М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов .V, *УМН*, 1972, том 27, выпуск 4(166), 179–188

1972 г. июль—август *т. XXVII, вып. 4 (166)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.4+513.83

ИНДЕКС ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. V [1])

М. Ф. Атья, И. М. Зингер

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 179
§ 1. Вещественные операторы 180
§ 2. Косоэрмитовы операторы 183
§ 3. Примеры 185
Литература 188

Введение

В предыдущих статьях этой серии изучался индекс эллиптических псевдодифференциальных операторов и семейств таких операторов. При этом все операторы (и векторные расслоения) были определены над комплексными числами. В настоящей статье мы хотим уточнить изложенную ранее теорию и применить ее к вещественным операторам, в частности, к дифференциальным операторам с вещественными коэффициентами. Для одного вещественного эллиптического оператора на компактном многообразии индекс, конечно, может быть вычислен с помощью перехода с комплексификации. Для семейств, параметризованных пространством, ситуация иная. В статье IV мы определили индекс комплексного семейства как элемент $K(Y)$. Аналогично, для вещественного семейства мы определим индекс как элемент $KR(Y)$ группы Гротендика вещественных расслоений на Y. Комплексификация семейства приводит к комплексификации индекса, а именно, к гомоморфизму $KR(Y) \to K(Y)$, индуцированному отображением $E \to E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Если Y — точка, этот гомоморфизм инъективен, но для общих пространств Y он не инъективен. Поэтому знание индекса комплексных семейств недостаточно для определения индекса вещественных семейств. Это рассуждение и является обоснованием настоящей статьи.

[1]) M. F. Atiyah, I. M. Singer, The index of elliptic operators. V, Ann. of Math. 92 (1970), 139—149. Первая часть настоящей статьи опубликована в УМН **23**:5 (143) (1968), 99—142; вторая часть опубликована в УМН **23**:6 (144) (1968), 135—149; третья часть опубликована в УМН **24**:1 (145) (1969), 127—182; четвертая часть опубликована в УМН **27**:4 (166) (1972), 161—178. Перевод с английского выполнен С. И. Гельфандом.

В § 1 мы показываем, как нужно изменить основную теорему статьи IV, чтобы в ней можно было учесть условия вещественности. Единственное место, заслуживающее здесь специального упоминания, состоит в том, что класс символа вещественного оператора нужно рассматривать в некоторой подходящей K-теории, а не в обычной K-теории вещественных векторных расслоений. Вместо этого нам нужно использовать K-теорию, развитую в [2] для пространств с инволюцией. Это и является, в действительности, мотивировкой для работы [2] (как объясняется в [2], § 5). После того как у нас есть правильная K-теория, доказательство основной теоремы проходит так же, как и раньше, нужно только все время наблюдать за условиями вещественности.

По-видимому, наиболее простой и интересный пример вещественного эллиптического семейства возникает из вещественного косоэрмитова эллиптического оператора P. Как объяснено в [8], такой оператор задает семейство $\widetilde{P}$, параметрированное единичной окружностью S^1, и индекс $\widetilde{P}$ в $KR(S^1)$ лежит в приведенной группе $\widetilde{KR}(S^1) = \mathbf{Z}_2$ и совпадает с «индексом по модулю 2» оператора P:

$$\operatorname{index} \widetilde{P} = \dim \operatorname{Ker} P \pmod 2.$$

Таким образом, теорема об индексе для вещественных эллиптических семейств приводит, в частности, к результату об индексе по модулю 2 для вещественных косоэрмитовых эллиптических операторов. Это объяснено в § 2.

В § 3 мы изучаем некоторые частные примеры косоэрмитовых операторов, определенных на многообразиях. Мы показываем, в частности, что для компактного ориентированного $(4k+1)$-мерного многообразия X полухарактеристика Кервера

$$k(X) = \sum_p \dim H^{2p}(X, \mathbf{R}) \bmod 2$$

является таким индексом по модулю 2. Этот результат приводит к интересным геометрическим приложениям, касающимся векторных полей [4].

§ 1. Вещественные операторы

Если E, F — вещественные векторные расслоения на компактном многообразии X, то мы можем рассматривать дифференциальные операторы $P: C^\infty(X; E) \to C^\infty(X, F)$ с вещественными коэффициентами. Это означает просто, что в каждой локальной координатной окрестности P имеет вещественные коэффициенты. Поскольку E, F — *вещественные* векторные расслоения, последнее утверждение имеет инвариантный смысл.

При комплексификации P определяет оператор $P^c: C^\infty(X; E^c) \to C^\infty(X; F^c)$, где $E^c = E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, $F^c = F \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Этот комплексифицированный оператор удовлетворяет условию вещественности

$$\overline{P^c(u)} = P^c(\bar{u}), \tag{1.1}$$

где комплексное сопряжение в пространстве сечений E^c, F^c индуцировано комплексным сопряжением в слоях. Обратно, каждый дифференциальный оператор P^c, удовлетворяющий условию (1.1), является комплексификацией вещественного дифференциального оператора. Поскольку определение псевдодифференциального оператора включает преобразование Фурье, более удобно работать с комплексификациями и затем использовать условие вещественности (1.1). Заметим, однако, что мы продолжаем работать с векторными расслоениями, которые являются комплексификациями вещественных расслоений.

Вещественный эллиптический псевдодифференциальный оператор Q определяется, таким образом, как эллиптический псевдодифференциальный оператор $Q : C^\infty(X;\ E^c) \to C^\infty(X;\ F^c)$ такой, что $\overline{Q(u)} = Q(\bar{u})$. В евклидовом пространстве, если $Q = q(x,\ D)$ получен из функции $q(x,\ \xi)$ по обычной формуле

$$Qu = (2\pi)^{-n} \int q(x,\ \xi)\hat{u}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi,$$

то (поскольку $D = -i(\partial/\partial x)$)

$$\overline{Qu} = \overline{q(x, D)u} = \bar{q}(x,\ -D)\bar{u}.$$

Поэтому условие вещественности превращается в равенство

$$\bar{q}(x,\ -\xi) = q(x,\ \xi). \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что символ $\sigma(x,\ \xi)$ вещественного псевдодифференциального оператора удовлетворяет равенству

$$\bar{\sigma}(x,\ -\xi) = \sigma(x,\ \xi). \tag{1.3}$$

Ясно, что символ, удовлетворяющий (1.3), всегда представляет вещественный оператор: если Q — произвольный оператор с символом σ, то оператор $u \to {}^1/_2(Q(u) + \overline{Q(\bar{u})})$ веществен и имеет тот же символ σ.

Условие (1.3) заставляет нас, как и в [2], ввести соответствующую K-теорию. Напомним кратко приведенные там определения. Рассмотрим произвольное компактное пространство X с инволюцией $x \to \bar{x}$ и комплексные векторные расслоения $E \to X$ с инволюцией $e \to \bar{e}$, накрывающей инволюцию на X и антилинейную на слоях. Группу Гротендика таких расслоений с инволюцией мы обозначим через $KR(X)$. Заметим, что если инволюция на X тривиальна (т. е. $\bar{x} = x$ для всех $x \in X$), то у нас есть сопряжение на каждом слое расслоения E и, значит, E превращается естественным образом в комплексификацию вещественного расслоения $E_{\mathbf{R}}$ (множества неподвижных точек инволюции). Поэтому в этом случае $KR(X)$ можно отождествить с K-теорией вещественных векторных расслоений на X (которая обозначается также $KO(X)$). Напрашивается назвать пространство X с инволюцией *вещественным пространством*, а определенные выше векторные расслоения E — *вещественными векторными расслоениями*. Для локально компактного пространства X мы можем определить $KR(X)$ с помощью троек $(E,\ F,\ \alpha)$, где E, F — вещественные векторные расслоения на X, и α — вещественный изоморфизм вне компактного множества (т. е. α совместим с инволюцией).

Вернемся теперь к вещественному символу σ. Расслоения E, F, на которых действует σ, являются комплексификациями, и, значит, вещественными расслоениями над нашим многообразием X (с тривиальной инволюцией). Поднимем их на касательное расслоение TX, снабдив TX инволюцией $\xi \to -\xi$. Мы получим вещественные расслоения π^*E, π^*F на TX, и условие (1.3) утверждает, что $\sigma : \pi^*E \to \pi^*F$ является вещественным гомоморфизмом

$$\overline{\sigma(x, \xi) e} = \bar{\sigma}(x, \xi) \bar{e} = \sigma(x, -\xi)\bar{e}.$$

Таким образом, *эллиптический* вещественный символ σ обладает классом символа $[\sigma] \in KR(TX)$.

Как объяснялось во введении, в вещественном случае нет новой теории индекса одного оператора, поэтому мы сразу перейдем к семействам. Вещественное эллиптическое семейство, параметризованное компактным пространством Y, определяется так же, как в [7]. У нас есть расслоенное пространство $Z \to Y$, слоем которого является компактное гладкое многообразие X, и для каждого $y \in Y$ — вещественный эллиптический оператор P_y на слое X_y, который меняется непрерывно вместе с y. В [7], § 2, было показано как определить индекс комплексного семейства как элемент из $K(Y)$. Если размерность $\operatorname{Ker} P_y$ постоянна, мы можем положить

$$\text{(1.4)} \qquad \operatorname{index} P = [\operatorname{Ker} P] - [\operatorname{Coker} P],$$

где $\operatorname{Ker} P$ — векторное расслоение, слой которого над точкой $y \in Y$ равен $\operatorname{Ker} P_y$; также определяется $\operatorname{Coker} P$. В общем случае мы должны сначала изменить P, добавляя несколько сечений $s_1, \ldots, s_q$, как в [7], предложение 2.1. В вещественном случае мы также можем определить индекс $P \in KR(Y)$ формулой (1.4), когда размерность $\operatorname{Ker} P_y$ постоянна. Вообще мы можем действовать так же, как в [7], предложение 2.1, используя только вещественные сечения s_i. Нужно только заметить, что построение сечений s_i, приведенное в [7], можно провести и в вещественном случае (когда все расслоения и операторы вещественны).

Конечно, если мы забудем об условиях вещественности P, мы получим комплексное семейство, индекс которого в $K(Y)$ является, конечно, образом индекса $P \in KR(X)$ при естественном гомоморфизме $KR(X) \to K(X)$. Поскольку это отображение не всегда инъективно, вещественный индекс является более тонким объектом, чем комплексный, и мы сейчас предложим соответствующее изменение теоремы об индексе из [7].

Так же как в [7], отображение $P \to \operatorname{index} P$ определяет аналитический индекс $a\text{-ind} : KR(TZ) \to KR(Y)$.

Для определения топологического индекса мы поступим так же, как в [5], [7]. Первый важный момент в доказательстве состоит в том, что если N — трубчатая окрестность X в евклидовом пространстве V, то отождествление $TN = \pi^*(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$, используемое в [6], § 3, совместимо с инволюциями. Это выполнено, потому что мы считаем, что вектор $y + i\eta \in N_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ представляет касательный вектор η в точке $y \in N_x$, так что инволюция $\xi \to -\xi$ в TN соответствует комплексному сопряжению в $N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Второй момент, о котором нужно упомянуть, состоит в том, что в KR для вещественных расслоений имеет место изоморфизм Тома. Это доказано в [2] и [3]. После этих замечаний становится ясным, что топологический индекс определен и дает гомоморфизм $t\text{-ind} : KR(TZ) \to KR(Y)$.

Теорема, конечно, должна состоять в следующем:

Теорема 1.1. *Аналитический и топологический индекс вещественных эллиптических семейств совпадают.*

Доказательство протекает точно так же, как для комплексных семейств. Единственное место, о котором нужно сказать особо, состоит в следующем. Нужно показать, что фундаментальный эквивариантный класс символа $b = i_!(1) \in KR_{SO(n)}(T\mathbf{R}^n)$ (где $i : A \to \mathbf{R}^n$ — вложение начала координат) имеет индекс 1 в $KR_{SO(n)}$ (точка) $= RO(SO(n))$ (кольцо вещественных представлений $SO(n)$). Но для каждой группы G отображение $RO(G) \to R(G)$ (комплексификации представлений) инъективно. Поэтому достаточно доказать, что $a\text{-ind}(b) = 1 \in R(SO(n))$, а это было сделано в [5].

Замечание. Несмотря на то, что мы ввели инволюцию в TX, мы рассматривали только тривиальные инволюции на X и Y. Мы можем, однако, рассматривать произвольные инволюции на X и Y, причем теорема 1.1 снова будет выполняться и доказательство ее, по существу, не изменится. Интересный частный случай возникает, когда X — комплексное алгебраическое многообразие над R. Комплекс Дольбо многообразия X становится вещественным эллиптическим комплексом (относительно инволюции $x \to \bar{x}$ на X) и, используя метрику, мы можем определить с его помощью вещественный эллиптический оператор P. Если у нас есть семейство X_y, для которого группы когомологий $H^q(X_y, \mathcal{O}_y)$ ($\mathcal{O}_y$ — пучок ростков голоморфных функций на X_y), то индекс вещественного семейства P_y равен знакопеременной сумме $\Sigma(-1)^q H^q \in KR(Y)$, где H^q обозначает вещественное векторное расслоение над Y, слой которого в точке y равен $H^q(X_y, \mathcal{O}_y)$. Этот случай был упомянут в [2], § 5.

§ 2. Косоэрмитовы операторы

Пусть P — вещественный эллиптический оператор на компактном многообразии X и предположим, что (относительно заданных метрик на X и на расслоениях) P — косоэрмитов, т. е. $P^* = -P$. Тогда $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^*$, так что обычный индекс P равен 0. Однако размерность $\operatorname{Ker} P$, рассматриваемая по модулю 2, является новым интересным инвариантом P. Как показано в [8], предложение 5.1, она инвариантна относительно непрерывных деформаций P. Как и в [8], мы обозначим это число через $\operatorname{ind}_1 P$, и будем называть его *индексом* P по модулю 2; обозначение выбрано так, чтобы иметь в виду обобщения, обозначаемые $\operatorname{ind}_k P$, которые описаны в [8], § 5.

Поскольку $\operatorname{ind}_1 P$ инвариантен относительно деформаций, он должен зависеть от подходящего класса символа и поэтому разумно надеяться, что $\operatorname{ind}_1 P$ можно вычислить топологически, исходя из этого символа. Мы покажем, как это сделать, сопоставив P семейство $\widetilde{P}$ вещественных эллиптических операторов, параметризованное точкам окружности, и вычисляя затем с помощью теоремы 1.1 $\operatorname{ind} \widetilde{P} \in KR(S^1)$. Как объяснено во введении, семейство $\widetilde{P}$ будет таким, что $\operatorname{ind} \widetilde{P}$ фактически совпадет (как элемент $\mathbf{Z}_2$) с $\operatorname{ind}_1 P$.

Построение $\widetilde{P}$ проводится небольшим изменением конструкции, использованной в [8]. Там мы имели дело с абстрактными фредгольмовыми операторами в гильбертовом пространстве, в то время как здесь мы рассматриваем псевдодифференциальные эллиптические операторы.

Достаточно рассмотреть случай, когда порядок P равен 0, т. е. $P \in Q^0(X;\ E,\ E)$; общий случай оператора P порядка m получается отсюда, если положить $R = QPQ^*$, где порядок Q равен $-m/2$, $\sigma(Q) = 1$ на расслоении единичных сфер на X и $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} Q^* = 0$. Пусть I — единичный интервал $0 \leqslant y \leqslant 1$ и пусть

$$P_y = 1 \cdot \cos \pi y + P \sin \pi y, \tag{2.1}$$

где 1 — тождественный оператор в $C^\infty(X;\ E)$. Поскольку $P^* = -P$, оператор P эллиптичен для всех y и $\operatorname{Ker} P_y = \operatorname{Ker} P_y^* = 0$ при $y \neq 1/2$. Операторы P_y образуют семейство эллиптических операторов, параметрированное единичным интервалом I. Мы же хотим построить семейство, параметрированное единичной окружностью S^1. Для этого нам нужно отождествить точки 0, $1 \in I$. Мы имеем $P_0 = 1$, $P_1 = -1$. Поэтому для построения нашего семейства операторов над окружностью нам нужно скрутить одну копию расслоения E с расслоением Хопфа[1] H на S^1. Операторы P_y определяют операторы [2])

$$\widetilde{P}_y\colon C^\infty(X,\ E) \otimes H_y \to C^\infty(X,\ E),$$

где y рассматривается как точка S^1.

Вычислим теперь $\operatorname{ind} \widetilde{P} \in KR(S^1)$. В соответствии с рецептом, данным в [7], § 2 (и применимом к вещественному случаю), мы должны прежде выбрать сечения $s_1, \ldots, s_q$ (тривиального) расслоения $C^\infty(X,\ E) \times S^1$ такие, чтобы для всех $y \in S^1$ отображение

$$Q_y\colon C^\infty(X,\ E) \otimes H_y \oplus \mathbf{R}^q \to C^\infty(X,\ E),$$

задаваемое формулой

$$Q_y(u;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_q) = \widetilde{P}_y(u) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i s_i(y),$$

было сюръективно. Поскольку в нашем случае P_y сюръективно при $y \neq 1/2$, достаточно взять в качестве $s_1, \ldots, s_q$ постоянные сечения, определенные с помощью базиса в $\operatorname{Ker} P$. Ядро Q_y будет тогда естественно изоморфно ядру отображения

$$C^\infty(X,\ E) \otimes H_y \to (\operatorname{Ker} P)^\perp,$$

полученного композицией [3]) $\widetilde{P}_y$ с ортогональной проекцией на $(\operatorname{Ker} P)^\perp$. Но это ядро равно, очевидно, $\operatorname{Ker} P \otimes H_y$, так что

$$\operatorname{ind} \widetilde{P} = [\operatorname{Ker} P \otimes H] - [\operatorname{Ker} P] = \dim \operatorname{Ker} P([H] - [1]) \in KR(S^1).$$

[1]) H — линейное расслоение на S^1, получающееся из $I \times \mathbf{R}^1$ отождествлением $(0,\ u) \longleftrightarrow (1,\ -u)$.

[2]) Начиная с этого места мы считаем, что E — вещественное векторное расслоение, а не комплексификация такого расслоения.

[3]) Заметим, что ввиду (2.1) P_y коммутирует с проекцией на $(\operatorname{Ker} P_y)^\perp$.

Далее, $\widetilde{KR}(S^1) = \mathbf{Z}_2$ с образующей $[H]$ — [1]. Поэтому, отождествляя $\widetilde{KR}(S^1)$ с $\mathbf{Z}_2$, мы видим, что

$$\text{(2.2)} \qquad \operatorname{ind} \widetilde{P} = \operatorname{ind}_1 P.$$

Символ $\widetilde{\sigma}$ семейства $\widetilde{P}$ определяет класс символа $[\widetilde{\sigma}] \in KR(S^1 \times TX)$, который тривиален на KR (точка $\times$ TX), и, значит, может рассматриваться как элемент $KR^{-1}(TX)$. По аналогии с обозначением $\operatorname{ind}_1 P$, мы обозначим этот элемент через $[\sigma(P)]_1$ и назовем его косым классом символа.

Топологический индекс (семейств над S^1)

$$t\text{-ind}\colon KR(S^1 \times TX) \to KR(S^1)$$

индицирует (при ограничении) гомоморфизм

$$t\text{-ind}_1 : KR^{-1}(TX) \to KR^{-1} \text{ (точка)}.$$

Он является естественным кандидатом для топологического индекса $KR(TX) \to KR$ (точка). Из теоремы 1.1 мы выводим следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть P — вещественный косоэрмитов эллиптический оператор на компактном многообразии X. Пусть $[\sigma(P)]_1 \in KR^{-1}(TX)$ — косой класс символа P, и*

$$t\text{-ind}_1\colon KR^{-1}(TX) \to KR^{-1} \text{ (точка)} = \mathbf{Z}_2$$

— топологический индекс. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} P = t\text{-ind}_1[\sigma(P)]_1 \mod 2.$$

Если X — спинорное многообразие, то рассмотрения можно несколько упростить, используя изоморфизм Тома ([3], теорема (6.2)) $KR^{-1}(TX) \cong$ $\cong KR^{n-1}(X)$. Гомоморфизм $t\text{-ind}_1$ становится гомоморфизмом прямого образа (или Гизина) для спинорных многообразий [9]

$$\text{(2.3)} \qquad KR^{n-1}(X) \to KR^{-1} \text{ (точка)}.$$

Нужно признать, что даже в таком виде топологический индекс на практике трудно вычислим. Естественно задать вопрос о том, можно ли его вычислить, используя когомологии, как это сделано для обычного индекса в эллиптических операторах в [6]. К сожалению, это, по-видимому, невозможно по сравнительно серьезной причине. Дело в том, что индекс по модулю 2 возникает фактически из гомотопической группы $\pi_{8k+1}(O)$ стабильной ортогональной группы (которая равна $\mathbf{Z}_2$) и известно, что ее нельзя непосредственно получить из mod 2 — когомологий. Обычный целочисленный индекс, с другой стороны, возникает из $\pi_{2n-1}(U)$, что можно получить из рациональных когомологий. В следующем параграфе мы приведем примеры, показывающие, что индекс по модулю 2 ведет себя существенно более подходящим образом, чем обычный индекс.

§ 3. Примеры

Пусть X — компактное многообразие размерности $4q + 1$. Определим вещественную полухарактеристику Кервера $k(X)$ формулой

$$k(X) = \sum_p \dim_{\mathbf{R}} H^{2p}(X;\ \mathbf{R}) \bmod 2.$$

Покажем, что это число является индексом по модулю 2 некоторого косоэрмитова эллиптического оператора.

Выберем риманову метрику на X и обозначим через $*$ оператор двойственности форм. Поскольку размерность X нечетна, $*^2 = 1$ и $d^*\varphi = (-1)^p * d * \varphi$ для $\varphi \in \Omega^p$. Поэтому на четных формах оператор $d*$ эрмитов, а $*d$ — косоэрмитов. Более того, поскольку $\dim X \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ оператор $*d$ (на формах четной степени) сохраняет степень по модулю 4, а $d*$ меняет ее. Поэтому оператор D, определенный равенством [1]) $D\varphi = (-1)^p\ d * \varphi + * d\varphi$, $\varphi \in \Omega^{2p}$, антисопряжен на четных формах. Поскольку $d^2 = 0$, $D^*D = -D^2 = dd^* + d^*d = \Delta$, так что оператор D эллиптичен и $\mathrm{Ker}\, D = \sum H^{2p}$, где H^{2p} — пространство гармонических форм степени $2p$ (решения уравнения $\Delta u = 0$, $u \in \Omega^{2p}$). По теории Ходжа

$$H^{2p} \cong H^{2p}(X, \mathbf{R}), \text{ и значит, } \dim \mathrm{Ker}\, D = k(X) \bmod 2,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Когда $\dim X \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, мы получаем самосопряженный оператор (если мы выберем знак так, как в [4]), и $k(X)$ не является индексом по модулю 2. Эта разница между двумя случаями $\dim X \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ отражает существенные топологические различия: например, из существования двух линейно независимых векторных полей на X следует, что $k(X) = 0$, когда $\dim X \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ (что можно показать, если взять в качестве X трехмерную сферу).

Теорема 2.1 дает, таким образом, способ K-теоретического вычисления полухарактерности Кервера $k(X)$, когда $\dim X \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$. Этот факт имеет интересную связь с векторными полями (см. [4], теорема (5.1)), которая будет подробно изложена в другом месте.

В качестве второго примера мы изучим оператор Дирака на спинорном многообразии X размерности $8q + 1$.

Пусть $M = M^0 \oplus M^1$ — неприводимый градуированный модуль для клиффордовой алгебры C_{8q+1}, и пусть $E = E^0 \oplus E^1$ — градуированное векторное расслоение над X, соответствующее представлению E группы $\mathrm{Spin}\ (8q + 1) \subset C_{8q+1}$. Как объяснено в [6], § 5, оператор Дирака D действует на сечениях E (переставляя E^0 и E^1) и в терминах ортонормированного базиса e_i в T_x задается равенством $Ds = \sum e_i(\partial_i s)$, где $\partial_i s$ — ковариантная производная s в направлении e_i и $e_i(\cdot)$ — клиффордовское умножение. Оператор D самосопряжен и эллиптичен. Модули M^0 и M^1 задают изоморфные представления четной части C_{8q+1}, а значит, и $\mathrm{Spin}(8q + 1)$, причем изоморфизм задается, как обычно, клиффордовым умножением на элемент $\omega = e_1e_2 \ldots e_{8q+1}$. Поэтому клиффордово умножение на элемент объема на многообразии X изоморфно отображает E^0 на E^1 и коммутирует с D. Поскольку $\omega^2 = 1$ и оператор ω ортогонален, $\omega^* = \omega$, и, значит, $P = \omega D$ — антиэрмитов оператор. Оператор P сохраняет E^0 и E^1 и, значит, у нас есть антиэрмитов оператор P^0 на E^0. Назовем P^0 антидираковским оператором на спинорном многообразии X. Заметим, что $\mathrm{Ker}\, P^0 = \mathrm{Ker}\, D \mid E_0$ — пространство «гармонических спиноров».

---

[1]) С точки зрения клиффордовых алгебр оператор D естественнее определить равенством $D\varphi = (-1)^p\, d * \varphi + (-1)^{p+1} * d\varphi$, как сделано в [4]. Этот оператор так же хорошо служил бы нашим целям.

Поскольку X — спинорное многообразие размерности $8q+1$, у нас есть изоморфизм Тома $\varphi: KR(X) \to KR^{-1}(TX)$, и обычными способами можно проверить, что класс символа $[\sigma(P^0)]_1 \in KR^{-1}(TX)$ равен $\varphi(1)$: оба элемента строятся точными формулами с использованием клиффордова умножения и нужно лишь проверить инволюции. Поэтому частным случаем теоремы 2.1 (с использованием (2.3)) является

Теорема 3.1. *Пусть X — спинорное многообразие размерности $8q+1$, и пусть H — пространство гармонических спиноров на X. Тогда* $\dim H (\mathrm{mod}\ 2)$ *равно* $f_!(1)$, *где* $f_!: KR(X) \to KR^{-1}$ *(точка)* $= \mathbf{Z}_2$ *— гомоморфизм прямого образа для спинорных многообразий.*

Замечание. $f_!(1)$ является примером так называемого KO-характеристического числа. Такие инварианты спинорных многообразий оказались важными при изучении спинорных кобордизмов (см. [1]).

Для $(8q+1)$-мерного спинорного многообразия оператор, задающий полухарактеристику Кервера, тесно связан с оператором Дирака P^0. С точки зрения символов он является произведением P^0 и спинорного расслоения на X — мы опускаем здесь детали. Таким образом, мы получаем теорему.

Теорема 3.2. *Пусть X — спинорное многообразие размерности $8q+1$. Тогда полухарактеристика Кервера $k(X)$ равна $f_!(\Delta(X))$, где $f_!: KR(X) \to KR^{-1}$ (точка) $= \mathbf{Z}_2$ гомоморфизм прямого образа, и $\Delta(X)$ — спинорное расслоение на X.*

Таким образом, $k(X)$ является также KO-характеристическим числом.

Для спинорных многообразий размерности $8q+2$ спинорное расслоение $\Delta(X)$ является комплексным расслоением, причем комплексная структура задается элементом ω. Оператор Дирака антикоммутирует с ω, так что пространство H гармонических спиноров является, очевидно, комплексным векторным пространством. Следующая теорема аналогична теореме 3.1.

Теорема 3.3. *Пусть X — спинорное многообразие размерности $8q+2$, и H — (комплексное векторное) пространство гармонических спиноров на X. Тогда размерность* $\dim_{\mathbf{C}} H\ (\mathrm{mod}\ 2)$ *равна* $f_!(1)$, *где* $f_!: KR(X) \to KR^{-2}$ *(точка)* $= \mathbf{Z}_2$.

Теорему 3.3 можно преобразовать в теорему о семействах над S^2, используя идеи [8] и теорему 2.1. Детали полностью аналогичны доказательству теоремы 3.1 и мы опустим их.

Возвращаясь к полухарактеристике Кервера, мы хотим теперь привести довольно интересный результат, показывающий, что индекс по модулю 2 существенно отличается от обычного целочисленного индекса.

Предложение 3.1. *Пусть X — компактное ориентированное $(4q+1)$-мерное многообразие и $\widetilde{X}$ — двукратное накрытие X, задаваемое элементом $\alpha \in H^1(X, \mathbf{Z}_2)$. Тогда полухарактеристика Кервера для $\widetilde{X}$ задается формулой $k(\widetilde{X}) = \alpha \cdot \omega_{4q}(X)[X]$.*

Этот факт допускает интересное доказательство, использующее символы, которое будет изложено в другом месте. Кроме того, его можно доказать с помощью непосредственных геометрических рассуждений, принадлежащих Г. Люцтигу. Мы не будем приводить здесь его доказательства, но обсудим некоторые следствия из него. Заметим сначала, что существуют примеры, когда $k(\widetilde{X}) \neq 0$: достаточно взять $X = P_{4q+1}(\mathbf{R})$, $\widetilde{X} = S^{4q+1}$. Обычный индекс эллиптического оператора обладает свойством мультипликативности относительно конечных накрытий, и это связано с тем, что интегральное выражение для индекса включает в себя только локальные данные. Только что приведенный пример показывает, что $k(X)$ *не* мультипликативно относительно двойного накрытия (иначе мы бы имели $k(\widetilde{X}) = 2k(X) = 0$). Поэтому мы не можем найти канонического выражения для $k(X)$ в виде интеграла, включающего лишь локальные данные. Конечно, $k(X)$ является вычетом по модулю 2 и интегральное выражение для $k(X)$ вообще не выглядит естественным, но рассуждение с двойным накрытием более убедительно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. W. Anderson, E. H. Brown, F. P. Peterson, SU-cobordism. KO-characteristic numbers and the Kervaire invariant, Ann. of Math. **83** (1966), 54—67.

[2] M. F. Atiyah, K-Theory and Reality, Quart. Math. (Oxford) **7** (1966), 367—386.

[3] M. F. Atiyah, Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. Math. (Oxford) 19 (1968), 113—140.

[4] M. F. Atiyah, Vector fields on manifolds, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein — Westfalen (1969).

[5] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов I, УМН **23**:5 (143) (1968), 99—142.

[6] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. III, УМН **24**:1 (145) (1969), 127—182.

[7] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. IV, УМН **27**:4 (166) (172), 161—178.

[8] M. F. Atiyah, I. M. Singer, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Hantes Etudes Sci. (Paris), № **37** (1969).

[9] M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, Riemann — Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 276—281.