М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. IV, *УМН*, 1972, том 27, выпуск 4(166), 161–178

1972 г. июль — август *т. XXVII, вып. 4 (166)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.4+513.83

ИНДЕКС ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. IV [1]

М. Ф. Атья, И. М. Зингер

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В этой статье будет развита *теория индекса семейств эллиптических операторов*. Индекс одного эллиптического оператора P на компактном многообразии — это число, определенное формулой

$$\operatorname{index} P = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Coker} P$$

и в более ранних работах из этой серии [5], [6] мы получили точную формулу для индекса P в чисто топологических терминах. В эту формулу входит символ P, и она выражается в терминах K-теории [5] или в терминах когомологий [6]. Индексом *семейства* P эллиптических операторов P_y, параметризованного точками y компактного многообразия Y, является уже не число, а элемент из $K(Y)$. Грубо говоря, индекс определяется как разность

$$\operatorname{index} P = \operatorname{Ker} P - \operatorname{Coker} P.$$

Здесь $\operatorname{Ker} P$ обозначает семейство векторных пространств $\operatorname{Ker} P_y$ и тот же смысл имеет $\operatorname{Coker} P$. Если $\dim \operatorname{Ker} P_y$ — константа (т. е. не зависит от y),

---

[1]) M. F. Atiyah, I. M. Singer, The index of elliptic operators IV, Ann. of Math. 92 (1970), 119—138. Первая часть настоящей статьи опубликована в УМН 23:5 (143) (1968), 99—142; вторая часть опубликована в УМН 23:6 (144) (1968), 135—149; третья часть опубликована в УМН 24:1 (145) (1969), 127—182. Перевод с английского выполнен С. И. Гельфандом.

Ker P является векторным расслоением. То же верно и для Coker P и в этом случае индекс P определен как элемент $K(Y)$ группы Гротендика, порожденной векторными расслоениями на Y. В общем случае, когда $\dim \operatorname{Ker} P_y$ меняется, определение должно быть слегка модифицированно (см. [1], приложение, [2], а также § 2).

В этой статье ставится и решается задача топологического определения индекса семейства эллиптических операторов. И формулировка и доказательство близко следуют пути, проведенному в [5]. В действительности, как было отмечено в [5], приведенное там доказательство таково, что оно естественно приводит к ряду обобщений, которые мы сейчас и рассмотрим. Поэтому для более подробного объяснения ситуации мы напомним основные результаты [5].

Для каждого эллиптического псевдодифференциального оператора P на компактном многообразии X члены старшей степени или «символ» $\sigma(P)$ оператора P определяют класс символа $[\sigma(P)] \in K(TX)$, где TX — касательное расслоение к X, а K обозначает K-теорию с компактными носителями. Вначале доказывается, что индекс P зависит только от этого класса символа и, значит, определяет гомоморфизм $K(TX) \to \mathbf{Z}$, называемый аналитическим индексом. С другой стороны, мы даем чисто в терминах K-теории построение другого гомоморфизма $K(TX) \to \mathbf{Z}$, который называется топологическим индексом. Основная теорема в [5] утверждает, что эти два индекса в действительности совпадают. Построение топологического индекса проводится следующим образом. Рассмотрим гладкое вложение i: $X \to V$, где V — некоторое эвклидово пространство, и обозначим через N открытую трубчатую окрестность V в X. Тогда N — вещественное векторное расслоение на X и TN отождествляется с $\pi^*(N \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C})$ — комплексификацией N, поднятой на TX с помощью проекции $\pi : TX \to X$. Определим гомоморфизм

$$i_! : K(TX) \to K(TV)$$

как композицию гомоморфизма Тома

$$\varphi : K(TX) \to K(TN)$$

и естественного гомоморфизма

$$K(TN) \to K(TV),$$

индуцированного открытым вложением $TN \subset TV$. Наконец, обозначая вложение начала координат A в V через j, имеем гомоморфизм $j_!$: $K(TA) \to K(TV)$. Но $TA = A$ — точка, так что $K(TA) = \mathbf{Z}$ и $j_!$ — *изоморфизм периодичности*. Поэтому мы можем определить *топологический индекс* $K(TX) \to \mathbf{Z}$, как $(j_!)^{-1} \circ i_!$. Он не зависит от вложения $X \to V$.

Достаточно ясно, как обобщить эту конструкцию на семейства над Y. Нам нужно проделать все предыдущие построения «послойно» над Y. Эллиптическое семейство P операторов на X, параметризованное точками Y, будет иметь класс символа $[\sigma(P)] \in K(Y \times TX)$. Индекс P в $K(Y)$ будет зависеть только от этого класса символа, и поэтому мы получим гомоморфизм $K(Y \times TX) \to K(Y)$, который является аналитическим индексом (для семейств над Y). С топологической стороны, для заданного вложения $X \to N \to V$ мы можем рассмотреть декартово произведение на Y и получить таким образом гомоморфизм

$$i_!\colon K(Y \times TX) \to K(Y \times TV)$$

и изоморфизм периодичности

$$j_!\colon K(Y) \to K(Y \times TV).$$

С их помощью мы определяем топологический индекс как $(j_!)^{-1}\circ i_!$, и наша основная теорема будет утверждать, что топологический и аналитический индексы совпадают.

До сих пор мы рассматривали семейство операторов P_y на фиксированном многообразии X. На самом же деле более естественно, что многообразие X также может меняться вместе с y, так что P_y будет оператором на многообразии X_y. Мы должны, конечно, предположить некоторую регулярность семейства многообразий X_y. Они должны образовывать расслоение Z над многообразием параметров Y, структурной группой которого является группа диффеоморфизмов X. Более того, векторные расслоения на X, в которых действуют операторы P_y, тоже будут меняться вместе с y. Таким образом, P_y будет линейным оператором из $C^\infty(X_y;\ E_y)$ в $C^\infty(X_y;\ F_y)$, где E_y и F_y — гладкие векторные расслоения на X_y, непрерывно меняющиеся вместе с y. Точные определения будут даны в § 1.

Рассмотрение расслоения Z вместо произведения $Y \times X$ в основном не меняет предыдущих рассуждений, относящихся к аналитическому и топологическому индексу. Поскольку Z локально над Y является прямым произведением, анализ остается тем же самым, если только мы будем уверены, что различные функциональные пространства, которые мы используем, левоинвариантны относительно группы диффеоморфизмов X. Для определения символа $\sigma(P)$ нам нужно ввести касательное расслоение вдоль слоев Z. Мы обозначим его через TZ (от введения такого обозначения не может возникнуть никакой путаницы, поскольку Z дифференцируемо только в направлении слоев). Класс символа $[\sigma(P)]$ будет элементом $K(TZ)$, а аналитический индекс является гомоморфизмом $K(TZ) \to K(Y)$. Детали будут даны в § 2. С топологической стороны единственное отличие состоит в том, что вложение Z в $Y \times V$ должно быть совместимо с проекцией на Y. Легко доказать, что такое вложение существует, и с его помощью мы получим топологический индекс. Детали даны в § 3.

Для доказательства основной теоремы (о равенстве аналитического и топологического индекса) рассмотрим, как и в [5], диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & K(TN) \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
K(TZ) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & K(TS) \arrow[d, "\beta"] & K(Y \times TV), \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & K(Y) &
\end{tikzcd}$$

где через N обозначается теперь расслоение (над Y) трубчатых окрестностей вдоль слоя, через S — дубль N, а отображения α, β, γ задаются аналитическим индексом. Для доказательства теоремы нам нужно доказать, что два треугольника коммутативны, и γ — изоморфизм, обратный изоморфизму периодичности. Последнее утверждение сразу следует из

(i) случая, когда Y есть одна точка, разобранного в [5], и

(ii) из того, что аналитический индекс является гомоморфизмом $K(Y)$-модулей (см. определение в § 2).

Коммутативность $\beta\delta = \gamma\varepsilon$ — это *свойство вырезания* индекса, а коммутативность $\alpha = \beta\delta\varphi$ — *свойство мультипликативности* индекса. Оба эти свойства устанавливаются точно так же, как и в [5]. Мы коротко обсудим их в § 3 и 4.

Из того, что было сказано во введении, должно стать ясным, что для обобщения данного в [5] доказательства на случай семейств нужно сделать очень мало. Поэтому наши рассуждения будут краткими и мы ограничимся объяснением только новых по сравнению с [5] мест. Они в основном являются техническими и сравнительно стандартными. Пара длинных рассуждений технического характера вынесена в приложение.

В последнем параграфе этой статьи мы даем когомологическую форму теоремы об индексе для эллиптических семейств и обсуждаем связь эквивариантной теоремы об индексе из [5] с теоремой об индексе из этой статьи.

В пятой статье из этой серии мы обобщим теорему об индексе на вещественные операторы и индекс вещественных семейств получит интересное приложение к индексу по модулю 2 косоэрмитовых вещественных эллиптических операторов (см. [7]).

Укажем в заключение, что в несколько более слабой форме теорема об индексе семейств эллиптических операторов была анонсирована В. Ши в [11]. Намеченное там доказательство обобщает первоначальное доказательство теоремы об индексе, приведенное в [10]. Новое доказательство из [5] обобщается гораздо более непосредственным образом.

§ 1. Непрерывные семейства эллиптических операторов

Достаточно ясно, чем должно быть семейство дифференциальных операторов в $\mathbf{R}^n$, параметризованное точками $y \in V$; а именно, таким семейством является $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(x, y)\, \partial/\partial x^\alpha$, где $\partial a_\alpha/\partial x^\beta$ — непрерывные функции на $\mathbf{R}^n \times Y$. В настоящем параграфе мы обобщаем это понятие. Прежде всего мы заменим $\mathbf{R}^n$ на многообразие X. Затем мы заменим $X \times Y$ на расслоенное пространство над Y. Наконец, мы рассмотрим вместо дифференциальных операторов псевдодифференциальные (и их замыкание в подходящей топологии, которое нам будет нужно для тензорных произведений).

Пусть X — компактное C^∞-многообразие и $\mathrm{Diff}(X)$ — группа диффеоморфизмов X с топологией равномерной сходимости всех производных. Хорошо известно [9], что $\mathrm{Diff}(X)$ — топологическая группа и отображение $\mathrm{Diff}(X) \times X \to X$ непрерывно.

Определение 1.1. Пусть Y — хаусдорфово пространство. Тогда Z называется *многообразием* над Y, если Z является расслоенным пространством над Y со слоем X и структурной группой $\mathrm{Diff}(X)$. Если, в частности,

$\pi\colon Z \to Y$ — проекция, то существует покрытие $\mathcal{U}$ пространства Y и отображения $\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\approx} U \times X$, $U \in \mathcal{U}$ такие, что $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}\colon U \cap V \times X \to U \cap V \times X$ задается формулой $(y, x) \mapsto (y, f_{U,V}(y)(x))$, где $y \mapsto f_{U,V}(y)$ — непрерывное отображение $U \cap V \to \mathrm{Diff}(X)$.

Далее мы хотим объяснить, что мы понимаем под векторным расслоением, бесконечно дифференцируемым вдоль слоев. Пусть E — бесконечно дифференцируемое векторное расслоение на X, и $\mathrm{Diff}(X, E)$ — группа диффеоморфизмов E, отображающих слой в слой линейно. Введем гомоморфизм $h\colon \mathrm{Diff}(X, E) \to \mathrm{Diff}(X)$ с ядром $\mathrm{Aut}\, E$. Если $\Phi \in \mathrm{Diff}(X, E)$, то Φ единственным образом записывается в виде $\Phi = \alpha_\Phi h(\Phi)$, где $\alpha_\Phi\colon h(\Phi)^* E \xrightarrow{\approx} E$. В этом случае мы будем говорить, что Φ — *поднятие* $h(\Phi)$ на E с помощью α_Φ. Используя это разложение, легко превратить $\mathrm{Diff}(X, E)$ в топологическую группу. А именно, выбрав связность c на E, мы можем отождествить E_{x_1} с E_{x_2}, если x_2 достаточно близко x_1, с помощью параллельного переноса вдоль единственной геодезической, соединяющей x_2 с x_1. Обозначим этот изоморфизм через C. Тогда окрестность $I \in \mathrm{Diff}(X, E)$ состоит из тех Φ, для которых $h(\Phi)$ лежит в маленькой окрестности $I \in \mathrm{Diff}(X)$ и $\alpha_\Phi \circ C$ лежит в окрестности $I \in \mathrm{Aut}\, E$ (в C^∞-топологии).

Определение 1.2. Пусть Z — многообразие над Y, $\widetilde{E}$ — векторное расслоение над Z с проекцией p. Тогда $\widetilde{E}$ называется *гладким векторным расслоением над* Z, если $\widetilde{E} \xrightarrow{\pi \circ p} Y$ — расслоенное пространство над Y со слоем E (бесконечно дифференцируемое векторное расслоение над X) и с группой $\mathrm{Diff}(X, E)$.

Замечание 1. Расслоение Z над Y ассоциировано с расслоением $\widetilde{E}$ на Y при гомоморфизме $h\colon \mathrm{Diff}(X, E) \to \mathrm{Diff}(X)$.

Замечание 2. Существуют и другие (эквивалентные) способы определения гладких векторных расслоений над Z. В частности, отображение $f\colon Z \to G$ (грассманиан) определяет гладкое векторное расслоение над Z в предположении, что все послойные производные f непрерывны.

С определенными выше расслоенными пространствами связаны расслоения псевдодифференциальных операторов, к рассмотрению которых мы и переходим. Пусть $\mathcal{P}^m(X; E, F)$ — пространство псевдодифференциальных операторов на X из $C^\infty(X; E)$ в $C^\infty(X; F)$ порядка m, введенное в [5], § 5. Это пространство является пространством Фреше со следующим множеством псевдонорм. (Мы рассматриваем случай $E = F = 1$, оставляя легкое обобщение читателю.) Для каждой координатной окрестности U с координатами $x_1, \ldots, x_n$ и каждой C^∞-функции f с носителем в U положим

$$\| P \|_{U, f, \alpha, \beta} = \sup_{\substack{x \in U \\ \xi \in \mathbf{R}^n}} \left| \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \frac{p_f(x, \xi)}{(1 + |\xi|)^{m - |\beta|}} \right|,$$

где $p_f(x, \xi) = e^{-i\langle x, \xi\rangle} P(e^{i\langle x, \xi\rangle} f)$.

Как в [5], § 5, обозначим через $\overline{\mathcal{P}}^m(X; E, F)$ пополнение $\mathcal{P}^m(X; E, F)$ относительно семейства псевдонорм $\| P \|_s$ (нормы ограниченных операторов $P_s\colon H_s(X, E) \to H_{s-m}(X, F)$, которые индуцируются оператором P

в пространствах Соболева). Из обычных оценок, показывающих ограниченность P_s, следует, что вложение $\mathcal{P}^m \to \overline{\mathcal{P}}^m$ непрерывно.

Предположим теперь, что $\widetilde{E}$ и $\widetilde{F}$ — два гладких векторных расслоения над Z. Мы хотим построить новые расслоенные пространства $\overline{\mathcal{P}}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ над Y со слоем $\overline{\mathcal{P}}^m(X;\ E,\ F)$(и $\mathcal{P}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ над Y со слоем $\mathcal{P}^m(X;\ E,\ F)$). Обозначим прежде всего через H замкнутую подгруппу $\mathrm{Diff}(X,\ F) \times \times \mathrm{Diff}(X,\ E)$, состоящую из пар $[(\Psi,\ \Phi),\ h(\Psi) = h(\Phi)]$. Заметим, что H действует на $\mathcal{P}^m(X;\ E,\ F)$ по формуле $P \longmapsto \Psi^{-1}P\Phi$ (оператор $\Psi^{-1}P\Phi$ по-прежнему лежит в $\mathcal{P}^m(X;\ E,\ F)$, поскольку класс псевдодифференциальных операторов инвариантен относительно диффеоморфизмов). Поскольку Φ (и Ψ) определяют ограниченные операторы во всех $H_s(E)$ (и $H_s(F)$), действие H на $\mathcal{P}^m$ продолжается на $\overline{\mathcal{P}}^m$. Для построения нужных расслоений нам необходим следующий результат, доказательство которого приведено в приложении.

Предложение 1.1. *Отображения $H \times \overline{\mathcal{P}}^m \to \overline{\mathcal{P}}^m$ и $H \times \mathcal{P}^m \to \to \mathcal{P}^m$ непрерывны.*

Пусть $B_{\widetilde{E}}$, $B_{\widetilde{F}}$ и B — главные расслоенные пространства над Y, ассоциированные с $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$ и Z. Поскольку у нас есть отображение $B_{\widetilde{E}} \to B$, индуцированное гомоморфизмом $h\colon \mathrm{Diff}(X,\ E) \to \mathrm{Diff}(X)$, и аналогичное отображение $B_{\widetilde{F}} \to B$, мы можем над диагональю в $Y \times Y$ редуцировать группу $\mathrm{Diff}(X,\ F) \times \mathrm{Diff}(X,\ E)$ расслоения $B_{\widetilde{F}} \times B_{\widetilde{E}}$ до H, и рассмотреть новое главное расслоенное пространство $B(H)$ над Y с группой H. Обозначим через $\mathcal{P}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ и $\overline{\mathcal{P}}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ расслоенные пространства, ассоциированные с $B(H)$ при отображениях из предложения 1.1.

Мы можем также ввести расслоение гильбертовых пространств $H_s(Z,\ \widetilde{E})$ над Y со слоем $H_s(X,\ E)$ и группой $\mathrm{Diff}(X,\ E)$, поскольку отображение $\mathrm{Diff}(X,\ E) \times H_s(X,\ E) \to H_s(X,\ E)$ непрерывно. Аналогично, мы можем рассмотреть расслоение $C^\infty(Z,\ \widetilde{E})$ со слоем $C^\infty(X,\ E)$ и группой $\mathrm{Diff}(X,\ E)$. Расслоение $C^\infty(Z,\ \widetilde{E})$ естественно вкладывается в $H_s(Z,\ \widetilde{E})$.

Определение 1.3. *Семейством псевдодифференциальных операторов*, параметризованных пространством Y, называется непрерывное сечение P расслоенного пространства $\overline{\mathcal{P}}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$. Если оператор P_y эллиптичен для каждого $y \in Y$, семейство P называется эллиптическим семейством.

Отметим, что непрерывное сечение $\mathcal{P}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ задает семейство, потому что вложение $\mathcal{P}^m \to \overline{\mathcal{P}}^m$ непрерывно. Заметим также, что если $Z = X \times Y$, $\widetilde{E} = E \times Y$ и $\widetilde{F} = F \times Y$, то семейство — это просто непрерывное отображение $Y \to \overline{\mathcal{P}}^m(X;\ E,\ F)$. В этом случае мы назовем семейство тривиальным. Ограничение каждого семейства на достаточно маленькую окрестность любой точки тривиально.

Перейдем теперь к определению символа семейства. В [5], § 5, мы ввели непрерывное сюръективное отображение $\sigma\colon \mathcal{P}^m(X;\ E,\ F) \to \mathrm{Symb}^m(X;\ E,\ F)$, которое продолжается до непрерывного отображения $\overline{\sigma}\colon \overline{\mathcal{P}}^m \to \overline{\mathrm{Symb}^m}$ с плотным образом. Поскольку оба отображения $\bar{\sigma}$ и σ эквивариантны относительно действия H и отображение $H \times \overline{\mathrm{Symb}^m} \to \overline{\mathrm{Symb}^m}$ непрерывно, мы можем построить расслоенное пространство $\overline{\mathrm{Symb}^m}(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ над Y со слоем $\overline{\mathrm{Symb}^m}(X;\ E,\ F)$ и структурной группой H. Ясно, что отображение $\bar{\sigma}_Y$: $\overline{\mathcal{P}^m}\,(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F}) \to \overline{\mathrm{Symb}^m}(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$, определенное послойно, непрерывно.

Определение 1.4. *Символом σ_P непрерывного семейства P* называется непрерывное сечение $\overline{\mathrm{Symb}^m}(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$, равное $\bar{\sigma}_Y \circ P$.

Поскольку $\bar{\sigma}$ не сюръективно, не каждое непрерывное сечение $\overline{\mathrm{Symb}^m}\,(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ является символом непрерывного семейства. Однако, используя теорему Стоуна — Вейерштрасса, можно доказать (см. приложение)

Предложение 1.2. *Пусть Y — компактно. Символы непрерывных семейств плотны (в компактно-открытой топологии) в пространстве непрерывных сечений* $\overline{\mathrm{Symb}^m}(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$.

§ 2. Индекс эллиптических семейств

В этом параграфе мы определим индекс эллиптических семейств, как элемент $K(Y)$, в предположении, что пространство параметров Y компактно. Мы установим также элементарные свойства индекса и покажем, в частности, что индекс P зависит только от класса символа $[\sigma(P)] \in K(TZ)$.

В работе [5], § 6, мы доказали, что каждое обобщенное решение уравнения $Pu = 0$, где $P \in \overline{Q}^m$ — эллиптический оператор, обязательно бесконечно дифференцируемо. Примерно такие же рассуждения дают следующее небольшое обобщение этого результата, которое нам понадобится.

Лемма 2.1. *Пусть оператор $P \in \overline{\mathcal{P}^m}$ эллиптичен и $Pu = v$, где $v \in C^\infty(X,\ F)$ и $u \in H_s(X,\ E)$. Тогда $u \in C^\infty(X,\ E)$.*

Для определения индекса семейства докажем

Предложение 2.1. *Пусть $P \in \overline{\mathcal{P}^m}(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ эллиптичен. Тогда существует конечное число сечений $(s_1,\ \ldots,\ s_q)$ расслоения $C^\infty(Z,\ \widetilde{F})$ таких, что отображение $Q_y : C^\infty(Z,\ \widetilde{E})_y \oplus \mathbf{C}^q \to C^\infty(Z,\ \widetilde{F})_y$, задаваемое равенством*

$$Q_y(u;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_q) = P_y(u) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i s_i(y)$$

сюръективно. Векторные пространства $\operatorname{Ker} Q_y$ *образуют в этом случае векторное расслоение* $\operatorname{Ker} Q$ *на Y и элемент* $[\operatorname{Ker} Q] - [Y \times \mathbf{C}^q] \in K(Y)$ *зависит только от P, а не от выбора сечений s_i.*

Доказательство. Локально, в окрестности точки $y_0 \in Y$, наше семейство P тривиально и поэтому задается непрерывным отображением $Y \to \overline{\mathcal{P}^m}\,(X;\ E,\ F)$. При переходе к пространствам Соболева мы получаем (локально) непрерывное отображение P_s: $Y \to \mathcal{F}(H_s(X,\ E),\ H_{s-m}(X,\ F))$, где $\mathcal{F}$ — пространство ограниченных фредгольмовых операторов с норменной топологией. Пусть $V = \operatorname{Ker} P_s^*$. Тогда оператор $T_s(y)$: $H_s(X,\ E) \oplus \oplus\ V \to H_{s-m}(X,\ F)$, задаваемый формулой $T_s(y)(u \oplus v) = P_s(y)u + v$

сюръективен при $y = y_0$ и, значит (используя стандартные рассуждения, см. [1], приложение), сюръективен, когда y находится вблизи y_0. Кроме того, $V \subset C^\infty(X, F)$ (поскольку оператор, сопряженный P, тоже эллиптичен и лежит в $\overline{\mathcal{P}^m}$) и лемма 2.1 показывает, что если точка y близка к y_0, то оператор

$$T(y) : C^\infty(X, E) \oplus V \to C^\infty(X, F)$$

сюръективен. Таким образом, первая часть предложения локально доказана. Глобальная форма легко следует из локальной, если использовать продолжение локальных сечений $C^\infty(Z, \widetilde{F})$ и разбиение единицы. Поскольку $\operatorname{Ker} T(y) = \operatorname{Ker} T_s(y)$, локальная тривиальность ядер в C^∞ следует из соответствующего факта для гильбертовых пространств, который хорошо известен (см. [1], приложение). Поэтому $\operatorname{Ker} Q$ является векторным расслоением над Y. Для доказательства последней части достаточно показать, что добавление одного сечения s_{q+1} не меняет элемента в $K(Y)$. Это очевидно, если $s_{q+1} = 0$, а общий случай сводится к этому ввиду гомотопической инвариантности $K(Y)$, если умножить s_{q+1} на параметр t, меняющийся от 0 до 1.

Определение 2.1. Элемент из $K(Y)$, введенный в предыдущем предложении, называется *индексом эллиптического семейства* P. Мы обозначим его через $\operatorname{ind} P$.

Замечание. Если семейство P таково, что размерность $\operatorname{Ker} P_y$ не зависит от y, то мы получим два векторных расслоения (на Y) $\operatorname{Ker} P$ и $\operatorname{Coker} P$. Нетрудно доказать, что (если ввести индекс P с помощью определения 2.1) $\operatorname{index} P = [\operatorname{Ker} P] - [\operatorname{Coker} P]$.

Рассмотрим для этого тривиальное векторное расслоение $Y \times W$ и сюръективный гомоморфизм расслоений $Y \times W \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Coker} P$. Используем сечения $\operatorname{Coker} P = \operatorname{Ker} P^* \subset C^\infty(Z, \widetilde{F})$, задаваемые базисом W, для вычисления индекса P по предложению 2.1. Мы получим

$$\begin{aligned}\operatorname{index} P &= [\operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Ker} \varphi] - [Y \times W] = \\ &= [\operatorname{Ker} P] + [\operatorname{Ker} \varphi] - \{[\operatorname{Ker} \varphi] + [\operatorname{Coker} P]\} = \\ &= [\operatorname{Ker} P] - [\operatorname{Coker} P].\end{aligned}$$

Первым основным свойством индекса является его гомотопическая инвариантность. Она сразу следует из гомотопической инвариантности $K(Y)$. А именно, заметим, что путь в пространстве семейств над Y — это просто семейство над $Y \times I$ (I — единичный интервал) и используем изоморфизм $K(Y \times I) \cong K(Y)$.

Из гомотопической инвариантности индекса следует, что $\operatorname{ind} P$ зависит только от символа $\sigma(P)$. Используя предложение 1.2, мы можем даже определить $\operatorname{ind} \sigma$ для любого эллиптического $\sigma \in \overline{\operatorname{Symb}^m}(Z; \widetilde{E}, \widetilde{F})$, полагая $\operatorname{ind} \sigma = \operatorname{ind} P$, если σ достаточно близко к $\sigma(P)$. Это определение не зависит от выбора P ввиду гомотопической инвариантности индекса. Более того, $\operatorname{ind} P$ зависит только от класса гомотопий $\sigma(P)$.

Теперь мы должны показать, что в действительности индекс не зависит от степени однородности символа, как и в [5], предложение 6.3, но сначала мы введем метрики. Под метрикой на $\widetilde{E}$ мы будем понимать (положительно определенную эрмитову) метрику на $\widetilde{E}$, которая гладка вдоль слоев. Используя более технические термины, можно сказать, что если ввести гладкое векторное расслоение $\mathrm{Herm}(\widetilde{E})$, слоем которого в точке $z \in Z$ является пространство эрмитовых форм на $\widetilde{E}_z$, то метрика на $\widetilde{E}$ — это непрерывное положительно определенное сечение $C^\infty(Z, \mathrm{Herm}\ \widetilde{E})$. Обычные рассуждения с разбиением единицы показывают, что такие метрики существуют и любые две метрики гомотопны. Метрика [1]) на TZ называется просто метрикой на Z. Как и в [5], мы фиксируем метрику на Z и используем ее для отождествления расслоения TZ с двойственным ему расслоением T^*Z (кокасательное расслоение вдоль слоев). Расслоение единичных сфер TZ будет обозначаться $S(Z)$.

Докажем теперь аналог предложения 6.3 из [5].

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть* $\mu \in \overline{\mathrm{Symb}}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ *и* $\tau \in \overline{\mathrm{Symb}}^k(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ *эллиптичны и совпадают на* $S(Z)$. *Тогда* $\mathrm{ind}\ \mu = \mathrm{ind}\ \tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство предложения 6.3 из [5] требует незначительного изменения, поскольку в [5] используется, что индекс самосопряженного оператора равен 0, а для семейств это неверно [2]).

Однако вместо этого мы можем использовать то, что индекс семейства положительно определенных операторов равен, конечно, нулю (поскольку ядра равны 0). Самосопряженный символ всегда представляет самосопряженный оператор (используя $\frac{1}{2}(A + A^*)\Big)$; это не столь ясно для положительности и поэтому при доказательстве нужна некоторая осторожность. Предположим теперь, что $k > m$ и преобразование $\sigma \in \mathrm{Symb}^1(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$ тождественно на $S(Z)$ и таково, что $\tau = \mu \circ \sigma^{k-m}$. Построим положительно определенное семейство $P \in \mathcal{P}^1(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$; заметим, что его символ $\sigma(P)$ самосопряжен, и поэтому гомотопен σ. После этого выберем эллиптические семейства $Q \in \mathcal{P}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$, $R \in \mathcal{P}^k(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$, символы которых близки к μ и τ соответственно, и рассмотрим оператор $Q \circ P^{k-m}$. Поскольку оператор P положительно определен, сразу получаем, что $\mathrm{ind}\ Q \circ P^{k-m} = \mathrm{ind}\ Q$. С другой стороны, $\sigma(Q \circ P^{k-m}) = \sigma(Q) \circ \sigma(P)^{k-m}$ гомотопно $\mu \circ \sigma^{k-m} = \tau$. Поэтому $\mathrm{ind}\ \tau = \mathrm{ind}\ Q = \mathrm{ind}\ \mu$, что и требовалось. Осталось построить P. В действительности достаточно требовать, чтобы P был положительным полуопределенным оператором, поскольку прибавление единицы превратит такой оператор в положительно определенный и не изменит символа (поскольку порядок P равен 1, а порядок тождественного оператора равен 0).

Для нахождения требуемого семейства P мы используем тот факт, что сумма положительных полуопределенных операторов снова положительно полуопределена. Рассуждения, связанные с разбиением единицы на Y, сводят задачу к следующей: найти тривиальное эллиптическое семейство $P\colon N \to \mathcal{P}^1(X;\ E,\ F)$ такое, что $P(y)$, $y \in N$, — положительно

[1]) Для вещественных расслоений мы используем, конечно, евклидову метрику.

[2]) Если A — комплексное самосопряженное семейство, то гомотопия $tA + i(1-t)I$ показывает, что индекс A равен 0, но это рассуждение не годится для вещественных семейств.

полуопределен относительно метрик $\rho(y)$ на X и $r(y)$ на E. Используя затем разбиение единицы на X (если P положительно полуопределенный оператор, то $\varphi P\varphi$ положительно полуопределенный оператор для любой вещественной C^∞-функции φ на X), мы сводим задачу к координатной окрестности U, на которой $E\,|_U = \mathbf{R}^q$, и метрика

$$r(y) = (r_{ij}(x,\ y))(i,\ j = 1,\ \ldots,\ q),\ y \in N,\ x \in U.$$

Мы должны найти эллиптический оператор $P(y) = P_{ij}(y) \in \mathcal{P}^1(U;\ \mathbf{R}^q,\ \mathbf{R}^q)$ такой, что если $\widetilde{u} = (u_1,\ \ldots,\ u_q)$ и $u_i \in C_c^\infty(U)$, то

$$\langle P\widetilde{u},\ \widetilde{u}\rangle = \sum_{i,\ j,\ k} \int_U (P_{ij}(y)\,u_j)(x)\, r_{ik}(x,\ t)\,\overline{u}_k(x)\, dv_{\rho(y)} \geqslant 0.$$

Здесь $dv_{\rho(y)}$ — элемент объема, соответствующий метрике $\rho(y)$ на X.

Выберем $P_{ij}(y)$ следующим образом. Пусть

$$K_{ij}(x,\ \xi,\ y) = \varphi(\xi)\,|\xi|\,(r(x,\ y)^{-1})_{ji}\left(\frac{dv_{\rho(y)}}{dx}\right)^{-1},$$

где $\varphi(\xi) \geqslant 0$ бесконечно дифференцируема, $\varphi(\xi) = 0$ при $|\xi| < 1/2$ и $\varphi(\xi) = 1$ для $|\xi| \geqslant 1$, где $|\xi|^2 = \sum\limits_{i,\ j} \rho_{ij}(x,\ y)\,\xi_i\xi_j$. Тогда $(P_{ij}(y)\,u)(x) = \int e^{i\langle x,\ \xi\rangle} K_{ij}(x,\ \xi,\ y)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$. После такого выбора

$$\langle P\widetilde{u},\ \widetilde{u}\rangle = \sum_j \int_U \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,\ \xi\rangle} \varphi(\xi)\,|\xi|\,\hat{u}_j(\xi)\,\overline{u}_j(x)\,d\xi\,dx = \sum_j \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\xi)\,|\xi|\,|\hat{u}_j(\xi)|^2\,d\xi \geqslant 0.$$

Ясно, что оператор $(P_{ij})(y)$ эллиптичен, поскольку его символ на единичной сфере в точке x равен $r(x,\ y)_{ji}^{-1}\,\frac{dv_{\rho(y)}}{dx}$. Ясно также, что $(P_{ij})(y)$ — семейство, поскольку функция $K(x,\ \xi,\ y)$ и ее производные по x и ξ непрерывно меняются вместе с y. Этим доказательство предложения заканчивается.

Замечание. Другой способ построения P состоит во взятии квадратного корня из лапласиана для $\widetilde{E}$. Однако для этого нам нужно знать, что пространство операторов $\mathcal{P}$ замкнуто относительно извлечения корня, и наше точное построение P предназначалось для того, чтобы избежать выяснения этого вопроса.

Если $P \in \overline{\mathcal{P}^m}(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$, то тройка $\{E,\ F,\ \sigma(P)\}$ определяет элемент из $K(B(Z),\ S(Z)) = K(TZ)$, где $B(Z)$ — расслоение единичных шаров Z. Так же как и в [5], каждый элемент из $K(TZ)$ возникает из некоторого символа (для этого нам нужно знать, что каждое векторное расслоение на Z имеет гладкую структуру, что доказывается обычными аппроксимационными рассуждениями). Мы установили, таким образом, основные свойства индекса, которые, как и в [5], показывают следующее

Предложение 2.3. $\sigma \to \operatorname{ind}\sigma$ *индуцирует гомоморфизм*

$$a\text{-ind}\colon K(TZ) \to K(Y).$$

§ 3. Топологический индекс

Теперь мы продолжим определение топологического индекса, как гомоморфизма $K(TZ) \to K(Y)$. Для этого нам нужно сначала вложить Z в $Y \times V$ для некоторого евклидова пространства V.

Зафиксируем сначала некоторое число гладких функций $f_1, \ldots, f_k$ на X, которые определяют гладкое вложение $f\colon X \to \mathbf{R}^k$. Пусть, далее, $\{U_j\}$ — открытое покрытие Y такое, что Z тривиально над каждым U_j. Перейдем к чуть меньшему покрытию $\{U'_j\}$, где $\overline{U'_j} \subset U_j$. Используя тривиальность Z над U_j, мы можем продолжить $f_1, \ldots, f_k$ и получить функции $f_{1j}, \ldots, f_{kj}$ на $Z \mid U_j$. Умножим их на непрерывную функцию на U_j, равную 1 на U'_j, и имеющую компактный носитель. Полученные функции можно продолжить и получить гладкие функции $g_{1j}, \ldots, g_{kj}$ на всем Z. Множество всех функций g_{ij} (при меняющихся i и j) задает отображение $g\colon Z \to V = \mathbf{R}^m$ (где $m = kl$, l — число множеств U_j). Ограничение g на каждый слой X_y является гладким вложением. Поэтому отображение $Z \to Y \times V$, при котором $z \mapsto (\pi(z), g(z))$, и является требуемым вложением.

Нормальные расслоения N_y к X_y в V образуют, очевидно, векторное расслоение на Z, которое гладко в смысле замечания 2 из § 1, а значит, и в смысле определения 1.2. Евклидова метрика на V индуцирует метрику на N, и нетрудно показать, что структурная группа расслоения $N \to Y$ может быть сведена к подгруппе $\mathrm{Diff}(X, N_o)$, которая сохраняет метрику на N_o (o-точка Y). Это показывает, что расслоение единичных сфер $S(N)$ и его надстройка $S(N \oplus 1)$ являются многообразием над Y в смысле определения 1.1.

Топологический индекс теперь можно построить, исходя из вложения $i: Z \to Y \times V$, так, как объяснено во введении. Он задается формулой $t\text{-ind} = j_!^{-1} \circ i_!$, где $i_!: K(TZ) \to K(Y \times TV)$ является композицией $K(TZ) \xrightarrow{\varphi} K(TN) \to K(Y \times TV)$, а $j_!: K(Y) \to K(Y \times TV)$ изоморфизм периодичности. Факт независимости t-ind от выбора i доказывается так же, как и в [5]: он выводится из мультипликативных свойств изоморфизма Тома φ. Наша основная цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Аналитический и топологический индексы совпадают как гомоморфизмы* $K(TZ) \to K(Y)$.

Как объяснено во введении, доказательство теоремы зависит от свойств мультипликативности и вырезания аналитического индекса. Свойство вырезания устанавливается общими рассуждениями следующим образом. Пусть $Z \to Y$, $Z' \to Y$ — два многообразия над Y (с компактными слоями X, X' соответственно), и $U \subset Z$, $U' \subset Z'$ — два открытых множества с гладкой эквивалентностью $U \cong U'$ (совместимой с отображениями на Y). Отождествляя U' с U, мы получаем два гомоморфизма $K(TU) \to K(Y)$, возникающих из диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & K(TZ) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ K(TU) & & & & K(Y) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & K(TZ') & & \end{array}$$

Свойство вырезания утверждает, что эта диаграмма коммутативна. Доказательство проводится так же, как в [5], § 8. Мы представим сначала элемент

$K(TU)$ символом σ порядка 0, тождественным вне компактного множества L в U. Найдем теперь семейство операторов, имеющее символ σ, и тождественное вне L. Продолжим это семейство на Z и Z', полагая его тождественным вне L. Для вычисления индексов этих двух семейств P и P' мы должны выбрать сечения $s_1, \ldots, s_q$, как в предложении 2.1. Поскольку наши операторы тождественны вне $L \subset U$, мы можем предположить, что носители наших сечений s_i лежат в U (см. построение s_i при доказательстве предложения 2.1). Ясно, что расслоения $\operatorname{Ker} Q$, $\operatorname{Ker} Q'$ (в обозначениях предложения 2.1, причем Q' соответствует Z') совпадают, и это же верно для $\operatorname{Coker} Q$, $\operatorname{Coker} Q'$. Поэтому $\operatorname{ind} P = \operatorname{ind} P'$.

Для завершения доказательства теоремы 3.1 нам нужно исследовать мультипликативное свойство индекса семейств. Это будет сделано в следующем параграфе.

§ 4. Мультипликативность индекса

В статье [5], § 4 мы дали сравнительно общее свойство мультипликативности индекса (аксиомы (B3), (B3′), (B3″)). Для доказательства теоремы 3.1 нам будет нужен аналог аксиомы (B3′) для семейств в случае, когда $G = 1$, $F = S^n$, $H = O(n)$ и b — фундаментальный символ из аксиомы (B2). Доказательство в основном совпадает с доказательством, приведенным в § 3 статьи [5]. Сейчас мы проведем его в деталях. Мы начнем с гладкого векторного расслоения N на Z, как в § 1. В ситуации теоремы 3.1 им будет нормальное расслоение вложения, введенного в § 3. Построим затем многообразие $S = S(N \oplus 1)$ над Y, слой которого в точке y совпадает с расслоением сфер $N_y \oplus 1$ (которое получится, если компактифицировать N_y, стянув в точку бесконечно удаленное сечение). Для завершения доказательства теоремы 3.1 нам нужно показать коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} K(TZ) \arrow[rr, "i!"] \arrow[dr, "a\text{-ind}"'] & & K(TS) \arrow[dl, "a\text{-ind}"] \\ & K(Y) & \end{tikzcd}$$

где $i_!$ строится по отображению $i: Z \to S$, как в § 3 ($i_!$ — композиция гомоморфизма Тома $K(TZ) \to K(TN)$ и естественного продолжения $K(TN) \to \to K(TS)$). Пусть $b \in K_{O(n)}(TS^n)$ — эквивариантный класс символа, равный $b = j_!(1)$, где $j: P \to S^n$ — вложение точки в S^n. Как показано в [5], $a\text{-ind}(b) = 1 \in R(O(n))$. Это — аксиома нормализации (B2). Более того, как объяснено в [5], для каждого S^n-расслоения Σ над X (с группой $O(n)$) гомоморфизм $K(TX) \xrightarrow{i_!} K(T\Sigma)$ задается (локально) умножением на b. То же построение можно провести и для семейств, так что гомоморфизм $K(TZ) \xrightarrow{i_!}$ $\xrightarrow{i_!} K(TS)$ можно получить (локально) умножением на b. В [5], § 9 мы аккуратно выбрали операторы, которые дают эти нужные символы, и затем смогли проверить, что аналитический индекс совместим с $i_!$. Единственное дополнительное условие, возникающее при проведении тех же рассуждений в случае семейств, состоит в том, что для определения индекса семейства операторов мы должны ввести некоторые сечения так, как в предложении 2.1. Для того чтобы уменьшить возникающие сложности, удобно вначале доказать следующую простую лемму.

Лемма 4.1. *Элемент* $b \in K_{O(n)}(TS^n)$ *можно представить оператором* B, *коммутирующим с* $O(n)$ *и таким, что* $\operatorname{Ker} B^* = 0$, $\operatorname{Ker} B = 1$ (*здесь* 1 *обозначает тривиальное одномерное представление* $O(n)$).

Доказательство. Поскольку $\operatorname{ind} b = 1 \in R(O(n))$, существует оператор C такой, что $[\operatorname{Ker} C] - [\operatorname{Ker} C^*] = 1 \in R(O(n))$. Это значит, что существует эпиморфизм $P\colon \operatorname{Ker} C \to \operatorname{Ker} C^*$, совместимый с действием $O(n)$, ядро которого равно 1. Продолжим P нулем на $(\operatorname{Ker} C)^{\perp}$ и положим $B = C + P$. Ясно, что порядок P равен $-\infty$.

Замечание. Если $B\colon C^\infty(S^n, G^0) \to C^\infty(S^n, G^1)$, то образующая $u \in \operatorname{Ker} B$ будет сопоставлять каждому S^n-расслоению Σ над X (с группой $O(n)$) сечение $\tilde{u}$ расслоения $\tilde{G}^0$ (векторное расслоение над Σ, индуцированное G^0).

Если мы используем построенный оператор B [1]) в [5], § 9, то $\operatorname{Ker} \tilde{B}^* = 0$, и, значит, $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} P_0$, $\operatorname{Ker} D^* = \operatorname{Ker} P_1$. Предположим теперь, что мы изменили оператор $A\colon C^\infty(X, E^0) \to C^\infty(X, E^1)$, добавив к нему такое конечномерное отображение $T\colon V \to C^\infty(X, E^1)$, которое уничтожает коядро. Изменим одновременно и оператор

$$D = \begin{pmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}^* \\ \tilde{B} & \tilde{A}^* \end{pmatrix},$$

добавив к верхнему левому элементу конечномерный оператор $\tilde{T}$, получающийся из T следующим образом. Для каждого $v \in V$ Tv является сечением E^1 над X. Поднимая его на все пространство (Y в [5], § 9), мы получаем сечение $(Tv)^\sim$ расслоения $\tilde{E}^1$. Положим $\tilde{T}v = (Tv)^\sim \otimes \tilde{u}$, где $\tilde{u}$ — сечение $\tilde{G}^0$, описанное в замечании, следующем за леммой 4.1. Легко проверить, что измененный оператор D (который можно записать как $D + \tilde{T}$) имеет нулевое коядро. Более того, из леммы 2.1 следует, что $D + \tilde{T}$ обладает необходимыми свойствами регулярности. Поскольку $\tilde{B}\tilde{T} = 0$, мы получаем, как в [5], § 9, что оператор $(D + \tilde{T})^*(D + \tilde{T})$ диагонален, поэтому метод, приведенный там для вычисления индекса D, можно применить к вычислению индекса $D + \tilde{T}$ и получить, что

$$\operatorname{Ker}(D + \tilde{T}) = \operatorname{Ker}(A + T). \tag{1}$$

Поскольку коядра равны 0, а прибавления T и $\tilde{T}$ не меняют индекса, из (1) следует, что

$$\operatorname{index} D = \operatorname{index} A. \tag{2}$$

В такой форме рассуждения немедленно обобщаются на семейства. Равенство (1) становится изоморфизмом векторных расслоений над пространством параметров, а (2) превращается в равенство в K-функторе на пространстве параметров. Это заканчивает доказательство теоремы 3.1.

---

[1]) Обозначения [5], § 9 слишком длинны, чтобы воспроизводить их здесь. Мы советуем читателю во время дальнейшего чтения иметь при себе статью [5].

§ 5. Дальнейшие замечания

В [6] мы выразили топологический индекс эллиптического оператора в когомологических терминах. Это было сделано путем применения характера Черна к K-теоретической конструкции для индекса. Точно так же можно поступить с индексом для семейств. Различия состоят в следующем:

(i) Мы используем «интегрирование вдоль слоев»

$$\pi_* : H^*(TZ) \to H^*(Y)$$

в качестве обобщения вычислений с фундаментальным циклом TZ (H^* — это когомологии с компактными носителями).

(ii) Мы вычисляем $\mathrm{ch} \circ \mathrm{ind} \in H^*(Y; \mathbf{Q})$, а не сам индекс, и таким образом мы теряем кручение.

Результатом является следующая

Теорема 5.1. *Пусть P — семейство эллиптических операторов, параметризованное многообразием Y, и $u \in K(TZ)$ класс символа P. Тогда* $\mathrm{ch}(\mathrm{index}\ P) = (-1)^n \pi_* \{\mathrm{ch}\ u \cdot \mathcal{T}\ (Z)\}$, *где $\mathcal{T}$ (Z) — класс Тодда комплексификации TZ (касательное расслоение вдоль слоев расслоения $Z \to Y$), $n = \dim X$ — размерность слоя и π_*: $H^*(TZ) \to H^*(Y)$ — интегрирование вдоль слоев.*

Замечание. Интегрирование вдоль слоя в расслоенном произведении — это операция, которая уменьшает размерность когомологий на размерность слоя. Ее можно определить многими способами, один из которых является когомологической формой нашего определения топологического индекса: это определение удобно использовать при доказательстве теоремы 5.1. Название операций возникло из другого определения, которое применимо, когда все пространства являются гладкими многообразиями: мы представляем класс когомологий дифференциальной формой, и затем интегрируем ее вдоль слоев, получая дифференциальную форму на базе. Для такого определения нужна ориентация слоя, и в нашем случае мы ориентируем слои TX, как в [6], предложение 2.1.

В статье [5] мы привели эквивариантную теорему об индексе, включающую компактную группу G. Она связана с теоремой об индексе для семейств следующим образом. Пусть P — эллиптический оператор на компактном G-многообразии X, который коммутирует с действием G, так что индекс $P \in R(G)$, как в [5]. Тогда для каждого расслоения ξ над пространством Y со слоем X и группой G оператор P определяет семейство $\xi(P)$ эллиптических операторов над Y. Размерность ядра и коядра семейства $\xi(P)$ постоянна, и они являются в действительности векторными расслоениями над Y, ассоциированными с ξ при представлениях G в $\mathrm{Ker}\, P$ и $\mathrm{Coker}\ P$. Поэтому $\mathrm{index}\ \xi(P) = \xi^*(\mathrm{index}\ P)$, где ξ^*: $R(G) \to K(Y)$ гомоморфизм, индуцированный ξ. Теорема об индексе 3.1 для семейств, получающихся таким образом из компактных групп, является следствием теоремы об индексе из [5]. Существуют, конечно, семейства операторов, которые нельзя так получить, и для них нужна теорема 3.1. Особенно интересные случаи теоремы 3.1 получаются из различных операторов, изученных в [6]. Если, например, $\dim X = 4k$ и X ориентировано, то, выбирая метрику вдоль слоев $Z \to Y$, мы получаем семейство «операторов сигнатуры», обобщающее оператор сигнатуры из [6].

§ 6. Индекс $\operatorname{Sign} Z$ этого семейства — это элемент $[H^+] - [H^-] \in K(Y)$, где $H_y^{\pm}$ — подпространства $H^{2k}(X_y, \mathbf{R})$, определяемые как в [6], § 6, с помощью метрики и произведения в когомологиях. Этот элемент можно выразить в терминах фундаментальной группы $\pi_1(Y)$ следующим образом. Представление $\pi_1(Y)$ в H^{2k} $(X; \mathbf{R})$ задает гомоморфизм $\alpha\colon \pi_1(Y) \to G$, где G — ортогональная группа квадратичной формы на $H^{2k}(X, \mathbf{R})$ (задаваемой равенством $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta[X]$). Группа G, вообще говоря, некомпактна, и ее максимальная компактная подгруппа L равна произведению $O(p) \times O(q)$. Гомоморфизм α индуцирует отображение $f : Y \to B_G \sim B_L$ ($\sim$ означает гомотопическую эквивалентность). Два векторных расслоения на B_L, ассоциированные с представлениями $O(p)$, $O(q)$ на $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$, можно, таким образом, поднять и получить расслоения на Y. Это и есть расслоения $H^{\pm}$, и, значит, $[H^+] - [H^-]$ является образом универсального класса в $K(B_L) = K(B_G)$, который мы обозначим просто через Sign. Таким образом, $\operatorname{Sign} Z = f^*(\operatorname{Sign})$.

Если Y односвязно, то приведенные рассуждения показывают, что $\operatorname{Sign}(Z)$ тривиально (т. е. $\operatorname{Sign}(Z) = \operatorname{Sign}(X)\cdot 1 \in K(Y)$). Примеры, когда $\pi_1(Y)$ и $\operatorname{Sign}(Z)$ нетривиальны, вместе с более подробным обсуждением сигнатуры расслоенных пространств содержатся в [3].

Как уже отмечалось, некоторые случаи теоремы 3.1 можно вывести из теоремы об индексе из [5]. Верно и обратное. Если заданы G-инвариантный оператор P на G-многообразии X, мы строим семейства $\xi(P)$ для каждого расслоения $\xi\colon Z \to Y$ со слоем X и группой G, и замечаем, что $\operatorname{index} \xi(P) = \xi^* \operatorname{index} P$. Заставляя Y пробегать все компактные подмножества классифицирующего пространства B_G, мы видим, что знание всех $\xi(P)$ определяет $\alpha(\operatorname{index} P)$, где $\alpha\colon R(G) \to K(B_G)$ сопоставляет каждому представлению G ассоциированное векторное расслоение над B_G. В [4] доказано, что если G-компактная группа, то $K(B_G) \cong \widehat{R(G)}$, где $\widehat{R(G)}$ — пополнение $R(G)$ в $I(G)$-адической топологии (где $I(G)$ — идеал пополнения). Поэтому теорема 3.1 определяет образ $\operatorname{index} P$ при пополнении $R(G) \to \widehat{R(G)}$. Для многих групп, в частности, для связных групп и для конечных p-групп, пополнение инъективно (т. е. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I(G)^n = 0$), и, значит, эквивариантная теорема об индексе для таких групп следует из теоремы 3.1. Однако для произвольной конечной группы это не так, и, следовательно, теорема 3.1 не включает в себя полностью эквивариантный случай.

Можно, конечно, скомбинировать эквивариантный случай и случай семейств, и ввести эквивариантные семейства. Мы оставляем это читателю.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем доказательства предложений 1.1 и 1.2. Напомним прежде формулировку предложения 1.1.

Предложение 1.1. *Отображения* $A\colon H \times \overline{\mathcal{P}^m}(X; E, F) \to \overline{\mathcal{P}^m}(X; E, F)$ *и* $B\colon H \times \mathcal{P}^m(X; E, F) \to \mathcal{P}^m(X; E, F)$ *непрерывны.*

Доказательство. Мы подробно разберем случай $\overline{\mathcal{P}}$. Случай $\mathcal{P}$ разбирается примерно также (см. также замечания в конце доказательства). Достаточно показать, что:

(a) отображение $P \mapsto \Psi_0^{-1}P\Phi_0$ непрерывно для каждого элемента $(\Psi_0, \Phi_0) \in H$;

(b) отображение $(\Psi, \Phi) \to \Psi^{-1}P_0\Phi$ непрерывно в единице $(I, I) \in H$ для каждого фиксированного $P_0 \in \overline{\mathcal{P}^m}$.

(c) отображение A непрерывно в точке $((I, I), 0)$.

В самом деле, если утверждения (a), (b) и (c) доказаны, то, во-первых, A непрерывно, если оно непрерывно в $(I, I) \times \mathcal{P}^m$: отображение $((\Psi, \Phi), P) \mapsto \mapsto \Psi^{-1}P\Phi$ равно

$$((\Psi, \Phi), P) \overset{A'}{\longmapsto} ((\Psi_0^{-1}\Psi, \Phi_0^{-1}\Phi), \Psi_0^{-1}P\Phi_0) \overset{A''}{\longmapsto} (\Psi_0^{-1}\Psi)^{-1}(\Psi_0^{-1}P\Phi_0)(\Phi_0^{-1}\Phi),$$

а A' непрерывно ввиду (a) и поскольку H — топологическая группа (используется только непрерывность левого умножения).

Далее, $\Psi^{-1}P\Phi - P_0 = (\Psi^{-1}(P - P_0)\Phi) + (\Psi^{-1}P_0\Phi - P_0)$. Первый член мал ввиду (c), а второй — ввиду (b). Поэтому отображение A непрерывно.

Утверждения (a) и (c) верны по следующей причине. Каждый элемент $\Phi \in \operatorname{Diff}(X, E)$ индуцирует ограниченный оператор в $H_s(X, E)$ и его норму $\| \Phi \|_s$ можно оценить, используя лишь конечное число производных Φ. Это значит, что существует окрестность N элемента $I \in \operatorname{Diff}(X, E)$ такая, что $\sup\limits_{\Phi \in N} \| \Phi \|_s = K < \infty$. Поэтому

(a) $$\|\Psi_0^{-1}(P - P_0)\Psi_0 \|_{s-m} \leqslant \| \Psi_0^{-1} \|_{s-m} \| \Phi_0 \|_s \| P - P_0 \|_s.$$

(c) Выберем $N_1 \times N_2 \cap H \subset H$ так, чтобы

$$\sup_{\Phi \in N_1} \| \Phi \|_s = K < \infty \text{ и } \sup_{\Phi \in N_2} \| \Psi^{-1} \|_{s-m} = L < \infty.$$

Тогда $\| \Psi^{-1}P\Phi \|_s \leqslant KL \| P \|_s$.

Докажем (b). Мы должны показать, что для каждого s и каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $N_1 \times N_2 \cap H$ в H такая, что $\| \Psi^{-1}P_0\Phi - P_0 \|_s < \varepsilon$ для $\Phi \in N_1$, $\Psi \in N_2$. Сведем задачу к случаю, когда E и F — тривиальные одномерные расслоения. Пусть $\{f_i\}$ — конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию координатными окрестностями U_i, над которыми E и F тривиальны. Достаточно доказать (b) для каждого $f_iP_0f_j$. Выберем окрестность (I, I) в H такую, что если (Ψ, Φ) лежит в этой окрестности, то $h(\Psi^{-1})(\operatorname{supp} f_i) \subset C_1$ (фиксированный компакт в U_i), и $h(\Phi)(\operatorname{supp} f_j) \subset C_2$ (фиксированный компакт в U_j). Тогда вычисление $\| \Psi^{-1}(f_iP_0f_j)\Phi - f_iP_0f_j \|_s$ требует знания сечений E только над U_j и сечений F только над U_i. Поэтому мы можем предположить, что E и F — тривиальные расслоения.

Если E тривиально, то из $\Phi \in \operatorname{Diff}(X, E)$ следует, что $\Phi = h(\Phi)\alpha_\Phi$, где $\alpha_\Phi \in \operatorname{Aut} E$. Выберем окрестность (I, I) такую, что α_Φ и α_Ψ близки к единице. Тогда

$$\Psi^{-1}P_0\Phi = \alpha_\Psi^{-1}h(\Phi)^{-1}P_0h(\Phi)\alpha_\Phi = (\alpha_\Psi^{-1} - I)(h(\Phi)^{-1}P_0h(\Phi))\alpha_\Phi + \\ + h(\Phi)^{-1}P_0h(\Phi)(\alpha_\Phi - I) + h(\Phi)^{-1}P_0h(\Phi).$$

Поскольку α_Φ, α_Ψ близки к единице, то $\| \alpha_\Phi - I \|_s$, $\| \alpha_\Psi^{-1} - I \|_{s-m}$ малы, $\| \alpha_\Phi \|_s$ равномерно ограничены, и так как мы знаем, что $\| h(\Phi) \|_s$

равномерно ограничены в окрестности $I \in \mathrm{Diff}(X)$, мы заключаем, что достаточно доказать

(b′) отображение $\mathrm{Diff}(X) \to \overline{\mathcal{P}^m}(X, 1, 1)$, задаваемое формулой $\varphi \mapsto \varphi^{-1}P_0\varphi$, непрерывно в единице.

Достаточно доказать (b′) для $P_0 \in \mathcal{P}^m$, поскольку

$$\|\varphi^{-1}P_0\varphi - P_0\|_s \leqslant \|\varphi^{-1}(P_0 - P_j)\varphi\|_s + \|\varphi^{-1}P_j\varphi - P_j\|_s + \|P_j - P_0\|_s \leqslant C\|P_j - P_0\|_s + \|\varphi^{-1}P_j\varphi - P_j\|_s.$$

Поэтому, если $P_i \in \mathcal{P}^m$, $P_j \to P_0$ и (b′) выполнено для $P_j \in \mathcal{P}^m$, то (b′) выполнено и для $P_0 \in \overline{\mathcal{P}^m}$.

Выберем сначала окрестность $\mathfrak{N}$ точки $I \in \mathrm{Diff}(X)$, гомеоморфную выпуклой окрестности $\mathfrak{M}$ точки $0 \in C^\infty(X, T(X))$ при локальном гомеоморфизме $\mathscr{E}\colon C^\infty(X, T(X)) \to \mathrm{Diff}(X)$, задаваемом римановой метрикой (см. [9]). Если $\varphi \in \mathfrak{N}$, $\varphi = \mathscr{E}v$, положим $\varphi_t = \mathscr{E}tv$, $t \in [0, 1]$.

Пусть g_t — геодезический поток — однопараметрическая группа, действующая на $T(X)$, а значит, и на $C^\infty(X, T(X))$. Пусть $f \in C^\infty(X)$ и $h_t = (\varphi_t^{-1}P_0\varphi_t)f$.

Лемма 1. *dh_t/dt существует и равно $\varphi_t^{-1}[P_0, V_t]\varphi_t f$, где $V_t(x) = g_t(V(\varphi_t^{-1}(x)))$.*

Доказательство.

$$\frac{h_t - h_{t_0}}{t - t_0} = \varphi_{t_0}^{-1}\frac{\varphi_{t_0}\varphi_t^{-1} - I}{t - t_0}P_0\varphi_t f + \varphi_{t_0}^{-1}P_0\frac{\varphi_t\varphi_{t_0}^{-1} - I}{t - t_0}\varphi_{t_0}f.$$

Пусть $\psi_t = \varphi_{t+t_0}\varphi_{t_0}^{-1}$ — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов. Нам нужно только показать, что касательный вектор к кривой $t \mapsto \psi_t x$ в точке x равен $V_{t_0}(x)$. Но касательный вектор к кривой $t \mapsto \varphi_{t+t_0}(y) = \exp_y(t + t_0)V(y)$ в точке $\varphi_{t_0}(y)$ равен $g_{t_0}V(y)$. Достаточно положить теперь $y = \varphi_{t_0}^{-1}(x)$.

Лемма 2. *Отображение $C^\infty(X, T(X)) \to \overline{\mathcal{P}^m}$, задаваемое формулой $V \mapsto [P_0, V]$, непрерывно.*

Доказательство. Приведенное отображение является линейным отображением пространств Фреше, поэтому достаточно показать, что его график замкнут, т. е. если $V_n \to 0$ и $[P_0, V_n]$ сходится в $\overline{\mathcal{P}^m}$, то $[P_0, V_n] \to 0$. Но если $f \in C^\infty(X)$, то $V_n f \to 0$ в $C^\infty(X)$, так что $P_0V_nf \to 0$ и $V_nP_0f \to 0$. Поэтому $[P_0, V_n]f \to 0$ в $C^\infty(X)$ и во всех H_s. Значит, $[P_0, V_n] \to 0$ в $\overline{\mathcal{P}^m}$.

Из леммы 1 получаем

$$\|\varphi_t^{-1}P_0\varphi_t - P_0\|_s \leqslant t\sup_{t_1\leqslant t}\|\varphi_{t_1}^{-1}[P_0, V_{t_1}]\varphi_{t_1}\|_s \leqslant tC\sup_{t_1\leqslant t}\|[P_0, V_{t_1}]\|_s.$$

Утверждение (b′) следует теперь из леммы 2 и непрерывности отображения $\mathrm{Diff}(X) \times C^\infty(X, T(X)) \to C^\infty(X, T(X))$ и $(t, V) \to g_tV$ в точках $(1, 0)$ и $(0,0)$ соответственно. Этим заканчивается доказательство предложения 1.1. для пространств $\overline{\mathcal{P}^m}$. Доказательство для $\mathcal{P}$ проводится так же, за исключением того, что при доказательстве (c) требуется равномерность асимптотического разложения для псевдодифференциальных операторов (см. [8]).

Напомним теперь формулировку предложения 1.2.

Предложение 1.2. *Пусть Y компактно. Символы непрерывных семейств плотны (в компактно-открытой топологии) в пространстве непрерывных сечений* $\overline{\mathrm{Symb}}^m(Z;\ \widetilde{E},\ \widetilde{F})$.

Доказательство. Используя разбиение единицы на Y, мы сводим задачу к случаю, когда семейство тривиально. Разбиение единицы на X приводит нас затем к изучению семейств P_y, задаваемых непрерывным отображением $P\colon Y \to \overline{\mathcal{P}^m}(U)$, где U — область в $\mathbf{R}^n$ (а все расслоения тривиальны и одномерны). Если задано отображение $\sigma\colon y \mapsto \sigma_y(x,\ \xi)$, где функция $\sigma_y(x,\ \xi)$ непрерывна на $U \times (\mathbf{R}^n - \{0\})$, положительно однородна степени m и носитель σ_y компактен в U, то мы можем построить семейство P_y такое, что $\sigma(P_y)$ приближает σ_y равномерно по y, где $\|\sigma_y(x,\ \xi)\| = \sup\limits_{x \in U,\ |\xi|=1} |\sigma_y(x,\ \xi)|$. По теореме Стоуна — Вейерштрасса σ (ограничение на $U \times S^{n-1}$) можно приблизить непрерывным отображением $\mu\colon Y \to C^\infty(U \times S^{n-1})$. Пусть $\widetilde{\mu}$ — продолжение μ на $U \times (\mathbf{R}^n - \{0\})$ положительно однородное степени m. Достаточно показать, что существует семейство P, для которого $\sigma(P) = \widetilde{\mu}$.

Для этого нужно стандартное построение псевдодифференциального оператора с данным символом, проводимое вдоль пространства параметров Y. Критическим моментом является следующий: построенное семейство P_y непрерывно, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\widetilde{\mu}_y(x,\ \xi)}{(1+|\xi|)^m}$$

непрерывно по y. В самом деле, P_y является преобразованием

$$u \mapsto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle x,\ \xi\rangle} K_y(x,\ \xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi,$$

где $K_y(x,\ \xi) = \varphi(\xi)\widetilde{\mu}_y(x,\ \xi)$ и φ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^n$, равная 0 при $|\xi| \leqslant 1/2$ и равная 1 при $|\xi| \geqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. F. Atiyah, *K*-Theory, Benjamin, 1967.

[2] M. F. Atiyah, Algebraic Topology and Operators in Hilbert Space, Lectures in Analysis, Springer, 1969.

[3] M. F. Atiyah, «The signature of fibre-bundles» in Collected Mathematical Papers in Honor of K. Kodaira, Tokyo Univ. Press, 1969.

[4] M. F. Atiyah, G. B. Segal, Equivariant *K*-theory and completion, J. Diff. Geom. 3 (1969), 1—18.

[5] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. I, УМН 23:5 (143) (1968), 99—142.

[6] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. III, УМН 24:1 (145) (1969), 127—182.

[7] M. F. Atiyah, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (Paris), № 37 (1969).

[8] L. Hörmander, Pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965).

[9] J. A. Leslie, On a differential structure for the group of diffeomorphisms, Topology 6 (1967), 263—271.

[10] R. Palais, Seminar on the Atiyah — Singer Index Theorem, Ann. of Math. Study 57 (1965).

[11] W. Shih, Fiber cobordism and the index of a family of elliptic differential operators, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 984—991.