3) вытекает из следующей леммы.

Л е м м а Д1.3. *Пусть* $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi) \in S^m_{\rho, 0}$. *Тогда*

$$|\,D^\alpha \chi(D)\,v(x)\,| \leqslant C_{\alpha, N} |\,x\,|^{-N} \tag{Д1.5}$$

при $\rho(x, \mathrm{supp}\ v) \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\xi^\alpha \chi(\xi) \in S^{m+|\alpha|}_{\rho, 0}$, то все сводится к случаю $\alpha=0$. Далее, представляя v в виде $v=\sum\limits_{|\alpha| \leqslant p} D^\alpha v_\alpha$, где v_α —

непрерывные функции, мы можем свести дело к случаю, когда v непрерывна. Имеем

$$\chi(D)\, v(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} \chi(\xi)\, v(y)\, dy\, đ\xi. \tag{Д1.6}$$

Интегрируем по частям, используя формулу

$$|x-y|^{-2N}(-\Delta_\xi)^N e^{i(x-y)\cdot\xi} = e^{i(x-y)\cdot\xi}.$$

Из (Д1.6) получается

$$\chi(D)\, v(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}((-\Delta_\xi)^N \chi(\xi))\, |x-y|^{-2N} v(y)\, dy\, đ\xi. \tag{Д1.7}$$

что имеет смысл, если считать, что $\rho(x, \operatorname{supp} v) \geqslant 1$. Выбирая N столь большим, что $(-\Delta_\xi)^N \chi(\xi) \in S^{-n-1}_{\rho,0}$, мы видим, что интеграл в (Д1.7) становится абсолютно сходящимся, причем он оценивается через $C\langle x\rangle^{-2N}$ при $\rho(x, \operatorname{supp} v) \geqslant 1$. ■

З а м е ч а н и е Д1.1. Условие $a_m(x_0, \xi_0) \neq 0$ иногда называют *эллиптичностью A в точке* (x_0, ξ_0). Легко сформулировать и доказать гипоэллиптический аналог предложения Д1.2. Мы предоставляем это читателю в виде упражнения.

С л е д с т в и е Д1.2. *Положим для $A \in CL^m(X)$*

$$\operatorname{char}(A) = \{(x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0) : a_m(x, \xi) = 0\}.$$

Тогда, если $Au = f \in C^\infty(X)$, то $WF(u) \subset \operatorname{char}(A)$.

В частности, если $\operatorname{char}(A) = \varnothing$, то $u \in C^\infty(X)$.

С л е д с т в и е Д1.3. *Если $u \in \mathscr{E}'(X)$, то*

$$WF(u) = \bigcap_{\substack{A \in CL^0(X)\\ Au \in C^\infty(X)}} \operatorname{char}(A). \tag{Д1.8}$$

То же самое верно и для $u \in \mathscr{D}'(X)$, но надо брать лишь собственные операторы A.

Важность следствия Д1.3 состоит в том, что формула (Д1.8) показывает, что волновой фронт $WF(u)$ может быть инвариантным образом определен в случае, когда X — многообразие, и в этом случае $WF(u)$ представляет собой замкнутое коническое подмножество в T^*X. Мы теперь еще немного обобщим предложение Д1.2, ослабив требование $Au \in C^\infty(X)$.

П р е д л о ж е н и е Д1.3. *Пусть опять $A \in CL^m(X)$, $u \in \mathscr{D}'(X)$ и либо оператор A собственный, либо $u \in \mathscr{E}'(X)$. Тогда, если $a_m(x_0, \xi_0) \neq 0$ и $(x_0, \xi_0) \notin WF(Au)$, то $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$. Иными словами,*

$$WF(u) \subset \operatorname{char}(A) \cup WF(Au). \tag{Д1.9}$$

Доказательство. В силу предложения Д1.1 существует такой собственный оператор $P \in CL^0(X)$, что $\sigma_P \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, S^{-\infty})$ в конической окрестности (x_0, ξ_0) и $(PA)\,u \in C^\infty(X)$. Но тогда из предложения Д1.2 ясно, что $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$. ■

Предложение Д1.4 (псевдолокальность ПДО). *Пусть* $u \in \in \mathscr{D}'(X)$, $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$ *и либо* $u \in \mathscr{E}'(X)$, *либо оператор* A *собственный. Тогда, если* $(x_0, \xi_0) \notin WF(X)$, *то* $(x_0, \xi_0) \notin WF(Au)$. *Иными словами,*

$$WF(Au) \subset WF(u). \tag{Д1.10}$$

Доказательство. Условие $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ равносильно существованию такого собственного ПДО $P \in CL^0(X)$, что $Pu \in C^\infty(X)$ и $\sigma_P \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, S^{-\infty})$ в конической окрестности (x_0, ξ_0). Пусть теперь Q — такой собственный ПДО, $Q \in CL^0(X)$, что $q_0(x_0, \xi_0) \neq 0$ (где q_0 — главный символ Q) и $\sigma_Q \in S^{-\infty}$ вне некоторой достаточно малой конической окрестности точки (x_0, ξ_0), так что

$$PQ \equiv Q (\mathrm{mod}\, L^{-\infty}) \quad \text{и} \quad QP \equiv Q (\mathrm{mod}\, L^{-\infty}).$$

Проверим, что $QAu \in C^\infty(X)$. Имеем $QA - QAP \in L^{-\infty}$, так что достаточно проверить, что $QAPu \in C^\infty(X)$. Но это ясно, поскольку $Pu \in C^\infty(X)$. Теперь тот факт, что $(x_0, \xi_0) \notin WF(Au)$, вытекает из предложения Д1.2. ■

Следствие Д1.4. *Если* $A \in CL^m(X)$, *то*

$$WF(Au) \subset WF(u) \subset WF(Au) \cup \mathrm{char}\,(A). \tag{Д1.11}$$

Следствие Д1.5. *Если оператор* $A \in CL^m(X)$ *эллиптичен*, *то*

$$WF(Au) = WF(u). \tag{Д1.12}$$

Упражнение Д1.1. Вычислить волновые фронты следующих обобщенных функций:

а) $\delta(x)$;

б) $\delta(x') \otimes 1(x'')$, где $x' \in \mathbb{R}^k$, $x'' \in \mathbb{R}^{n-k}$;

в) δ_S, где S — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ ($\langle \delta_S, \varphi \rangle$ определяется как интеграл ограничения функции φ на поверхность S по площади этой поверхности);

г) $(x + i0)^{-1}$ на $\mathbb{R}^1$;

д) характеристическая функция угла в $\mathbb{R}^2$.

Д1.2. Приложения: произведение двух обобщенных функций, след обобщенной функции на подмногообразии

1) Пусть $u_j \in \mathscr{D}'(X)$, $j = 1, 2$. Что такое $u_1 \cdot u_2$? Это должно быть обычное произведение $u_1 u_2$, если, например, u_1, u_2 — непрерывные

функции или одна из функций u_1, u_2 гладкая, и это должно быть естественное продолжение (например, по непрерывности в каком-нибудь смысле). Оказывается, можно определить $u_1 \cdot u_2$ при условии, что

$$WF(u_1) + WF(u_2) \subset X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0), \tag{Д1.13}$$

т. е. не существует такого $(x, \xi) \in WF(u_1)$, что $(x, -\xi) \in WF(u_2)$.

Поскольку произведение — билинейная операция, то, используя разбиение единицы, можно считать, что $u_1, u_2 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ и носители u_1, u_2 достаточно малы, так что $\tilde{u}_1(\xi)$ убывает вне конуса Γ_1, а $\tilde{u}_2(\xi)$ — вне конуса Γ_2, причем $\Gamma_1 + \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n \backslash 0$ (т. е. Γ_1 и Γ_2 не содержат диаметрально противоположных точек). Известно, что в обычной ситуации $\widetilde{u_1 u_2}(\xi) = \tilde{u}_1 * \tilde{u}_2$, где

$$\tilde{u}_1 * \tilde{u}_2(\xi) = \int \tilde{u}_1(\xi - \eta)\, \tilde{u}_2(\eta)\, đ\eta. \tag{Д1.14}$$

В нашем случае этот интеграл тоже абсолютно сходится, так как при $|\eta| \to +\infty$ либо $|\tilde{u}_1(\xi - \eta)|$, либо $|\tilde{u}_2(\eta)|$ быстро стремится к 0. По определению мы полагаем

$$u_1 u_2 = F^{-1} \int \tilde{u}_1(\xi - \eta)\, \tilde{u}_2(\eta)\, đ\eta. \tag{Д1.15}$$

Почему это продолжение по непрерывности? Например, можно показать, что если $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \chi(x)\, dx = 1$, $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \chi(\varepsilon^{-1} x)$ и $u^{(\varepsilon)} = u * \chi_\varepsilon \,(\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$, так что $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} u_j^{(\varepsilon)} = u_j$ в топологии $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} u_1^{(\varepsilon)} u_2^{(\varepsilon)} = u_1 u_2$ в топологии $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, где $u_1 u_2$ понимается в смысле (Д1.15).

Пример Д1.1. Пусть $u_k \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle u_k, \varphi \rangle = \int \chi_k(x_1)\, \varphi(x_1, kx_1)\, dx_1, \qquad \chi_k(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1),$$

т. е. $\operatorname{supp} u_k \subset \{(x_1, x_2) \colon x_2 = kx_1\}$. Найдем произведение $u_k \cdot u_0$. Имеем

$$\tilde{u}_k(\xi) = \int \chi_k(x_1)\, e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 k x_2)}\, dx_1 = \tilde{\chi}_k(\xi_1 + k\xi_2).$$

Отсюда $WF(u_k)$ — множество всех нормалей к прямой $x_2 = kx_1$, лежащих над $\pi_k^{-1}(\operatorname{supp} \chi_k)$, где $\pi_k \colon (x_1, kx_1) \mapsto x_1$.

Теперь рассмотрим свертку $\tilde{u}_k * \tilde{u}_0$:

$$(\tilde{u}_k * \tilde{u}_0)(\xi) = \int \tilde{\chi}_0(\xi_1 - \eta_1)\,\chi_k(\eta_1 + k\eta_2)\,đ\eta_1\,đ\eta_2 =$$

$$= \int \tilde{\chi}_0(\eta_1)\,đ\eta_1 \cdot \int \tilde{\chi}_k(k\eta_2)\,đ\eta_2 = \frac{1}{k}\,\chi_0(0)\,\chi_k(0);$$

отсюда

$$u_0 u_k = \frac{1}{k}\,\chi_0(0)\cdot\chi_k(0)\cdot\delta(x).$$

Предел при $k \to 0$ отсутствует, что естественно, так как при $k=0$ условие (Д1.13) не выполняется.

2) Пусть $u \in \mathscr{D}'(X)$, Y — подмногообразие в X, NY — семейство всех нормалей к Y в T^*X (нормальное расслоение к Y). Если $WF(u) \cap NY = \varnothing$, то определен след $u|_Y$, естественный в том же смысле, в каком и произведение.

В самом деле, локализуя, можно считать, что $Y = \{x_1 = \ldots = x_k = 0\}$. Для $u \in C_0^\infty(X)$ имеем

$$\widetilde{u|_Y} = \int \tilde{u}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,đ\xi_1 \ldots đ\xi_k. \tag{Д1.16}$$

Но по условию в нашем случае векторы вида $(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots, 0)$ не входят в $WF(u)$, так что $\tilde{u}$ быстро убывает в их направлении и интеграл (Д1.16) определен.

В частности, если $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению порядка m вида

$$a\Big(t, x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\,u = f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

причем плоскость $t=0$ нехарактеристична, т. е. $a_m(0, x, 1, 0) \neq 0$, то определены все следы $\left.\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, имеют смысл данные Коши. При этом $u|_{t=t_0}$ — гладкая функция от t_0 со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Д1.3. Теорема о распространении особенностей

Мы сформулируем теперь простейший вариант теоремы о распространении особенностей.

Теорема Д1.1. *Пусть оператор $P \in CL^m(X)$ имеет вещественный главный символ $p_m(x, \xi)$, $u \in \mathscr{D}'(X)$ и либо оператор P собственный, либо $u \in \mathscr{E}'(X)$, так что имеет смысл Pu. Тогда, если I — связный кусок бихарактеристики функции $p_m(x, \xi)$, не пересекающийся с $WF(Pu)$, то либо $I \subset WF(u)$, либо $I \cap WF(u) = \varnothing$.*

Иными словами, на дополнении к $WF(Pu)$ множество $WF(u)$ инвариантно относительно сдвигов по траекториям гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\dfrac{\partial p_m}{\partial x}, \\ \dot{x} = \dfrac{\partial p_m}{\partial \xi}. \end{cases} \tag{Д1.17}$$

П р и м е р Д1.2. Докажем, что волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ не может иметь решений с изолированными или компактно расположенными особенностями. В данном случае $m=2$, $p_2(x, \xi) = -\xi_0^2 + |\xi|^2$. Система (Д1.17) имеет решение $\xi = \mathrm{const}$, $x_0 = -2\xi_0 t$, $x = 2\xi t$. Пусть $0 \in \operatorname{sing\,supp} u$. Тогда существует точка $(0, 0, \xi_0, \xi) \in WF(u)$, причем ясно, что $\xi_0^2 = |\xi|^2$ в силу предложения Д1.2. По теореме Д1.1 $(-2\xi_0 t, 2\xi t, \xi_0, \xi) \in WF(u)$ при любом t и, в частности, $(-2\xi_0 t, 2\xi t) \in \operatorname{sing\,supp} u$ при любом t, что и дает требуемый результат.

Мы приведем теперь доказательство теоремы Д1.1, принадлежащее В. Н. Туловскому. Оно опирается на следующее предложение, описывающее волновой фронт в терминах действия обобщенной функции на быстро осциллирующую экспоненту.

П р е д л о ж е н и е Д1.5. *Пусть $u \in \mathscr{D}'(X)$. Тогда условие $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ равносильно следующему условию*:

A. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что если $\Phi(x, \theta)$ — гладкая вещественнозначная функция, определенная при $|x - x_0| < \varepsilon$ и $\theta \in (\mathbb{R}^N \backslash 0)$, однородная по θ порядка 1 и такая, что $\Phi_x(x_0, \theta_0) = \xi_0$ при некотором $\theta_0 \neq 0$, то для любого символа $\varphi \in CS^0(\{|x - x_0| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^N_\theta)$, обращающегося в 0 при $|x - x_0| \geqslant \varepsilon/2$, существует такая коническая окрестность Γ точки θ_0 в $\mathbb{R}^N \backslash 0$, что*

$$|\langle u(x), \varphi(x, \theta)\, e^{-i\Phi(x, \theta)}\rangle| \leqslant C_N |\theta|^{-N}, \quad \theta \in \Gamma, \ |\theta| \geqslant 1. \tag{Д1.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть выполнено условие A. Возьмем $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ в окрестности точки x_0, $\varphi = 0$ при $|x - x_0| \geqslant \varepsilon/2$ и $\Phi(x, \theta) = \langle x, \theta \rangle$, так что $N = n$, $\theta_0 = \xi_0$. Мы получим тогда, что $\langle u(x), \varphi(x)\, e^{-ix\cdot\theta}\rangle = \widetilde{\varphi u}\,(\theta)$ быстро убывает в конической окрестности точки ξ_0. Но отсюда следует, что $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$.

2) Пусть $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$. Проверим выполнение условия A. Пусть Φ и φ такие, как описано в этом условии. Без ущерба для общности можно считать, что $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Запишем левую часть (Д1.18) через $\tilde{u}(\xi)$:

$$\langle u(x), \varphi(x, \theta)\, e^{-i\Phi(x, \theta)}\rangle = \int \tilde{u}(\xi)\, e^{i[x\cdot\xi - \Phi(x, \theta)]}\, \varphi(x, \theta)\, dx\, đ\xi, \tag{Д1.19}$$

где интеграл понимается как осциллирующий. Выбрав такую малую коническую окрестность Γ_1 точки ξ_0 в $\mathbb{R}^n$, что $\tilde{u}(\xi)$ быстро убывает в Γ_1, разобьем этот интеграл в сумму I_1+I_2, где в I_1 интеграл по ξ берется по Γ_1, а в I_2 — по $\mathbb{R}^n\backslash\Gamma_1$. Оценим I_1 и I_2 отдельно.

а) В I_1 интегрируем по частям по x с помощью экспоненты $e^{-i\Phi(x,\,\theta)}$. А именно, полагая

$$^tL = |\,\Phi_x\,|^{-2} \sum_{j=1}^{n} i\Phi_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

мы получим тождество $^tLe^{-i\Phi} = e^{-i\Phi}$. Коэффициенты ^tL и L однородны по θ порядка -1. Поскольку $\Phi_x(x_0,\,\theta_0) = \xi_0 \neq 0$, то $|\,\Phi_x(x,\,\theta)\,| \neq 0$, если $|\,x - x_0\,| < \varepsilon$ и $\theta \in \Gamma$, где Γ — достаточно малая коническая окрестность точки θ_0. Имеем

$$I_1 = \int\limits_{\xi\in\Gamma_1} L^N(e^{ix\cdot\xi}\,\varphi(x,\,\theta))\,\tilde{u}(\xi)\,e^{-i\Phi(x,\,\theta)}\,dx\,đ\xi.$$

Поскольку

$$|L^N[e^{ix\cdot\xi}\varphi(x,\,\theta)]| \leqslant C_N\langle\xi\rangle^N\langle\theta\rangle^{-N}, \quad \theta\in\Gamma,\ |\,\theta\,|\geqslant 1,$$

то ввиду убывания $\tilde{u}(\xi)$ в Γ_1 мы получаем

$$|\,I_1\,| \leqslant C_N\langle\theta\rangle^{-N}, \quad \theta\in\Gamma,\ |\,\theta\,|\geqslant 1. \tag{Д1.20}$$

б) Для оценки I_2 надо интегрировать по частям по x уже с помощью всей экспоненты $e^{i[x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta)]}$. Выбирая коническую окрестность Γ точки θ_0 достаточно малой, можно считать, что $\xi - \Phi_x(x,\,\theta) \neq 0$, $\theta\in\Gamma$, $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\Gamma_1$, $|\,x-x_0\,|<\varepsilon$, откуда при тех же x, ξ, θ

$$\operatorname{grad}_x(x\cdot\xi - \Phi(x,\,\theta)) \neq 0,$$

что позволяет проделать стандартное интегрирование по частям. В самом деле, ясно, что при некотором $C>0$

$$|\,\xi - \Phi_x(x,\,\theta)\,| \geqslant C(|\,\xi\,| + |\,\theta\,|), \quad \theta\in\Gamma,\ \xi\in\mathbb{R}^n\backslash\Gamma_1,\ |\,x-x_0\,|<\varepsilon.$$

Полагая

$$^tL = -i|\,\xi - \Phi_x(x,\,\theta)\,|^{-2} \sum_{j=1}^{n}(\xi_j - \Phi_{x_j}(x,\,\theta))\,\frac{\partial}{\partial x_j},$$

мы получим, что $^tLe^{i[x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta)]} = e^{i[x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta)]}$, и потому

$$I_2 = \int\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\Gamma_1} e^{i[x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta)]}[L^N\varphi(x,\,\theta)]\,\tilde{u}(\xi)\,dx\,đ\xi. \tag{Д1.21}$$

Поскольку для $\tilde{u}(\xi)$ выполнена оценка $|\tilde{u}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{N_1}$ при достаточно больших C и N_1, то при достаточно большом N интеграл (Д1.21) становится абсолютно сходящимся и при $\theta \in \Gamma$, $|x-x_0|<\varepsilon$ может быть оценен через $C_p\langle\theta\rangle^{-p}$ при любом p, что вместе с оценкой (Д1.20) дает требуемое утверждение. ■

Замечание Д1.2. Если точка (x_0, ξ_0) и функции φ, Φ зависят от параметра, причем все условия выполнены равномерно, то постоянные C_N в (Д1.18) могут быть выбраны не зависящими от этого параметра.

Доказательство теоремы Д1.1. 1) Рассмотрим вначале для простоты случай оператора $P = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x_n}$. Пусть $Pu = f$, $(x_0, \xi_0) \notin$ $\notin WF(f)$. Бихарактеристика символа ξ_n оператора P, проходящая через (x_0, ξ_0), имеет вид $(x_0', (x_0)_n + t, \xi_0)$, где $(x_0)_n$ — n-я координата точки x_0, а x_0' — набор ее первых $(n-1)$ координат, t — параметр вдоль бихарактеристики. Пусть I — интервал этой бихарактеристики, содержащий (x_0, ξ_0) и не пересекающийся с $WF(f)$. Докажем, что либо $I \subset WF(u)$, либо $I \cap WF(u) = \varnothing$.

Пусть даны такие $\varphi(x, \theta)$ и $\Phi(x, \theta)$, как в предложении Д1.5. Положим

$$\varphi_t(x, \theta) = \varphi(x', x_n - t, \theta), \qquad \Phi_t(x, \theta) = \Phi(x', x_n - t, \theta).$$

Тогда $\operatorname{supp}\varphi_t$ близок к $(x_0', (x_0)_n + t)$ и вблизи этой же точки определена функция Φ_t. При этом очевидно, что подбором φ, Φ можно сделать φ_t и Φ_t любыми функциями, для которых условия предложения Д1.5 выполнены для точки $(x_0', (x_0)_n + t, \xi_0)$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\,\langle u, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\rangle = \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t}\,(\varphi_t e^{-i\Phi_t})\right\rangle = \left\langle u, \left(-\frac{\partial}{\partial x_n}\right)(\varphi_t e^{-i\Phi_t})\right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n}\,u, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\right\rangle = \langle if, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\rangle = R(t, \theta), \quad \text{(Д1.22)}$$

причем из условия $I \cap WF(f) = \varnothing$ и предложения Д1.5 следует, что при интересующих нас значениях t равномерно по t выполнена оценка

$$|R(t, \theta)| \leqslant C_N\langle\theta\rangle^{-N}, \qquad \theta \in \Gamma,\ |\theta| \geqslant 1, \qquad \text{(Д1.23)}$$

где Γ — достаточно малая коническая окрестность точки θ_0. Но отсюда

$$\langle u, \varphi_{t_1} e^{-i\Phi_{t_1}}\rangle - \langle u, \varphi_{t_2} e^{-i\Phi_{t_2}}\rangle = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\,\langle u, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\rangle\,dt\right| \leqslant |t_1 - t_2|\,C_N\langle\theta\rangle^{-N}. \qquad \text{(Д1.24)}$$

Поэтому, если при каком-то t функция $\langle u, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\rangle$ быстро убывает по θ в Γ, то это же верно при всех t, что и дает требуемый результат.

2) Пусть теперь P — произвольный классический ПДО 1-го порядка (т. е. $P \in CL^1(X)$) с вещественным главным символом $p_1(x, \xi)$. Мы хотим снова провести выкладку (Д1.22). Для этого мы должны так подобрать зависящие от параметра τ функции φ, Φ, что

$$\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\,[\varphi e^{-i\Phi}] - {}^tP[\varphi e^{-i\Phi}] \tag{Д1.25}$$

быстро убывает по θ в конусе Γ равномерно по τ, причем при $\tau = 0$ выполнены условия предложения Д1.5 для точки (x_0, ξ_0).

Условие убывания (Д1.25) приводит к уравнению для Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - p_1(x, \Phi_x) = 0, \tag{Д1.26}$$

которое мы можем решить (при малых τ), произвольно задавая $\Phi|_{\tau=0}$. При этом важно отметить, что вдоль бихарактеристики $(x(\tau), \xi(\tau))$ функции $p_1(x, \xi)$ мы будем иметь

$$\Phi_x(x(\tau), \theta_0, \tau) = \xi(\tau) \tag{Д1.27}$$

(см. § 17), если это было выполнено при $\tau = 0$, что мы предполагаем. Для однородных компонент символа φ получаются уравнения переноса, которые решаются опять-таки при произвольном задании $\varphi|_{\tau=0}$ аналогично уравнениям переноса для q_{-j} из § 20. Способ их решения (см. § 17) показывает, что носитель однородных компонент φ переносится вдоль бихарактеристик функции $p_1(x, \xi)$. Благодаря этому дальнейшее рассуждение при малых τ проходит аналогично соответствующему рассуждению для оператора $i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$.

Заметим теперь, что необходимость ограничиться малыми τ не имеет значения, поскольку теорему Д1.1 достаточно доказывать для сколь угодно малых кусков бихарактеристик, ибо тогда по очевидной причине она верна и для больших связных кусков.

3) Рассмотрим, наконец, случай оператора P произвольного порядка m. Пусть Q — классический эллиптический собственный ПДО порядка $1 - m$ с вещественным главным символом $q(x, \xi)$. Положим $P_1 = PQ$. Тогда $P_1 \in CL^1(X)$ и главный символ $p_1(x, \xi)$ оператора P_1 имеет вид

$$p_1(x, \xi) = p_m(x, \xi)\, q(x, \xi).$$

Заметим, что в теореме Д1.1 в силу следствия Д1.4 достаточно рассматривать лишь нулевые бихарактеристики. Но ввиду соотношений

$$(p_1)_\xi = (p_m)_\xi q + p_m \cdot q_\xi = (p_m)_\xi q \quad \text{при } p_m = 0,$$
$$(p_1)_x = (p_m)_x q + p_m \cdot q_x = (p_m)_x q \quad \text{при } p_m = 0,$$

нулевые бихарактеристики функций p_1 и p_m отличаются лишь заменой параметра. Принимая во внимание следствие Д1.5, мы видим, что утверждение теоремы Д1.1 для P вытекает из такого же утверждения для P_1, которое доказано в п. 2). ■

З а д а ч а Д1.1. Пусть A — обобщенная функция, заданная осциллирующим интегралом

$$\langle A, \varphi\rangle = \int e^{i\Phi(x,\theta)}\, a(x, \theta)\, \varphi(x)\, dx\, d\theta,$$

где Φ — невырожденная фазовая функция, $a(x, \theta) \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ (см. § 1). Доказать, что

$$WF(A) \subset \{(x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0) \colon \exists \theta \in \mathbb{R}^N \backslash 0,\ \Phi'_\theta(x, \theta) = 0,\ \Phi'_x(x, \theta) = \xi\}.$$

З а д а ч а Д1.2. Пусть для двух обобщенных функций $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(X)$ выполнено условие (Д1.13), обеспечивающее возможность их умножения. Доказать, что

$$WF(u_1 u_2) \subset [WF(u_1) + WF(u_2)] \cup WF(u_1) \cup WF(u_2).$$

З а д а ч а Д1.3. Доказать, что для оператора D_n^k при любом натуральном k верна такая же теорема о распространении особенностей, что и для оператора D_n. Какой вид здесь имеет теорема Д1.1?

ДОБАВЛЕНИЕ 2

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Наблюдаемым величинам квантовой механики можно сопоставить операторы вида

$$(A_{(h)}u)\,(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b\Big(\frac{x+y}{2},\, h\xi\Big)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \qquad (\text{Д}2.1)$$

где параметр $h > 0$ есть так называемая постоянная Планка; оператор $A_{(h)}$ корректно определен, например, в $S(\mathbb{R}^n)$, если функция $b(z)$ принадлежит классу $\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^{2n})$.

Классическая механика является предельным случаем квантовой, когда постоянная Планка может считаться пренебрежимо малой. Поэтому представляют интерес асимптотические свойства операторов вида (Д2.1) при $h \to 0$; соответствующие асимптотики получили название *квазиклассических*.

Д2.1. Формулировка основного результата

Замена переменной $\xi \to h^{-1}\xi$ переводит (Д2.1) в

$$(A_{(h)}u)\,(x) = \frac{1}{h^n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi/h} b\Big(\frac{x+y}{2},\, \xi\Big)\, u(y)\, dy\, đ\xi; \qquad (\text{Д}2.2)$$

здесь символ уже не содержит параметра h, который теперь входит в фазовый множитель.

Будем функцию $b(z)$ называть *h-вейлевским символом* оператора $A_{(h)}$ или, короче, *h-символом* (в этом добавлении не будут использоваться τ-символы гл. IV, поэтому опасность путаницы исключена). Очевидно, 1-символ есть обыкновенный вейлевский символ.

Между h- и 1-символами имеется следующая связь. Сделаем в (Д2.2) замену переменных $x \to \sqrt{h}x$, $y \to \sqrt{h}y$, $\xi \to \sqrt{h}\xi$, после которой (Д2.2) перейдет в

$$(A_{(h)}u)\,(x\sqrt{h}) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b\Big(\sqrt{h}\,\frac{x+y}{2},\, \sqrt{h}\xi\Big)\, u(\sqrt{h}y)\, dy\, đ\xi. \qquad (\text{Д}2.3)$$

Введем в пространстве функций на $\mathbb{R}^n$ оператор растяжения

$$T_h\colon f(x) \to h^{n/4} f(\sqrt{h}x). \qquad (\text{Д}2.4)$$

Как легко понять, оператор T_h унитарен в $L^2(\mathbb{R}^n)$. С использованием оператора T_h равенство (Д2.3) может быть приведено к виду $T_h A_{(h)} u = A^{(h)}_{(1)} T_h u$ или

$$A_{(h)} = T_h^{-1} A^{(h)}_{(1)} T_h, \tag{Д2.5}$$

где $A^{(h)}_{(1)}$ — оператор с 1-символом $b^{(h)}(z) = b(\sqrt{h}z)$. Таким образом, оператор с h-символом $b(z)$ унитарно эквивалентен оператору с 1-символом $b^{(h)}(z)$.

Нас будет интересовать квазиклассическая асимптотика собственных значений.

Определение Д2.1. Пусть $A_{(h)}$ — самосопряженный полуограниченный снизу оператор. Через $N_h(\lambda)$ обозначается количество собственных значений оператора, не превосходящих λ (с учетом кратности). Если в интервале $(-\infty, \lambda]$ имеются точки непрерывного спектра оператора $A_{(h)}$, то по определению $N_h(\lambda) = +\infty$.

Замечание Д2.1. Вариационная лемма Глазмана (соотношение (28.1)) остается справедливой и для $N_h(\lambda)$; доказательство (см. § 28) можно с незначительными изменениями перенести на случай $N_h(\lambda)$.

Для того чтобы сформулировать основной результат, нам понадобится следующее

Предложение Д2.1. *Пусть $A_{(h)}$ — оператор с вещественным h-вейлевским символом $b(z) \in H\Gamma^{m, m_0}_\rho$, $m_0 \geqslant 0$. Тогда при каждом фиксированном $h > 0$ оператор $A_{(h)}$ существенно самосопряжен.*

Доказательство. При $m_0 > 0$ предложение следует из теоремы 26.2. Анализ доказательства теоремы 26.2 показывает, что строгое неравенство $m_0 > 0$ необходимо там только для справедливости включений $A \pm iI \in HG^{m, m_0}_\rho$. В условиях предложения при $m_0 = 0$ и $h = 1$ включения $A \pm iI \in HG^{m, 0}_\rho$ следуют из оценок

$$|b(z) \pm i| > b(z),$$
$$|\partial^\gamma (b(z) \pm i)| \leqslant C_\gamma |b(z)|\,|z|^{-\rho|\gamma|} =$$
$$= C_\gamma |b(z) \pm i|\,|z|^{-\rho|\gamma|} |b(z)|/|b(z) \pm i| \leqslant C_\gamma |b(z) \pm i|\,|z|^{-\rho|\gamma|}.$$

При $h \neq 1$ нужно воспользоваться (Д2.5) и тем, что $b^{(h)} \in H\Gamma^{m, m_0}_\rho$ (конечно, с другими, чем для $b(z)$, константами в оценках производных). ■

Пусть оператор $A_{(h)}$ имеет вещественный h-символ $b(z) \in H\Gamma^{m, 0}_\rho$. Так же, как в § 30, изменив, если нужно, знак, можно считать, что $b(z) \geqslant C > 0$ при $|z| \geqslant R_0$.

Положим
$$V(\lambda)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{b(z)<\lambda} dz. \tag{Д2.6}$$

Основной целью этого добавления является доказательство следующей теоремы.

Теорема Д2.1. *Пусть оператор $A_{(h)}$ имеет вещественный h-вейлевский символ $b(z)\in H\Gamma_\rho^{m,0}$, $b(z)\geqslant C>0$ при $|z|\geqslant R_0$. Пусть λ_0 таково, что $V(\lambda_0)<\infty$. Тогда для почти всех $\lambda<\lambda_0$ и любого $\varepsilon>0$ имеет место асимптотическая формула*
$$N_h(\lambda)=h^{-n}(V(\lambda)+O(h^{1/2-\varepsilon})). \tag{Д2.7}$$

Замечание Д2.2. Между асимптотиками по h при $h\to 0$ и по λ при $\lambda\to+\infty$ имеется тесная связь, которая может быть описана явно, когда символ $b(z)$ однороден: $b(tz)=t^s b(z)$, $t>0$, $s>0$. Согласно (Д2.5) оператор с h-символом $b(z)$ подобен оператору с символом $b^{(h)}(z)=h^{s/2}b(z)$, поэтому $N_h(\lambda)=N(h^{-s/2}\lambda)$.

Замечание Д2.3. Теорема Д2.1 является аналогом теоремы 30.1. В формулировке последней, помимо прочего, имелось существенное требование $b(z)\geqslant C|z|^{m_0}$, $C>0$, $m_0>0$. Теорема Д2.1 утверждает меньшую зависимость асимптотики по h от поведения символа на бесконечности.

Д2.2. Идея доказательства теоремы Д2.1

Доказательство теоремы основано на тех же соображениях, что и доказательство теоремы 30.1.

Будет построен приближенный спектральный проектор $\mathscr{F}_h$ следующим образом. Пусть χ_λ — характеристическая функция интервала $(-\infty,\lambda]$; мы построим семейство функций $\chi_{h,\lambda}$, сходящихся к χ_λ при $h\to 0$. $\mathscr{F}_h$ — это оператор с h-символом $\chi_{h,\lambda}(b(z))$, где $b(z)$ — h-символ оператора $A_{(h)}$.

Будет доказано, что построенное семейство $\mathscr{F}_h$ обладает следующими свойствами:

1°. $\mathscr{F}_h^*=\mathscr{F}_h$;

2°. $\mathscr{F}_h$ — ядерный оператор, и при $h\to 0$
$$||\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h||_1=O(h^{-n+\varkappa});$$

3°. $\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\mathscr{F}_h\leqslant Ch^{\varkappa}$;

4°. $(I-\mathscr{F}_h)(A_{(h)}-\lambda I)(I-\mathscr{F}_h)\geqslant -Ch^{\varkappa}$;

5°. $\operatorname{Sp}\mathscr{F}_h=h^{-n}V(\lambda)(1+O(h^{\varkappa}))$;

здесь $0<\varkappa<1/2$, а функция $V(\lambda)$, фигурирующая в формулировке п. 5°, есть некоторая положительная неубывающая функция, определенная на интервале $[\lambda,\,\lambda+\varepsilon]$ и дифференцируемая справа в точке λ. Заметим также, что $\operatorname{Im}\mathscr{F}_h\subset D_{A_{(h)}}$, где $D_{A_{(h)}}$ — область определения оператора $A_{(h)}$.

При наличии семейства операторов, обладающих свойствами 1°—5°, основой для получения асимптотической формулы (Д2.7) служит теорема 28.1, перефразированная в новых терминах. Для удобства ссылок сформулируем соответствующий результат.

Предложение Д2.2. *Пусть $A_{(h)}$ — семейство существенно самосопряженных полуограниченных снизу операторов; $\mathscr{F}_h$ — такое семейство операторов, что $\operatorname{Im}\mathscr{F}_h\subset D_{A_{(h)}}$ и выполнены свойства 1°—5°. Тогда при $h\to 0$*

$$N_h(\lambda)=h^{-n}(V(\lambda)+O(h^{\varkappa})).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 28.1.

Упражнение Д2.1. Доказать предложение Д2.2.

Д2.3. Символы и операторы с параметром

Для изучения приближенного спектрального проектора удобно ввести класс символов, зависящих от параметра (ср. п. 29.1).

Определение Д2.2. Через $\Sigma^{m,\,\mu}_{\rho,\,\delta}$ обозначается класс функций $a(z,\,h)$, определенных при $z\in\mathbb{R}^{2n}$, $0<h\leqslant h_0$, бесконечно дифференцируемых по z и удовлетворяющих оценкам

$$|\,\partial_z^{\gamma}a(z,\,h)\,|\leqslant C_{\gamma}\langle z\rangle^{m-\rho|\gamma|}h^{\mu-\sigma|\gamma|}. \tag{Д2.8}$$

Здесь $m,\,\mu,\,\rho,\,\sigma\in\mathbb{R}$, $\rho>0$, $\sigma\leqslant 1/2$.

Ясно, что если $a_j\in\Sigma^{m_j,\mu_j}_{\rho_j,\sigma_j}$, $j=1,\,2$, то $a_1a_2\in\Sigma^{m_1+m_2,\mu_1+\mu_2}_{\rho,\,\sigma}$, где $\rho=\min(\rho_1,\,\rho_2)$, $\sigma=\max(\sigma_1,\,\sigma_2)$.

Заметим, что при каждом фиксированном h, $0<h\leqslant h_0$, из включения $a\in\Sigma^{m,\,\mu}_{\rho,\,\sigma}$ следует $a(z,\,h)\in\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^{2n})$ и формула (Д2.2) корректно определяет класс зависящих от параметра операторов $A(h)$, действующих в $S(\mathbb{R}^n)$ (зависимость от параметра имеется как в символе, так и в фазовом множителе). Соответствующий класс операторов будем обозначать через $S^{m,\,\mu}_{\rho,\,\sigma}$.

Из определения Д2.2 следует, что при $\sigma>0$ производные символа могут оцениваться через растущие при $h\to 0$ степени h. Однако влияние растущих степеней h исключается при действии соответствующего h-символу оператора. В частности, верно следующее

Предложение Д2.3. *Пусть $A(h)\in S^{0,\,\mu}_{\rho,\sigma}$, $\mu>0$, $\sigma<1/2$. Тогда оператор $A(h)$ ограничен в $L^2(\mathbb{R}^n)$ равномерно по h при $0<h\leqslant h_0$.*

Доказательство. Пусть $a(z,\,h)$ — h-символ оператора $A(h)$ и $A^{(h)}_{(1)}(h)$ — оператор с 1-символом $a^{(h)}(z,\,h)=a(\sqrt{h}z,\,h)$. По (Д2.5) операторы $A(h)$ и $A^{(h)}_{(1)}(h)$ унитарно эквивалентны, поэтому

$$||A(h)||=||A^{(h)}_{(1)}(h)||. \tag{Д2.9}$$

Докажем теперь ограниченность оператора $A^{(h)}_{(1)}(h)$. Выберем $0<\rho'<\min(\rho,\,1-2\sigma)$; тогда

$$\begin{aligned}|\,\partial_z^\gamma a^{(h)}(z,\,h)\,|=h^{|\gamma|/2}\Big|\partial_y^\gamma a(y,\,h)\big|_{y=\sqrt{h}z}\Big|\leqslant C_\gamma h^{|\gamma|/2}\langle\sqrt{h}z\rangle^{-\rho|\gamma|}h^{\mu-\sigma|\gamma|}\leqslant\\ \leqslant C_\gamma h^{|\gamma|(1/2-\sigma)+\mu}\langle\sqrt{h}z\rangle^{-\rho'|\gamma|}\leqslant C'_\gamma h^{|\gamma|(1/2-\sigma-\rho'/2)+\mu}\langle z\rangle^{-\rho'|\gamma|}.\end{aligned} \tag{Д2.10}$$

В выкладке (Д2.10) мы воспользовались очевидным при $\varkappa>0$ неравенством

$$(1+\sqrt{h}|\,z\,|)^{-\varkappa}\leqslant C(\sqrt{h}+\sqrt{h}|\,z\,|)^{-\varkappa}=Ch^{-\varkappa/2}\langle z\rangle^{-\varkappa}.$$

Таким образом, $a^{(h)}(z,\,h)\in\Gamma^0_{\rho'}(R^{2n})$ равномерно по h и по теореме 24.3 оператор $A^{(h)}_{(1)}(h)$ ограничен в $L^2(\mathbb{R}^n)$ равномерно по h. ■

Приведем теперь выражение для следа оператора через его h-символ. Из (Д2.5) следует, что

$$\mathrm{Sp}\;A_{(h)}=\mathrm{Sp}\,(T_h^{-1}A^{(h)}_{(1)}T_h)=\mathrm{Sp}\;A^{(h)}_{(1)}. \tag{Д2.11}$$

Воспользовавшись (27.2), получаем

$$\mathrm{Sp}\;A_{(h)}=\int b^{(h)}(x,\,\xi)\,dx\,đ\xi=h^{-n}\int b(x,\,\xi)\,dx\,đ\xi. \tag{Д2.12}$$

С помощью такого же рассуждения переносится на случай h-символов оценка ядерной нормы (27.12):

Предложение Д2.4. *Существуют такие постоянные C и N, что для оператора $A(h)$ с h-символом $b(z,\,h)$ выполнена оценка для ядерной нормы*:

$$||A(h)||_1\leqslant Ch^{-n}\sum_{|\gamma|\leqslant N}h^{|\gamma|/2}\int|\,\partial_z^\gamma b(z,\,h)\,|\,dz. \tag{Д2.13}$$

Д2.4. h-антивиковские символы

Для операторов (Д2.2), действие которых зависит от параметра h, имеется следующий аналог антивиковских символов, введенных в § 24.

Всю конструкцию п. 24.1 можно провести, отправляясь, вместо функции $\Phi_0(x)$, от функции

$$\Psi_0(x) = (\pi h)^{-n/4} e^{-x^2/(2h)} = (T_h^{-1}\Phi_0)(x).$$

Оператор $A^{(h)}$ с h-антивиковским символом $a(x, \xi)$ определяется аналогично (24.9):

$$A_{(h)} = \int a(x, \xi)\, Q_{x,\xi}\, dx\, đ\xi, \qquad (Д2.14)$$

где $Q_{x,\xi} = T_h^{-1} P_{x,\xi} T_h$ — проекторы, играющие роль проекторов $P_{x,\xi}$ в определении (24.9).

Все результаты § 24 могут быть без труда перенесены на случай h-антивиковских символов. В частности, из (Д2.14) следует, что оператор неотрицателен, когда неотрицателен его h-антивиковский символ.

Легко подсчитать, что ядро оператора Q_0 проектирования на вектор Ψ_0 равно $(\pi h)^{-n/2} e^{-(x^2+y^2)/(2h)}$, а h-вейлевский символ $\sigma_0(x, \xi)$ оператора Q_0 равен

$$\sigma_0(x, \xi) = 2^n e^{-(x^2+\xi^2)/h}. \qquad (Д2.15)$$

Воспользовавшись (Д2.14) и (Д2.15), получаем формулу связи между h-вейлевским символом $b(z)$ и h-антивиковским символом $a(z)$:

$$b(z) = (\pi h)^{-n} \int a(z')\, e^{-\frac{|z-z'|^2}{h}}\, dz'. \qquad (Д2.16)$$

Из (Д2.16) такими же рассуждениями, как при доказательстве теоремы 24.1, может быть получен следующий аналог леммы 29.1.

Л е м м а Д2.1. *Пусть $B(h)$ — оператор с h-антивиковским символом $a(z, h) \in \Sigma_{\rho,\sigma}^{m,\mu}$, и пусть $b(z, h)$ — его h-символ. Тогда*

$$a - b = \sum_{0<|\gamma|<N} h^{|\gamma|/2} c_\gamma (\partial_z^\gamma a) + r_N,$$

где $c_\gamma = 0$ при нечетных $|\gamma|$ и $r_N \in \Sigma_{\rho,\sigma}^{m-\rho N,\, \mu+(1/2-\sigma)N}$.

Д2.5. Формула композиции

Для операторов из классов $S_{\rho,\sigma}^{m,\mu}$ верна формула композиции в следующей форме.

Т е о р е м а Д2.2. *Пусть $a_j \in \Sigma_{\rho_j,\sigma_j}^{m_j,\mu_j}$, $j = 1, 2$; $A_j(h)$ — соответствующие операторные функции. Тогда*

$$A_1(h) \circ A_2(h) \in S_{\rho,\sigma}^{m_1+m_2,\, \mu_1+\mu_2},$$

где $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$, *причем если* $b(z, h)$ *есть* h*-вейлевсяий символ композиции, то*

$$b = \sum_{|\alpha+\beta|<N} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{h}{2}\right)^{|\alpha+\beta|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1)\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2) + h^N r_N, \tag{Д2.17}$$

где

$$r_N \in \Sigma_{\rho,\,\sigma}^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2),\,\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)}. \tag{Д2.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно было бы получить доказательство, полностью продублировав доказательство теоремы 29.1. Чтобы не повторять выкладки п. 29.1, мы при доказательстве будем ссылаться там, где это возможно, на отдельные куски доказательств теоремы 29.1.

Воспользуемся соотношением (Д2.5):

$$A_1(h) \circ A_2(h) = T_h^{-1} (A_1(h))_{(1)}^{(h)}\, T_h \circ T_h^{-1} (A_2(h))_{(1)}^{(h)} T_h = \\ = T_h^{-1} [(A_1(h))_{(1)}^{(h)} \circ (A_2(h))_{(1)}^{(h)}]\, T_h.$$

Для символа $b'(x, \xi, h)$ композиции операторов $(A_j(h))_{(1)}^{(h)}$ с символами $a_j^{(h)}(z, h) = a_j(\sqrt{h}z, h)$ согласно выкладкам (29.4)—(29.18) (в них не используется характер зависимости от параметра) можно получить представление

$$b'(x, \xi, h) = \sum_{|\alpha+\beta|<N} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!}\, 2^{-|\alpha+\beta|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1^{(h)})\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2^{(h)}) + \tilde{r}_N. \tag{Д2.19}$$

Заметим, что

$$(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1^{(h)})\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2^{(h)}) = h^{|\alpha+\beta|} [(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1)\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2)]^{(h)}.$$

Поэтому, переходя от 1-вейлевских символов в равенстве (Д2.19) к h-вейлевским согласно (Д2.5), получим конечные слагаемые в (Д2.17).

Оценка остаточного члена (речь пока идет об 1-вейлевском символе), как показано в п. 29.1, сводится к равномерным по $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$ оценкам интегралов вида

$$I(x, \xi) = \int e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)} [\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1^{(h)}(x + \tau_1 y, \xi + \eta, h)] \times \\ \times [\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2^{(h)}(x + \tau_2 z, \xi + \zeta, h)]\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz, \tag{Д2.20}$$

$$|\alpha + \beta| \geqslant N.$$

Аналогично вышеизложенному мы получаем, что 1-вейлевскому символу $I(x,\,\xi)$ отвечает h-вейлевский символ

$$J(x,\,\xi)=h^{|\alpha+\beta|}\int e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}[\partial_\xi^\alpha\, D_x^\beta a_1(x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\,\xi+\sqrt{h}\,\eta,\,h)]\times$$
$$\times\,[\partial_\xi^\beta\, D_x^\alpha a_2(x+\tau_2\sqrt{h}z,\,\xi+\sqrt{h}\,\zeta,\,h)]\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz, \quad (\text{Д}2.21)$$
$$|\,\alpha+\beta\,|\geqslant N.$$

Следует доказать включение

$$R_N=h^{-N}J\in\Sigma_{\rho,\,\sigma}^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2),\,\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)}$$

равномерно по $\tau_1,\,\tau_2\in[0,\,1]$.

Дифференцируя (Д2.21) по x и ξ, получим, что производная $\partial_x^\gamma\partial_\xi^\delta R_N$ является линейной комбинацией выражений вида

$$h^{|\alpha+\beta|-N}\int e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}[\partial_x^{\alpha+\gamma'}\partial_\xi^{\beta+\delta'}a_1(x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\,\xi+\sqrt{h}\,\eta,\,h)]\times$$
$$\times\,[\partial_x^{\beta+\gamma''}\partial_\xi^{\alpha+\delta''}a_2(x+\tau_2\sqrt{h}\,z,\,\xi+\sqrt{h}\,\zeta,\,h)]\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz, \quad (\text{Д}2.22)$$
$$\gamma'+\gamma''=\gamma, \qquad \delta'+\delta''=\delta.$$

Так же, как и в п. 29.1, интегрированием по частям получим убывающие множители типа $\langle y,\,\eta\rangle^{-2M}$, $\langle z,\,\zeta\rangle^{-2M}$. Нужно только учесть, что при дифференцировании по $y,\,\eta\,(z,\,\zeta)$ функции a_1 (соответственно a_2) возникает множитель $\sqrt{h}$. Таким образом, (Д2.22) приведется к линейной комбинации интегралов вида

$$h^{|\alpha+\beta|-N+|\varkappa_1+\varkappa_2|/2}\int e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\langle y,\,\eta\rangle^{-2M}\langle z,\,\zeta\rangle^{-2M}\times$$
$$\times\,[\partial_x^{\nu_1+\varkappa_1}a_1(x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\,\xi+\sqrt{h}\,\eta,\,h)]\times$$
$$\times\,[\partial_x^{\nu_2+\varkappa_2}a_2(x+\tau_2\sqrt{h}\,z,\,\xi+\sqrt{h}\,\zeta,\,h)]\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz, \quad (\text{Д}2.23)$$

где

$$\begin{aligned}\nu_1&=\alpha+\beta+\gamma'+\delta', \qquad |\,\nu_1\,|\geqslant N+|\,\gamma'+\delta'\,|;\\ \nu_2&=\alpha+\beta+\gamma''+\delta'', \qquad |\,\nu_2\,|\geqslant N+|\,\gamma''+\delta''\,|.\end{aligned} \quad (\text{Д}2.24)$$

Выражение (Д2.23) оценивается по модулю через

$$h^s\int\langle x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\,\xi+\sqrt{h}\,\eta,\,h\rangle^{m_1-\rho_1N-\rho_1|\gamma'+\delta'|}\times$$
$$\times\,\langle x+\tau_2\sqrt{h}\,z,\,\xi+\sqrt{h}\,\zeta,\,h\rangle^{m_2-\rho_2N-\rho_2|\gamma''+\delta''|}\times$$
$$\times\,\langle y,\,\eta\rangle^{-2M}\langle z,\,\zeta\rangle^{-2M}\,đ\eta\,đ\xi\,dy\,dz, \quad (\text{Д}2.25)$$

где $s = |\alpha+\beta| - N + |\varkappa_1+\varkappa_2|/2 + \mu_1 - \sigma_1|\nu_1+\varkappa_1| + \mu_2 - \sigma_2|\nu_2+\varkappa_2|$. Если учесть соотношения $\sigma_1, \sigma_2 \leqslant \sigma < 1/2$, $|\alpha+\beta| \geqslant N$, $\gamma'+\gamma''=\gamma$, $\delta'+\delta''=\delta$ и (Д2.24), то показатель s можно оценить следующим образом:

$$s = \mu_1 + \mu_2 - \sigma_1|\gamma'+\delta'| - \sigma_2|\gamma''+\delta''| - N(\sigma_1+\sigma_2) + \\ + (N - |\alpha+\beta|)(\sigma_1+\sigma_2-1) + |\varkappa_1|(1/2-\sigma_1) + |\varkappa_2|(1/2-\sigma_2) \geqslant \\ \geqslant \mu_1 + \mu_2 - \sigma|\gamma+\delta| - N(\sigma_1+\sigma_2).$$

Таким образом, степень h в (Д2.25) соответствует утверждению теоремы. Оценим теперь интеграл в (Д2.25) через нужную степень $\langle x, \xi\rangle$. Заметим, что он распадается в произведение интегралов

$$I = \int \langle x + \tau_1\sqrt{h}\,y,\ \xi + \sqrt{h}\,\eta\rangle^{m_1-\rho_1(N+|\gamma'+\delta'|)}\langle y, \eta\rangle^{-2M}\,đ\eta\,dy, \quad \text{(Д2.26)}$$

$$I' = \int \langle x + \tau_2\sqrt{h}\,z,\ \xi + \sqrt{h}\,\zeta\rangle^{m_2-\rho_2(N+|\gamma''+\delta''|)}\langle z, \zeta\rangle^{-2M}\,đ\zeta\,dz. \quad \text{(Д2.26}')$$

Оценим интеграл (Д2.26). Будем считать, что $m_1 - \rho_1 N < 0$, — в противном случае можно в разложении (Д2.18) взять N' членов так, что $m_1 - \rho_1 N' < 0$, и исследовать остаток $r_{N'}$, отнеся потом к $r_{N'}$ остаток r_N и конечную сумму в пределах $N \leqslant |\alpha+\beta| \leqslant N'$.

Воспользуемся очевидным неравенством *)

$$\langle x + \tau_1\sqrt{h}\,y,\ \xi + \sqrt{h}\,\eta\rangle^{-\varkappa} \leqslant \langle x, \xi\rangle^{-\varkappa}\langle \tau_1\sqrt{h}\,y,\ \sqrt{h}\,\eta\rangle^{\varkappa}, \quad \varkappa > 0. \quad \text{(Д2.27)}$$

Применяя (Д2.27) при $\varkappa = |m_1 - \rho_1 N - \rho_1|\gamma'+\delta'||$ получим для интеграла (Д2.26′) оценку

$$I \leqslant \langle x, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\gamma'+\delta'|}\int \langle \tau_1\sqrt{h}\,y,\ \sqrt{h}\,\eta\rangle^{\varkappa}\langle y, \eta\rangle^{-2M}\,đ\eta\,dy \leqslant \\ \leqslant \langle x, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\gamma'+\delta'|}\int \langle y, \eta\rangle^{\varkappa-2M}\,đ\eta\,dy = C_1\langle x, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\gamma'+\delta'|}. \quad \text{(Д2.28)}$$

Комбинируя оценку (Д2.28) с аналогичной оценкой для интеграла (Д2.26′), получим нужную степень $\langle x, \xi\rangle$ в оценке для интеграла (Д2.24), и включение (Д2.18) доказано. ■

Д2.6. Доказательство теоремы Д2.1

План доказательства таков: сначала строится приближенный спектральный проектор, затем последовательно проверяется выполнение свойств, необходимых для применения предложения Д2.2.

*) Неравенство (Д2.27) есть частный случай неравенства

$$(1+|x+y|+|\xi+\eta|)^m \leqslant (1+|x|+|\xi|)^m(1+|y|+|\eta|)^{|m|}.$$

1. Пусть $\chi(t,\,\lambda,\,\delta)$ — функция, введенная в п. 28.6:

$$\chi(t,\,\lambda,\,\delta)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad t\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при}\quad t\geqslant\lambda+2\delta,\end{cases}\tag{Д2.29}$$

$$|\,(\partial/\partial t)^k\chi(t,\,\lambda,\,\delta)\,|\leqslant C_k\delta^{-k}.\tag{Д2.30}$$

Выберем $\kappa=1/2-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ и положим

$$e(z,\,h)=\chi(b(z),\,\lambda,\,h^{\varkappa}).\tag{Д2.31}$$

(Мы опускаем несущественный для нас аргумент λ у функции $e(z,\,h)$.) Оператор $\mathscr{F}_h$ определим как оператор с h-символом $e(z,\,h)$.

Функция $e(z,\,h)$ бесконечно дифференцируема по z и

$$e(z,\,h)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad b(z)\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при}\quad b(z)\geqslant\lambda+2h^{\varkappa}.\end{cases}$$

Оценим производные $e(z,\,h)$ по z. Продифференцируем по z равенство (Д2.31):

$$\partial_z^{\gamma}(z,\,h)=\sum_{\gamma_1+\ldots+\gamma_k=\gamma}c_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k}(\partial^{\gamma_1}b(z))\ldots(\partial^{\gamma_k}b(z))\,\frac{\partial^k\chi}{\partial t^k}(t,\,\lambda,\,h)\Big|_{t=b(z)}.\tag{Д2.32}$$

Суммирование в (Д2.32) ведется по всевозможным разбиениям γ в сумму $\gamma_1+\ldots+\gamma_k$, где $k\leqslant|\,\gamma\,|$. Учитывая (Д2.30) и включение $b\in H\Gamma_{\rho}^{m,\,0}$, получаем для отдельного слагаемого в (Д2.32) оценку

$$\left|(\partial^{\gamma_1}b)\ldots(\partial^{\gamma_k}b)\left(\frac{\partial^k\chi(t,\,\lambda,\,h)}{\partial t^k}\Big|_{t=b(z)}\right)\right|\leqslant Ch^{-k\varkappa}|\,b\,|^k\times \\ \times\prod_{i=1}^{k}|\,\partial^{\gamma_i}b/b\,|\leqslant Ch^{-k\varkappa}|\,b\,|^k(1+|\,z\,|)^{-\rho|\gamma|}.\tag{Д2.33}$$

Заметим еще, что на носителе $e(z,\,h)$

$$|\,b\,|<\lambda+h^{\varkappa}.\tag{Д2.34}$$

Поэтому из (Д2.32)—(Д2.34) получаем оценку $|\,\partial_z^{\gamma}e(z,\,h)\,|\leqslant\leqslant Ch^{-k\varkappa}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}$, т. е.

$$e(z,\,h)\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,0}.\tag{Д2.35}$$

2. Мы должны теперь проверить, что для $\mathscr{F}_h$ выполнены все условия предложения Д2.2.

Оператор $\mathscr{F}_h$ симметричен благодаря вещественности символа и ограничен согласно (Д2.35) и предложению Д2.3, следовательно, $\mathscr{F}_h^*=\mathscr{F}_h$. Ядерность $\mathscr{F}_h$ вытекает из предложения Д2.4.

Будем обозначать h-символ любого оператора A через $\sigma(A)$. Чтобы оценить ядерную норму $\|\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h\|_1$, вычислим h-символ оператора $\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h$.

По формуле композиции (Д2.17)

$$\sigma(\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h)=-e(z,\,h)+e(z,\,h)^2+\sum_{|\alpha|+|\beta|<N} c_{\alpha\beta}h^{|\alpha+\beta|}h^{|\alpha+\beta|}(D_x^\alpha\partial_\xi^\beta e)\times \\ \times(D_x^\beta\partial_\xi^\alpha e)+h^N r_N,\qquad h^N r_N\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-2\rho N,\,(1-2\varkappa)N}. \quad (Д2.36)$$

Все слагаемые правой части в (Д2.36), кроме r_N, сосредоточены в области $\{z\colon \lambda<b(z)<\lambda+2h^\varkappa\}$, поэтому ядерные нормы соответствующих операторов могут быть по предложению Д2.4 оценены через

$$C[V(\lambda+2h^\varkappa)-V(\lambda)]\,h^{-n}. \quad (Д2.37)$$

Ядерная норма остатка оценивается через $o(h^{-n+\varkappa})$ при достаточно большом N.

Заметим теперь, что $V(\lambda)$ — неубывающая функция; по известной теореме Лебега она почти всюду дифференцируема. Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что рассматриваемое λ принадлежит множеству полной меры, на котором V дифференцируема. Тогда (Д2.37) трансформируется в нужную оценку

$$\|\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h\|_1\leqslant C[V'(\lambda)h^\varkappa+o(h^\varkappa)]\,h^{-n}\leqslant Ch^{-n+\varkappa}. \quad (Д2.38)$$

Кроме того, по (Д2.12)

$$\mathrm{Sp}\;\mathscr{F}_h=(2\pi h)^{-n}\int e(z,\,h)\,dz=h^{-n}[V(\lambda)+O(V(\lambda)-V(\lambda+2h^\varkappa))]= \\ =h^{-n}V(\lambda)\,(1+O(h^\varkappa)). \quad (Д2.39)$$

Таким образом, требования 1°, 2° и 5° предложения Д2.2 выполнены ($\mathscr{F}_h^*=\mathscr{F}_h$, (Д2.38) и (Д2.39)).

3. Проверим теперь требование 3° предложения Д2.2. Для этого нам понадобится h-символ оператора $\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h$. Вычислим сначала $\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I))$. Имеем

$$\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I))=e(z,\,h)\,(b(z)-\lambda)+ \\ +\sum_{1\leqslant|\alpha+\beta|<N} h^{|\alpha+\beta|}c_{\alpha\beta}(D_x^\alpha\,\partial_\xi^\beta e)\,(D_x^\beta\,\partial_\xi^\alpha b)+r_N,\qquad r_N\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{m-2N\rho,\,N(1-\varkappa)}. \quad (Д2.40)$$

Оператор R_N, отвечающий символу r_N, при $m-2N\rho<0$ ограничен и $\|R_N\|=O(h^{N(1-\varkappa)})=o(h^{\varkappa})$. Покажем, что для $\varphi_{\alpha\beta}=h^{|\alpha+\beta|}(\partial_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}e)\times$ $\times(\partial_x^{\beta}\partial_{\xi}^{\alpha}b)$ верно включение

$$\varphi_{\alpha\beta}\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-2|\alpha+\beta|\rho,\,\varkappa+(1-2\varkappa)|\alpha+\beta|},\qquad|\alpha+\beta|>0. \tag{Д2.41}$$

Для этого стандартным образом построим функцию $\varphi(z,\,h)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$, для которой $0\leqslant\varphi(z,\,h)\leqslant 1$,

$$\varphi(z,\,h)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad z\in\operatorname{supp}\partial_z e,\\ 0 & \text{при}\quad b(z)\geqslant\lambda+3h^{\varkappa},\ b(z)\leqslant\lambda-h^{\varkappa}\end{cases}$$

и которая строится, как $e(z,\,h)$ в п. 1 настоящего доказательства, с помощью сглаженной характеристической функции $\chi(t,\,\lambda,\,\lambda+2h^{\varkappa})$ интервала $(\lambda,\,\lambda+2h^{\varkappa})$ по формуле $\varphi(z,\,h)=\chi(b(z),\,\lambda,\,\lambda+2h^{\varkappa})$.

Аналогично (Д2.33), (Д2.34) можно проверить, что

$$\varphi\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,0}. \tag{Д2.42}$$

Заметим теперь, что при $|\alpha+\beta|>0$

$$\varphi_{\alpha\beta}=h^{|\alpha+\beta|}(\partial_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}e)\,[\partial_x^{\beta}\partial_{\xi}^{\alpha}(\varphi\cdot(b-\lambda))]. \tag{Д2.43}$$

Покажем, что $\varphi\cdot(b-\lambda)\in\sum_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,\varkappa}$. Ясно, что $|\varphi\cdot(b-\lambda)|\leqslant Ch^{\varkappa}$. Оценим производную по z. Имеем

$$\partial_z^{\gamma}[\varphi\cdot(b-\lambda)]=(\partial^{\gamma}\varphi)\,(b-\lambda)+\sum_{|\alpha|>0}c_{\alpha}(\partial^{\gamma-\alpha}\varphi)\,(\partial^{\alpha}(b-\lambda)). \tag{Д2.44}$$

Для 1-го слагаемого вследствие (Д2.42) есть оценка

$$|(\partial^{\gamma}\varphi(z,\,h)\,(b(z)-\lambda)|\leqslant Ch^{-\varkappa|\gamma|}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}h^{\varkappa}; \tag{Д2.45}$$

для слагаемых из суммы в (Д2.44) получаем

$$\begin{aligned}|(\partial^{\gamma-\alpha}\varphi)\,(\partial^{\alpha}(b-\lambda))|&=|\partial^{\gamma-\alpha}\varphi|\cdot|b|\cdot|(\partial^{\alpha}b)/b|\leqslant\\&\leqslant Ch^{-\varkappa|\gamma-\alpha|}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma-\alpha|-\rho|\alpha|}\leqslant Ch^{\varkappa-\varkappa|\gamma|}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}.\end{aligned} \tag{Д2.46}$$

Оценки (Д2.45), (Д2.46) доказывают включение $\varphi\cdot(b-\lambda)\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,\varkappa}$, откуда с учетом (Д2.43) следует включение (Д2.41). Таким образом, конечная сумма в (Д2.40) содержится в $\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-2\rho,\,1-\varkappa}$ и оператор $\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)$ представим в виде

$$\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)=Q_1+R, \tag{Д2.47}$$

причем $\|R\|=O(h^{1-\varkappa})=o(h^{\varkappa})$, а $\sigma(Q_1)=e\cdot(b-\lambda)$.

Используя (Д2.47), имеем

$$\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h=Q_1\mathscr{F}_h+R_1,\qquad\|R_1\|=o(h^{\varkappa}). \tag{Д2.48}$$

Вычислим символ оператора $Q_1\mathscr{F}_h$:

$$\sigma(Q_1\mathscr{F}_h) = e^2\cdot(b-\lambda) + \sum_{0<|\alpha+\beta|<N} c_{\alpha\beta} h^{|\alpha+\beta|}(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[e\cdot(b-\lambda)])\times(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta e) + r_N. \tag{Д2.49}$$

Вводя, как и выше, функцию φ и используя включение $e\cdot\varphi\cdot(b-\lambda)\in\in\Sigma^{0,\,\varkappa}_{\rho,\,\varkappa}$, получим, что норма оператора, отвечающего конечной сумме и остатку в (Д2.49), оценивается также через $O(h^{1-\varkappa})$.

Рассмотрим главный член в $-\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h)$ — функцию $q(z,\,h) = -e(z,\,h)^2(b(z)-\lambda)$. Для q и ее производных по z справедливы оценки

$$q(z,\,h)\geqslant -Ch^{\varkappa}; \tag{Д2.50}$$

$$|\,\partial^\gamma q\,| = \left|\sum_{|\alpha|>0} c_\alpha(\partial^\alpha b)\,(\partial^{\gamma-\alpha}e^2) + 2(b-\lambda)\sum_\alpha c_\alpha(\partial^{\gamma-\alpha}e)(\partial^\alpha e)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha|>0} c_\alpha h^{-\varkappa|\gamma-\alpha|}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}\,|\,\lambda\,| + Ch^{\varkappa}h^{-|\gamma|\varkappa}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|} \leqslant Ch^{\varkappa(1-|\gamma|)}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}. \tag{Д2.51}$$

Обозначим через P оператор с h-вейлевским символом $q(z,\,h)$, через Q — с h-антивиковским символом $q(z,\,h)$. Из (Д2.51) следует, что $h^{|\gamma|/2}\partial^\gamma q\in\Sigma^{-\rho|\gamma|,\,\varkappa+(1/2-\varkappa)|\gamma|}_{\rho,\,\varkappa}$, поэтому, согласно лемме Д2.1, $\sigma(P-Q)\in\in\Sigma^{-2\rho,\,1-\varkappa}_{\rho,\,\varkappa}$ и, значит, $\|P-Q\| = O(h^{1-\varkappa})$. Из (Д2.50) ясно, что $Q\geqslant -Ch^{\varkappa}$, но $P = Q+(P-Q)$, следовательно, и $P\geqslant -Ch^{\varkappa}$. Таким образом, для главной части и, стало быть, для всего оператора $\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h$ получена оценка

$$\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h\leqslant Ch^{\varkappa}. \tag{Д2.52}$$

4. Проверим теперь, что

$$(I-\mathscr{F}_h)\,(A_{(h)}-\lambda I)\,(I-\mathscr{F}_h)\geqslant -Ch^{\varkappa}. \tag{Д2.53}$$

Символ левой части в (Д2.53) после раскрытия скобок имеет вид

$$\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h) - \sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)) - \sigma((A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h) + (b(z)-\lambda). \tag{Д2.54}$$

В п. 3 доказательства было показано, что в первых двух слагаемых в (Д2.54) выделяются главные члены $e^2\cdot(b-\lambda)$, и $e\cdot(\lambda-b)$, а операторы, отвечающие остаткам, оцениваются по норме через $O(h^{1-\varkappa})$. Третье слагаемое в (Д2.54) аналогично второму. Таким образом,

$$\sigma((I-\mathscr{F}_h)\,(A_{(h)}-\lambda I)\,(I-\mathscr{F}_h)) = (1-e)^2(b-\lambda) + r, \tag{Д2.55}$$

и оператор R с h-символом r допускает оценку

$$\|R\| = O(h^{1-\varkappa}).$$

Рассмотрим оператор P с h-символом

$$q(z,\, h) = (1 - e(z,\, h))^2\, (b(z) - \lambda).$$

Рассуждениями, аналогичными использованным в п. 29.3 при доказательстве теоремы о положительности оператора с положительным символом, можно показать, что

$$P = Q_k + A_k. \tag{Д2.56}$$

Здесь оператор Q_k имеет h-антивиковский символ

$$q_k(z,\, h) = q(z,\, h) + \sum_{2\leqslant|\gamma|<N} c_\gamma h^{|\gamma|/2} \partial_z^\gamma q(z,\, h) + r_N(z,\, h), \tag{Д2.57}$$

где $r_N \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{m-2\rho N,\; (1/2-\varkappa)N}$; поэтому оператор с h-символом r_N можно оценить по норме через $O(h^{1-\varkappa})$.

Для оператора A_k в (Д2.56) имеется включение $A_k \in S_{\rho,\,\varkappa}^{m-2\rho k,\,(1-2\varkappa)k}$, и поэтому $\|A_k\| = O(h^{1-\varkappa})$ при подходящем выборе k.

Сохраним обозначение q_k для правой части (Д2.57) уже без остатка r_N, а Q_k для оператора с соответствующим h-антивиковским символом.

Пусть $\varphi(z,\, h)$ — функция, введенная в предыдущем пункте доказательства. Разобьем q_k на два слагаемых:

$$q_k = \varphi q_k + (1 - \varphi)\, q_k. \tag{Д2.58}$$

В п. 3 показано, что $\varphi \cdot (b - \lambda) \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,\varkappa}$, откуда ясно, что $\varphi(1 - e)^2 \times$ $\times\, (b - \lambda) \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,\varkappa}$. Выкладками, аналогичными (Д2.44)—(Д2.46) в п. 3, можно показать, что $\varphi \cdot h^{|\gamma|/2} \partial_z^\gamma q(z,\, h) \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-\rho|\gamma|,\,\varkappa+(1/2-\varkappa)|\gamma|}$. Следовательно, оператор с h-антивиковским символом φq_k оценивается по норме через $O(h^\varkappa)$.

Покажем, наконец, что при малых h

$$(1 - \varphi)\, q_k \geqslant 0 \tag{Д2.59}$$

и, значит, $Q_k \geqslant -Ch^\varkappa$. Для этого заметим, что

$$(1 - \varphi)\, q_k = \begin{cases} (1 - \varphi)\Bigl(b - \lambda + \sum\limits_{2\leqslant|\gamma|<N} c_\gamma h^{|\gamma|/2} \partial^\gamma b\Bigr) & \text{при } z \in D_h, \\ 0 & \text{при } z \notin D_h, \end{cases} \tag{Д2.60}$$

где $D_h = \{z\colon\, b(z,\, h) \geqslant \lambda + 2h^{\varkappa}\}$. Соотношение (Д2.60) очевидно, так как $(1 - e(z,\, h))(1 - \varphi(z,\, h)) = 0$ при $z \notin D_h$ и $1 - e(z,\, h) = 1$ при $z \in D_h$. Таким образом, в D_h

$$(1-\varphi)\, q_k = (1-\varphi)\,(b-\lambda)(1 + \sum c_\gamma h^{|\gamma|/2} (\partial^\gamma b)/(b-\lambda)). \qquad \text{(Д2.61)}$$

Заметим теперь, что в области D_h

$$b(z)/(b(z)-\lambda) = (1-\lambda/b(z))^{-1} \leqslant (1-\lambda/(\lambda+2h^{\varkappa}))^{-1} \leqslant Ch^{-\varkappa};$$

отсюда

$$|\, h^{|\gamma|/2} (\partial^\gamma b)/(b-\lambda)\,| \leqslant Ch^{|\gamma|/2-\varkappa} \langle z \rangle^{-\rho|\gamma|}.$$

Следовательно, сумма в правой части (Д2.61) оценивается через $Ch^{1-\varkappa} = o(1)$, т. е.

$$(1-\varphi)\, q_k = (1-\varphi)\,(b-\lambda)\,(1+o(1)) \geqslant 0.$$

Итак, мы проверили выполнение требований 1°—5° предложения Д2.2 (соотношения (Д2.38), (Д2.39), (Д2.52) и (Д2.53)) и можем применить предложение. Теорема Д2.1 доказана. ■

Д2.7. Поведение $N_h(\lambda)$, когда $V(\lambda) = +\infty$

В теореме Д2.1 рассматривается квазиклассическая асимптотика собственных чисел при $\lambda < \lambda_0$, где $V(\lambda_0) < +\infty$. Включение $b(z) \in H\Gamma_\rho^{m,\,0}$ не исключает существования таких λ, для которых $V(\lambda) = +\infty$ (для символов из $H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$, $m_0 > 0$, такая ситуация невозможна). Дополнением к теореме Д2.1 в этом случае служит следующая

Теорема Д2.3. *Пусть $b(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Д2.1, и пусть $V(\lambda) = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon_0 > 0$*

$$\lim_{h\to 0} h^n N_h(\lambda + \varepsilon_0) = +\infty.$$

Доказательство. Для любого N мы построим пространство $H_{\tilde N}$, на котором выполнено неравенство

$$((A_{(h)} - \lambda I)\,\xi,\, \xi) \leqslant Ch^{\varkappa}(\xi,\, \xi), \quad \xi \in H_{\tilde N}, \qquad \text{(Д2.62)}$$

причем при достаточно малом h

$$\dim H_{\tilde N} \geqslant h^{-n} N. \qquad \text{(Д2.63)}$$

Из (Д2.62), (Д2.63) следует по лемме Глазмана неравенство $N_h(\lambda + ch^{\varkappa}) \geqslant h^{-n}N$, которое влечет за собой утверждение теоремы.

Введем множество $\Omega^\lambda = \{z\colon\, b(z) \leqslant \lambda\}$. Из определения функции $V(\lambda)$ видно, что $V(\lambda) = (2\pi)^{-n}\, \mathrm{mes}\, \Omega^\lambda$, так что в условиях теоремы $\mathrm{mes}\, \Omega^\lambda = +\infty$.

Пусть Ω_ε — семейство областей с гладкими границами, обладающее следующими свойствами:

1) Ω_ε ограничены, $\Omega_\varepsilon \subset \Omega^\lambda$;

2) $W_\varepsilon = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} \Omega_\varepsilon \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$;

3) $\inf\limits_{x\in\Omega_\varepsilon, y\in\mathbb{R}^{2n}\setminus\Omega^\lambda} |x-y| \geqslant \varepsilon$, т. е. расстояние от Ω_ε до $\partial\Omega^\lambda$ не меньше чем ε.

Мы построим сейчас сглаженную характеристическую функцию множества Ω_ε (это можно сделать по образцу построения в п. 28.6).

Пусть $2h^\varkappa < \varepsilon$ (как всегда $0<\varkappa<1/2$), $\psi_\varepsilon(z,\, h)$ — характеристическая функция $(h^\varkappa)$-оболочки множества Ω_ε. Положим

$$\chi_\varepsilon(z,\, h) = h^{-2n\varkappa} \int \psi_\varepsilon(y,\, h)\, \chi_0\left((y-z)\, h^{-\varkappa}\right) dy,$$

где $\chi_0\,(\nu) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\chi_0 \geqslant 0$, $\chi_0\,(\nu) = 0$ при $|\nu| \geqslant 1$ и $\int \chi_0(\nu)\, d\nu = 1$.

Очевидно, что

$$\operatorname{supp} \chi_\varepsilon \subset \Omega^\lambda. \tag{Д2.64}$$

Кроме того, легко проверить, что $|\,\partial_z^\gamma \chi_\varepsilon(z,\, h)\,| < Ch^{-\varkappa|\gamma|}$, а из этой оценки и из финитности χ_ε следует включение

$$\chi_\varepsilon\,(z,\, h) \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-\infty,\,0} \tag{Д2.65}$$

Пусть $\mathscr{F}_h$ — приближенный спектральный проектор, построенный в п. Д2.6. Обозначим через F_h оператор с h-активиковским символом $e(z,\, h)$, через $\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}$ — оператор с h-символом $\chi_\varepsilon(z,\, h)$ и через $E_{\varepsilon,\,h}$ — оператор с h-антивиковскнм символом $\chi_\varepsilon(z,\, h)$. Между операторами $\mathscr{F}_h$, F_h, $\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}$ и $E_{\varepsilon,\,h}$ имеются следующие соотношения:

$$\mathscr{F}_h - F_h = R \in S_{\rho,\,\varkappa}^{-2\rho,\,1-2\varkappa}, \quad \|R\| \leqslant Ch^{1-2\varkappa}; \tag{Д2.66}$$

$$F_h \geqslant E_{\varepsilon,\,h}; \tag{Д2.67}$$

$$\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h} - E_{\varepsilon,\,h} = R' \in S_{\rho,\,\varkappa}^{-\infty,\,1-2\varkappa}, \quad \|R'\| \leqslant Ch^{1-2\varkappa}. \tag{Д2.68}$$

Здесь (Д2.66) и (Д2.68) справедливы вследствие леммы Д2.1, (Д2.67) очевидно, так как $\chi_\varepsilon \leqslant e$ благодаря (Д2.64).

Рассмотрим теперь оператор $\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}$. Так же, как в п. 2 доказательства теоремы Д2.1, рассматривая h-символ оператора $\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}^2 - \mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}$, можно получить оценку

$$\|\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}^2 - \mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}\|_1 \leqslant C(W_{\varepsilon,\,h} - W_\varepsilon)h^{-n}, \tag{Д2.69}$$

где $W_{\varepsilon,\,h}$ — объем $(2h^\varkappa)$-оболочки множества Ω_ε. Но $W_{\varepsilon,\,h} - W_\varepsilon = O(h^\varkappa)$, поскольку область Ω_ε ограничена и имеет гладкую границу. Поэтому верна оценка

$$\|\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}^2 - \mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}\|_1 \leqslant Ch^{-n+\varkappa}. \tag{Д2.70}$$

Аналогично получается равенство

$$\mathrm{Sp}\,\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}=h^{-n}W_\varepsilon(1+O(h^{\varkappa})). \tag{Д2.71}$$

Из (Д2.70) и (Д2.71) так же, как и в леммах 28.2, 28.3, может быть получено асимптотическое выражение для числа $\tilde N$ собственных значений оператора $\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}$, лежащих на $[1/2,\,3/2]$:

$$\tilde N=h^{-n}W_\varepsilon(1+O(h^{\varkappa})). \tag{Д2.72}$$

Пространство, натянутое на соответствующие собственные векторы, обозначим через $\mathscr{K}_{\tilde N}$.

Покажем, что пространство $H_{\tilde N}=\mathscr{F}_h\mathscr{K}_{\tilde N}$ обладает свойствами (Д2.62), (Д2.63).

Пусть $\eta\in\mathscr{K}_{\tilde N}$, тогда для оператора $\mathscr{F}_h$ выполнена оценка

$$(\mathscr{F}_h\eta,\,\eta)\geqslant(1/2+O(h^{1-\varkappa}))\,(\eta,\,\eta). \tag{Д2.73}$$

Действительно, используя (Д2.66)—(Д2.68), получаем,

$$(\mathscr{F}_h\eta,\,\eta)=(F_h\eta,\,\eta)+(R\eta,\,\eta)\geqslant(E_{\varepsilon,\,h}\eta,\,\eta)+(R\eta,\,\eta)=$$
$$=(\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}\eta,\,\eta)+((R+R')\eta,\,\eta)\geqslant(1/2+O(h^{1-\varkappa}))\,(\eta,\,\eta).$$

Воспользуемся неравенством Шварца

$$(\mathscr{F}_h\eta,\,\eta)\leqslant\sqrt{(\mathscr{F}_h\eta,\,\mathscr{F}_h\eta)\,(\eta,\,\eta)};$$

отсюда и из (Д2.73) следует, что

$$\sqrt{(\mathscr{F}_h\eta,\,\mathscr{F}_h\eta)}\geqslant(\mathscr{F}_h\eta,\,\eta)/\sqrt{(\eta,\,\eta)}\geqslant\sqrt{(\eta,\,\eta)}\,(1/2+O(h^{1-\varkappa})),$$

или

$$(\mathscr{F}_h\eta,\,\mathscr{F}_h\eta)\geqslant[(1/4+O(h^{1-\varkappa})]\,(\eta,\,\eta). \tag{Д2.74}$$

Пусть теперь $\xi\in H_{\tilde N}$; тогда $\xi=\mathscr{F}_h\eta$, где $\eta\in\mathscr{K}_{\tilde N}$. Вспомним полученное при доказательстве теоремы Д2.1 неравенство

$$\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h\leqslant Ch^{\varkappa} \tag{Д2.75}$$

(этот факт не зависит от поведения функции $V(\lambda)$).

Из (Д2.74) и (Д2.75) вытекает оценка

$$((A_{(h)}-\lambda I)\,\xi,\,\xi)=((A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h\eta,\,\mathscr{F}_h\eta)\leqslant Ch^{\varkappa}(\eta,\,\eta)\leqslant$$
$$\leqslant(4+O(h^{1-\varkappa}))\,(\mathscr{F}_h\eta,\,\mathscr{F}_h\eta)\,Ch^{\varkappa}=O(h^{\varkappa})\,(\xi,\,\xi).$$

Таким образом, на $H_{\tilde N}$

$$A_{(h)}-(\lambda+O(h^{\varkappa}))\,I\leqslant 0.$$

Кроме того, из (Д2.74) следует, что оператор $\mathscr{F}_h$ мономорфен на $\mathscr{K}_{\tilde{N}}$, поэтому

$$\dim H_{\tilde{N}} = \dim \mathscr{K}_{\widetilde{N}} = h^{-n} W_\varepsilon (1 + O(h^\varkappa)).$$

Доказательство теоремы завершается ссылкой на то, что объем W_ε, может быть взят сколь угодно большим. ■

ДОБАВЛЕНИЕ 3

ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА—ШМИДТА И ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Д3.1. Операторы Гильберта—Шмидта и норма Гильберта—Шмидта

Определение Д3.1. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Ограниченный линейный оператор $K\colon H_1 \to H_2$ называется *оператором Гильберта—Шмидта*, если для некоторого ортонормнрованного базиса $\{e_\alpha\}$ пространства H_1

$$\sum_\alpha \|Ke_\alpha\|^2 < +\infty. \tag{Д3.1}$$

Множество всех операторов Гильберта—Шмидта $K\colon H_1 \to H_2$ обозначается $S_2(H_1, H_2)$ или $S_2(H)$ при $H_1 = H_2 = H$. Следующее предложение описывает основные свойства этих операторов.

Предложение Д3.1. 1) *Левая часть* (Д3.1) *не зависит от выбора ортонормированного базиса* $\{e_\alpha\}$ (*квадратный корень из нее называется* нормой Гильберта—Шмидта *оператора* K *и обозначается* $\|K\|_2$).

2) $\|K^*\|_2 = \|K\|_2$.

3) $\|K\| \leqslant \|K\|_2$, *где* $\|K\|$ — *обычная операторная норма* K.

4) *Всякий оператор* $K \in S_2(H_1, H_2)$, *компактен.*

5) *Если* K — *компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* H, *то*

$$\|K\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2, \tag{Д3.2}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — *все ненулевые собственные значения* K, *причем каждое повторяется столько раз, какова его кратность.*

6) *Если* $\{e_\alpha\}$ — *ортонормированный базис в пространстве* H_1, *то скалярное произведение*

$$(K, L)_2 = \sum_\alpha (Ke_\alpha, Le_\alpha) \tag{Д3.3}$$

при $K, L \in S_2(H_1, H_2)$ *не зависит от выбора базиса* $\{e_\alpha\}$ *и определяет в* $S_2(H_1, H_2)$, *структуру гильбертова пространства с соответствующей нормой* $\|\cdot\|_2$.

7) *Если* $\mathscr{L}(H_j)$, $j=1, 2$, *означает алгебру всех ограниченных операторов в* H_j, *то* $S_2(H_1, H_2)$ *представляет собой левый* $\mathscr{L}(H_2)$*-модуль и правый* $\mathscr{L}(H_1)$*-модуль, причем*

$$\|AK\|_2 \leqslant \|A\| \, \|K\|_2, \quad A \in \mathscr{L}(H_2), \quad K \in S_2(H_1, H_2), \tag{Д3.4}$$

$$\|KB\|_2 \leqslant \|K\|_2 \, \|B\|, \quad B \in \mathscr{L}(H_1), \quad K \in S_2(H_1, H_2). \tag{Д3.5}$$

В частности, $S_2(H)$ — *двусторонний идеал в алгебре* $\mathscr{L}(H)$.

Доказательство. Пусть $\{f_\beta\}$ — ортонормированный базис в H_2. Тогда

$$\sum_\alpha \|Ke_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha, \beta} |(Ke_\alpha, f_\beta)|^2 = \sum_{\alpha, \beta} |(e_\alpha, K^* f_\beta)| = \sum_\beta \|K^* f_\beta\|^2, \tag{Д3.6}$$

откуда следуют пп. 1) и 2). Если теперь $x = \sum\limits_\alpha x_\alpha e_\alpha \in H_1$, то

$$\|Kx\|^2 = \left\| \sum_\alpha x_\alpha K e_\alpha \right\|^2 \leqslant \left(\sum_\alpha |x_\alpha| \, \|Ke_\alpha\| \right)^2 \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_\alpha |x_\alpha|^2 \right) \left(\sum_\alpha \|Ke_\alpha\|^2 \right) = \|K\|_2^2 \, \|x\|^2,$$

откуда следует утверждение п. 3).

Чтобы доказать п. 4), аппроксимируем оператор $K \in S_2(H_1, H_2)$ конечномерными операторами. А именно, пусть $e_1, e_2, \ldots$ — все такие векторы из некоторого ортонормированного базиса $\{e_\alpha\}$, что $Ke_\alpha \neq 0$ (тот факт, что их не более чем счетное множество, вытекает из (Д3.1)). Тогда ясно, что

$$Kx = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) \, Ke_j, \tag{Д3.7}$$

и, полагая $K_N x = \sum\limits_{j=1}^{N} (x, e_j) \, Ke_j$, мы получаем, что $\|K - K_N\|^2 \leqslant \leqslant \|K - K_N\|_2^2 = \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} \|Ke_j\|^2 \to 0$ при $N \to \infty$, что и требовалось.

Утверждение п. 5) вытекает из п. 1), если в качестве базиса выбрать базис из собственных векторов оператора K.

Докажем утверждение п. 6). Заметим вначале, что

$$|(Ke_\alpha, Le_\alpha)| \leqslant \|Ke_\alpha\| \, \|Le_\alpha\| \leqslant \frac{1}{2} \left(\|Ke_\alpha\|^2 + \|Le_\alpha\|^2 \right),$$

откуда следует сходимость ряда (Д3.3) при $K, L \in S_2(H_1, H_2)$.

При этом ясно, что $(K,\, K)_2 = \|K\|_2^2$, откуда следует независимость $(K,\, L)_2$ от выбора базиса.

Заметим, что алгебраические свойства скалярного произведения для (Д3.3) очевидным образом выполнены и для доказательства п. 6) остается проверить лишь полноту $S_2(H_1,\, H_2)$ относительно нормы $\|\cdot\|_2$. Это удобнее всего сделать, построив изоморфизм $S_2(H_1,\, H_2)$ и пространства $l^2(M_1 \times M_2)$, где M_j — множество мощности $\dim H_j$. Пространство $l^2(M)$ для любого множества M состоит из функций f на M, отличных от 0 в не более чем счетном множестве точек, причем $\sum\limits_{\alpha \in M} |\, f(\alpha)\,|^2 < +\infty$. Его можно рассматривать как $L^2(M)$, если на M взять σ-алгебру, порожденную одноточечными множествами, и ввести меру на этой σ-алгебре, полагая меру каждой точки равной 1.

Требуемый изоморфизм $S_2(H_1,\, H_2)$, и $l^2(M_1 \times M_2)$ задается сопоставлением каждому оператору $K \in S_2(H_1,\, H_2)$ его матрицы $K_{\alpha\beta} = (Ke_\alpha,\, f_\beta)$, где $\{e_\alpha\}$, $\{f_\beta\}$ — ортонормированные базисы в пространствах H_1 и H_2. Тот факт, что это сопоставление задает изометрический изоморфизм, ясен из выкладки (Д3.6).

Перейдем к доказательству п. 7). Поскольку $\|AKe_\alpha\| \leqslant \|A\|\, \|Ke_\alpha\|$, то оценка (Д3.4) и вместе с ней тот факт, что $S_2(H_1,\, H_2)$ является левым $\mathscr{L}(H_2)$-модулем, очевидны из определений. Для доказательства оценки (Д3.5), обеспечивающей возможность введения на $S_2(H_1,\, H_2)$, структуры правого $\mathscr{L}(H_1)$-модуля, нужно перейти к сопряженному оператору:

$$\|KB\|_2 = \|(KB)^*\|_2 = \|B^* K^*\|_2 \leqslant \|B^*\|\, \|K^*\|_2 = \|B\|\, \|K\|_2,$$

что и требовалось. ■

Пусть теперь X, Y — два пространства с мерой, $H_1 = L^2(Y)$, $H_2 = L^2(X)$. Описание операторов $K \in S_2(H_1,\, H_2)$ в этой ситуации дает

П р е д л о ж е н и е Д3.2. *Операторы $K \in S_2(H_1,\, H_2)$ — это в точности те операторы, которые могут быть записаны в виде*

$$(Kf)\,(x) = \int\limits_Y K(x,\, y)\, f(y)\, dy \tag{Д3.8}$$

с помощью ядра $K(x,\, y) \in L^2(X \times Y)$. При этом

$$\|K\|_2^2 = \iint\limits_{X \times Y} |\, K(x,\, y)\,|^2\, dx\, dy \tag{Д3.9}$$

(в формулах (Д3.8) и (Д3.9) выражения dx и dy означают меры на X и Y).

Доказательство. Пусть $\{e_\alpha(y)\}$ и $\{f_\beta(x)\}$ — ортонормированные базисы в $L^2(Y)$ и $L^2(X)$. Предположим, что $K \in S_2(H_1, H_2)$. Заметим, что $\{f_\beta(x)\,\overline{e_\alpha(y)}\}$ — полная ортонормированная система в $L^2(X \times Y)$ и если положить

$$K(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} (Ke_\alpha, f_\beta)\, f_\beta(x)\, \overline{e_\alpha(y)}, \tag{Д3.10}$$

то $K(x, y) \in L^2(X \times Y)$ и оператор вида (Д3.8) совпадает с оператором K, так как у этих операторов одинаковые матрицы при выбранных базисах $\{e_\alpha\}$ в H_2, и $\{f_\beta\}$ в H_2. Равенство Парсеваля обеспечивает выполнение (Д3.9).

Обратно, если $K(x, y) \in L^2(X \times Y)$ то, разлагая $K(x, y)$ в ряд по системе $\{f_\beta(x)\,\overline{e_\alpha(y)}\}$, мы получим

$$K(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} f_\beta(x)\, \overline{e_\alpha(y)}, \qquad \sum_{\alpha, \beta} |c_{\alpha\beta}|^2 < +\infty.$$

Но тогда ясно, что в базисах $\{e_\alpha\}$, $\{f_\beta\}$ оператор k имеет матрицу $c_{\alpha\beta} = (Ke_\alpha, f_\beta)$, откуда и следует, что $K \in S_2(H_1, H_2)$. ■

Д3.2. Ядерные операторы и след

Определение Д3.2. Пусть H — гильбертово пространство, $S_2(H)$ — идеал операторов Гильберта—Шмидта в H. Пусть $S_1(H) = (S_2(H))^2$ — двусторонний идеал в $\mathscr{L}(H)$, являющийся квадратом идеала $S_2(H)$, т. е. состоящий из операторов, имеющих вид конечной суммы:

$$A = \sum_j B_j C_j, \qquad B_j,\ C_j \in S_2(H). \tag{Д3.11}$$

Элементы идеала $S_1(H)$ называются *ядерными операторами* в H.

Предложение Д3.3. 1) *Пусть $A \in S_1(H)$ и $\{e_\alpha\}$ — ортонормированный базис в H. Тогда*

$$\sum_\alpha |(Ae_\alpha, e_\alpha)| < +\infty \tag{Д3.12}$$

и выражение

$$\operatorname{Sp} A = \sum_\alpha (Ae_\alpha, e_\alpha) \tag{Д3.13}$$

не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_\alpha\}$ (оно называется *следом* оператора A). *След — линейный функционал на $S_1(H)$, причем* $\operatorname{Sp} A \geqslant 0$ *при* $A \geqslant 0$. *Скалярное произведение $(K, L)_2$ может быть* *записано через след по формуле*

$$(K,\ L)_2 = \mathrm{Sp}\,(L^* K), \qquad K,\ L \in S_2(H). \tag{Д3.14}$$

2) *Если A — компактный самосопряженный оператор, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ — его ненулевые собственные значения с учетом кратности, то условие $A \in S_1(H)$ равносильно тому, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < +\infty. \tag{Д3.15}$$

При этом

$$\mathrm{Sp}\ A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j. \tag{Д3.16}$$

3) *Если $A \in S_1(H)$, то*

$$\mathrm{Sp}\ A^* = \overline{\mathrm{Sp}\ A}. \tag{Д3.17}$$

4) *Если $A \in S_1(H)$ и $B \in \mathscr{L}(H)$, то*

$$\mathrm{Sp}\,(AB) = \mathrm{Sp}\,(BA). \tag{Д3.18}$$

Доказательство. 1) Если оператор A представлен в виде (Д3.11), то

$$(Ae_\alpha,\ e_\alpha) = \sum_j (B_j C_j e_\alpha,\ e_\alpha) = \sum_j (C_j e_\alpha,\ B_j^* e_\alpha),$$

откуда следуют (Д3.12) и соотношение

$$\sum_\alpha (Ae_\alpha,\ e_\alpha) = \sum_j (C_j,\ B_j^*)_2, \tag{Д3.19}$$

из которого, в частности, ясно, что $\mathrm{Sp}\ A$ не зависит от выбора базиса.

Равенство (Д3.14) очевидно.

2) Пусть теперь $A = A^*$. Если $A \in S_1(H)$, то условие (Д3.15) и соотношение (Д3.16) выполнены, так как в качестве базиса $\{e_\alpha\}$ можно выбрать собственный базис. Обратно, если выполнено (Д3.15) и $\{e_\alpha\}$ — собственный базис, так что $Ae_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$, то, определяя B и C формулами

$$Be_\alpha = \sqrt{|\lambda_\alpha|}\, e_\alpha,\ Ce_\alpha = \lambda_\alpha / \sqrt{|\lambda_\alpha|}\, e_\alpha,$$

мы видим, что $B,\ C \in S_2(H)$ и $A = BC$, так что $A \in S_1(H)$.

3) Проверим (Д3.17). Если оператор A представлен в виде (Д3.11), то $A^* = \sum\limits_j C_j^* B_j^*$ и из (Д3.19)

$$\mathrm{Sp}\ A^* = \sum_j (B_j^*,\ C_j)_2 = \sum_j \overline{(C_j,\ B_j^*)_2} = \overline{\mathrm{Sp}\ A},$$

что и доказывает (Д3.17).

4) Проверим, наконец, (Д3.18). Пусть вначале B — унитарный оператор. Но тогда операторы AB и BA унитарно эквивалентны, поскольку $AB = B^{-1}(BA)\,B$. Поэтому равенство (Д3.18) для унитарного B вытекает из уже доказанной независимости следа от выбора базиса. Для доказательства (Д3.18) в общем случае заметим, что обе части (Д3.18) линейны по B и имеет место

Лемма Д3.1. *Любой оператор $B \in \mathscr{L}(H)$ является линейной комбинацией четырех унитарных.*

Доказательство. Поскольку можно написать

$$B = B_1 + iB_2, \quad B_1^* = B_1 = \frac{B+B^*}{2}, \quad B_2^* = B_2 = \frac{B-B^*}{2i},$$

то достаточно проверить, что самосопряженный оператор B может быть записан в виде линейной комбинации двух унитарных. Можно считать, что $\|B\| \leqslant 1$. Но тогда искомая запись имеет вид

$$B = \frac{1}{2}\,[B + i\sqrt{I - B^2}] + \frac{1}{2}\,[B - i\sqrt{I - B^2}].$$

Лемма Д3.1, а вместе с ней и предложение Д3.3 доказаны. ■

Д3.3. Полярное разложение оператора

Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Напомним, что ограниченный оператор $U\colon H_1 \to H_2$ называется *частично изометрическим*, если он изометрично отображает $(\operatorname{Ker} U)^{\perp}$ на $\operatorname{Im} U$. Отсюда следует, что

$$U^*U = E, \quad UU^* = F, \tag{Д3.20}$$

где E — ортогональный проектор на $(\operatorname{Ker} U)^{\perp}$ в H_1, F — ортогональный проектор на $\operatorname{Im} U$ в H_2 (в этом случае $\operatorname{Im} U$ — замкнутое подпространство в H_2). Если $\operatorname{Ker} U = 0$, $\operatorname{Im} U = H_2$, то U является унитарным оператором.

Определение Д3.3. *Полярным разложением* ограниченного оператора $A\colon H_1 \to H_2$ называется его представление в виде

$$A = US, \tag{Д3.21}$$

где S — ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор в H_1, U — такой частично изометрический оператор $U\colon H_1 \to H_2$, что

$$\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} S = (\operatorname{Im} S)^{\perp}. \tag{Д3.22}$$

Предложение Д3.4. *Полярное разложение ограниченного оператора $A\colon H_1 \to H_2$ существует и единственно.*

Доказательство. Из (Д3.21) находим $A^* = SU^*$, откуда $A^*A = SU^*US = SES$. Но $ES = S$ в силу (Д3.22), так что

$$A^*A = S^2, \tag{Д3.23}$$

откуда

$$S = \sqrt{A^*A}, \tag{Д3.24}$$

где $\sqrt{A^*A}$ определяется с помощью спектральной теоремы. В самом деле, пусть $C = A^*A$ и B – любой ограниченный самосопряженный оператор в H_1, для которого $B^2 = C$ и $B \geqslant 0$. Докажем, что $B = S$, где S определяется формулой (Д3.24). Будучи функцией от C, оператор S коммутирует с каждым оператором, коммутирующим с C. В частности, $BS = SB$, поскольку $BC = CB = B^3$. Следовательно,

$$(S - B)\,S(S - B) + (S - B)\,B(S - B) = (S^2 - B^2)\,(S - B) = 0.$$

Оба члена в правой части являются неотрицательными операторами, откуда следует, что они оба равны нулю. Поэтому обращается в ноль их разность $(S-B)^3$, откуда $(S-B)^4 = 0$. Отсюда вытекает, что $S - B = 0$, поскольку оператор $S - B$ самосопряжен.

Далее, оператор U однозначно определен формулой (Д3.21) в силу (Д3.22), что доказывает единственность полярного разложения.

Для доказательства существования построим S по формуле (Д3.24) и определим U, полагая

$$Ux = 0 \quad \text{при} \quad x \perp \operatorname{Im} S, \tag{Д3.25}$$

$$U(Sx) = Ax \quad \text{при} \quad x \in H_1. \tag{Д3.26}$$

Для проверки корректности этого определения достаточно доказать, что если $Sx = 0$, то $Ax = 0$. Но это сразу следует из (Д3.23). Более того, из (Д3.23) получается

$$\|Sx\|^2 = (Sx,\, Sx) = (S^2x,\, x) = (A^*Ax,\, x) = (Ax,\, Ax) = \|Ax\|^2,$$

что доказывает частичную изометричность U. ■

Подробнее о спектральной теореме и полярном разложении см., например, Рисс и Секефальви-Надь [1].

Определение Д3.4. Если $A = US$ — полярное разложение A, то мы будем использовать обозначение $S = |A|$.

Предложение Д3.5. *Пусть J — любой левый идеал в алгебре $\mathscr{L}(H)$. Тогда условие $A \in J$ равносильно условию $|A| \in J$.*

Доказательство очевидно из формул $A = U|A|$, $U^*A = |A|$. ■

С л е д с т в и е Д3.1. *Имеем*

$$A\in S_2(H)\Leftrightarrow |A|\in S_2(H),$$
$$A\in S_1(H)\Leftrightarrow |A|\in S_1(H).$$

Пользуясь полярным разложением, можно в добавление к п. 4) предложения Д3.3 доказать

П р е д л о ж е н и е Д3.6. *Если* A, $B\in S_2(H)$, *то*

$$\mathrm{Sp}\,(AB)=\mathrm{Sp}\,(BA).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь тождествами

$$4AB^*=(A+B)\,(A+B)^*-(A-B)\,(A-B)^*+\\ +i(A+iB)\,(A+iB)^*-i(A-iB)\,(A-iB)^*,$$

$$4B^*A=(A+B)^*(A+B)-(A-B)^*(A-B)+\\ +i(A+iB)^*(A+iB)-i(A-iB)^*(A-iB),$$

мы видим, что достаточно проверить, что

$$\mathrm{Sp}\,(AA^*)=\mathrm{Sp}\,(A^*A),\qquad A\in S_2(H). \tag{Д3.27}$$

Но используя полярное разложение $A=US$, мы видим, что $S\in S_2(H)$, следовательно, $S^2\in S_1(H)$, и поскольку

$$A^*A=S^2,\qquad AA^*=US^2U^*,$$

то в силу предложения Д3.3, п. 4)

$$\mathrm{Sp}\,(AA^*)=\mathrm{Sp}\,(US^2U^*)=\mathrm{Sp}\,(U^*US^2)=\mathrm{Sp}\ S^2=\mathrm{Sp}\,(A^*A),$$

что и требовалось. ■

Д3.4. Ядерная норма

О п р е д е л е н и е Д3.5. *Ядерной нормой* оператора $A\in S_1(H)$ называется величина

$$\|A\|_1=\mathrm{Sp}\ |A|. \tag{Д3.28}$$

П р е д л о ж е н и е Д3.7. 1) *Имеют место неравенства*

$$\|A\|_2\leqslant\|A\|_1,\qquad A\in S_1(H); \tag{Д3.29}$$
$$\|BA\|_1\leqslant\|B\|\,\|A\|_1,\qquad A\in S_1(H),\quad B\in\mathscr{L}(H); \tag{Д3.30}$$
$$\|AB\|_1\leqslant\|A\|_1\,\|B\|,\qquad A\in S_1(H),\quad B\in\mathscr{L}(H); \tag{Д3.30$'$}$$
$$\|\ \mathrm{Sp}\ A\|\leqslant\|A\|_1,\qquad A\in S_1(H), \tag{Д3.31}$$

и соотношения

$$\|A^*\|_1 = \|A\|_1, \qquad A \in S_1(H); \tag{Д3.32}$$

$$\|A\|_1 = \sup_{\substack{B \in \mathscr{L}(H) \\ \|B\| \leqslant 1}} |\operatorname{Sp}(BA)|, \quad A \in S_1(H). \tag{Д3.33}$$

2) *Ядерная норма определяет на $S_1(H)$ структуру банахова пространства.*

Доказательство. 1) а) Докажем (Д3.29). Пусть $A = US$ — полярное разложение A. Тогда имеем

$$\|A\|_1 = \|S\|_1 = \operatorname{Sp} S, \tag{Д3.34}$$

$$\|A\|_2^2 = \operatorname{Sp} S(A^*A) = \operatorname{Sp} S^2, \tag{Д3.35}$$

откуда (Д3.29) сводится к неравенству

$$\operatorname{Sp} S^2 \leqslant (\operatorname{Sp} S)^2, \tag{Д3.36}$$

которое становится очевидным, если $\operatorname{Sp} S^2$ и $\operatorname{Sp} S$ записать в собственном базисе оператора S.

б) Для доказательства (Д3.32) заметим, что $A^* = SU^*$, $AA^* = US^2U^*$ и $|A^*| = USU^*$, откуда

$$\operatorname{Sp} |A^*| = \operatorname{Sp}(USU^*) = \operatorname{Sp}(U^*US) = \operatorname{Sp} S = \operatorname{Sp} |A|.$$

в) Докажем теперь (Д3.31). Пусть $\{e_\alpha\}$ — ортонормированный собственный базис оператора S, s_α — собственные значения, т. е.

$$Se_\alpha = s_\alpha e_\alpha. \tag{Д3.37}$$

Имеем

$$\operatorname{Sp} A = \sum (USe_\alpha, e_\alpha) = \sum s_\alpha (Ue_\alpha, e_\alpha), \tag{Д3.38}$$

но поскольку $|(Ue_\alpha, e_\alpha)| \leqslant 1$, то ясно, что

$$|\operatorname{Sp} A| \leqslant \sum_\alpha s_\alpha = \operatorname{Sp} S = \|A\|_1.$$

г) Докажем (Д3.30). Пусть $BA = VT$ — полярное разложение оператора BA. Тогда

$$\|BA\|_1 = \operatorname{Sp} T = \operatorname{Sp}(V^*BA) = \operatorname{Sp}(V^*BUS).$$

Заметим теперь, что $\|V^*BU\| \leqslant \|B\|$. Дальнейшее рассуждение проходит аналогично п. в).

д) Оценка (Д3.30′) сводится к оценке (Д3.30), поскольку

$$\|AB\|_1 = \|(AB)^*\|_1 = \|B^*A^*\|_1.$$

е) Соотношение (Д3.33) теперь очевидно ввиду оценки

$$|\ \mathrm{Sp}\,(BA)\,| \leqslant \|BA\|_1 \leqslant \|B\|\,\|A\|_1,$$

в которой при $B = U^*$ имеет место равенство.

2) а) Докажем, что ядерная норма $\|\cdot\|_1$ обладает обычными свойствами нормы:

$$\|A' + A''\|_1 \leqslant \|A'\|_1 + \|A''\|_1, \quad A',\ A'' \in S_1(H);$$
$$\|\lambda A\|_1 = |\,\lambda\,|\,\|A\|_1, \quad A \in S_1(H), \quad \lambda \in \mathbb{C};$$
$$\|A\|_1 = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Не очевидно лишь первое соотношение. Для его доказательства воспользуемся соотношением (Д3.33):

$$\|A' + A''\|_1 = \sup_{\|B\| \leqslant 1} |\ \mathrm{Sp}\ B(A' + A'')\,| = \sup_{\|B\| \leqslant 1} |\ \mathrm{Sp}\,(BA') + \mathrm{Sp}\,(BA'')\,| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|B\| \leqslant 1} (|\ \mathrm{Sp}\,(BA')\,| + |\ \mathrm{Sp}\,(BA'')\,|) \leqslant \sup_{\substack{\|B'\| \leqslant 1 \\ \|B''\| \leqslant 1}} (|\ \mathrm{Sp}\,(B'A')\,| + |\ \mathrm{Sp}\,(B''A'')\,|) =$$
$$= \sup_{\|B'\| \leqslant 1} |\ \mathrm{Sp}\,(B'A')\,| + \sup_{\|B''\| \leqslant 1} |\ \mathrm{Sp}\,(B''A'')\,| = \|A'\|_1 + \|A''\|_1.$$

б) Докажем полноту $S_1(H)$ по норме glossary$\|\cdot\|_1\|\cdot\|_1$. Пусть $n = 1, 2, \ldots,\ A_n \in S_1(H)$ и $\|A_n - A_m\|_1 \to 0$ при $n, m \to +\infty$. Тогда в силу (Д3.29) и предложения Д3.1, п. 6) существует такой оператор $A \in S_2(H)$, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \|A_n - A\|_2 = 0$.

Проверим, что $A \in S_1(H)$. Пусть $A = US$ — полярное разложение A. Положим $C_n = U^* A_n$. Ясно, что

$$\lim_{n \to \infty} \|C_n - S\|_2 = 0 \tag{Д3.39}$$
$$\lim_{m,\, n \to \infty} \|C_n - C_m\|_1 = 0. \tag{Д3.40}$$

Пусть $\{e_\alpha\}$ — ортонормированный собственный базис S, s_α — собственные значения. Из (Д3.39) следует, что

$$s_\alpha = (Se_\alpha,\ e_\alpha) = \lim_{n \to \infty} (C_n e_\alpha,\ e_\alpha). \tag{Д3.41}$$

Для доказательства того, что $A \in S_1(H)$, достаточно проверить, что $\sum\limits_\alpha s_\alpha < +\infty$. Это в свою очередь, благодаря (Д3.41), вытекает из оценки

$$\sup_n \sum_\alpha |\,(C_n e_\alpha,\ e_\alpha)\,| < +\infty, \tag{Д3.42}$$

верной в силу неравенства

$$\sum_{\alpha} |(C_n e_\alpha, e_\alpha)| \leqslant \|C\|_1, \quad C \in S_1(H), \tag{Д3.43}$$

легко выводимого из (Д3.33).

Остается доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_1 = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем столь большое N, что

$$\|A_m - A_n\|_1 \leqslant \varepsilon, \quad m, \ n \geqslant N. \tag{Д3.44}$$

Проверим, что

$$\|A_n - A\|_1 \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N. \tag{Д3.45}$$

Из оценки (Д3.43) вытекает, что для любого $B \in \mathscr{L}(H)$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sp}(BA_n) = \operatorname{Sp}(BA).$$

Но в силу (Д3.44) отсюда следует, что

$$|\operatorname{Sp}(BA_n) - \operatorname{Sp}(BA)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N,$$

если $\|B\| \leqslant 1$. Остается воспользоваться соотношением (Д3.33), и мы приходим к требуемому (Д3.45). ■

Д3.5. Выражение следа через ядро оператора

Вопрос о выражении следа оператора через ядро очень прост с формальной точки зрения, но труден технически (трудно обосновать легко находимую формально формулу). В этом пункте мы приведем формальную схему, которая в каждом конкретном случае должна детально обосновываться.

Пусть X — пространство с мерой dx, K — ядерный оператор в $L^2(X)$ с ядром $K(x, y)$. Мы можем записать K в виде

$$K = L_1 L_2, \quad L_1, \ L_2 \in S_2(L^2(X)) \tag{Д3.46}$$

(это, например, можно сделать так: пусть $K = US$ — полярное разложение оператора K; тогда можно взять $L_1 = U\sqrt{S}$, $L_2 = \sqrt{S}$). Обозначим через $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$ ядра операторов L_1, L_2. Тогда формально имеем

$$K(x, y) = \int L_1(x, z)\, L_2(z, y)\, dz. \tag{Д3.47}$$

Поскольку мы можем также записать $K=(L_1^*)^*L_2$, а оператор L_1^* имеет ядро $L_1^*(x, y)=\overline{L_1(y, x)}$, то из предложения Д3.3 (формула (Д3.14)) и из предложения Д3.2, гарантирующего равенство

$$(K_1, K_2)_2=\int K_1(x, y)\,\overline{K_2(x, y)}\,dx\,dy \tag{Д3.48}$$

(где $K_j\in S_2(L^2(X))$, $K_j(x, y)$ — ядра операторов K_j), мы находим

$$\operatorname{Sp} K=(L_2, L_1^*)_2=\int L_1(y, x)\,L_2(x, y)\,dx\,dy=\int L_1(x, z)\,L_2(z, x)\,dz\,dx, \tag{Д3.49}$$

или

$$\operatorname{Sp} K=\int K(x, x)\,dx. \tag{Д3.50}$$

Фактическое обоснование формальных выкладок (Д3.47)—(Д3.50) может быть проведено, например, в случае, когда X — компактное многообразие с краем, dx — мера на X, заданная с помощью положительной гладкой плотности, и ядро $K(x, y)$ непрерывно. Одно рассуждение такого сорта, основанное на теореме Мерсера, было проведено в § 13 в доказательстве теоремы 3.2. Отметим основную трудность обоснования: ядро $K(x, y)$ определено лишь с точностью до множества меры 0 в $X\times X$, а в (Д3.50) входит ограничение $K(x, y)$ на диагональ в $X\times X$, являющуюся множеством меры 0 в $X\times X$.

Один из вариантов такого обоснования — получить интеграл (Д3.50) как предел интегралов по малым окрестностям диагонали, нормированных соответствующими множителями (см. Гохберг и Крейн [1], гл. III, § 10). Мы опускаем соответствующие подробности, так как они не используются в тексте книги.

Задача Д3.1. Доказать, что

$$\|AB\|_1\leqslant\|A\|_2\,\|B\|_2,\qquad A,\ B\in S_2(H).$$

Задача Д3.2. Доказать, что

$$\|B\|=\sup_{\substack{A\in S_1(H)\\ \|A\|_1\leqslant 1}}|\operatorname{Sp}(AB)|.$$

Задача Д3.3. Пусть J — двусторонний идеал в $\mathscr{L}(H)$. Пусть $0\leqslant A\leqslant B$ и $B\in J$. Доказать, что $A\in J$.

Указание. Доказать, что $A^{1/2}=CB^{1/2}$, где $C\in\mathscr{L}(H)$ и $\|C\|\leqslant 1$.

КРАТКИЕ ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Мы укажем здесь лишь работы, наиболее тесно связанные с текстом книги. При этом мы ни в коей мере не претендуем на полноту библиографии. По возможности автор старался избежать ссылок на краткие сообщения и труднодоступные источники, так что в основном цитируются монографии, а также подробные или обзорные статьи.

К ГЛАВЕ I

Понятие псевдодифференциального оператора (ПДО) возникло на базе теории многомерных сингулярных интегральных операторов (см. монографию Михлина [1] и имеющиеся там ссылки). В дальнейшем появились сингулярные интегро-дифференциальные операторы (см. работу Аграновича [1] и имеющиеся там ссылки). Термин «псевдодифференциальный оператор« был предложен Фридрихсом и Лаксом [1]. В современной форме ПДО появились, по существу, в работе Кона и Ниренберга [1] (там рассматривались ПДО, называемые здесь «классическими»). Классы символов $S^m_{\rho,\,\delta}$ и соответствующие классы операторов были введены Хёрмандером [2]. Ему же принадлежит теорема об инвариантности класса ПДО относительно замен переменных (см. Хёрмандер [1], [2]). Приводимое здесь доказательство этой теоремы основано на идеях Кураниши.

Интегральные операторы Фурье (ИОФ) были введены и систематически изучены в работе Хёрмандера [6]. Ранее близкое понятие каноническою оператора изучалось в связи с различными асимптотическими задачами Масловым (см. монографии Маслова [1], [2], Маслова и Федорюка [1], статью Дюйстермаата [3]). Работе Хёрмандера предшествовали также работы Эскина [1], [2], Егорова [1], [2], содержавшие идеи, использованные Хёрмандером В работах Ниренберга и Трева [1] и Егорова [1]—[4] ПДО и простейшие ИОФ использовались для изучения вопросов локальной разрешимости и регулярности решений общих операторов главного типа.

В изложении теории осциллирующих интегралов, ИОФ и построении алгебры ПДО мы следуем, в основном, работе Хёрмандера [6]. Гипоэллиптичность в § 5 изложена в духе работы Хёрмандера [2]. В той же работе приведен подробно реализованный здесь эскиз теории пространств Соболева. Более полные сведения о пространствах Соболева можно найти в монографиях Хёрмандера [7], Никольского [1], Соболева [1], Бесова, Ильина и Никольского [1], Лионса и Мадженеса [1]. Элементарное изложение простейших фактов теории ПДО можно найти в книге Уэллса [1].

Отметим, что мы используем здесь термин ИОФ для операторов, обычно называемых локальными ИОФ. Теория глобальных ИОФ, существенно более тонкая и сложная, нами сознательно опущена во избежание чрезмерного увеличения объема книги. Однако глобальные ИОФ или их эквивалент — канонический оператор Маслова — необходимы в ряде приложений (например, в теории гиперболических уравнений или в спектральной теории). Поэтому после знакомства с локальными ИОФ и их приложениями читателю стоит изучить глобальные ИОФ (это можно сделать, например, по статьям Хёрмандера [6] и Дюйстермаата и Хёрмандера [1], или по лекциям Дюйстермаата [1]) и теорию каноническою оператора Маслова (например, по книге Маслова и Федорюка [1]).

По поводу других вопросов теории ПДО и ИОФ мы отсылаем читателя к монографиям Фридрихса [1], Эскина [3], Тейлора [1], Дюйстермаата [1], Трева [1], Грушина [2], работам Аграновича [1], Кумано-го [1], [2], Билса и Фефермана [1], Билса [1], [2], [3], Кальдерона [1]. Отметим важное уточнение теоремы об ограниченности (в частности, для операторов класса $L^0_{\rho,\delta}$ при $0 \leqslant \rho = \delta < 1$), найденное Кальдероном и Вайанкуром [1] (см. также Ватанабе [1] и Кумано-го [3]). По поводу действия ПДО в пространствах L^p см. Мурамату [1] и Иллнер [1], в гельдеровских классах — Дюран [1], в классах жевреевских и аналитических функций — Волевич [1], Дюшато и Трев [1], Бауенди и Гулаунк [1].

Операторы с комплексной фазовой функцией рассматривали Кучеренко [1], Мищенко, Стернин и Шаталов [1], Мелин и Шёстранд [1].

Сильное влияние на развитие теории ПДО оказали работы по проблеме индекса, в которой ПДО нашли существеннее применение: см. работы Атья и Зингера [1], Федосова [1], Атья, Ботта и Патоди [1], Хёрмандера [5], Атья [1], [2]. Техника ПДО использовалась в работе Атья и Ботта [1] о теореме Лефшеца.

Важные конкретные приложения ПДО в классических задачах теории уравнений с частными производными можно найти в работах Олейник и Радкевича [1], Мазьи и Панеяха [1].

К ГЛАВЕ II

Описание структуры комплексных степеней эллиптических операторов в терминах ПДО и теорема о мероморфном продолжении ядер комплексных степеней и ζ-функции принадлежат Сили [1], [2], [3]. Другие варианты и обобщения этой теории можно найти в работах Нагасе и Шинкаи [1], Хайакавы и Кумано-го [1], Кумано-го и Цуцуми [1], Смагина [1], [2]. Тауберова техника впервые использовалась в классической работе Карлемана [1]. Обзор различных вариантов тауберовой техники дан а работе Хёрмандера [4]. Доказательство тауберовой теоремы Икехара, приводимое здесь, близко к доказательству, изложенному в книге Ленга [1].

Отметим важное приложение результатов Сили — уже упоминавщуюся работу Атья, Ботта и Патоди [1], в которой дано новое изложение теории индекса. Атья, Патоди и Зингер [1] изучили для самосопряженного неполуограниченного оператора A функцию

$$\eta_A(z) = \sum_j (\operatorname{sign} \lambda_j)\, |\lambda_j|^z.$$

Укажем еще близкие к этому кругу идей работы Рея и Зингера [1], [2] об аналитическом кручении.

Работы Сили [2], [3] содержат также изучение комплексных степеней и ζ-функции оператора, соответствующего эллиптической граничной задаче. Мы совсем не касались спектральной теории граничных задач — по этому поводу читатель может обратиться к монографии Березанского [1].

Мероморфное продолжение ζ-функции тесно связано с асимптотикой следа резольвенты (при $\lambda \to \infty$) и с асимптотикой θ-функции

$$\theta(t) = \sum_j e^{-\lambda_j t}$$

при $t \to +0$ (см., например, Дюйстермаат и Гийемин [1]). Эти вопросы изучались в работах Фудживары [1] и Грейнера [1].

Псевдодифференциальные системы, эллиптические по Дуглису—Ниренбергу, изучались с указанной точки зрения Кожевниковым [1].

Асимптотика $N(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ (без оценки остатки) для гипоэллиптических операторов на компактном многообразии с краем получена Москателли и Томпсоном [1].

Обсуждение теорий псевдодифференциальных граничных задач с параметром можно найти у Аграновича [2].

Как мы отмечали в тексте книги, теорема о мероморфном продолжении ζ-функции не позволяет получить существенной информации о собственных значениях несамосопряженных операторов. Обзор различных вопросов спектральной теории несамосопряженных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов можно найти в работе Аграновича [3].

К ГЛАВЕ III

Теорема 16.1, принадлежащая Хёрмандеру, доказана в его работе [4]. Глава III представляег собой развернутое изложение этой работы, дополненное изложением всех необходимых вспомогательных фактов. Работа Хёрмандера [4] содержит также некоторые результаты, относящиеся к случаю некомпактного многообразия, и некоторые результаты о средних Рисса (см. по этому поводу также другую работу Хёрмандера [3]).

Описание структуры оператора $\exp(-itA)$ как ИОФ, по существу, делается на основе идей геометрической оптики (см. по этому поводу книгу Бабича и Булдырева [1]). Эти идеи были использованы Лаксом [1] для построения асимптотических решений и параметрикса гиперболических систем. Метод Лакса был развит Хёрмандером [4] и привел к указанному описанию структуры оператора $\exp(-itA)$, что, по существу, равносильно описанию особенностей фундаментального решения гиперболического псевдодифференциального уравнения. Отметим еще, что оператор $\exp(-itA)$ при больших t уже представляет собой глобальный ИОФ (см. литературные указания к главе I). В ряде работ изучалась возможность представления операторной экспоненты $\exp(-tA)$ и ее ядра в терминах континуальных интегралов типа Фейнмана (см., например, Маслов и Шишмарев [1]).

Отметим, что метод получения асимптотики спектральной функции, основанный на рассмотрении гиперболического уравнения, впервые использовался Левитаном [1]. Укажем еще работу Левитана [2], содержащую важные добавления к рабоге Хёрмандера [4].

Дальнейшие результаты об асимптотике собсгиенных значений, связывающие этот вопрос с геометрией бихарактеристик, можно найти в работах Колен де Вердье [1], Шэзарэна [1], Дюйстермаата [2], Вайнстейна [1], Шнирельмана [1]. Особо отметим работу Дюйстермаата и Гийемина [1], где при некоторых предположениях получен второй член асимптотики $N(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ для самосопряженного эллиптического оператора на замкнутом многообразии. С помощью ИОФ Розенблюм [1] получил очень точные результаты об асимптотике собственных значений для операторов на окружности.

По поводу геометрии спектра см. также книгу Берже, Годушона, Мазе [1], статью Молчанова [1], а также интересные работы Гилки [1], [2], [3].

Мы совсем не касались вопросов, связанных с асимптотикой спектра негладких или вырождающихся операторов и граничных задач. По этому поводу мы отсылаем читателя к лекциям Бирмана и Соломяка [1] и к их обзору [2], где можно найти также обширную библиографию по асимптотике спектра.

Обзор ряда важных результатов, касающихся разложений по собственным функциям, можно найти в статье Алимова, Ильина и Никишина [1].

К ГЛАВЕ IV

Теория ПДО в $\mathbb{R}^n$, по существу, возникла уже давно в рамках математических вопросов квантовой механики (см, например, Березин [1], Березин и Шубин [1], [2]). Различные варианты этой теории можно найти в работах Рабиновича [1], Кумано-го [1], [2], Грушина [1], Шубина [1], [5], Билса [2], Фейгина [2].

В работах Билса [3] и Шубина [5] обсуждается структура операторов, являющихся функциями от ПДО в $\mathbb{R}^n$ с равномерными по x оценками символов (таких, как у Кумано-го [1]).

Различные вопросы, связанные с фредгольмовостью ПДО на некомпактных многообразиях, обсуждаются у Кордеса и Мак-Оуэна [1]. Ряд работ последнею времени посвящен ПДО на нильпотентных группах Ли (в особенности на группе Гейзенберга) — см., например, Ротшильд и Стейн [1].

Приводимое здесь построение алгебры ПДО в $\mathbb{R}^n$ ближе всего к работе Шубина [1]. Понятие антививиковского символа было введено Березиным [2] и является вариантом конструкции Фридрихса [1] (см. также Кумано-го [1], [2]). По поводу приложений виковского и антививиковского символа, а также более общих символов см. работы Березина [2], [3], Березина и Шубина [1], Шубина [2], [3]. В работе Березина [2] с помощью неравенств для $\operatorname{Sp}\exp(-tA)$ получена асимптотика собственных значений (без оценки остатка). Результаты § 25 и § 26, по существу, содержатся в работе Шубина [1] (см. также [4]). Наконец, метод приближенного спектрального проектора и все результаты §§ 28—30 содержатся в работе Туловского и Шубина [1]. Важная модификация этого метода предложена Фейгиным [1], [2].

Укажем, что метод приближенного спектрального проектора, по существу, является вариационным методом. Вариационные методы берут начало с классических работ Г. Вейля [1], [2]. Для нахождения асимптотики собственных значений операторов в $\mathbb{R}^n$ можно применять и тауберов метод — см. работу Костюченко [1]. Обзор всех результатов по асимптотике спектра операторов в $\mathbb{R}^n$ можно найти в уже цитировавшейся работе Бирмана и Соломяка [2].

К добавлению 1

Понятие волнового фронта обобщенной функции было введено Хёрмандером [6] на основе существовавшего ранее и принадлежащего Сато [1] понятия сингулярного носителя гиперфункции.

Теорема о распространении особенностей в указанной здесь форме принадлежит Дюйстермаату и Хёрмандеру [1] (см. также Хёрмандер [8]). Приводимое здесь доказательство принадлежит Туловскому. Другое изложение модно найти в лекциях Ниренберга [1]. В ряде последующих работ рассматривались более тонкие вопросы, связанные с распространением волновых фронтов (см., например, работу Иврия [1] и имеющиеся в ней ссылки).

К добавлению 2

В этом добавлении излагаются результаты Ройтбурда [1]. Близкий результат, но без оценки остаточного члена был получен Березиным [2]. Другие сведения о квазиклассических асимптотиках и литературные указания по этому поводу можно найти в монографии Маслова и Федорюка [1].

БИБЛИОГРАФИЯ

А г р а н о в и ч М. С.

1. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, **20**, № 5 (1965), 3—120.
2. Граничные задачи для систем с параметром, Матем. сб., **84**, № 1 (1971), 27—65.
3. Спектральные свойства задач дифракции, в книге Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов Л. Н., «Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции», М., «Наука», 1977, 289—416.

А л и м о в Ш. Л., И л ь и н В. А., Н и к и ш и н Е. М.

1. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, I, УМН, **31**, № 6 (1976), 28—83; II, УМН, **32**, № 1 (1977), 107—130.

А р н о л ь д В. И.

1. Математические методы классической механики, «Наука», М., 1974.

А т ь я (Atiyah M.)

1. Elliptic operators and compact groups, Lect. Notes Math. **401** (1974), 1—93.
2. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, Astérisque, **32—33** (1976), 43—72.

А т ь я, Б о т т (Atiyah M., Bott R.)

1. A Lefshetz fixed point formula for elliptic complexes, I, Ann. of Math., Ser. 2, **86** (1967), 374—407; II, Applications, Ann. of Math., Ser. 2, 88 (1968), 451—491.

А т ь я, Б о т т, П а т о д и (Atiyah M., Bott R., Patodi V. K.)

1. On the heat equation and the index theorem, Invert. Math., 19 (1973), 279—330. (Русский перевод: сб. Математика **17**:6 (1973), 3—48.) См. также Errata to the paper: On the heat equation and index theorem, Invent. Math., **28** (1975), 277—280.

А т ь я, З и н г е р (Atiyah M., Singer I. M.)

1. The index of elliptic operators, I, Ann. of Math., **87** (1968), 484—530 (Русский перевод: УМН, **23**, № 5 (1968), 99—142.)

А т ь я, П а т о д и, З и н г е р (Atiyah M., Patodi V. K., Singer I. M.)

1. Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I, Math. Proc. Cambrige Phil. Soc., **77** (1975), 43—69; II там же, **78** (1975), 405—432; III там же, **79** (1976), 71—99.

Б а б и ч В. М, Б у л д ы р е в В. С.

1. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, «Наука», М., 1972.

Б а у е н д и, Г у л а у и к (Baouendi M. S., Goulaouic C.)

1. Problemes de Cauchy pseudodifferentiels analytiques non lineaires, Sem. Goulaouic—Schwatz, 1975—76, Exposé XIII.

Б е р е з а н с к и й Ю. М.

1. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», Киев, 1965.

Б е р е з и н Ф. А.

1. Об одном представления операторов с помощью функционалов, Труды Моск. матем. об-ва, 17 (1967), 117—196.
2. Виковские и антнвиковские символы операторов, Матем. сб. **86** (1971), 578—610.

3. Ковариантные и контравариантные символы операторов, Изв. АН СССР, сер. матем., **36**, № 5 (1972), 1134—1167.

Березин Ф. А., Шубин М. А.

1. Symbols of operators and quantization, Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, 5, Hilbert space operators, Tihany (Hungary), 1970, 21—52.
2. Лекции по квантовой механике, М., Изд-во МГУ, 1972.

Берже, Годушон, Мазе (Berger M., Gauduchon P., Mazet E.)

1. Le spectre d'une variété Riemannienne, Lecture Notes in Math., 194, Berlin, 1971.

Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.

1. Интегральные представления функций и теоремы вложения, «Наука», М., 1975.

Билс (Beals R.)

1. Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators, II, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 161—205.
2. A general calculus of pseudodifferential operators, Duke Math. J., **42**(1975), 1—42.
3. Characterization of pseudodifferential operators and applications, Duke Math. J., **44**, № 1 (1977). 45—58.

Билс, Феферман (Beals R., Fefferman C.)

1. Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators, I, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 1—24.

Бирман М. Ш., Соломяк М. З.

1. Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории, в кн. «Десятая матем. школа», Киев, 1974, 5—189.
2. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений, в сб. «Математический анализ», вып. 14 (серия «Итоги науки», 1977.

Вайнстейн (Weinstein A.)

1. Fourier integral operators, quantization and the spectra of Riemannian manifolds, Proc. of the C.N.R.S. Colloque de Géométrie Symplectique et physique Mathématique, Aix en Provence, June 1974.

Ватанабе (Watanabe K.)

1. On the boundedness of pseudodifferential operators of type ρ, δ with $0 \leqslant \rho = \delta < 1$, Tohoku Math. J., **25**, № 3 (1973), 339—345.

Вейль Г. (Weyl H.)

1. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., **71** (1912), 441—479.
2. Uber die Abhängigkeit der Eigenshwingungen einer Membran von der Begrenzung, J. reine angew. Math., **141** (1912), 1—11.

Волевич Л. Р.

1. Псевдодифференциальные операторы с голоморфными символами и классы Жеврея, Труды Моск. матем. об-ва, **24** (1971), 43—68.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.

1. Обобщенные функции, вып. 1, Физматгиз, М., 1959; вып. 2, 3, Физматгнз. М., 1958.

Гилки (Gilkey P. B.)

1. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes, Adv. Math., **10** (1973), 344—382.
2. Curvature and the eigenvalues of the Dolbedult complex for Kaehler manifolds, Adv. Math., **11** (1973), 311—325.
3. Spectral geometry and the Kaehler condition for complex manifolds, Invent. Math., **26** (1974), 231—258.

Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.

1. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом

пространстве, «Наука», М., 1965.

Грейнер (Greiner P.)

1. An asymptotic expansion for the heat equation, Arch. Ration. Mech. and Anal., **41**, № 1 (1971), 163—218.

Грушин В. В.

1. Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами, Функц. анализ и его прил., **4**, вып. 3 (1970), 37—50.
2. Псевдодифференциальные операторы, Моск. институт электронного машиностроения, М., 1975.

Дюйстермаат (Duistermaat J. J.)

1. Fourier integral operators, Courant Institute of Math. Sciences, New York, 1973.
2. The spectrum and periodic geodesics, Lecture on the AMS Summer Institute on differential geometry, Stanford, August 1973.
3. Oscillatory interals, Lagrange immersions and unfolding of singularities, Comm. Pure Appl. Math., **27**, № 2 (1974), 207—231.

Дюйстермаат, Гийемин (Duistermaat J. J., Guillemin V. W.)

1. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. Math., **29** (1975), 39—79.

Дюйстермаат, Хёрмандер (Duistermaat J. J., Hormander L.)

1. Fourier integral operators, II, Acta Math., **128** (1972), 183—269.

Дюран (Durand M.)

1. Parametrix d'operateurs elliptiques de class C^μ, Bull. Soc. math. France, **103** (1975), 21—63.

Дюшато, Трев (Du-Chateau P., Treves F.)

1. An abstract Cauchy—Kovalevski teorem in scale of Gevrey classes, Symp. Mathematica, **7** (1971), 135—163.

Егоров Ю. В.

1. Канонические преобразования и псевдодифференциальные операторы, Труды Моск. матем. об-ва, **24** (1971), 3—28.
2. О необходимых условиях разрешимости псевдодифференциальных уравнений главного типа, Труды Моск. матем. об-ва, **24** (1971), 29—41.
3. Субэллиптические операторы, УМН, **30** № 2 (1975), 57—114.
4. О субэллиптических операторах, УМН, **30**, № 3 (1975), 57—104.

Иврий В. Я.

1. О волновых фронтах решений некоторых псевдодифференциальных уравнений, Функц. анализ и его прил., **10**, № 2 (1976), 71—72.

Иллнер (Illner R.)

1. On algebra of pseudo-differential operators in $L^p(R^n)$, Comm. Part. Diff. Eq. **2**, № 4 (1977). 359—394.

Кальдерон (Calderon A. P.)

1. Lecture notes on pseudo-differential operators and elliptic boundary value problems I, Publs I.A.M., 1976. Ser 2, № 1.

Кальдерон, Вайанкур (Calderon A. P., Vaillancoart R.)

1. A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **69** (1972), 1185-1187.

Карлеман (Carleman T.)

1. Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, C.R. 8-éme Congr. des Math. Scand Stockholm, 1934, Lund 1935, 34—44.

Кожевников А. Н.

1. Спектральные задачи для псевдодифференциальных систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу, и их приложения, Матем. сб., **92**, № 1 (1973), 60—88.

К о л е н д е В е р д ь е (Colin de Verdier Y.)
1. Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques, II, Comp. Math., **27** (1973), 159—184.
К о н, Н и р е н б е р г (Kohn J. J., Nirenberg L.)
1. An algebra of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 269—305. (Русский перевод: Алгебра псевдодифференциальных операторов, в сб. «Псевдодифференциальные операторы», «Мир», М., 1967, 9—62.)
К о р д е с, М а к - О у э н (Cordes H. O., Mc Owen R. C.)
1. The C^*-algebra of a singular elliptic problem on a noncompact Riemannian manifold, Math. Z., **153**, № 2 (1977), 101—116.
К о с т ю ч е н к о А. Г.
1. Асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженных эллиптических операторов, в кн. «Четвертая матем. школа», Киев, 1968, 42—117.
К у м а н о - г о (Kumano-go H.)
1. Remarks on pseudo-differential operators, J. Math. Soc. Japan, **21** (1969), 413—439.
2. Algebras of pseudo-differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A, **17** (1970), 31—50.
3. Pseudo-differential operators of multiple symbol and the Calderon—Vaillancourt theorem, J. Math. Soc. Japan, **27**, № 1 (1975), 113—119.
К у м а н о - г о, Ц у ц у м и (Kumano-go H., Tsutsumi C.)
1. Complex powers of hypoelliptic pseudo-differential operators with applications, Osaka J. Math., **10** (1973), 147—174.
К у ч е р е н к о В. В.
1. Асимптотика решения задачи Коши для уравнений с комплексными характеристиками, «Современные проблемы математики» (Итоги науки и техники), **8** (1976), 41—136.
Л а к с (Lax P. D.)
1. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., **24** (1957), 627—646.
Л е в и т а н Б. М.
1. Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Изв. АН. СССР, сер. матем., **16** (1952), 325—352.
2. Асимтотическое поведение спектральной функции эллиптического уравнения, УМН, **26**, № 6 (1971), 151—212.
Л е н г С. (Lang S.)
1. Algebraic numbers, London, 1964. (Русский перевод: Алгебраические числа, «Мир», М., 1966.)
Л и о н с, М а д ж е н е с (Lions J. L., Magenes E.)
1. Problems aux limites non homogénes et applications, v. 1, Dunod, Paris, 1968. (Русский перевод: Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., «Мир», 1971).
М а з ь я В. Г., П а н е я х Б. П.
1. Вырождающиеся эллиптические псевдодифференциальные операторы и задача с косой производной, Труды Моск. матем. об-ва, **31** (1974), 237—295.
М а с л о в В. П.
1. Теория возмущений и асимптотические методы, Изд-во МГУ. М.,
2. Операторные методы, «Наука», М., 1973.
М а с л о в В. П., Ф е д о р ю к М. В.
1. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, «Наука», М., 1976.

М а с л о в В. П., Ш и ш м а р е в И. А.
1. О T-произведении гипоэллиптических операторов, «Современные проблемы математики» (Итоги науки и техники), **8** (1976), 137—197.
М е л и н, Ш ё с т р а н д (Melin A., Sjostrand J.)
1. Fourier integral operators with complex-valued phase functions, Lect. Notes Math., **459** (1975), 121—223.
М и х л и н С. Г.
1. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
М и щ е н к о А. С., С т е р н и н Б. Ю., Ш а т а л о в В. В.
1. Геометрия лагранжевых многообразий и канонический оператор Маслова в комплексном фазовом пространстве, «Современные проблемы математики» (Итоги науки и техники), **8** (1976), 3—39.
М о л ч а н о в С. А.
1. Диффузионные процессы и риманова геометрия, УМН, **30**, № 1 (1975), 3—59.
М о с к а т е л л и, Т о м п с о н (Moscatelli V. B., Thompson M.)
1. Distribution asymptotique des valeurs propres d'opérateurs pseudo-differentiels sur des variétés compactes, C. r. Acad. sci., **284**, № 6 (1977), A373—A375.
М у р а м а т у (Muramatu T.)
1. On the boundedness of a class of operator-valued pseudo-differential operators in L^p-space, Proc Japan Acad., **49** (1973), 94—99.
Н а г а с е, Ш и н к а и (Nagase M., Shinkai K.)
1. Complex powers of non-elliptic operators, Proc. Jap. Acad., **46** (1970), 779—783.
Н и к о л ь с к и й С. М.
1. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», М., 1969.
Н и р е н б е р г (Nirenberg L.)
1. Lectures on linear partial differential equations. Conference board of the mathematical sciences, Regional conference series in mathematics, Amer. Math. Soc., № 1 (1973). (Русский перевод: Лекции о линейных дифференциальных уравнениях с частными производными, УМН, **30**, № 4 (1975), 147—204.)
Н и р е н б е р г, Т р е в (Nirenberg L., Treves F.)
1. On local solvability of linear partial differential equations. Part I: Necessary conditions, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), 1—38. Part II: Sufficient conditions, там же, 459—509. (Русский перевод: О локальной разрешимости линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Часть I: Необходимые условия, сб. Математика, **15**:3 (1971), 142—172. Часть II: Достаточные условия, сб. Математика, **15**:4 (1971), 68—110.)
О л е й н и к О. А., Р а д к е в и ч С. В.
1. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, Математический анализ (Итоги науки), 1969; М., 1971.
Р а б и н о в и ч В. С.
1. Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях с конической структурой на бесконечности, Матем. сб., **80** (1969), 77—97.
Р е й, З и н г е р (Ray D., Singer I. M.)
1. R-Torsion and the Laplasian on Riemannian manifolds, Adv. Math., **7** (1971), 145—210.
2. Analitic torsion for complex manifolds, Ann. of Math., **98** (1973), 154—177.
Р и с с, С е к е ф а л ь в и - Н а д ь (Riesz F., Sz.-Nagy B.)
1. Leçons d'analyse fonctionelle, Akademiai Kiado, Budapest, 1952. (Русский перевод: Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.)

Р о з е н б л ю м Г. В.
1. Почти-подобие псевдодифференииальпых систем на окружности, ДАН СССР, **223**, № 3 (1975), 569—571.
Р о й т б у р д В. Л.
1. О квазиклассической асимптотике спектра псевдодифференциального оператора, УМН, **31**, № 4 (1976), 275—276.
Р о т ш и л ь д, С т е й н (Rotschild L. P., Stein E. M.)
1. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, Acta Math., **137**, 3—4 (1976), 247—320.
Р у д и н (W. Rudin)
1. Functional analysis. Mc Graw-Hill, New York, 1973. (Русский перевод: Функциональный анализ, «Мир», М., 1975.)
С а т о (Sato M.)
1. Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Actes Congr. int mathematiciens, 1970, v. 2, Paris, 1971, 785—794.
С и л и (Seeley R. T.)
1. Complex powers of an elliptic operator, Proc. Symp. in Pure Math., **10** (1967), 288—307.
2. The resolvent of an elliptic boundary problem, Amer. J. Math., **91** (1969), 889—920.
3. Analitic extension of the trace associated with elliptic boundary problems, Amer. J. Math., **91** (1969), 963—983.
С м а г и н С. А.
1. Дробные степени гипоэллиптических операторов в R^n, ДАН СССР, **209** (1973), 1033—1036.
2. Комплексные степени гипоэллиптических систем в R^n, Матем. сб., **99** (1976), 331—341.
С о б о л е в С. Л.
1. Введение в теорию кубатурных формул, «Наука», М., 1974.
Т е й л о р (M. Taylor)
1. Pseudo-differential operators, Lect. Notes Math. 416, Berlin, 1974.
Т р е в (Treves F.)
1. An introduction to pseudo-differential operators and Fourier integral operators, Universidade Federal de Pernambuco, Instituto de Matematica, Editora Universitaria, Resife, 1973.
Т у л о в с к и й В. Н., Ш у б и н М. А.
1. Об асимптотическом распределении собственных значений псевдодифференциальных операторов в R^n, Матем. сб., **92** (1973), 571—588.
У э л л с (Wells R. O.)
1. Differential analysis on complex manifolds, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973. (Русский перевод: Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, М., «Мир», 1970.)
Ф е д о с о в Б. В.
1. Аналитические формулы индекса эллиптических операторов, Труды Моск. матем. об-ва, **30** (1974), 159—242.
Ф е й г и н В. И.
1. Асимптотическое распределение собственных чисел для гипоэллиптических систем в R^n, Матем. сб., **99** (1976), 594—614.
2. Две алгебры псевдодиффереицияльпых операторов в R^n и некоторые приложения, Труды Моск. матем. об-ва, **36** (1977), 155—194.
Ф р и д р и х с (Friedrichs K. O.)
1. Pseudo-differential operators; An introduction, Lecture Notes, Courant Institute of

mathematical sciences, New York, 1970.
Фридрихс, Лакс (Friedrichs K. O., Lax P. D.)
1. Boundary value problems for first order operators, Comm. Pure Appl. Math., **18** № 1—2 (1965), 355—388.
Фудживара (Fujiwara D.)
1. On the asymptotic formula for the Green operators for elliptic operators on compact manifolds, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **14**, № 2 (1967), 251—283.
Хайакава, Кумано-го (Hayakawa K., Kumano-go H.)
1. Complex powers of a system of pseudo-differential operators, Proc. Jap. Acad., **47** (1971), 359—364.
Хёрмандер (Hörmander L.)
1. Pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 501—517. (Русский перевод: Псевдодифференциальные операторы, в сб. «Псевдодифференциальные операторы», «Мир», М., 1967, 63—87.)
2. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symp. on Singular Integrals, Chicago, 1966. (Русский перевод: Псевдодифференциальныв операторы и гипоэллинтические уравнения, в сб. «Псевдодифференциальные оператеры», «Мир», М., 1967, 297—367.)
3. On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators. Recent Advances in the Basic Sciences, Yechiva University conference 1966, 155—202. (Русский перевод: О средних Рисса спектральных функций эллиптических дифференциальных операторов и соответствующих спектральных разлижениях, сб. Математика, **12**:5 (1968), 91—130.)
4. The spectral function of an elliptic operator, Acta Math., **121** (1968), 193—218. (Русский перевод: Спектральная функция эллиптического оператора, сб. Математика, **13**:6 (1969), 114—137.)
5. On the index of pseudodifferential operators, Schriftenr. Inst. Math. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, A, № 8, (1971), 127—146. (Русский перевод: Об индексе псевдодифференцильных операторов, сб. Математика, **14**:4 (1970), 78—97.)
6. Fourier integral operators, I, Acta Math., 127 (1971), 79—183. (Русский перевод: Интегральные операторы Фурье, I, сб. Математика, **16**:1, 17—61; **16**:2, 67—136 (1972).)
7. Linear partial differential operators, Springer-Verlag, 1963. (Русский перевод: Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.)
8. On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, L'Enseignement mathematique, **17** : 2 (1971), 99—163. (Русский перевод: О существовании и регулярности решений линейных псевдодифференциальных уравнений, УМН, **28**, № 6 (1973), 109—164.)
Чжэнь Шэнь-шэнь (Chern S. S.)
1. Комплексные многообразия, ИЛ, М., 1961.
Шнирельман А. И.
1. Об асимптотической кратности спектра оператора Лапласа, УМН, **30**, N 4 (1975), 265—266.
Шубин М. А.
1. Псевдодифференциальные операторы в R^n, ДАН СССР, **196** (1971), 316—319.
2. О некоторых свойствах псевдодифференциальных операторов с негладкими символами, ДАН СССР, **207**, № 3 (1972), 551—553.
3. О спектральных свойствах операторов с ковариантным и контравариантным символами и об одном вариационном принципе, Вестник МГУ, сер. мат. мех., **3** (1973), 51—57.
4. О существенной самосопряженности равномерно гипоэллиптических операторов,

Вестник МГУ, сер. мат. мех., **2** (1975), 91—94.
5. Псевдодифференциальные почти-периодические операторы и алгебры фон Неймана. Труды Моск. мат. об-ва, **35** (1976), 103—164.

Шэзарэн (Chazarain J.)
1. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes, Invent., Math., **24** (1974), 65—82.

Эскин Г. И.
1. Задача Коши для гиперболических уравнений в свертках, Матем. сб., **74**. № 2 (1907), 262—297.
2. Системы псевдодифференциальных уравнений с простыми вещественными характеристиками, Матем. сб., **77**, № 2 (1968), 174—200.
3. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, «Наука», М., 1973.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ