М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. III, *УМН*, 1969, том 24, выпуск 1(145), 127–182

*1969 г. январь — февраль* *т. XXIV, вып. 1 (145)*

*УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

УДК 517.4+513.83

# ИНДЕКС ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. III[1]

М. Ф. Атья и И. М. Зингер

СОДЕРЖАНИЕ



## Введение

В первой статье этой серии (см. [7]) в терминах $K$-теории был вычислен индекс эллиптических операторов. В этой статье мы собираемся проделать стандартное упражнение в переходе от $K$-теории к когомологиям, которое будет закончено получением в теореме 2.1 точной когомологической формулы для индекса, анонсированной в [6].

В [7] мы рассматривали также эллиптические операторы (или комплексы), совместимые с действием компактной группы преобразований $G$. В этом случае индекс является характером $G$, и основная теорема из [7] дает для него конструкцию, используемую в $K_G$-теории.

Во второй статье этой серии значение этого индекса-характера на элементе $g \in G$ было выражено как индекс нового «виртуального оператора» на множестве неподвижных точек $g$. Это называлось формулой Лефшеца о неподвижной точке. Комбинируя эту формулу с когомологической формулой для индекса, мы получим окончательно точную когомологическую формулу (3.9) для индекса-характера. Мы подробно опишем эту формулу для

[1]) Перевод с английского выполнен С. И. Гельфандом. Начало статьи опубликовано в УМН **23**, вып. 5 (143); **23**, вып. 6(144) за 1968 г.

ряда важных операторов. В частности, мы уделим внимание «теоремам целочисленности», получающимся таким путем при действии конечных групп на многообразиях. Большинство этих теорем не зависят от анализа, проведенного в [7], а являются немедленным следствием чисто топологических результатов из [5] и настоящей статьи.

Мы начнем в § 1 с краткого обзора теории характеристических классов и связи между когомологиями и $K$-теорией. Формула индекса (2.12) будет выведена в § 2, а наиболее общий индекс-характер или формула Лефшеца (3.9) дается в § 3. Доказательства являются простыми формальными следствиями из результатов статей I и II. Мы также дадим в предложении 2.2 несколько более точную форму теоремы об индексе для операторов, естественно возникающих из дифференциально-геометрических структур.

Большая часть статьи посвящена примерам и приложениям основной теоремы. Точная формула (3.9) кажется довольно страшной, и представляется полезным показать, к чему она сводится в различных важных частных случаях. Поэтому в § 4 мы рассматриваем теорему Римана — Роха для компактных комплексных многообразий, а также соответствующую формулу Лефшеца (4.6) для конечных групп автоморфизмов. В § 5 мы останавливаемся на операторе Дирака для спинорного многообразия. В некотором смысле наиболее интересным эллиптическим оператором является оператор, рассмотренный в § 6, индексом которого является сигнатура Хирцебруха многообразия. Ввиду важности этого оператора для дифференциальной топологии мы рассматриваем этот случай сравнительно подробно.

Кроме первоначальной теоремы 6.1 Хирцебруха мы выведем также соответствующую формулу Лефшеца (6.12). Интересным свойством этой формулы является то, что она представляет интерес для всех четномерных (ориентируемых) многообразий, а не только для тех, размерность которых делится на 4, как в случае теоремы 6.1.

В § 7 мы покажем, как формула Лефшеца из предыдущих параграфов может быть использована для получения инвариантов свободного $G$-действия (на нечетномерных многообразиях). Некоторые из них являются инвариантами типа кобордизмов, но операторы из § 6 приводят к более тонким инвариантам, и большая часть § 7 посвящена этому случаю.

В § 8 мы рассмотрим инфинитезимальный случай нашей общей формулы Лефшеца и выведем результаты, аналогичные результатам Ботта ([9], [10]), связывающим характеристические числа с нулями векторных полей.

Наконец, в § 9 мы сделаем несколько простых выводов из общей формулы индекса и формулы Лефшеца. При некоторых дополнительных предположениях эти формулы значительно упрощаются, и во многих случаях мы получаем нулевой индекс. О большинстве этих специальных случаев уже упомянуто в [6].

С точки зрения обычной теоремы об индексе частные случаи §§ 4, 5, 6 уже были описаны в [19]. Мы повторяем здесь этот материал отчасти для полноты, отчасти потому, что мы хотим продолжить обсуждение чисел Лефшеца. Наше изложение, однако, короче, чем в [19], и читатель может обращаться туда за дальнейшими подробностями.

## § 1. Когомологии и характеристические классы

В этом параграфе мы для удобства читателей дадим краткий обзор теории характеристических классов. Дальнейшие подробности имеются в [8].

Для категории компактных пространств наиболее естественной теорией когомологий является теория когомологией Чеха. Эти когомологии пригодны также для векторных расслоений, $K$-теории и общей теории расслоенных пространств. Для локально компактных пространств удобно использовать когомологии с компактными носителями, которые сводятся к приведенным когомологиям одноточечной компактификации. Теория пучков показывает, что для дифференцируемых многообразий, которыми мы и интересуемся, группы когомологий Чеха (с вещественными коэффициентами) могут быть отождествлены с группами де Рима, т. е. с когомологиями комплекса внешних дифференциальных форм.

Пусть $G$ — компактная группа Ли. *Характеристический класс* $G$ может быть определен как функтор, сопоставляющий каждому (компактному) главному $G$-расслоению $P$ класс когомологий [1]) пространства $X = P/G$ (коэффициентами могут быть $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Множество всех характеристических классов образует кольцо, которое мы обозначим [2]) через $H_G^*$ или $H_G^*(A)$, если мы хотим выделить кольцо коэффициентов $A$. Про $H_G^*$ известны следующие факты. Если $G = T$ — тор, $H_T^2(\mathbf{Z})$ естественно изоморфно группе характеров (по Понтрягину) $\hat{T}$ тора $T$ и $H_T^*(A)$ — (полная) симметрическая алгебра $\hat{T}$ над $A$, т. е. если $x_1, \ldots, x_n$ базис $\hat{T}$, то

$$H_T^*(A) = A[[x_1, \ldots, x_n]] \tag{1.1}$$

— кольцо формальных степенных рядов от $x_1, \ldots, x_n$.

Если в $G$ есть максимальный тор $T$ и группа Вейля $W$, то естественный гомоморфизм

$$H_G^*(A) \to H_T^*(A), \qquad A = \mathbf{Q},\ \mathbf{R},\ \mathbf{C}, \tag{1.2}$$

отождествляет $H_G^*(A)$ с инвариантными относительно $W$ элементами $H_T^*(A)$.

Если $G = U(n)$ — унитарная группа, то (1.2) выполняется и для $A = \mathbf{Z}$. Поэтому если $x_1, \ldots, x_n$ — стандартные характеры максимального тора $T \subset U(n)$ (так что $W$ — группа подстановок $S_n$), то для любого $A$

$$H_{U(n)}^*(A) \cong A[[x_1, \ldots, x_n]]^{S_n} \cong A[[c_1, \ldots, c_n]], \tag{1.3}$$

где $c_i$ — $i$-я элементарная симметрическая функция от $x_1, \ldots, x_n$.

Характеристические классы $c_i$ группы $U(n)$ называются *классами Черна*. Поскольку главное $U(n)$-расслоение определяет и (с точностью до изоморфизма) определяется комплексным векторным расслоением размерности $n$,

---

[1]) Мы разрешаем классу когомологий быть неоднородным, т. е. лежать в бесконечном произведении $\prod_q H^q(X)$.

[2]) Обычное обозначение $H^{**}(B_G)$, где $B_G$ — классифицирующее пространство. Для краткости мы не будем писать $B_G$.

мы можем рассматривать классы Черна как функторы из комплексных векторных расслоений в когомологии. Таким образом, если $E$ — комплексное векторное расслоение на $X$, то

$$c_i \in H^{2i}(X, \mathbf{Z}) \qquad (i=1, \ldots, n=\dim E).$$

Вводя переменную $t$, определим полином Черна

$$c(E)=\sum c_i(E)\,t^i \qquad (c_0=1).$$

Тогда

$$c(E\oplus F)=c(E)\cdot c(F). \tag{1.4}$$

Для тривиального расслоения $E$ имеем $c(E)=1$. Вместе с (1.4) это показывает, что классы Черна могут быть определены в $K(X)$.

Степенной ряд

$$\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}=n+\sum x_i+\frac{\sum x_i^2}{2!}+\ldots$$

единственным образом может быть выражен через элементарные симметрические функции $c_i$. Это выражение определяет характеристический класс (над $\mathbf{Q}$), называемый *характером Черна* и обозначаемый ch. Он имеет следующие формальные свойства:

$$\operatorname{ch}(E\oplus F)=\operatorname{ch}E+\operatorname{ch}F,$$

$$\operatorname{ch}(E\otimes F)=(\operatorname{ch}E)(\operatorname{ch}F),$$

и продолжается до гомоморфизма колец

$$\operatorname{ch}\colon K(X)\longrightarrow H^*(X, \mathbf{Q}).$$

Пусть теперь $S$ — максимальный тор $G$ и $\rho\colon S\longrightarrow U(n)$ — представление $G$, для которого $\rho(S)\subset T$, где $T$ — стандартный максимальный тор в $U(n)$. Тогда $\rho$ индуцирует гомоморфизм

$$\hat\rho\colon \hat T\longrightarrow \hat S$$

и элементы $y_i=\hat\rho(x_i)\in\hat S$ называются весами $\rho$. Из естественности изоморфизма (1.2) следует, что

Если $\rho^*\colon H^*_{U(n)}\longrightarrow H^*_G$ — гомоморфизм, индуцированный $\rho$, то

$$\left.\begin{aligned}\rho^*c&=\prod(1+y_it),\\ \rho^*\operatorname{ch}&=\sum e^{y_i},\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

где $c=\sum c_it^i$, $t$ — переменная. Если $M$ — $G$-модуль, определенный $\rho$ (т. е. $M=\mathbf{C}^n$ с действием $g(x)=\rho(g)\,x$), характеристический класс

$$\rho^*\operatorname{ch}=\sum e^{y_i}$$

мы будем обозначать также $\operatorname{ch}M$. Отображение $M\longmapsto\operatorname{ch}M$ определяет гомоморфизм колец

$$\operatorname{ch}\colon R(G)\longrightarrow H^*_G(\mathbf{Q}),$$

называемый «универсальным» характером Черна. Если $T$ — максимальный тор $G$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & H_G^*(\mathbf{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(T) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & H_T^*(\mathbf{Q}) \end{array}$$

Для тора $T$ имеем $R(T) = \mathbf{Z}[\hat{T}]$ (целочисленное групповое кольцо $\hat{T}$) и характером Черна является гомоморфизм колец, определенный формулами

$$x_i \longmapsto e^{x_i},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — базис $\hat{T}$.

Если $E$ — вещественное векторное расслоение на $X$, *классы Понтрягина*

$$p_i(E) \in H^{4i}(X, \mathbf{Z})$$

определяются равенствами

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}).$$

Используя (1.3) и (1.5), находим, что

$$H^*_{O(n)}(A) = A[[p_1, \ldots, p_m]], \qquad m = \left[\frac{n}{2}\right], \qquad A = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}.$$

Если $x_1, \ldots, x_m$ — основные характеры стандартного максимального тора в $O(n)$, классы $p_i$ определяются из равенства

$$\sum (-1)^i p_i t^{2i} = \prod_1^m (1 + x_i t)(1 - x_i t) = \prod (1 - x_i^2 t^2)$$

так, что $p_i$ являются элементарными симметрическими функциями от $x_1^2, \ldots, x_m^2$. Для специальной ортогональной группы $SO(2m)$ у группы Вейля имеется еще один инвариант, а именно

$$e = \prod_1^m x_i. \tag{1.6}$$

Как и $p_i$, он является в действительности образом целочисленного характеристического класса, называемого *классом Эйлера*, который можно определить следующим образом.

Пусть $E$ — ориентированное вещественное векторное расслоение размерности $n$ на $X$. Тогда изоморфизм Тома

$$\psi\colon H^*(X, \mathbf{Z}) \to H^*(E, \mathbf{Z}) \tag{1.7}$$

задается равенством $\psi(u) = u\psi(1)$. Поэтому $H^*(E, \mathbf{Z})$ есть свободный $H^*(X, \mathbf{Z})$-модуль с одной образующей $\psi(1)$. Если $n = 2m$, класс Эйлера $e(E)$ равен

$$e(E) = i^*\psi(1) \in H^n(X, \mathbf{Z}), \tag{1.8}$$

где отображение $i^*\colon H^*(E, \mathbf{Z}) \to H^*(X, \mathbf{Z})$ индуцировано нулевым сечением $i\colon X \to E$.

Если $V$ — комплексное векторное расслоение размерности $m$ на $X$ и $E$ — соответствующее $2m$-мерное вещественное ориентированное расслоение, то

$$c_m(V) = e(E). \tag{1.9}$$

В рациональных когомологиях это сразу же следует из (1.3), (1.6) и того, что $U(m)$ и $SO(2m)$ имеют одинаковые максимальные торы. Результат для целочисленных когомологий следует из того, что ввиду (1.3) отображение

$$H^*_{U(n)}(\mathbf{Z}) \longrightarrow H^*_{U(n)}(\mathbf{Q})$$

инъективно.

Мы закончим наш обзор характеристических классов кратким рассмотрением роли кривизны. Предположим, что мы находимся в дифференцируемой ситуации, т. е. все пространства являются дифференцируемыми многообразиями и все расслоения дифференцируемы. Пусть $G$ — компактная группа Ли, $\mathfrak{G}$ — ее алгебра Ли, $T$ — максимальный тор в $G$, $\mathfrak{T}$ — его алгебра Ли. Вложение $\mathfrak{T} \to \mathfrak{G}$ индуцирует изоморфизм

$$S(\mathfrak{G}^*)^G \longrightarrow S(\mathfrak{T}^*)^W \tag{1.10}$$

между кольцом полиномов на $\mathfrak{G}$, инвариантных относительно присоединенного действия группы $G$ и кольцом полиномов на $\mathfrak{T}$, инвариантных относительно группы Вейля $W$. Но $S(\mathfrak{T}^*)$ является алгеброй полиномов, порожденной $\hat{T}$ над $\mathbf{R}$, и значит, ввиду (1.2)

$$S(\mathfrak{T}^*)^W \cong H^*_G(\mathbf{R}). \tag{1.11}$$

Поэтому из (1.10) и (1.11) следует, что вещественное характеристическое кольцо $G$ может быть отождествлено с инвариантными полиномами на алгебре Ли.

Пусть теперь $P$ — главное $G$-расслоение над компактным многообразием $X$. Пусть $\alpha$ — связность $P$. Тогда можно определить кривизну $\theta(\alpha)$ связности $\alpha$. Это внешняя дифференциальная 2-форма на $X$ с коэффициентами в расслоении со слоем $\mathfrak{G}$. Точнее, если $\mathfrak{P} = P \times_G \mathfrak{G}$ — векторное расслоение, ассоциированное с $P$ при присоединенном действии $G$ на $\mathfrak{G}$, то для любого $x$

$$\theta(\alpha)_x \in \Omega^2_x \otimes \mathfrak{P}_x,$$

где $\Omega^2$ — расслоение 2-форм на $X$.

Если $f \in S(\mathfrak{G}^*)^G$ — инвариантный полином степени $k$, то $f(\theta(\alpha))$ — некоторая внешняя дифференциальная форма на $X$ степени $2k$. Она замкнута, и ее класс когомологий (по де Раму) не зависит от выбора связности $\alpha$. Таким образом, мы получили дифференцируемый характеристический класс

$$[f(\theta(\alpha))] \in H^{2k}(X, \mathbf{R})$$

для каждого $f \in S(\mathfrak{G}^*)^G$. С точностью до числового множителя (включающего $\pi$) этот класс совпадает с характеристическим классом, соответствующим $f$ при изоморфизме

$$S(\mathfrak{G}^*)^G \cong H^*_G(\mathbf{R}).$$

Таким образом, в дифференцируемой ситуации характеристические классы могут быть представлены дифференциальными формами, построенными при помощи кривизны.

Для многообразий изоморфизм Тома может быть интерпретирован следующим более простым образом. Пусть $X$ — ориентированное $N$-мерное многообразие, и $E$ — ориентированное $n$-мерное вещественное расслоение на $X$. Тогда имеют место изоморфизмы, выражающие двойственность Пуанкаре

$$H^q(X, \mathbf{Z}) \cong H_{N-q}(X, \mathbf{Z}),$$
$$H^p(E, \mathbf{Z}) \cong H_{N+n-p}(E, \mathbf{Z}),$$

где под гомологиями понимаются сингулярные гомологии. Изоморфизм Тома переходит в изоморфизм в гомологиях

$$H_{N-q}(X, \mathbf{Z}) \to H_{N-q}(E, \mathbf{Z}),$$

индуцированный вложением нулевого сечения $X \to E$ (которое является, конечно, гомотопической эквивалентностью).

Заметим, что сингулярные гомологии являются гомологиями с компактными носителями и фундаментальный класс $[X]$ принадлежит этой последней группе. Если $u \in H^N(X, \mathbf{Z})$, то можно вычислить значение $u$ на $[X]$. В случае вещественных коэффициентов, если $u$ представляется замкнутой $n$-формой с компактным носителем, это значение равно просто интегралу

$$u[X] = \int_X u.$$

Если $Du \in H_0(X, \mathbf{Z})$ — двойственный класс гомологий, то

$$u[X] = \varepsilon(Du),$$

где пополнение $\varepsilon$: $H^0(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ индуцируется проекцией $X \to$ точка. Из интерпретации изоморфизма Тома, использующей двойственность Пуанкаре, следует, что

$$\psi(u)[E] = u[X], \qquad u \in H^n(X, \mathbf{Z}). \tag{1.12}$$

## § 2. Когомологическая форма теоремы об индексе [1])

Мы начнем со сравнения изоморфизмов Тома

$$\varphi_V\colon \quad K(X) \to K(V),$$
$$\psi_V\colon \quad H^*(X, \mathbf{Q}) \to H^*(V, \mathbf{Q})$$

в $K$-теории и в когомологиях. Здесь $V$ — комплексное векторное расслоение на $X$. Пусть сперва $X$ компактно, так что в $K(X)$ есть единица, обозначаемая 1. Тогда мы можем рассмотреть класс когомологий

$$\mu(V) = \psi_V^{-1} \operatorname{ch} \varphi_V(1) \in H^*(X, \mathbf{Q}).$$

Ввиду естественности $\varphi$ и $\psi$ отображение

$$V \mapsto \mu(V)$$

является функтором из комплексных векторных расслоений в когомологии. Поэтому оно задает элемент $\mu$ характеристического кольца (см. (1.3))

$$H^*_{U(n)}(Q) = \mathbf{Q}[c_1, \ldots, c_n] = \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}.$$

---

[1]) Вычисления в этом параграфе в основном совпадают с вычислениями в [4] и поэтому сравнительно хорошо известны.

Если теперь $i^*\colon H^*(E, \mathbf{Q}) \to H^*(X, \mathbf{Q})$ — гомоморфизм ограничения, то для любого $u \in H^*(X, \mathbf{Q})$ имеем по (1.8)

$$i^*\psi_V(u) = i^*(u \cdot \psi_V(1)) = u\psi_V(1) = u \cdot e(V).$$

Взяв $u = \mu(V)$ и вспомнив, что ограничение фундаментального класса

$$\lambda_V = \varphi_V(1) \in K(E)$$

равно

$$\lambda_{-1}(V) = \sum (-1)^i \lambda^i(V) \in K(X),$$

получаем

$$\mu(V) \cdot e(V) = i^*\psi_V \cdot \psi_V^{-1} \operatorname{ch} \varphi_V(1) = i^* \operatorname{ch} \lambda_V = \operatorname{ch} \lambda_{-1}(V).$$

Поскольку это выполнено для всех $V$, имеет место равенство

$$\mu \cdot e = \operatorname{ch} \lambda_{-1} \in H^*_{U(n)}(\mathbf{Q}). \tag{2.1}$$

Ввиду (1.9) $e = c_n$ и по (1.5)

$$\operatorname{ch} \lambda_{-1} = \prod (1 - e^{x_i}).$$

Поскольку $c_n = \prod x_i$ — не делитель нуля в $H^*_{U(n)}(\mathbf{Q})$, то

$$\mu = \prod \left( \frac{1 - e^{x_i}}{x_i} \right). \tag{2.2}$$

Если мы выразим (2.2) через элементарные симметрические функции $c_i(x_1, \ldots, x_n)$, то получим, что $\mu = \sum \mu_k$, где $\mu_k$ — некоторые полиномы от $c_i$. Тогда для любого $V$ будем иметь $\mu(V) = \sum \mu_k(c_1(V), \ldots, c_k(V))$. Заметим, что $\mu_0(V) = (-1)^n$, так что, если $V$ тривиально, $\mu(V) = (-1)^n$.

Поскольку $\varphi$ и $\psi$ — гомоморфизмы модулей, для любого $u \in K(X)$

$$\psi_V^{-1} \operatorname{ch} \varphi_V u = \operatorname{ch} u \cdot \mu(V). \tag{2.3}$$

Обобщение данного доказательства показывает, что (2.3) выполнено для $u \in K(X, Y)$, где $Y$ — замкнутое подпространство $X$. Пусть теперь $X$, $Y$ — дифференцируемые многообразия, $X$ — компактно и $i\colon X \to Y$ — вложение с нормальным расслоением $N$. Тогда мы можем, как в [7], § 3, отождествить $TN$ с комплексным векторным расслоением $\pi^*(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ на $TX$, где $\pi\colon TX \to X$ — проекция. Гомоморфизм $i_!\colon K(TX) \to K(TY)$ из [7], § 3 определяется как композиция

$$K(TX) \xrightarrow{\varphi} K(TN) \xrightarrow{j_*} K(TY),$$

где $\varphi$ — гомоморфизм Тома и $j_*$ — естественное отображение, индуцированное вложением $j\colon TN \to TY$ ($N$ отождествляется с трубчатой окрестностью $X$ в $Y$). Применяя относительную форму (2.3) к элементу

$$u \in K(B(X), S(X)) = K(TX)$$

($B(X)$ и $S(X)$ — расслоения единичных шаров и единичных сфер в $TX$) и учитывая, что $V = \pi^*(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$, получаем

$$\operatorname{ch} \varphi_V(u) = \psi_V(\operatorname{ch} u \cdot \mu(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})). \tag{2.4}$$

Здесь $H^*(TX)$ обычным образом рассматривается как $H^*(X)$-модуль. Для каждого многообразия $X$ мы, как и в [7] § 3, можем рассматривать $TX$

как почти-комплексное многообразие. Локально

$$X \cong \mathbf{R}^n, \qquad TX \cong T\mathbf{R}^n \cong \mathbf{C}^n,$$

где последний изоморфизм задается формулой $(x, \xi) \mapsto x + i\xi$ для $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in T_x$.

В частности, $TX$ получает определенную ориентацию и поэтому можно определить фундаментальный класс. Заметим, что, если $X \subset Y$, ориентация нормального расслоения $TX$ в $TY$, индуцированная ориентацией $TX$ и $TY$, совпадает с ориентацией комплексного векторного расслоения $\pi^* (N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$. Если мы теперь вычислим (старшую компоненту) (2.4) на фундаментальном классе $TN$ и используем предложение 2.1, то получим

$$\operatorname{ch} \varphi_V (u) [TN] = \operatorname{ch} u \cdot \mu (N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) [TX]. \tag{2.5}$$

Ввиду естественности отображения имеем, с другой стороны,

$$\operatorname{ch} \varphi_V (u) [TN] = j^* \operatorname{ch} \varphi_V (u) [TY] = \operatorname{ch} i_! (u) [TY]. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) получаем, что

$$\operatorname{ch} i_! (u) [TY] = \operatorname{ch} u \cdot \mu (N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) [TX]. \tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь два вложения $i\colon X \to E$, $j\colon P \to E$, где $E$ — евклидово пространство. Пусть $\dim X = n$, $\dim E = n + q$. Применение (2.7) в тривиальном случае, когда $i$ заменено на $j$, дает

$$\operatorname{ch} j_! (v) [TE] = (-1)^{n+q} \operatorname{ch} v [TP] = (-1)^{n+q} v, \qquad v \in K(P) = \mathbf{Z}.$$

Другими словами, обратный к изоморфизму $j_!$ задается равенством

$$j_!^{-1} (w) = (-1)^{n+q} \operatorname{ch} w [TE], \qquad w \in K(TE). \tag{2.8}$$

Напомним, что *топологический индекс* $t$-ind: $K(TX) \to \mathbf{Z}$ задается ([7], § 3) формулой $t\text{-ind} = j_!^{-1} \circ i_!$. Теперь (2.7) и (2.8) приводят к формуле

$$t\text{-ind}\, u = (-1)^{n+q} \operatorname{ch} u \cdot \mu (N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) [TX]. \tag{2.9}$$

Удобнее выражать (2.9) через касательное расслоение $T$, чем через нормальное расслоение $N$ подмногообразия $X$. Заметим для этого, что ввиду (2.2)

$$\mu (E \oplus F) = \mu (E) \mu (F)$$

для любых двух комплексных векторных расслоений. Более того,

$$\mu (E) = \pm 1 + \text{члены высшего порядка} \in H^* (X, \mathbf{Q})$$

и, значит, $\mu(E)$ обратим. Кроме того, для тривиального расслоения $W$ имеем $\mu (V) = (-1)^{\dim W}$. Поэтому

$$\mu (N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \mu (T \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})^{-1} = \mu^{-1} (T \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}),$$

где $\mu^{-1}$ — характеристический класс $U(n)$, задающийся формулой

$$\mu^{-1} = \prod_1^n \frac{x_i}{1 - e^{x_i}}.$$

Пусть теперь

$$\tau^* = (-1)^n \mu^{-1} = \prod_1^n \frac{-x_i}{1 - e^{x_i}}, \qquad \tau = \prod \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}.$$

Класс $\tau$ называется *классом Тодда*, а $\tau^*$ можно назвать двойственным классом Тодда; действительно, если $V^*$ — расслоение, двойственное к $V$, то $\tau^*(V)=\tau(V^*)$. Если, в частности, $V=E\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ — комплексификация вещественного расслоения, то $V\cong V^*$ и, значит, $\tau(V)=\tau^*(V)$.

Функтор $E\longmapsto\tau(E\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})$ определяет характеристический класс в $O(n)$ — образ $\tau$ при гомоморфизме

$$H^*_{U(n)}(\mathbf{Q}) \longrightarrow H^*_{O(n)}(\mathbf{Q}).$$

Мы назовем этот класс *индексным классом* и будем обозначать его $\mathcal{J}$. Таким образом,

$$\mathcal{J}(E)=\tau(E\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}).$$

Если $y_1,\ldots,y_m$ — обычный базис в характерах максимального тора в $O(n)$ $\left(\text{где } m=\left[\frac{n}{2}\right]\right)$, то (1.5) показывает, что

$$\mathcal{J}=\prod\frac{y_i}{1-e^{y_i}}\prod\frac{-y_i}{1-e^{-y_i}}. \tag{2.10}$$

Выражая это через элементарные симметрические функции $p_i$ от $y_1^2,\ldots,y_m^2$, мы получим, что

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}_{k,m}(p_1,\ldots,p_k),$$

где $\mathcal{J}_{k,m}$ — некоторые полиномы степени $k$. Более того, $\mathcal{J}_{k,m}$ не зависит от $m$, если $k\leqslant m$. Если обозначить их через $\mathcal{J}_k$, то

$$\mathcal{J}=\sum\mathcal{J}_k(p_1,\ldots,p_k)=1-\frac{p_1}{12}+\ldots,$$

если считать, что $p_k=0$ при $k>m$. Это соглашение является стандартным в формализме такого рода.

Используем, наконец, обычное соглашение и напишем

$$p_i(X)=p_i(TX),$$

назвав $p_i$ классами Понтрягина $X$. Определим соответственно индексный класс $X$ равенством

$$\mathcal{J}(X)=\mathcal{J}(TX)=\sum_k\mathcal{J}_k(p_1(X),\ldots,p_k(X)).$$

В этих обозначениях (2.9) приводит к следующей когомологической формуле для топологического индекса.

Предложение 2.1. *Пусть $X$ — компактное дифференцируемое многообразие размерности $n$, и пусть индексный класс*

$$\mathcal{J}(X)=\sum_k\mathcal{J}_k(p_1(X),\ldots p_k(X))\in H^*(X,\mathbf{Q})$$

*определяется как класс Тодда комплексификации касательного расслоения. Пусть*

$$t\text{-ind}:\quad K(TX)\to\mathbf{Z}$$

*— топологический индекс, определенный в* [7], § 3. *Тогда для каждого $u\in K(TX)$*

$$t\text{-ind}\ u=(-1)^n\{\operatorname{ch}u\cdot\mathcal{J}(X)\}[TX], \tag{2.11}$$

*где в правой части мы берем значение старшей компоненты* $\mathrm{ch}\, u \cdot \mathcal{J}(X)$ *на фундаментальном классе гомологий* $TX$ *и* $TX$ *ориентировано как почти-комплексное многообразие с «вещественной горизонтальной и мнимой вертикальной частями».*

Теперь основная теорема (6.7) из [7] в частном случае, когда группа $G$ состоит из одного элемента, утверждает, что

$$a\text{-ind} = t\text{-ind}.$$

Вместе с (2.11) это дает когомологическую форму теоремы об индексе.

Теорема 2.1 (об индексе). *Пусть* $P$ — *эллиптический оператор на компактном многообразии* $X$, $u \in K(TX)$ — *класс символа* $P$. *Тогда индекс* $P$ *равен*

$$\operatorname{index} P = (-1)^n \{\mathrm{ch}\, u \cdot \mathcal{J}(X)\} [TX], \tag{2.12}$$

*где* $\mathcal{J}(X)$ — *индексный класс* $X$ *и* $TX$ *ориентировано как в* (2.11).

Замечание 1. Множитель $(-1)^n$ исчезнет, если снабдить $TX$ двойственной комплексной структурой, как в [19]. Однако у нас есть причины сохранить принятые здесь соглашения.

Замечание 2. Как объяснялось в [7], § 7, в (2.12) можно заменить оператор $P$ на комплекс $E$ и индекс $P$ на эйлерову характеристику $E$. Мы проделаем это в дальнейшем.

Если $X$ — ориентированное многообразие, то в (2.12) значение на $TX$ можно, используя (1.12), заменить значением на $X$. Мы должны, однако, проследить за знаком потому, что ориентация на $TX$, индуцируемая ориентацией $X$, отличается от нашей, точнее, один фундаментальный класс отличается от другого множителем $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Поэтому если $\psi$: $H^*(X) \to H^*(TX)$ — изоморфизм Тома [1]), то (2.12) можно заменить на

$$\operatorname{index} P = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \{(\psi^{-1}\, \mathrm{ch}\, u)\, \mathcal{J}(X)\} [X]. \tag{2.13}$$

Это и есть форма теоремы об индексе, данная в [6], за исключением обозначений и соглашений, которые в [6] не были уточнены.

Если $X$ не ориентируемо, то тоже можно написать формулу типа (2.13), но в ней нужно будет использовать скрученные коэффициенты и для фундаментального класса $X$, и для $\psi^{-1}\, \mathrm{ch}\, u$.

В оставшихся параграфах мы применим формулу (2.13) к некоторым особенно интересным эллиптическим комплексам, связанным с некоторой геометрической структурой на $X$. Все эти случаи являются в действительности примерами операторов, связанных с $H$-структурой, и для них (2.13) можно даже несколько уточнить. Мы начнем сейчас описывать этот класс операторов. Пусть $H$ — компактная группа Ли, $V$ — фиксированный вещественный ориентированный $H$-модуль. Тогда под *$H$-структурой* на $X$ мы будем понимать главное $H$-расслоение $P$ на $X$ вместе с изоморфизмом (ориентированных

---

[1]) При нечетном $n$ важно различать, какое из отображений $u \mapsto u\psi(1)$ или $u \mapsto \psi(1)u$ называется изоморфизмом Тома; мы примем первую возможность, и тогда получим знак $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

расслоений)

$$P \times {}_H X \cong T(X),$$

где $P \times {}_H X$ обозначает, как обычно, векторное расслоение на $X$, ассоциированное с $P$ и $H$-модулем $V$. У нас есть естественный гомоморфизм

$$\alpha_P\colon\ K_H(V) \to K_H(P \times V) = K(TX).$$

Если $v \in K_H(V)$, образ

$$u = \alpha_P(v) \in K(TX)$$

может быть назван классом эллиптического символа, ассоциированным с $H$-структурой. Элемент $v$, который можно назвать «универсальным» классом эллиптического символа для $H$-структур, обычно возникает следующим образом. Пусть $M^0, \ldots, M^n$ — последовательность комплексных $H$-модулей и

$$\varphi_i : V \longrightarrow \operatorname{Hom}(M^i, M^{i+1})$$

— $H$-отображения[1]) такие, что для $\xi \in V$, $\xi \neq 0$ последовательность

$$0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{\varphi_0(\varepsilon)} M^1 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_{n-1}(\varepsilon)} M^n \longrightarrow 0$$

точна. Эта последовательность может рассматриваться как комплекс векторных $H$-расслоений на $V$ с компактным носителем [7] § 2, и поэтому представляет элемент $v \in K_H(V)$.

Покажем теперь, как вычислить $\operatorname{ch} u$, если $u$ ассоциировано с $H$-структурой. Для этого рассмотрим произвольное главное $H$-расслоение $P$ и положим $T = P \times {}_H V$. Тогда можно заметить, что

$$P \longrightarrow \psi_T^{-1} \operatorname{ch} \alpha_p(v) \tag{2.14}$$

является функтором из категории главных $H$-расслоений в рациональные гомологии, и поэтому задает элемент из $H_H^*(\mathbf{Q})$. Пусть теперь $\dim V = 2l$, и $\rho^*(e) \in H_H^*(\mathbf{Q})$ — образ класса Эйлера $e$ при гомоморфизме

$$\rho^*\colon H^*_{SO(2l)}(\mathbf{Q}) \longrightarrow H^*_H(\mathbf{Q}),$$

индуцированном представлением $\rho\colon H \longrightarrow SO(2l)$. Используя (2.12), получаем

$$[\psi_T^{-1} \operatorname{ch} \alpha_P(v)] \cdot \rho^*(e)(P) = \operatorname{ch} \alpha_P(i^* v), \tag{2.15}$$

где $i^*\colon K_H(V) \longrightarrow K_H$ (точка) $= R(H)$ — значение в начале координат, и $\alpha_P$ используется также для обозначения гомоморфизма

$$\alpha_P\colon R(H) \longrightarrow K_H(X),$$

индуцированного отображением $M \longrightarrow P \times {}_H M$ (для любого $H$-модуля $M$). Если $\rho^*(e) \neq 0$ в $H^*_M(\mathbf{Q})$, то (2.15) можно использовать для выражения характеристического класса (2.13) через $i^*(v)$. Если $v$, как описано выше, определяется последовательностью $H$-модулей $M^i$ и их гомоморфизмов, то

$$i^*(v) \doteq \sum (-1)^i M^i \in R(H).$$

[1]) $\varphi_i$ не обязаны быть линейными, хотя большинство интересных примеров возникает, как мы увидим, с линейными $\varphi_i$.

По (1.5) функтор $P \mapsto \operatorname{ch} \alpha_P M$ задает характеристический класс

$$\operatorname{ch} M = \sum e^{y_i} \in H_H^*(\mathbf{Q}),$$

где $y_i$ — веса $M$. Поэтому

$$\operatorname{ch} \alpha_P i^*(v) = \sum (-1)^i \operatorname{ch} M^i.$$

Используя (2.14) и предполагая, что $\rho^*(e) \neq 0$, получаем

$$\psi_T^{-1} \operatorname{ch} \alpha_P(v) = \frac{\sum (-1)^i \operatorname{ch} M^i}{\rho^*(e)}(P). \tag{2.16}$$

Для изучения условия $\rho^*(e) \neq 0$ выберем максимальный тор $S$ в $H$, отображающийся в стандартный максимальный тор $T$ в $SO(2l)$. Если $x_1, \ldots, x_l \in \hat{T}$ — базисные характеры, то $e = \prod_1^l x_i$ и, значит, $\rho^*(e) = \prod_1^l y_i$, где $y_i \in \hat{S}$ — характеры $S$, индуцированные $x_i$. Поэтому равенство $\rho^*(e) = 0$ эквивалентно обращению в нуль одного из $y_i$, или, другими словами, существования ненулевого вектора в $\mathbf{R}^{2l}$ неподвижного относительно $S$.

Вводя (2.16) в формулу индекса (2.12), получаем

Предложение 2.2. *Пусть $\rho\colon H \to SO(2l)$ — такой гомоморфизм, что у максимального тора $H$ нет неподвижных точек в $\mathbf{R}^{2l}$. Тогда $\rho^*(e) \neq 0$, где $e \in H_{SO(2l)}^*(\mathbf{Q})$ — класс Эйлера и*

$$\rho^*\colon H_{SO(2l)}^*(\mathbf{Q}) \to H_H^*(\mathbf{Q})$$

*индуцировано $\rho$. Пусть $X$ — компактное ориентированное многообразие размерности $2l$, снабженное $H$-структурой, т. е. такое, что имеется главное $H$-расслоение $P$ на $X$ и $TX$ ассоциировано с $P$ при помощи $\rho$. Пусть $M^0, \ldots, M^N$ — комплексные $H$-модули, $E^0, \ldots, E^N$ — соответствующие векторные расслоения на $X$, и пусть последовательность*

$$0 \to \mathscr{D}(E^0) \to \ldots \to \mathscr{D}(E^N) \to 0$$

*является эллиптическим комплексом, символ которого в $K(TX)$ ассоциирован с $H$-структурой. Тогда индекс этого комплекса задается формулой*

$$(-1)^l \left\{ \frac{\sum (-1)^i \operatorname{ch} M^i}{\rho^*(e)}(P)\, \mathscr{J}(X) \right\}[X]. \tag{2.17}$$

Замечание 1. Написанная формула показывает, что (при выполнении предположений (2.17)) для $H$-структур индекс зависит только от расслоений $E^i$, или, точнее, от $H$-модулей $M^i$. Другими словами, два комплекса с одинаковыми $M^i$, но различными операторами имеют одинаковый индекс в предположении, что классы их символов ассоциированы с $H$-структурой.

Замечание 2. Не нужно путать группу $H$ в предложении 2.2 с группой $G$ в [7], (6.7). В предложении 2.2 мы рассматриваем обычный целочисленный индекс, а не более общий индекс-характер. Можно, конечно, предположить, что $H$-структура в предложении 2.2 инвариантна относительно некоторой другой группы $G$. Если, в частности, $G$ действует на $X$ тривиально, то действие $G$ на главном $H$-расслоении $P$ задается некоторым гомоморфизмом $\rho$ группы $G$ в центр группы $H$. Пусть $\chi^i$ — характер $G$, индуцированный характером $H$-модуля $M^i$ при гомоморфизме $\rho$. Тогда число Лефшеца $L(g, E)$ задается формулой, получающейся из (2.17), где $\operatorname{ch} M^i$ заменено на $\chi^i(g) \operatorname{ch} M^i$. Доказательство фактически совпадает с доказательством предложения 2.2.

## § 3. Формула Лефшеца о неподвижной точке

В теореме 2.1 из 5 мы привели формулу Лефшеца о неподвижной точке, которая выражает числа Лефшеца автоморфизмов эллиптических комплексов через индексы соответствующих классов эллиптических символов на множествах неподвижных точек. Вводя когомологическую формулу для индекса из предыдущего параграфа в теорему 2.1, из [5] мы получим когомологическую форму формулы Лефшеца о неподвижной точке для эллиптических комплексов. Удобно будет придерживаться следующих обозначений. Пусть $X$ — тривиальное $G$-пространство, так что

$$K_G(X) \cong K(X) \otimes R(G)$$

и $g \in G$. Гомоморфизм

$$K_G(X) \to H^*(X, \mathbf{C}),$$

задаваемый равенством

$$u = \sum a_i \otimes \chi_i \to \sum \chi_i(g) \cdot \operatorname{ch} a_i,$$

будет обозначаться $\operatorname{ch} u(g)$. В этих обозначениях теорема 2.1 из [5] и предложение 2.1 из этой статьи дают формулу

$$L(g, E) = \left\{ \frac{\operatorname{ch} i^* u(g)}{\operatorname{ch} \lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g)} \mathcal{J}(X^g) \right\} [X^g]. \tag{3.1}$$

Здесь $E$ — эллиптический комплекс, на котором действует топологически циклическая группа $G$, $u \in K_G(TX)$ — класс символа $E$, $X^g$ — множество неподвижных точек образующей $g \in G$, $i^*$ — ограничение на $K_G(TX^g)$ и $N^g$ — нормальное расслоение к $X^g$ в $X$.

Выражение для знаменателя в (3.1) можно, как мы сейчас увидим, уточнить. Рассмотрим сперва действие $G$ на нормальном расслоении $N^g$. Для каждого $x \in X^g$ слой $N_x^g$ расслоения $N^g$ в $x$ является вещественным $G$-модулем. Поскольку группа $G$ циклична, у нее есть два типа неприводимых вещественных представлений

($i$) одномерные представления $g \mapsto \pm 1$,

($ii$) двумерные представления

$$g \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

В ($ii$) представления, задаваемые $\theta$ и $-\theta$, эквивалентны, поэтому можно ограничиться случаем $0 < \theta < \pi$. Такой двумерный вещественный $G$-модуль имеет естественную комплексную структуру, в которой $g$ действует как умножение на комплексное число $e^{i\theta}$. Вещественный $G$-модуль $N_x^g$ можно поэтому канонически записать в виде прямой суммы

$$N_x^g = N_x^g(-1) \oplus \sum_{0<\theta<\pi} N_x^g(\theta). \tag{3.2}$$

Собственное значение $+1$ не встречается, поскольку $N^g$ нормально к множеству $X^g$ неподвижных точек, и в сумме встречается, очевидно, лишь конечное число значений $\theta$ (с ненулевыми пространствами). В каждом пространстве $N_x^g(\theta)$ имеется естественная комплексная структура, в которой $g$ является умножением на $e^{i\theta}$. Поскольку разложение может быть задано операторами проектирования, (3.2) определяет разложение векторного расслоения $N^g$ в прямую сумму

$$N^g = N^g(-1) \oplus \sum_{0<\theta<\pi} N^g(\theta) \tag{3.3}$$

(см. [1] (1.6.2) для аналогичного доказательства в комплексном случае). Расслоение $N^g(-1)$ вещественно, а каждое $N^g(\theta)$ комплексно. Поэтому *у $N^g(-1)$ есть классы Понтрягина, а у каждого $N^g(\theta)$ — классы Черна.*

Мы хотим теперь выразить знаменатель формулы (3.1) через эти характеристические классы. Из (3.3) мы получаем

$$N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = (N^g(-1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) \oplus \sum_{\theta} (N^g(\theta) \oplus N^g(\theta)^*),$$

$$\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \lambda_{-1}(N^g(-1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) \cdot \prod_{\theta} \lambda_{-1}(N^g(\theta) \cdot \prod_{\theta} \lambda_{-1}(N_g(\theta))^*.$$

Для вещественного расслоения $N^g(-1)$ имеем

$$\operatorname{ch} \lambda_{-1}(N^g(-1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g) = \varepsilon \left\{ \prod_{j=1}^{r} (1 + e^{x_j})(1 + e^{-x_j}) \right\} N^g(-1), \tag{3.4}$$

где $r = \left[\frac{s(-1)}{2}\right]$, $s(-1) = \dim N^g(-1)$, $\varepsilon = 1$, или 2 в зависимости от того, четно или нечетно $s(-1)$, и

$$\prod_j (1 + e^{x_j})(1 + e^{-x_j}) \in H^*_{O(s(-1))}(\mathbf{C}).$$

Для комплексного векторного расслоения $N^g(\theta)$ имеем

$$\operatorname{ch} \lambda_{-1}(N^g(\theta))(g) = \left\{ \prod_{j=1}^{s(\theta)} (1 - e^{y_j + i\theta}) \right\} N^g(\theta), \tag{3.5}$$

где $s(\theta) = \dim_{\mathbf{C}} N^g(\theta)$ и

$$\prod_{j=1}^{s(\theta)} (1 - e^{y_j + i\theta}) \in H^*_{U(s(\theta))}(\mathbf{C}).$$

Наконец, для двойственного расслоения $N^g(\theta)^*$ имеем

$$\operatorname{ch} \lambda_{-1}(N^g(\theta))^*(g) = \left\{ \prod_{j=1}^{s(\theta)} (1 - e^{-y_j - i\theta}) \right\} N^g(\theta). \tag{3.6}$$

Чтобы выразить эти формулы через классы Черна и Понтрягина, введем последовательность многочленов

$$\mathcal{R}_r(p_1, \ldots, p_r), \qquad \mathcal{S}_r^{\theta}(c_1, \ldots, c_r),$$

определенных формальными равенствами

$$\left.\begin{aligned} \left\{\prod_j \left(\frac{1+e^{x_j}}{2}\right)\left(\frac{1+e^{-x_j}}{2}\right)\right\}^{-1} &= \sum \mathscr{R}_r(p_1, \ldots, p_r), \\ \left\{\prod_j \left(\frac{1-e^{y_j+i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\left(\frac{1-e^{-y_j-i\theta}}{1-e^{-i\theta}}\right)\right\}^{-1} &= \sum \mathscr{S}_r^\theta(c_1, \ldots, c_r), \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

где $p_i$ — элементарные симметрические функции от $x_j^2$, $c_i$ — элементарные симметрические функции от $y_j$, и для определения $r$-го члена суммы мы берем в $\prod\limits_j$ произведение $r$ членов. Точнее, положим

$$\prod_{j=1}^{N} = \sum \mathscr{R}_{r, N}$$

и заметим, что $\mathscr{R}_{r, N}$ не зависит от $N$ при $r < N$, и аналогично для $\sum \mathscr{S}_r^\theta$. Положим

$$\mathscr{R} = \sum \mathscr{R}_r, \qquad \mathscr{S}^\theta = \sum \mathscr{S}_r^\theta.$$

По (1.3) мы можем рассмотреть эти выражения как характеристические классы (над C) для $O(n)$ и $U(n)$ соответственно при любом $n$. Для вещественного векторного расслоения $E$ на пространстве $Y$ положим

$$\mathscr{R}(E) = \mathscr{R}(p_1(E), \ldots, p_n(E)) \in H^*(Y, \mathbf{C}),$$

и для комплексного векторного расслоения $F$ на $Y$ —

$$\mathscr{S}^\theta(F) = \mathscr{S}^\theta(c_1(F), \ldots, c_n(F)) \in H^*(Y, \mathbf{C}).$$

Заметим, что $\mathscr{R}$ и $\mathscr{S}^\theta$ зависят только от стабильных классов $E$, $F$, а не от пополнения. Поэтому

$$\mathscr{R}(E \oplus 1_{\mathbf{R}}) = \mathscr{R}(E), \qquad \mathscr{S}^\theta(F \oplus 1_{\mathbf{C}}) = \mathscr{S}^\theta(F),$$

где $1_{\mathbf{R}}$ и $1_{\mathbf{C}}$ — тривиальные линейные расслоения (вещественное и комплексное соответственно).

Мы видим, что (3.7) отличается от (3.4), (3.5) и (3.6) только общим множителем

$$2^{s(-1)} \prod_\theta (1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta}).$$

Для каждого $x \in X^g$ этот множитель равен значению $\det(1 - g \mid N_x^g)$. Он постоянен на каждой связной компоненте $X^g$ и может рассматриваться как элемент $H^0(X^g, \mathbf{C})$, который мы обозначим через $\det(1 - g \mid N_g)$. Соединяя вместе (3.4), (3.5) и (3.6), имеем

$$\{\operatorname{ch} \lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g)\}^{-1} = \frac{\mathscr{R}(N^g(-1)) \prod\limits_\theta \mathscr{S}^\theta(N^g(\theta))}{\det(1 - g \mid Ng)}. \tag{3.8}$$

Подставляя это в (3.1), получаем окончательно следующую теорему.

Т е о р е м а 3.1 (Л е ф ш е ц а). *Пусть $g$ — образующая (топологически циклической) компактной группы Ли $G$, $X$ — компактное $G$-многообразие, $E$ — эллиптический комплекс на $X$, на котором действует $G$. Пусть*

$X^g$ *— множество неподвижных точек* $g$, $N^g$ *— нормальное расслоение к* $X^g$ *в* $X$ *и*

$$N^g = N^g(-1) \oplus \sum_{0<\theta<\pi} N^g(\theta)$$

*— разложение* $N^g$, *определяемое действием* $G$. *Пусть* $u \in K_G(TX)$ *— класс символа* $E$, $i^*u \in K_G(TX^g)$ *— его ограничение на* $X^g$. *Пусть* $\mathcal{J}(X) \in H^*(X, \mathbf{Q})$ *— индексный класс* $X$, *где* $\mathcal{J}$ *определено равенством* (2.10), *и пусть* $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}^\theta$ *— характеристические классы ортогональной и унитарной групп, определенные в* (3.7). *Тогда число Лефшеца* $L(g, E)$ *равно*

$$L(g, E) = \left\{ \frac{\operatorname{ch} i^*u(g) \cdot \mathcal{R}(N^g(-1)) \prod\limits_{0<\theta<\pi} \mathcal{S}^\theta(N^g(\theta))\, \mathcal{J}(X^g)}{\det(1-g \mid N^g)} \right\} [TX^g], \tag{3.9}$$

*где* $\det(1 - g \mid N^g) \in H^0(X^g, \mathbf{C})$ *сопоставляет компоненте* $X^g$, *содержащей* $x$, *значение* $\det(1 - g \mid N^g_x)$.

Замечание. Теорема 3.1 дает полную когомологическую формулу для индекса-характера

$$a\text{-ind}\colon \quad K_G(TX) \to R(G)$$

для любой компактной группы Ли $G$. Для вычисления $\chi = \operatorname{ind} u$ на элементе $g \in G$ нужно просто применить (3.9) к замкнутой циклической группе $H$, порожденной $g$.

Формула (3.9) для $L(g, E)$ включает символ $u$ расслоения $E$ и следующие когомологические инварианты пары $(X, G)$:

($i$) классы Понтрягина $X^g$,

($ii$) классы Понтрягина $N^g(-1)$,

($iii$) классы Черна всех $N^g(\theta)$.

Если $X^g$ ориентировано, то, как в (2.13), мы можем заменить значение на $[TX^g]$ значением на $[X^g]$; для этого надо просто заменить $i^*u(g)$ в (3.9) на

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \psi^{-1}(\operatorname{ch} i^*u(g)), \tag{3.10}$$

где $n = \dim X^g$, а

$$\psi\colon H^*(X^g, \mathbf{C}) \to H^*(TX^g, \mathbf{C}) \tag{3.11}$$

— изоморфизм Тома. Если, кроме того, $i^*u$ связано с $H$-структурой на $X^g$, как в (2.17), мы можем вычислить (3.10) в терминах характеристических классов этой $H$-структуры. Такая ситуация будет проиллюстрирована некоторыми примерами из следующих параграфов.

Следует, возможно, отметить, что на практике для «классических» операторов обычно проще вернуться назад к $K$-теоретической формуле из [5], чем применять грозное когомологическое выражение из (3.9).

## § 4. Теорема Римана — Роха

Один из наиболее важных примеров эллиптических комплексов возникает в связи с комплексными многообразиями. Теорема об индексе 2.1 становится в этом случае знаменитой теоремой Римана — Роха в форме Хирцебруха [13]. В действительности, в этом случае имеется $H$-структура, так что мы сможем применить прямо предложение 2.2. Сейчас мы опишем возникающие детали.

Пусть $X$ — компактное комплексное многообразие размерности $n$, $V$ — голоморфное векторное расслоение на $X$, $\mathcal{O}(V)$ — пучок ростков голоморфных сечений $V$. Пусть, кроме того, $A\,(V)$ — комплекс Дольбо $V$

$$0 \to A^{0,0}(V) \xrightarrow{\bar\partial} A^{0,1}(V) \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} A^{0,n}(V) \to 0,$$

где $A^{0,p}(V)$ — дифференциальные формы типа $(0, p)$ с коэффициентами в $V$. Изоморфизм Дольбо [13], § 15, утверждает, что группы когомологий $A\,(V)$ изоморфны группам когомологий $H^q(X, \mathcal{O}(V))$ пучка $\mathcal{O}(V)$ и, значит, $\sum(-1)^q \dim H^q(A(V)) = \sum(-1)^q \dim H^q(X, \mathcal{O}(V))$ есть эйлерова характеристика $\chi\,(X, V)$, вычисление которой является целью теоремы Римана — Роха. Комплекс $A\,(V)$, как нетрудно видеть, эллиптичен. В самом деле, пусть $TX \to X$ обозначает теперь *комплексное* касательное расслоение к $X$. Выберем на $X$ эрмитову метрику, и отождествим $\overline{T}$ с расслоением форм типа (1,0) и, значит, $T$ — расслоением форм типа (0,1) на $X$. Мы видим тогда, что последовательность символов $A\,(V)$ будет комплексом на $TX$, равным $V \otimes \Lambda^*(T)$, и поэтому точным вне нулевого сечения $TX$. Более того, это показывает, что класс символа $a\,(V)$ комплекса $A\,(V)$ равен

$$a\,(V) = [V]\,\lambda_T \in K\,(TX), \tag{4.1}$$

где $\lambda_T \in K\,(TX)$ — фундаментальный элемент, определяемый $\Lambda^*(T)$ и $K\,(TX)$, рассматривается как $K\,(X)$-модуль. $\lambda_T$ является символом, ассоциированным с $U\,(n)$-структурой на $X$ (задаваемой эрмитовой метрикой). Поэтому в случае $V = 1$ мы находимся в точности в той ситуации, когда можно применить (2.17), где за $M^i$ взяты $U\,(n)$-модули $\lambda^i\,(\mathbf{C}^n)$. В общем случае нужно или заметить из (4.1), что $\mathrm{ch}\,(V)$ входит в (2.12) как множитель, или формально снабдить $X$ $U\,(n) \times U\,(m)$-структурой, где $m = \dim V$ и $U\,(m)$ тривиально действует на $X$. Это делает $V\cdot\lambda_T$ ассоциированным классом символа, и мы можем сразу применить (2.17). В любом случае мы получаем формулу

$$\chi\,(X, V) = (-1)^n \left\{\mathrm{ch}\,V \frac{\Pi\,(1-e^{x_i})}{\Pi x_i}(T)\cdot \mathcal{J}\,(X)\right\}[X], \tag{4.2}$$

где

$$\frac{\Pi\,(1-e^{x_i})}{\Pi x_i} \in H^*_{U(n)}(\mathbf{Q}),$$

применяется к комплексному касательному расслоению $T$ и

$$\mathcal{J}\,(X) = \tau\,(T \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \tau\,(T \oplus T^*) = \prod\left(\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}\cdot\frac{-x_i}{1-e^{x_i}}\right)(T).$$

Сокращая на множитель $\prod \dfrac{x_i}{1-e^{x_i}}$, получаем окончательно теорему Римана — Роха.

Теорема 4.1 (Римана — Роха). *Пусть $X$ — компактное комплексное многообразие, $V$ — голоморфное векторное расслоение на $X$. Пусть*

$$\tau(X)=\prod \frac{x_i}{1-e^{-x_i}}(T) \tag{$T$}$$

*— класс Тодда $X$. Тогда эйлерова характеристика $\chi(X, V)$ пучка ростков гомоморфных сечений $V$ равна*

$$\chi(X, V)=\{\operatorname{ch} V\cdot\tau(X)\}[X]. \tag{4.3}$$

Замечание 1. Эта теорема была раньше известна лишь для проективных алгебраических многообразий [13]. Данное здесь доказательство, использующее общие эллиптические операторы, является единственным известным в настоящее время доказательством, пригодным для общего случая.

Замечание 2. Для комплексного многообразия $X$ мы знаем, ввиду существования изоморфизма Тома в $K$-теории, что $K(TX)$ является свободным $K(X)$-модулем, порожденным $\lambda_T$. Другими словами, имеется единственный эллиптический символ, который в некотором смысле все порождает. Поэтому естественно заменить индексный гомоморфизм

$$K(TX)\to\mathbf{Z}$$

из общей теории гомоморфизмом

$$K(X)\to\mathbf{Z},$$

задаваемым равенством $v\longmapsto\operatorname{ind}(v\lambda_T)$. Именно это обычно делается в алгебраической геометрии.

Если теперь $G$ — конечная[1]) группа автоморфизмов пары $(X, V)$, мы можем применить нашу общую теорему Лефшеца 3.1. Мы можем также вернуться к теореме (3.3) из [4] и скомбинировать ее с теоремой Римана — Роха 4.1. Это дает нам

$$\sum(-1)^p\operatorname{Tr}(g\,|\,H^p(X, \mathcal{O}(V)))=\left\{\frac{\operatorname{ch}(V\,|\,X^g)(g)\,\tau(X^g)}{\operatorname{ch}\lambda_{-1}((N^g)^*)(g)]}\right\}[X]. \tag{4.4}$$

Комплексное векторное расслоение $N^g$ обладает разложением

$$N^g=\sum N^g(\theta),$$

где $N^g(\theta)$ — подрасслоение, на котором $g$ действует как умножение на $e^{i\theta}$. Заметим, что это обозначение слегка отличается от используемого в § 3, где $N^g(\theta)$ было вещественным расслоением. Каждое $N^g(\theta)$ является комплексным векторным расслоением и имеет классы Черна. Более того,

$$\operatorname{ch}\lambda_{-1}(N^g(\theta))^*=\prod_j(1-e^{-x_j-i\theta})(N^g(\theta)),$$

где

$$\prod_j(1-e^{-x_j-i\theta})\in H^{*}_{U(m)}(\mathbf{C}),\qquad m=\dim N^g(\theta).$$

---

[1]) Такая группа является, может быть, более естественной в голоморфном случае.

Введем поэтому для каждого $0<\theta<2\pi$ стабильный характеристический класс

$$U^\theta=\sum U_r^\theta=\left\{\prod_j\left(\frac{1-e^{-x_j-i\theta}}{1-e^{-i\theta}}\right)\right\}^{-1}. \tag{4.5}$$

Каждый класс $U_r^\theta$ является многочленом с комплексными коэффициентами от классов Черна. В этих обозначениях

$$\{\operatorname{ch}\lambda_{-1}(N^g(\theta))^*\}^{-1}=\frac{U^\theta(N^g(\theta))}{(1-e^{-i\theta})^m}.$$

Поэтому, беря произведение по всем $\theta$, получаем

$$\{\operatorname{ch}\lambda_{-1}(N^g)^*\}^{-1}=\frac{\Pi U^\theta(N^g(\theta))}{\det_{\mathrm{C}}(1-g\mid(N_g)^*)},$$

где $\det_{\mathrm{C}}(1-g\mid(N_g)^*)\in H^0(X^g,\mathrm{C})$ сопоставляет связной компоненте, содержащей $x\in X$, значение $\det_{\mathrm{C}}(1-g\mid(N_x^g)^*)$. Подставляя это в (4.4), получаем окончательно теорему.

Теорема 4.2 (голоморфная теорема Лефшеца). *Пусть $X$ — компактное комплексное многообразие, $V$ — голоморфное векторное расслоение на $X$, и пусть $G$ — конечная группа автоморфизмов пары $(X, V)$. Для каждого $g\in G$ обозначим через $X^g$ множество неподвижных точек $g$, и пусть*

$$N^g=\sum N^g(\theta)$$

*— разложение (комплексного) нормального расслоения к $X^g$ по собственным значениям $e^{i\theta}$ преобразования $g$. Пусть $U^\theta$ — характеристический класс, определенный в (4.5). Тогда*

$$\sum(-1)^p\operatorname{Tr}(g\mid H^p(X,\mathcal{O}(V)))=\left\{\frac{\operatorname{ch}(V\mid X^g)(g)\cdot\prod_\theta U^\theta(N^g(\theta))\,\tau(X^g)}{\det_{\mathrm{C}}(1-g\mid(N^g)^*)}\right\}[X^g]. \tag{4.6}$$

Используя эту теорему и теорему (3.5) из [4], мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.3 (Римана — Роха для пространства орбит). *Пусть $G$ — конечная группа автоморфизмов компактного комплексного многообразия $X$, $W$ — голоморфное векторное расслоение на пространстве $Y=X/G$. Тогда*

$$\chi(Y, W)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mu(g) \tag{4.7}$$

*где*

$$\mu(g)=\left\{\frac{\operatorname{ch}(f^*W\mid X^g)(g)\prod_\theta U^\theta(N^g(\theta))\,\tau(X^g)}{\det_{\mathrm{C}}(1-g\mid(N^g)^*)}\right\}[X^g]$$

*и $N^g(\theta)$, $U^\theta$ такие же, как в* (4.6)

В [15] Хирцебрух использовал теорему Римана — Роха для вычисления размерностей некоторых пространств автоморфных форм. Обобщение (4.7) теоремы Римана — Роха на некоторые сингулярные пространства может быть использовано таким же образом и приводит к формулам, обобщающим формулы из [14] (см. Ленглендс [16]). Это будет объяснено в другом месте (см. также [15]).

Из теоремы (4.6) следуют некоторые условия целочисленности для множеств неподвижных точек элементов из $G$. В действительности число Лефшеца является целым алгебраическим числом, в то время как выражение в правой части формулы в (4.6) может быть a priori произвольным алгебраическим числом. Частный случай изолированных неподвижных точек обсуждался в [2] и уже из него видна нетривиальность этих теорем целочисленности. Конечно, не каждая функция на $G$ с целыми алгебраическими значениями является характером. Поэтому теоремы целочисленности, возникающие из теоремы 4.2 для произвольной конечной группы $G$, не являются точными следствиями аналогичных теорем для циклических групп.

В качестве простого примера применения теоремы 4.2 рассмотрим случай, когда $\dim X = 2$, т. е. когда $X$ — комплексная поверхность. Предполагая, что $g$ действует нетривиально и что $X$ связно, получаем, что множество неподвижных точек $X^g$ состоит из конечного числа точек $P_j$ и кривых $D_k$. Рассмотрим для простоты лишь случай, когда $V = 1$. Тогда число Лефшеца $L(g)$ равно

$$L(g) = \sum_j a(P_j) + \sum_k b(D_k),$$

где числа $a(P)$ и $b(D)$ определяются следующим образом:

$$a(P) = \frac{1}{\det(1 - g \mid T_P)},$$

$$b(D) = \left\{ \frac{1 + \frac{c}{2}}{1 - e^{-d - i\theta}} \right\} [D],$$

$c$ — первый класс Черна $D$, $d$ — первый класс Черна нормального расслоения к $D$ и $e^{i\theta}$ — собственное значение в нормальном расслоении. Вычисляя $b(D)$, получаем

$$b(D) = \left\{ \frac{1 + \frac{c}{2}}{1 - e^{-i\theta}(1 - d)} \right\} [D] =$$

$$= \left\{ (1 - e^{-i\theta})^{-1} \left(1 + \frac{c}{2}\right) \left(1 + \frac{de^{-i\theta}}{1 - e^{-i\theta}}\right)^{-1} \right\} [D] =$$

$$= (1 - e^{-i\theta})^{-1} \left\{ \frac{c[D]}{2} - \frac{e^{-i\theta}}{1 - e^{-i\theta}} d[D] \right\}.$$

Но $c[D] = 2(1 - \Pi_D)$, где $\Pi_D$ — род $D$ и $d[D] = D^2$ есть индекс самопересечения $D$. Поэтому

$$b(D) = \frac{1 - \Pi_D}{1 - e^{-i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{(1 - e^{-i\theta})^2} D^2.$$

Если, в частности, $g^2 = 1$, то $e^{i\theta} = -1$, $a(P) = \frac{1}{4}$, $b(D) = \frac{1 - \Pi_D}{2} + \frac{1}{4} D^2$. Поэтому как очень частный случай теоремы 4.2 получаем

Предложение 4.1. *Пусть $g$ — нетривиальная инволюция связной комплексной поверхности. Пусть множество неподвижных точек $g$ состоит из $N$ изолированных точек и $M$ неприводимых кривых $\{D_k\}$. Тогда голоморфное число Лефшеца $L(g)$ равно*

$$L(g)=\frac{N}{4}+\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{1-\Pi_k}{2}+\frac{D_k^2}{4}\right), \tag{4.8}$$

*где $\Pi_k$ — род $D_k$ и $D_k^2$ — индекс самопересечения.*

Замечание. Если $X$ алгебраична, то голоморфные дифференциалы являются бирациональными инвариантами. Поэтому если мы осуществим раздутие изолированных особых точек, $g$ индуцирует $\widetilde{g}$ на $\widetilde{X}$ и $L(g) = L(\widetilde{g})$. Это согласуется с (4.8), поскольку мы теряем одну точку и получаем одну рациональную кривую с индексом самопересечения $-1$. Другая простая проверка состоит во взятии инволюции $(x_0, x_1, x_2) \mapsto (-x_0, x_1, x_2)$ проективной плоскости. Здесь есть одна изолированная особая точка и одна неподвижная прямая (так что $\Pi = 0$) с индексом самопересечения $+1$. Поэтому $L(g) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ и формула справедлива, поскольку в положительных размерностях нет голоморфных дифференциалов.

Поскольку число Лефшеца инволюции всегда является целым, из (4.8) следует, что количество кривых $D_k$ с нечетным индексом самопересечения имеет ту же четность, что и $N$. Это простой пример «теоремы целочисленности», включающий множества неподвижных точек высших размерностей.

## § 5. Оператор Дирака

Интересный эллиптический оператор, называемый оператором Дирака, существует на спинорных многообразиях. Мы изучим этот вопрос более подробно и рассмотрим, что означают общие теоремы из §§ 2, 3 в этом частном случае.

Напомним, что $SO(n)$ имеет двойное накрытие $\mathrm{Spin}(n)$, которое является универсальным накрытием при $n > 2$. Спинорная структура ориентированного компактного $n$-мерного многообразия будет означать $\mathrm{Spin}(n)$-структуру в смысле § 2. А именно, мы предполагаем заданными главное $\mathrm{Spin}(n)$-расслоение $P$ на $X$ и изоморфизм ориентированных расслоений

$$P \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathbf{R}^n \cong TX.$$

Эквивалентное определение состоит в том, что $P$ является двойным накрытием главного $SO(n)$-расслоения $Q$ на $X$ (для некоторой римановой метрики), так что $P_x$ является спинорным двойным накрытием для $Q_x$.

Группа $\mathrm{Spin}(n)$ имеет комплексное представление $\Delta$ размерности $2^n$, называемое спинорным представлением [1]). Более того, $\Delta$ является модулем относительно клиффордовой алгебры в $\mathbf{R}^n$ для отрицательно определенной формы $-\sum_1^n x_1^2$. В действительности $\mathrm{Spin}(n)$ определяется как подгруппа груп-

[1]) Относительно спинорных групп и клиффордовых алгебр см. [3] и [8].

пы единиц клиффордовой алгебры и действие в Spin $(n)$ индуцируется клиффордовым умножением. Если $g \in \mathrm{Spin}(n)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \Delta$, то

$$g(xu) = gxg^{-1} \cdot g(u) = \rho(g)\, x \cdot g(u),$$

где $\rho\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ — накрытие. Поэтому клиффордово умножение

$$\mathbf{R}^n \otimes \Delta \to \Delta$$

является гомоморфизмом Spin $(n)$-модулей. Если $n = 2l$, представление $\Delta$ является прямой суммой двух представлений $\Delta^{\pm}$ размерности $2^{n-1}$. Разложение $\Delta = \Delta^+ \otimes \Delta^-$ представляется клиффордовым умножением. Поэтому имеют место гомоморфизмы

$$\mathbf{R}^n \otimes \Delta^+ \to \Delta^-,$$
$$\mathbf{R}^n \otimes \Delta^- \to \Delta^+.$$

Если $x_1, \ldots, x_l$ — базисные характеры максимального тора $T_0$ группы $SO(2l)$, то их можно рассматривать и как характеры максимального тора $T$ группы Spin $(2l)$. Поскольку $T$ дважды накрывает $T_0$, группа характеров $\hat{T}_0$ имеет индекс 2 в группе $\hat{T}$: элементом неединичного класса смежности является $\frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_l)$. Весами $\Delta^+$ являются характеры

$$\frac{1}{2}(\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_l)$$

с четным числом минусов, а весами $\Delta^-$ — такие же характеры с нечетным числом минусов. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} \Delta &= \prod_{i=1}^{l} \left(e^{\frac{x_i}{2}} + e^{-\frac{x_i}{2}}\right), \\ \operatorname{ch} \Delta^+ - \operatorname{ch} \Delta^- &= \prod_{i=1}^{l} \left(e^{\frac{x_i}{2}} - e^{-\frac{x_i}{2}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

Эти характеристические классы можно рассматривать как характеристические классы либо Spin $(2l)$, либо $SO(2l)$, поскольку над $\mathbf{Q}$ кольца когомологий этих двух групп совпадают.

Если $X$ — Spin $(2l)$-многообразие с главным расслоением $P$, мы можем образовать ассоциированные комплексные векторные расслоения

$$E^{\pm} = P \times_{\mathrm{Spin}(2l)} \Delta^{\pm}, \qquad E = E^+ \oplus E^-.$$

*Оператор Дирака* является дифференциальным оператором первого порядка

$$D\colon \mathscr{D}(E) \to \mathscr{D}(E),$$

который определяется следующим образом. Напомним сперва, что риманова метрика определяет естественную $SO(2l)$-связность и ее можно поднять до связности для $P$. Мы можем поэтому рассмотреть ковариантную производную

$$\partial\colon \mathscr{D}(E) \to \mathscr{D}(E \otimes T^*).$$

С другой стороны, $T \cong T^*$ и у нас есть гомоморфизм расслоений.

$$\mathscr{D}(E \otimes T) \to \mathscr{D}(E),$$

индуцируемый клиффордовым умножением. Мы определяем $D$ как композицию этих двух отображений. Поэтому в терминах ортонормированного базиса $e_i$ для $T$

$$Ds = \sum e_i (\partial_i s),$$

где $\partial_i$ — ковариантная производная $s$ в направлении $e_i$ и $e(\cdot)$ — клиффордово умножение. Символ $D$ является (с точностью до множителя $i$) клиффордовым умножением, т. е. его значение в $\xi \in T_x$ есть гомоморфизм

$$\Delta_x \to \Delta_x,$$

определяемый умножением на $\xi$. Поскольку $\xi(\xi(u)) = -\|\xi\|^2$, $D$ является эллиптическим. Более того, ввиду свойств клиффордова умножения $D$ индуцирует два оператора

$$D^+ \colon \mathscr{D}(E^+) \to \mathscr{D}(E^-), \qquad D^- \colon \mathscr{D}(E^-) \to \mathscr{D}(E^+),$$

каждый из которых эллиптичен. Если мы введем естественное скалярное произведение в $\mathscr{D}(E)$, получающееся из скалярного произведения в каждом слое интегрированием по $X$ по римановой мере, то мы увидим, что $D$ формально самосопряжен, а $D^+$ формально сопряжен к $D^-$.

Решения уравнения $Ds = 0$ называются *гармоническими спинорами*, и пространство гармонических спиноров обозначается через $H$. Оно разлагается в сумму

$$H = H^+ \oplus H^-,$$

где $H^+ = \operatorname{Ker} D^+$, $H^- = \operatorname{Ker} D^- \cong \operatorname{Coker} D^+$. Положим $h^\pm = \dim H^\pm$, так что

$$\operatorname{index} D^+ = h^+ - h^-.$$

Мы будем называть это число *спинорным индексом* $X$ и обозначать $\operatorname{Spin}(X)$.

Наконец, следуя Хирцебруху [14], определим стабильный характеристический класс $\hat{\mathscr{A}}$ равенством

$$\hat{\mathscr{A}} = \prod_{i=1}^{l} \left( \frac{x_i}{e^{\frac{x_i}{2}} - e^{-\frac{x_i}{2}}} \right) \in H^{*}_{O(2l)}(\mathbf{Q}). \tag{5.2}$$

Для каждого вещественного векторного расслоения $E$ равенство

$$\hat{\mathscr{A}}(E) = \sum \hat{\mathscr{A}}_r (p_1(E), \ldots, p_r(E))$$

является точным выражением $\hat{\mathscr{A}}$ через понтрягинские классы расслоения $E$.

Для многообразия $X$ положим

$$\hat{\mathscr{A}}(X) = \hat{\mathscr{A}}(T(X)).$$

Поскольку класс символа оператора $D^+$ ассоциирован со Spin-структурой, мы можем применить теорему об индексе в форме предложения 2.2. Тогда мы получим

$$\operatorname{index} D^+ = (-1)^l \left\{ \prod \left( \frac{e^{\frac{x_i}{2}} - e^{-\frac{x_i}{2}}}{x_i} \right) \prod \left( \frac{x_i}{1 - e^{x_i}} \right) \prod \left( \frac{-x_i}{1 - e^{-x_i}} \right) \right\} [X] = (-1)^l \hat{\mathscr{A}}(X)[X]. \tag{5.3}$$

Поскольку $\hat{A}$ полностью определяется классами Понтрягина,

$$\operatorname{index} D^+ = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \dim X \not\equiv 0 \pmod 4, \\ \hat{\mathscr{A}}(X)[X], & \text{если} \quad \dim X \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Таким образом установлена

Теорема 5.1. *Если $X$ — спинорное многообразие размерности $4k$, то его спинорный индекс равен $\hat{\mathscr{A}}(X)[X]$, где $\hat{\mathscr{A}}$ — характеристический класс, заданный формулой* (5.2).

Замечание 1. Число $\hat{A}(X) = \hat{\mathscr{A}}(X)[X]$ называется $\hat{A}$-родом $X$.

Замечание 2. Теорему 5.1 можно легко обобщить на спиноры с коэффициентами в векторном расслоении $V$. Обычный оператор дираковского типа получается, когда $V$ ассоциировано с касательным расслоением. Для других $V$ нужно выбрать сперва некоторую связность.

Замечание 3. Лихнерович [17] показал, что если риманова метрика имеет строго положительную кривизну, гармонические спиноры отсутствуют. В этом случае из теоремы 5.1 следует, что $\hat{A}$-род равен нулю. Комплексное проективное пространство $P_{2k}(\mathbf{C})$ является примером многообразия с положительной кривизной и ненулевым родом; однако на $P_{2k}(\mathbf{C})$ нет спинорной структуры.

Замечание 4. Оператор Дирака и теорема, аналогичная теореме 5.1, существуют и для $\mathrm{Spin}^c$-многообразий, где $\mathrm{Spin}^c$ — комплексная спинорная группа из [3]. В этом случае имеется также естественное соответствие Spin-структуры и почти-комплексной структуры. Кроме того, в этой ситуации в $K(TX)$ имеется фундаментальный элемент, порождающий $K(TX)$ как $K(X)$-модуль. В частности, для Spin-многообразий класс символа $D^+$ является такой образующей. Это следует из изоморфизма Тома в $K$-теории для Spin (или $\mathrm{Spin}^c$)-расслоений [3], 12.3.

Предположим теперь, что $X$ — Spin $(2l)$-многообразие и группа $G$ действует на Spin-структуре $X$. Это значит не только то, что $G$ действует на многообразии $X$ и, следовательно, на главном ортогональном расслоении $Q$, но и что имеется действие $G$ на $P$ (главном Spin-расслоении), совместное с ее действием на $Q$. В этом случае мы можем определить спинорный индекс $X$ как характер $G$: $\mathrm{Spin}(G, X) \in R(G)$. Значение этого характера в $g$ (т. е. число Лефшеца $L(g, D^+)$) будет обозначаться $\mathrm{Spin}(g, X)$. Наша общая теорема Лефшеца 3.1 дает, конечно, общую формулу для него в терминах множества неподвижных точек $X^g$. Мы вычислим число Лефшеца в простом частном случае, когда $g$ — *инволюция* $X$. Заметим, что $g$ не обязательно является инволюция Spin-структуры — его действие может иметь порядок 4.

Предположим для простоты, что $X^g$ ориентируемо, и зафиксируем его ориентацию. Тогда на $X^g$ имеет место диаграмма расслоений

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \subset & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_0 & \subset & Q \end{array}$$

где $Q_0$ — главное $SO(2k) \times SO(2l-2k)$-расслоение, задающееся касательным и нормальным расслоением $X^g$ (как обычно, $2k = \dim X^g$ зависит от компоненты), и $P_0$ — главное расслоение со структурной группой

$$H_0 = \mathrm{Spin}\,(2k) \times \mathbf{Z}_2\mathrm{Spin}\,(2l - 2k).$$

Элемент $g$ действует на $P_0$ как элемент $(1, \alpha) \in H_0$, где $\alpha \in \mathrm{Spin}\,(2l - 2k)$ — один из элементов, лежащих над $-1 \in SO\,(2l - 2k)$. Если $u \in K_G\,(TX)$ — класс символа оператора Дирака $D^+$ (а $G$ — группа, порожденная $g$), то $i^*u \in K_G(TX^g)$ — класс символа, ассоциированного $H_0$-структурой $P_0$ на $X^g$, инвариантный относительно $g$. Используя замечание 2 к предложению 2.2 и формулу (5.1) находим, что общая формула Лефшеца (3.9) сводится к

$$\mathrm{Spin}\,(g, X) = \sum_j \varepsilon_j i^{k(j)} \frac{\hat{\mathscr{A}}\,(X_j^g)}{\mathrm{ch}\,\Delta\,(N_j^g)}\,[X_j^g], \tag{5.4}$$

где суммирование ведется по всем связным компонентам $X_j^g$ множества $X^g$, $\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от довольно тонких глобальных свойств рассматриваемой компоненты.

Дальнейшее детальное рассмотрение вопроса о знаке содержится в [2], § 8, где изучается случай изолированных особых точек ($k = 0$) — тогда каждая точка дает в (5.4) вклад $\pm \frac{i^k}{2^l}$.

## § 6. Сигнатура

Для каждого компактного ориентируемого многообразия $X$ размерности $4k$ произведение в когомологиях определяет невырожденную квадратичную форму на $H^{2k}\,(X, \mathbf{R})$. Пусть $p^+$ ($p^-$) — размерность максимального подпространства, на котором эта форма положительно (отрицательно) определена. Разность $p^+ - p^-$ под названием индекса $X$ подробно изучалась Томом и Хирцебрухом. Во избежание возможной путаницы с индексом эллиптического оператора мы примем для этого инварианта другое возможное название и будем называть его *сигнатурой*. Сигнатура многообразия $X$ будет обозначаться $\mathrm{Sign}\,(X)$.

Мы рассчитываем показать, что в действительности $\mathrm{Sign}\,(X)$ *является* индексом некоторого эллиптического оператора на $X$, ассоциированного с $SO\,(4k)$-структурой (т. е. с ориентацией и римановой метрикой). Предложение 2.2 даст тогда точное выражение для $\mathrm{Sign}\,(X)$ через классы Понтрягина. Эта формула первоначально была получена Хирцебрухом с использованием результатов Тома о кобордизмах. Наш вывод является более прямым и не зависит от кобордизмов [1]).

Мы будем также применять общую теорему Лефшеца к упомянутому выше дифференциальному оператору, что даст нам формулу для $G$-сигнатуры на $G$-многообразии $X$. Эта $G$-сигнатура является характером $G$, определенным при действии $G$ на $H^{2k}\,(X, \mathbf{R})$, и наша формула выразит этот индекс через классы Понтрягина и множества неподвижных точек. Особый интерес этого случая состоит в том, что результат может быть сформулирован в чисто

[1]) Это было неверно при первом методе доказательства теоремы об индексе из [19[.

дифференциально-геометрических терминах. Наше доказательство, однако, существенно затрагивает анализ. Хотя первоначальная формула для сигнатуры доказывалась Хирцебрухом чисто топологически, задачу вычисления $G$-сигнатуры нельзя свести к вычислению сигнатуры Хирцебруха. Причины этого будут ясны позднее. Ввиду этого наша формула для $G$-сигнатуры дает, по-видимому, один из лучших примеров применения теории эллиптических операторов к топологии. В действительности уже рассмотренный в [2] случай, который весьма специален, поскольку в нем рассматриваются только изолированные неподвижные точки, дает такой пример, поскольку с его помощью устанавливается справедливость гипотезы Милнора о линзовых пространствах. Можно надеяться, что рассматриваемый здесь более общий случай будет иметь дальнейшие интересные приложения.

Для каждого компактного многообразия $X$ размерности $n$ у нас есть комплекс де Рама $\Omega$ (комплекснозначных) внешних дифференциальных форм

$$0 \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n \longrightarrow 0.$$

Символ этого комплекса является комплексом, определенным внешней алгеброй кокасательного расслоения $T^*$, и поэтому, очевидно, эллиптичен.

Группы когомологий этого комплекса по теореме де Рама, естественно, изоморфны обычным группам когомологий $H^q(X, \mathbf{C})$. Его эйлерова характеристика является поэтому обычной эйлеровой характеристикой

$$E(X) = \sum (-1)^q \dim H^q(X, \mathbf{C}).$$

Если $X$ ориентировано и четномерно, то теорема об индексе утверждает тот хорошо известный факт, что

$$E(X) = e(X)[X],$$

т. е. $E(X)$ равно значению класса Эйлера $e(X)$ на $[X]$, и этот факт не является особенно волнующим. Аналогично, если компактная группа $G$ действует на $X$, она действует на комплексе де Рама и наша теорема Лефшеца сводится к обычной формуле Лефшеца о неподвижной точке, по крайней мере когда неподвижные точки изолированы. Общий случай является несколько более интересным; в нем каждая компонента множества неподвижных точек вносит свою эйлерову характеристику в формулу Лефшеца. Детали мы оставляем читателю.

Чтобы получить действительно интересную проблему об индексе из комплекса де Рама, нужно действовать по-другому. Начиная с этого места, мы предположим, что $\dim X = 2l$, $X$ ориентировано и на $X$ выбрана риманова метрика. Она индуцирует метрику на расслоениях $i$-форм и, значит, после интегрирования по $X$, скалярные произведения в пространствах $\Omega$ . Оператор, формально сопряженный к $d$ относительно этого скалярного произведения, будет обозначаться $d^*$. Оператор

$$\Delta = dd^* + d^*d$$

является оператором Лапласа в теории Ходжа. Он является эллиптическим оператором и сохраняет степень дифференциальных форм, т. е. переводит каждое $\Omega^i$ в себя. Решения уравнения $\Delta u = 0$ называются *гармоническими формами* и пространство $H^i$ гармонических $i$-форм изоморфно $\mathbf{H}^i(X, \mathbf{C})$

$$H^i(\Omega) \cong H^i(X, \mathbf{C}).$$

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор 1-го порядка $D = d + d^*$. Он формально самосопряжен и (поскольку $d^2 = (d^*)^2 = 0$)

$$\Delta = D^* D = D^2.$$

Отсюда следует, что решения уравнения $Du = 0$ совпадают с решениями уравнения $\Delta u = 0$, т. е. с гармоническими формами; действительно, если $\Delta u = 0$, то

$$0 = (\Delta u, u) = (Du, Du),$$

т. е. $Du = 0$.

Далее, риманова метрика индуцирует изоморфизм расслоений

$$*\colon \lambda^i(T^*) \longrightarrow \lambda^{2l-i}(T^*).$$

Если $\alpha$, $\beta$ — две вещественные $i$-формы, то их скалярное произведение равно

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge * \beta.$$

Если мы продолжим изоморфизм $*$ линейно на комплексифицированные формы, мы получим, что эрмитово скалярное произведение форм $\alpha, \beta \in \Omega^i$ равно

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge * \bar{\beta}.$$

Поскольку $*$ возникает из спаривания $\alpha \otimes \beta \longrightarrow \alpha \wedge \beta$, то

$$*(*\alpha) = (-1)^i \alpha \quad \text{при } \alpha \in \Omega^i. \tag{6.1}$$

Из этого и интегральной формулы для скалярного произведения находим, что

$$d^* \alpha = - * d * \alpha. \tag{6.2}$$

Введем теперь отображение $\tau$ дифференциальных форм равенством

$$\tau(\alpha) = i^{p(p-1)+l} * \alpha, \qquad \alpha \in \Omega^p.$$

Заметим, что $\tau$ вещественно, если $l$ четно, и чисто мнимо, если $l$ нечетно. Кроме того, $\tau^2(\alpha) = i^{\varepsilon} *^2 \alpha$, где

$$\varepsilon = p(p-1) + l + (2l - p)(2l - p - 1) + l = -4lp^2 + 2p^2 \equiv 2p \pmod 4.$$

Поскольку $*^2\alpha = (-1)^p \alpha$, $\tau^2(\alpha) = \alpha$ и поэтому $\tau$ является инволюцией. Мы можем поэтому разложить пространство $\Omega = \sum \Omega^i$ в сумму подпространств $\Omega^{\pm}$, в которых $\tau$ имеет собственное значение $\pm 1$. Поскольку $\tau$ — гомоморфизм расслоений, у нас есть разложение расслоений

$$\Lambda^*(T^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$$

и $\Omega^{\pm}$ — пространства гладких сечений расслоений $\Lambda_{\pm}$. Используя (6.1) и (6.2), можно проверить, что $D\tau = -\tau D$ и, значит, $D$ переводит $\Omega^+$ в $\Omega^-$ и $\Omega^-$ в $\Omega^+$. Обозначим через $D^{\pm}$ ограничения $D$ на соответствующие подпространства в $\Omega$. Таким образом,

$$D^+\colon \Omega^+ \longrightarrow \Omega^-, \qquad D^-\colon \Omega^- \longrightarrow \Omega^+.$$

Каждый из этих операторов эллиптичен, и они формально сопряжены друг другу. Более того, решения уравнения $D^+u = 0$ являются как раз гармоническими формами из $\Omega^+$ и то же верно для $D^-$. Обозначим через $H^+$ и $H^-$ эти подпространства гармонических форм и положим

$$h^+ = \dim H^+, \qquad h^- = \dim H^-.$$

Отсюда

$$\operatorname{index} D^+ = h^+ - h^-.$$

Поскольку $\tau\Delta = \Delta\tau$, $\tau$ индуцирует инволюцию в пространстве гармонических форм: собственными подпространствами с собственными значениями $\pm 1$ являются как раз $H^+$ и $H^-$. Пространство

$$V_k = H^k \oplus H^{2l-k}, \qquad 0 \leqslant k < l,$$

инвариантно относительно $\tau$, поскольку $\tau$ переставляет два подпространства этого разложения. Поэтому размерности собственных подпространств $\tau$ в $V_k$ с собственными значениями $+1$ и $-1$ равны, а значит, вклад $V_k$ в индекс $D^+$ равен 0. Поэтому $\operatorname{index} D^+ = h^l_+ - h^l_-$, где $h^l_\pm = \dim H^l_\pm$ и $H^l_\pm$ — собственные подпространства $\tau$ в $H^l$ с собственными значениями $\pm 1$. Теперь в зависимости от четности $l$ имеются два случая. Если $l$ нечетно, то $\tau = i\sigma$, где $\sigma$ вещественно и $\sigma^2 = -1$. Собственные подпространства $\sigma$ с собственными значениями $\pm i$ сопряжены и, значит, имеют одинаковую размерность. Но они совпадают с собственными подпространствами $\tau$ с собственными значениями $\pm 1$ и, значит, в этом случае $\operatorname{index} D^+ = 0$. Пусть теперь $l = 2k$ четно. Тогда для $\alpha \in H^{2k}$ имеем $\tau\alpha = *\alpha$. Поэтому если $\alpha \in H^{2k}_+$ вещественно и $\neq 0$, то

$$\int \alpha \wedge \alpha = \int \alpha \wedge * \alpha = (\alpha, \alpha) > 0,$$

в то время как для вещественного ненулевого $\alpha \in H^{2k}_-$

$$\int \alpha \wedge \alpha = -\int \alpha \wedge * \alpha = -(\alpha, \alpha) < 0.$$

Поскольку отображение $\alpha \longmapsto \int \alpha \wedge \alpha$ совпадает с квадратичной формой, задающейся произведением в когомологиях в $H^{2k}(X, \mathbf{R})$,

$$h^{2k}_+ = p^+, \qquad h^{2k}_- = p^-,$$

и, значит, $\operatorname{index} D^+ = \operatorname{Sign}(X)$ — сигнатура Хирцебруха многообразия $X$.

Теперь ясно, что символ $D^+$ связан с $SO(2l)$-структурой $X$, так что его индекс может быть вычислен применением теоремы об индексе в форме (2.17). Остается только вычислить характеристический класс

$$T \longmapsto \operatorname{ch} \Lambda_+(T) - \operatorname{ch} \Lambda_-(T).$$

Введем $SO(2l)$-модули $\Lambda_\pm(\mathbf{R}^{2l})$, являющиеся, как определялось выше, собственными подпространствами $\tau$ с собственными значениями $\pm 1$. Отображение $\tau$ мультипликативно, т. е.

$$\tau(u \wedge v) = \tau(u) \wedge \tau(v)$$

для $u \in \Lambda^*(\mathbf{C}^{2l})$, $v \in \Lambda^*(\mathbf{C}^{2k})$, $u \wedge v \in \Lambda^*(\mathbf{C}^{2l+2k})$. Отсюда следует, что образ

$$\Lambda_+(\mathbf{R}^{2l+2k}) - \Lambda_-(\mathbf{R}^{2l+2k}) \in R(SO(2l+2k))$$

в $R(SO(2l)) \times R(SO(2k))$ равен

$$\{\Lambda_+(\mathbf{R}^{2l}) - \Lambda_-(\mathbf{R}^{2l})\}\{\Lambda_+(\mathbf{R}^{2k}) - \Lambda_-(\mathbf{R}^{2k})\}.$$

Поэтому, переходя от $SO(2l)$ к его максимальному тору $S$, мы видим, что ограничение $\Lambda_+(\mathbf{R}^{2l}) - \Lambda_-(\mathbf{R}^{2l})$ равно $\prod_{i=1}^{l} f(x_i)$, где $x_1, \ldots, x_l$ — базисные характеры $S$ и

$$f(x) = \Lambda_+(\mathbf{R}^2) - \Lambda_-(\mathbf{R}^2) \in R(SO(2)).$$

Если $e_1$, $e_2$ — стандартный базис $\mathbf{R}^2$, то

$$*e_1 = e_2, \quad *e_2 = -e_1, \quad *1 = e_1 \wedge e_2, \quad *(e_1 \wedge e_2) = 1.$$

Значит, $1 + i(e_1 \wedge e_2)$ и $e_1 + ie_2$ образуют базис в $\Lambda_+(\mathbf{R}^2)$, а $1 - i(e_1 \wedge e_2)$ и $e_1 - ie_2$ — базис в $\Lambda_-(\mathbf{R}^2)$. Поэтому

$$\Lambda_+(\mathbf{R}^2) = 1 + x^{-1}, \qquad \Lambda_-(\mathbf{R}^2) = 1 + x,$$

где $x$ — базисный характер $SO(2)$. Отсюда

$$\Lambda_+(\mathbf{R}^{2l}) - \Lambda_-(\mathbf{R}^{2l}) = \prod_{i=1}^{l} (x_i^{-1} - x_i)$$

и, применяя универсальный характер Черна,

$$\operatorname{ch}(\Lambda_+(\mathbf{R}^{2l}) - \Lambda_-(\mathbf{R}^{2l})) = \prod_{i=1}^{l} (e^{-x_i} - e^{x_i}). \tag{6.3}$$

Подставляя эту формулу в (2.17), получаем

$$\operatorname{index} D^+ = (-1)^l \left\{ \left\{ \prod_{i=1}^{l} \left( \frac{e^{-x_i} - e^{x_i}}{x_i} \right) \prod \frac{x_i}{1 - e^{x_i}} \prod \frac{-x_i}{1 - e^{-x_i}} \right\} (X) \right\} [X] =$$

$$= \left\{ \prod_{i=1}^{l} x_i \frac{e^{x_i} + 1}{e^{x_i} - 1} (X) \right\} [X] = \left\{ \prod_{i=1}^{l} \frac{x_i}{\operatorname{th} \frac{x_i}{2}} (X) \right\} [X]. \tag{6.4}$$

Поскольку $\dfrac{x}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}$ — четная функция $x$, написанное выражение включает только классы Понтрягина многообразия $X$ и равно 0 при нечетных $l$. Последнее утверждение проверяется непосредственным анализом. Интересным является случай четного $l$.

Поскольку $\dfrac{x}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} = 2$ при $x = 0$, возникающий в (6.4) характеристический класс не является стабильным. Если мы хотим выразить наш ответ через стабильный класс, мы должны ввести

$$\mathscr{L} = \sum \mathscr{L}_r(p) = \prod \frac{\frac{x_i}{2}}{\operatorname{th} \frac{x_i}{2}}; \tag{6.5}$$

формула (6.4) будет эквивалентна формуле

$$\operatorname{index} D^{+} = 2^{l} \mathcal{L}(X)[X].$$

Выражение в правой части будет обозначаться $L(X)$ и будет называться $L$-родом $X$. Это совпадает с определением Хирцебруха [13], поскольку члены степени $l$ у

$$2^{l} \prod \frac{\frac{x_i}{2}}{\operatorname{th} \frac{x_i}{2}} \quad \text{и} \quad \prod \frac{x_i}{\operatorname{th} x_i}$$

совпадают.

Нами установлена, таким образом, как частный случай общей теоремы об индексе

Теорема 6.1 (Хирцебруха о сигнатуре). *Пусть $X$ — компактное ориентированное многообразие размерности $4k$. Пусть* $\operatorname{Sign}(X)$ *— сигнатура квадратичной формы в* $H^{2k}(X, \mathbf{R})$ *и* $L(X) = 2^{2k} \mathcal{L}(X)[X]$, *где* $\mathcal{L}$ *— стабильный характеристический класс ортогональной группы, задаваемый формулой* (6.5). *Тогда*

$$\operatorname{Sign}(X) = L(X). \tag{6.6}$$

Продолжим теперь рассмотрение теоремы Лефшеца, соответствующей теореме 6.1. Итак, пусть $X$ — ориентированное многообразие размерности $2l$ и $G$ — компактная группа Ли, действующая на нем *с сохранением ориентации*. Если выбрать $G$-инвариантную риманову метрику на $X$, то оператор $D^{+}$ будет $G$-инвариантным, поскольку он функториально зависит от метрики и ориентации.

С топологической стороны билинейная форма $B$ на $H^{l}(X, \mathbf{R})$, задаваемая равенством $B(x, y) = (xy)[X]$, $G$-инвариантна. Заметим, что эта форма *симметрична* для четных $l$ и *кососимметрична* для нечетных $l$; в обоих случаях она невырожденна ввиду двойственности Пуанкаре.

Предположим, что у нас задано положительно определенное скалярное произведение $\langle , \rangle$ на $H^{l}$, инвариантное относительно $G$, и определим оператор $A$ равенством

$$B(x, y) = \langle x, Ay \rangle.$$

Такой оператор $A$ коммутирует с действием $G$ и $A^{*} = (-1)^{l} A$. Рассмотрим сперва случай *четного* $l$, когда $A$ самосопряжен. В этом случае положительное и отрицательное собственные подпространства $A$ дают разложение $H^{l} = H^{l}_{+} \oplus H^{l}_{-}$, инвариантное относительно $G$. Поэтому у нас есть два представления $\rho^{+}$ и $\rho^{-}$, которые с точностью до эквивалентности не зависят от скалярного произведения. Это следует из следующих трех фактов [1]):

а) Характеры $\rho^{+}$ и $\rho^{-}$ непрерывно зависят от скалярного произведения.

б) Пространство всех ($G$-инвариантных) скалярных произведений связно.

в) Характеры компактной группы $G$ дискретны.

---

[1]) Другое более прямое рассуждение состоит в том, что $H_{+}$ -пространство при одном скалярном произведении всегда дополнительно к $H^{+}$-пространству при другом скалярном произведении. Мы хотим, однако, привести более общее рассуждение, которое мы сможем применить и для нечетного $l$.

В качестве очевидного обобщения сигнатуры мы введем $G$-сигнатуру $G$-многообразия $X$ по формуле

$$\operatorname{Sign}(G, X) = \rho^+ - \rho^- \in RO(G) \subset R(G);$$

это элемент кольца вещественных представлений $RO(G)$.

Вычисляя значение характера $\operatorname{Sign}(G, X)$ на элементе $g \in G$, мы получаем вещественное число, которое будет обозначаться $\operatorname{Sign}(g, X)$. Заметим, что $\operatorname{Sign}(g, X)$ *полностью определяется действием $g$ в вещественных когомологиях $X$*. Поэтому $\operatorname{Sign}(g, X)$ зависит только от компоненты связности $G$, содержащей $g$. С другой стороны, эту сигнатуру можно вычислить, используя гармонические формы. В действительности, $G$ действует на пространстве $H^{2k}_{\mathbf{R}}$ вещественных гармонических форм размерности $2k$, сохраняя неопределенную билинейную форму $\int \alpha \wedge \alpha$ и скалярное произведение $\int \alpha \wedge * \alpha$. Поэтому

$$\operatorname{Sign}(g, X) = \operatorname{Tr}_{\mathbf{R}}(g \mid (H^{2k}_{\mathbf{R}})^+) - \operatorname{Tr}_{\mathbf{R}}(g \mid (H^{2k}_{\mathbf{R}})^-), \tag{6.7}$$

где $(H^{2k}_{\mathbf{R}})^{\pm}$ — собственные подпространства $*$ в $H^{2k}_{\mathbf{R}}$. Как было показано раньше,

$$(H^{2k})^+ = (H^{2k}_{\mathbf{R}})^+ \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = (\operatorname{Ker} D^+) \cap H^{2k},$$

$$(H^{2k})^- = (H^{2k}_{\mathbf{R}})^- \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = (\operatorname{Ker} D^-) \cap H^{2k},$$

так что $\operatorname{Sign}(g, X)$ является вкладом $H^{2k}$ в число Лефшеца $L(g, D^+)$. С другой стороны, если мы положим

$$V^q = H^q \oplus H^{4k-q}, \qquad 0 \leqslant q < 2k,$$

и напомним, что $\tau$ переставляет два подпространства в этом разложении, то мы сразу увидим, что у нас есть изоморфизмы $G$-модулей

$$(V^q)^+ \cong H^q \cong (V^q)^-,$$

и, значит, $V^q$ ничего не вносит в $L(g, D^+)$. Поэтому

$$\operatorname{Sign}(g, X) = L(g, D^+), \tag{6.8}$$

где $L(g, D^+)$ — число Лефшеца $g$ для оператора $D^+$.

Вернемся теперь к рассмотрению нечетного $l$. В этом случае оператор $A$ кососимметричен и если $(AA^*)^{\frac{1}{2}}$ обозначает положительный квадратный корень из $AA^*$, оператор $J = A \cdot (AA^*)^{-\frac{1}{2}}$ удовлетворяет условию $J^2 = -1$ и поэтому определяет комплексную структуру на $H^l$. Поскольку $J$ коммутирует с действием $G$, мы получаем комплексное представление $\rho$ группы $G$. По тем же причинам, что и в случае четного $l$, представление $\rho$ не зависит от выбора скалярного произведения. Определим теперь $G$-сигнатуру $G$-многообразия $X$ равенством

$$\operatorname{Sign}(G, X) = \rho - \rho^* \in R(G). \tag{6.9}$$

Значение характера $\operatorname{Sign}(G, X)$ на элементе $g \in G$ является чисто мнимым числом, которое мы будем обозначать $\operatorname{Sign}(g, X)$. Таким образом,

$$\operatorname{Sign}(g, X) = \rho(g) - \rho^*(g) = 2i \operatorname{Im} \rho(g).$$

Заметим, что $\mathrm{Sign}(g, X)$ *зависит только от действия* $g$ *на вещественных когомологиях* $X$. Как и в четном случае, мы можем вычислять их с помощью гармонических форм, отождествляя $H^l(X, \mathbf{R})$ с пространством вещественных гармонических $l$-форм $H^l_{\mathbf{R}}$. Действие $G$ сохраняет кососимметрическую форму $\int \alpha \wedge \beta$ и скалярное произведение $(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge *\beta$. Кососимметрический оператор $A$ задается равенством

$$(\alpha, A\beta) = \begin{cases} \int \alpha \wedge \beta = (-1)^l \int \alpha \wedge **\beta, & \text{поскольку } *^2 = (-1)^l, \\ -(\alpha, *\beta), & \text{поскольку } l \text{ нечетно,} \end{cases}$$

и, значит, $A = -*$. Поскольку

$$AA^* = -A^2 = -*^2 = 1,$$

комплексная структура $J$ задается равенством $J = -*$. Определим в комплексификации

$$H^l = H^l_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

инволюцию $\tau$ формулой

$$\tau = i^{l^2} * = i *.$$

Тогда в $(+1)$-собственном подпространстве $H^l_+$ имеем $-* = i$, у нас есть изоморфизм *комплексных* векторных пространств

$$H^l_+ \cong H^l_{\mathbf{R}},$$

где $H^l_{\mathbf{R}}$ снабжено указанной выше комплексной структурой $J$. Аналогично

$$H^l_- \cong \overline{H^l_{\mathbf{R}}}$$

и оба изоморфизма совместимы с действием $G$. Поэтому

$$\mathrm{Sign}(g, X) = \mathrm{Tr}(g \mid H^l_+) - \mathrm{Tr}(g \mid H^l_-). \tag{6.10}$$

Теперь, так же как в случае четного $l$, мы видим, что пространства $H^q$ при $q \neq l$ не дают никакого вклада в число Лефшеца $D^+$ и поэтому

$$\mathrm{Sign}(g, X) = L(g, D^+).$$

Замечание 1. Наша $G$-сигнатура, как и сигнатура Хирцебруха, мультипликативна, т. е.

$$\mathrm{Sign}(G, X) \cdot \mathrm{Sign}(G, Y) = \mathrm{Sign}(G, X \times Y).$$

Это верно для всех размерностей, если положить $\mathrm{Sign}(G, X) = 0$, когда $\dim X$ нечетно.

Замечание 2. $G$-сигнатура, определенная на $H^l$, является чисто алгебраическим понятием и обладает следующим важным свойством. Если $M$ — вещественный $G$-модуль и $M^*$ — двойственный к нему, то в $M \oplus M^*$ имеются две естественные билинейные формы — симметрическая $B^+$ и кососимметрическая $B^-$, и обе они имеют нулевую $G$-сигнатуру. Чтобы увидеть это, заметим, что умножение на $-1$ в $M^*$ определяет инволюцию $\alpha$

в $M \oplus M^*$, коммутирующую с $G$ и антикоммутирующую с $B^\pm$. Другими словами, $\alpha$ переводит $B^\pm$ в $-B^\pm$ и, значит,

$$\operatorname{Sign}(G, B^\pm) = \operatorname{Sign}(G, -B^\pm) = -\operatorname{Sign}(G, B^\pm)$$

(по определению), откуда $\operatorname{Sign}(G, B^\pm) = 0$.

Отождествив $L(g, D^+)$ с гомологическим инвариантом (и для четных, и для нечетных $l$), мы можем применить теорему Лефшеца 3.1 для вычисления $L(g, D^+)$ в терминах множества неподвижных точек $X^g$. Заметим сперва, что каждая компонента $X^g$ четномерна. Это следует из того, что $g$ сохраняет ориентацию, и поэтому кратность собственного значения $+1$ (а также $-1$) при действии $g$ в касательном пространстве к $X$ в любой точке $x \in X^g$ обязательно четна. Если $u$ обозначает символ $D^+$, то, используя мультипликативную формулу (6.3), мы находим, что $\operatorname{ch} i^*(u)[g]$ является произведением следующих членов:

$$A = \psi\left\{\prod\left(\frac{e^{-x_j} - e^{x_j}}{x_j}\right)(TX^g)\right\},$$

$$B = \prod(-e^{-x_j} + e^{x_j})(N^g(-1)),$$

$$C^\theta = \prod(e^{-x_j - i\theta} - e^{x_j + i\theta})(N^g(\theta)).$$

Здесь $\psi\colon H^*(X^g, \widetilde{Q}) \to H^*(TX^g, \mathbf{Q})$ — изоморфизм Тома, $\widetilde{Q}$ — обозначает локальную систему коэффициентов, изоморфную $\mathbf{Q}$ и определенную локальными ориентациями $X^g$. Если $X^g$ ориентируемо, то, зафиксировав ориентацию, мы получим изоморфизм $\widetilde{Q} \cong \mathbf{Q}$. Если $X^g$ не ориентируемо, то приходится работать с этими «скрученными» коэффициентами. Заметим, что, поскольку $X$ и все $N^g(\theta)$ ориентируемы, расслоения $TX^g$ и $N^g(-1)$ имеют одни и те же скрученные коэффициенты. Поэтому если $\widetilde{Q}$ такое же, как выше, класс Эйлера $e(N^g(-1)) \in H^*(X^g, \widetilde{Q})$.

Значение на фундаментальном классе $[TX^g]$ в (3.9) может, как обычно, быть заменено значением на «скрученном» фундаментальном классе $[X^g]$. Для этого нужно просто заменить $A$ на $\psi^{-1}A$ и умножить на $(-1)^k$ (где $\dim X^g = 2k$) для учета разницы между двумя ориентациями $TX^g$. Если мы сократим общие множители, возникающие в $\psi^{-1}A$, $B$, $C^\theta$, с одной стороны, и в $\mathscr{Y}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{S}^\theta$ и $\det(1 - g \mid N^g)$, с другой стороны, мы найдем, что

$$L(g, D^+) = \left\{A_1 B_1 \prod_\theta C_1^\theta\right\}[X],$$

где

$$A_1 = \prod \frac{x_j}{\operatorname{th}\frac{x_j}{2}}(TX^g) = 2^t \mathscr{L}(X^g), \quad 2t = \dim X^g,$$

$$B_1 = \prod \operatorname{th}\frac{x_j}{2}(N^g(-1)) = 2^{-r}\mathscr{L}(N^g(-1))^{-1} \cdot e(N^g(-1)), \qquad 2r = \dim N^g(-1)$$

$$C_1^\theta = \prod \frac{1}{\operatorname{th}\frac{x_j + i\theta}{2}}(N^g(\theta)).$$

Чтобы выразить $C_1^\theta$ через стабильный характеристический класс унитарной группы, введем

$$\mathscr{M}^\theta = \sum \mathscr{M}_r^\theta (c_1, \ldots, c_r) = \prod \frac{\operatorname{th}\frac{i\theta}{2}}{\operatorname{th}\frac{x_j+i\theta}{2}}, \tag{6.11}$$

так что

$$C_1^\theta = \left(i \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{-s(\theta)} \mathscr{M}^\theta (N^g(\theta)), \qquad s(\theta) = \dim_{\mathbf{C}} (N^g(\theta)).$$

Собирая вместе все изложенное, получаем следующую теорему.

Теорема 6.2 (о $G$-сигнатуре). *Пусть $X$ — компактное ориентированное многообразие размерности $2l$, и пусть компактная группа Ли $G$ действует на $X$ с сохранением ориентации. Тогда $G$ действует на $H^l(X, \mathbf{R})$, сохраняя билинейную форму. Пусть* $\operatorname{Sign}(G, X)$ *— характер $G$, полученный из этого действия с помощью* (6.7) *для четных $l$ и с помощью* (6.9) *для нечетных $l$. Пусть* $\operatorname{Sign}(g, X)$ *— значение* $\operatorname{Sign}(G, X)$ *на элементе $g \in G$. Пусть $X^g$ — множество неподвижных точек $g$, $N^g$ — нормальное расслоение $X^g$ в $X$ и*

$$N^g = N^g(-1) \oplus \sum_{0<\theta<\pi} N^g(\theta)$$

*— разложение $N^g$, определенное собственными значениями $g$. Тогда $N^g(-1)$ — вещественное векторное расслоение четной размерности и $N^g(\theta)$ — комплексное векторное расслоение. Пусть*[1] $2t = \dim X^g$, $2r = \dim N^g(-1)$, $s(\theta) = \dim_{\mathbf{C}} N^g(\theta)$. *Пусть, наконец, $\mathscr{L}$ — стабильный характеристический класс ортогональной группы, определенный в* (6.5), *и $\mathscr{M}$ — стабильный характеристический класс унитарной группы, определенный в* (6.11). *Тогда*

$$\operatorname{Sign}(g, X) = \Big\{2^{t-r} \prod_{0<\theta<\pi} \left(i \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{-s(\theta)} \mathscr{L}(X^g)\, \mathscr{L}(N^g(-1))^{-1} \times \\ \times e(N^g(-1)) \prod_{0<\theta<\pi} \mathscr{M}^\theta (N^g(\theta))\Big\} [X^g]. \tag{6.12}$$

*Здесь $e(N^g(-1))$ обозначает «скрученный» класс Эйлера $N^g(-1)$ и $[X^g]$ — «скрученный» фундаментальный класс $X^g$, причем оба скручивания определены с помощью локальной системы ориентаций $X^g$.*

Эта теорема, как и рассмотренный в [2] частный случай, нульмерного $X^g$, дает наиболее интересные применения общей теоремы Лефшеца к дифференциальной топологии. Мы поэтому потратим некоторое время на различные частные случаи и приложения. Для краткости выражение в правой части формулы (6.12) будет обозначаться $L(g, X)$. Таким образом, $L(1, X) = L(X)$ есть $L$-род Хирцебруха.

Заметим сперва, что класс Эйлера $e(N^g(-1))$ имеет размерность $2r$, а $\dim X^g = 2t$. Поэтому, если $r > t$, формула в (6.12) показывает, что $\operatorname{Sign}(g, X) = 0$. Таким образом, имеет место

[1]) Эти числа зависят, конечно, от компоненты $g$, но мы не указываем эту зависимость точно, чтобы удержать формулы в разумных размерах.

С л е д с т в и е 6.1. *Предположим, что в ситуации теоремы* 6.2 (*для всех компонент* $X^g$) $r > t$. *Тогда*

$$\operatorname{Sign}(g, X) = 0. \tag{6.13}$$

Рассмотрим теперь специальный случай инволюции. Если $\dim X = 4k + 2$, то $\operatorname{Sign}(G, X)$ является удвоенной мнимой частью характера, но если $G$ имеет порядок 2, все ее характеры вещественны и, значит, $\operatorname{Sign}(G, X) = 0$. Поэтому интересен только случай $\dim X = 4k$, и мы применим к этому случаю (6.12). Поскольку единственным нормальным собственным значением в этом случае является $-1$, мы получаем, что

$$\operatorname{Sign}(G, X) = \{2^{t-r}\mathscr{L}(X^g)\,\mathscr{L}(N^g)^{-1}\,e(N^g)\}\,[X^g]. \tag{6.14}$$

Для упрощения этого выражения заметим, что, если $Y \subset X$ — произвольное замкнутое подмногообразие, мы можем определить понятие его «подмногообразие самопересечения». Для этого мы возьмем вложение $i\colon Y \to X$ и заменим его, следуя Тому, на гомотопное отображение $f\colon Y \to X$, трансверсально регулярное вдоль $Y \subset X$. Обратный образ $Z = f^{-1}(Y)$ будет тогда требуемым самопересечением. Ясно, что нормальное расслоение $Z$ в $Y$ изоморфно $N \mid Z$, где $N$ — нормальное расслоение к $Y$ в $X$. Следовательно, нормальное расслоение к $Z$ в $X$ изоморфно $N \oplus N \mid Z$ и поэтому имеет естественную ориентацию. Таким образом, если $Y$ ориентировано, $Z$ тоже ориентировано. Ориентированный класс бордизма $Y$, заданный отображением $j\colon Z \to Y$, не зависит от выбора $f$. В частности, ориентированный класс кобордизма $Z$ не зависит от $f$; мы назовем его самопересечением $Y$ и обозначим $Y^2$. Кроме того, класс гомологий $Y$, определяемый подмногообразием $Z$, не зависит от $f$; в действительности, он двойствен скрученному классу Эйлера $e(N)$. Поэтому для любого $\xi \in H^*(Y)$

$$\{\xi e(N)\}\,[Y] = j^*(\xi)\,[Z].$$

Вернемся теперь к нашей инволюции $g$ и применим написанную формулу в случае $Y = X^g$, $\xi = 2^{t-r}\mathscr{L}(X^g)\,\mathscr{L}(N^g)^{-1}$. Поскольку $\mathscr{L}$ мультипликативно и $j^*(N^g)$ — нормальное расслоение к $Z$ в $X^g$,

$$\{2^{t-r}\mathscr{L}(X^g)\,\mathscr{L}(N^g)^{-1}\,e(N^g)\}\,[Y] = 2^{t-r}\mathscr{L}(Z)\,[Z] = L(Z)$$

(поскольку $\dim Z = 2(t-r)$).

Соединяя это с (6.14), получаем следующий простой результат.

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Пусть $X$ — компактное ориентированное многообразие размерности $4k$ и $g$ — сохраняющая ориентацию инволюция с множеством неподвижных точек $X^g$. Пусть $(X^g)^2$ — ориентированный класс кобордизма самопересечения $X^g$ в $X$. Тогда*

$$\operatorname{Sign}(g, X) = \operatorname{Sign}((X^g)^2). \tag{6.15}$$

Эта довольно простая формулировка теоремы 6.2 для инволюций была указана нам Хирцебрухом на основе восьмимерного случая, в котором мы провели точные вычисления.

Поскольку $g^2 = 1$,

$$\operatorname{Sign}(g, X) \equiv \dim H^{2k}(X, \mathbf{R}) \pmod 2 \equiv E(X) \pmod 2,$$

где $E(X)$ — эйлерова характеристика $X$. Поэтому из (6.15) или (6.13) мы выводим следующий результат, доказанный другим способом Коннером и Флойдом [12] (27.4).

Следствие 6.2. *Пусть $X$ — компактное ориентированное многообразие размерности $4k$ с нечетной эйлеровой характеристикой. Пусть $g$ — инволюция $X$, сохраняющая ориентацию. Тогда*

$$\dim X^g \geqslant \frac{1}{2} \dim X \tag{6.16}$$

(*т. е. по крайней мере одна компонента $X^g$ имеет такую размерность*).

Хотя $\operatorname{Sign}(G, X) = 0$, когда $\dim X \equiv 2 \pmod 4$ и $G$ имеет порядок 1 или 2, это, конечно, не так для других групп. Простейший пример нетривиальной $G$-сигнатуры в этих размерностях получается следующим образом. Пусть $w$ — примитивный кубический корень из единицы, $X = \mathbf{C}/\{1, w\}$ — эллиптическая кривая с периодами $1, w$. Тогда отображение $z \mapsto wz$ является автоморфизмом $g$ («комплексное умножение») многообразия $X$ с периодом 3; $H^1(X, \mathbf{C})$ порождается дифференциалами $dz$, $d\bar{z}$ и

$$* dz = i\, dz, \qquad * d\bar{z} = i\, d\bar{z}.$$

Поэтому, вычисляя $\operatorname{Sign}(g, X)$ с помощью гармонических форм, мы видим, что

$$\operatorname{Sign}(g, X) = w - \bar{w} = i\sqrt{3} \neq 0.$$

Для иллюстрации мы рассмотрим сейчас несколько частных случаев теоремы 6.2 в низких размерностях.

Простая проверка (6.15) получается, когда $X = P_4(\mathbf{C})$ и любая из двух инволюций

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_0, x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_0, -x_1, x_2, x_3, x_4).$$

В обоих случаях $\operatorname{Sign}(g, X) = 1$, поскольку $g$ тривиально действует в когомологиях. В первом случае $X^g = P_3(\mathbf{C})$, так что $(X^g)^2 = P_2(\mathbf{C})$ и $\operatorname{Sign}((X^g)^2) = 1$. Во втором случае $X^g = P_2(\mathbf{C})$ и $(X^g)^2$ — точка, имеющая сигнатуру 1.

Возвращаясь к теореме 6.2, предположим, что *порядок $g$ нечетен*. Тогда $N^g(-1) = 0$, и поэтому формула для $\operatorname{Sign}(g, X)$ упрощается:

$$\operatorname{Sign}(g, X) = \left\{ \left( 2^t \prod_{0<\theta<\pi} \left( i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^{-s(\theta)} \mathcal{L}(X^g) \prod_{0<\theta<\pi} \mathcal{M}^\theta (N^g(\theta)) \right\} [X^g]. \tag{6.17}$$

Заметим, что в этом случае $X^g$ имеет естественную ориентацию, индуцируемую ориентацией $X$ и комплексной ориентацией расслоений $N^g(\theta)$. Нужно, однако, быть осторожным, чтобы не спутать эту ориентацию с другими, «естественными» ориентациями. Если, например, $\dim X^g = 0$, так что $X^g$ состоит из отдельных точек, ориентация, используемая в (1.17), может не совпадать с обычной ориентацией точки. Предположим теперь, что $X$ четырехмерно (и связно) и $g$ нетривиально. Множество неподвижных точек

$X^g$ состоит тогда из точек $\{P_j\}$ и 2-многообразий $\{Y_k\}$. Вклад $P_j$ в $\mathrm{Sign}\,(g,\ X)$ равен

$$-\varepsilon\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}\,\theta_j^1\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}\,\theta_j^2,$$

где $\exp(\pm i\theta_j^1)$, $\exp(\pm i\theta_j^2)$ — собственные значения $g\,|\,T_{P_j}$, $0<\theta_j^1<\pi$, $0<\theta_j^2<\pi$, и $\varepsilon=\pm 1$ учитывает разницу между двумя «естественными» ориентациями $T_{P_j}$. Другими словами, если в базисе $T_{P_j}$ (ориентированном согласно ориентации $X$) $g\,|\,T_{P_j}$ представляется матрицей

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_j & -\sin\alpha_j\\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\cos\beta_j & -\sin\beta_j\\ \sin\beta_j & \cos\beta_j\end{pmatrix},$$

то вклад $P_j$ в $\mathrm{Sign}\,(g,\ X)$ равен $-\mathrm{ctg}\,\frac{\beta_j}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha_j}{2}$. Поскольку $\mathscr{M}_\theta=1+\frac{ic_1}{\sin\theta}+\ldots$, вклад компоненты $Y_k$ в $\mathrm{Sign}\,(g,\ X)$ равен

$$\left\{2\,\left(-i\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta_k}{2}\right)\frac{ic_1\,(N_k^g)}{\sin\theta_k}\right\}[Y_k]=\frac{Y_k^2}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}},$$

где $N_k^g$ — комплексное нормальное расслоение к $Y_k$ и $Y_k^2$ — число самопересечения $Y_k$. Таким образом, установлено

Предложение 6.2. *Пусть $X$ — связное компактное ориентированное четырехмерное многообразие, $g$ — автоморфизм $X$ нечетного порядка (обязательно сохраняющий ориентацию). Пусть множество неподвижных точек $g$ состоит из изолированных точек $\{P_j\}$ и связных двумерных компонент $\{Y_k\}$. Пусть для каждого $j$ действие $g$ в касательном пространстве в точке $P_j$ задается матрицей*

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_j & -\sin\alpha_j\\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\cos\beta_j & -\sin\beta_j\\ \sin\beta_j & \cos\beta_j\end{pmatrix}$$

*относительно ориентированного базиса. Пусть $\exp(\pm i\theta_k)$ обозначает нормальные собственные значения $g$ вдоль $Y_k$ и $Y_k^2$ — индекс самопересечения $Y_k$. Тогда*

$$\mathrm{Sign}\,(g,\ X)=-\sum_j\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha_j}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\beta_j}{2}+\sum_k\mathrm{cosec}^2\,\frac{\theta_k}{2}\cdot Y_k^2. \tag{6.18}$$

В качестве проверки (6.18) рассмотрим преобразование $(x_0,\ x_1,\ x_2)\mapsto(x_0,\ wx_1,\ wx_2)$, где $w=\exp(i\alpha)$ — примитивный корень $q$-й степени из единицы ($q$ нечетно). Тогда у нас есть одна неподвижная точка, вклад которой равен $-\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^2$, и одна неподвижная прямая, вклад которой равен $\left(\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}\right)^2$. Таким образом,

$$\mathrm{Sign}\,(g,\ X)=-\mathrm{ctg}^2\,\frac{\alpha}{2}+\mathrm{cosec}^2\,\frac{\alpha}{2}=1,$$

что справедливо, поскольку $g$ тривиально действует на когомологиях $X$.

Мы закончим этот параграф указанием на то, что мы можем рассматривать продолжение (использующее связность) оператора $D^+$ на дифференциальные формы с коэффициентами в произвольном векторном расслоении $V$.

Это продолжение не связано с обычными когомологиями, и поэтому его изучение не столь интересно, как уже рассмотренный нами случай. Можно, однако, получить формулы, обобщающие (6.6) и (6.12). Если мы обозначим число Лефшеца расширения $D^+$ на $V$ через $\operatorname{Sign}(g, X, V)$, то

$$\operatorname{Sign}(g, X, V) = \{\operatorname{ch}(V \mid X^g)[g]A\}[X^g], \tag{6.19}$$

где $\{A\}$ — выражение, возникающее в формуле (6.12). Правая часть формулы (6.19) будет для краткости обозначаться $L(g, X, V)$. Для $g = 1$ мы положим $L(1, X, V) = L(X, V)$ и $\operatorname{Sign}(1, X, V) = \operatorname{Sign}(X, V)$.

Формула (6.19) интересна, поскольку при изменении $V$ она дает целый набор «теорем целочисленности» для чисел Понтрягина.

Можно, наконец, указать, что если $X$ — спинорное многообразие, то операторы из этого параграфа тесно связаны с оператором Дирака из § 5. Эта связь возникает из изоморфизма $\operatorname{Spin}(2l)$-модулей

$$(-1)^l(\Delta^+ - \Delta^-) = \Lambda_+(\mathbf{R}^{2l}) - \Lambda_-(\mathbf{R}^{2l}).$$

## § 7. Инварианты при свободном действии

Хорошо известно, что характеристические числа многообразия являются инвариантами подходящих групп кобордизмов. Так, числа Понтрягина являются инвариантами ориентированных кобордизмов ($SO$-кобордизмов), а числа Черна — инвариантами почти-комплексных кобордизмов ($U$-кобордизмов). Для $G$-многообразия можно аналогично определить $G$-характеристические числа, используя различные множества неподвижных точек элементов из $G$, и эти числа будут инвариантами $G$-кобордизмов. Например, все формулы для индекса-характера различных операторов из §§ 4, 5, 6 выражены в терминах таких $G$-характеристических чисел. Более того, из факта, что эти специальные комбинации характеристических чисел являются характерами $G$, следуют теоремы целочисленности, аналогичные хорошо известным теоремам целочисленности из [4] и [7] для обычных характеристических чисел.

Эти замечания применяются к четномерным многообразиям, но если изменить точку зрения, их можно применить и к нечетномерным многообразиям, на которых $G$ действует *свободно*. Пусть, например, $X$ — компактное ориентированное свободное $G$-многообразие размерности $2n - 1$, и пусть мы можем найти ориентированное $2n$-мерное многообразие $Y$ (не обязательно $G$-свободное) с границей $X$. Пусть $v \in K_{SO(2n)}(\mathbf{R}^{2n})$ — произвольный «универсальный класс символа», и пусть $u \in K_G(TY)$ — элемент, определенный $v$. Если бы $Y$ было многообразием *без границы*, мы могли бы для любого $g \in G$ применить теорему об индексе в виде предложения 2.2 и получить точное выражение $v(g, Y)$, включающее значение некоторых характеристических классов на множестве неподвижных точек $Y^g$ элемента $g$. Поскольку в нашем случае у $Y$ есть граница, это неприменимо. Однако так как $X$ является $G$-свободным многообразием,

$$Y^g \cap \partial Y = \varnothing \quad \text{при} \quad g = 1,$$

и поэтому выражение $v(g, Y)$ по-прежнему имеет смысл. Мы получаем таким образом комплекснозначную функцию

$$g \longmapsto v(g, Y),$$

заданную на неединичных элементах $G$. Обозначим эту функцию через $v(Y)$. Заметим, что эта функция не обязательно является характером $G$. Пусть теперь $Y'$ — другое ориентированное $G$-многообразие с границей $X$ и

$$Z = Y \cup_X (-Y')$$

(где $-Y'$ означает $Y'$ с противоположной ориентацией), так что $Z$ — замкнутое ориентированное многообразие без границы. Поскольку $v(g, Y)$ вычисляется по $Y^g$ и

$$Z^g = Y^g + (-Y')^g,$$

получаем, что

$$v(g, Z) = v(g, Y) - v(g, Y').$$

Однако $v(g, Z)$ *является характером*, поскольку мы можем применить (2.17) к замкнутому $G$-многообразию $Z$. Поэтому класс вычетов $v(Y)$ по модулю характеров зависит только от $X$, и мы обозначим его через $v(X)$. Он является, очевидно, инвариантом свободного $G$-кобордизма. Читатель может заметить тесную формальную аналогию с инвариантом, который первоначально использовал Милнор для того, чтобы различать экзотические семимерные сферы.

Инварианты $v(X)$, которые мы сейчас определим, оказываются нетривиальными, что видно на простых примерах. Их можно использовать для вывода многих результатов Коннера и Флойда [12] о $G$-кобордизмах (см. [2]). В действительности, мы сохранили способ рассуждений из [12], где $G$-кобордизмы были впервые введены и применены к теории неподвижных точек.

Мы не будем здесь рассматривать подробные применения инвариантов $v(X)$ к $G$-кобордизмам. Вместо этого мы сосредоточим наше внимание на одном частном случае, в котором могут быть получены гораздо более сильные результаты. Если мы возьмем в качестве $v$ универсальный символ (назовем его $L$), приводящий к оператору $D^+$ из § 6, то для замкнутого многообразия $Y$ размерности $2n$

$$L(g, Y) = \operatorname{Sign}(g, Y),$$

и это может быть вычислено из действия $G$ на $H^n(Y, \mathbf{R})$. Ввиду связи $L$ с когомологиями мы можем использовать его для получения более тонких инвариантов, чем раньше.

Сначала, однако, нам нужно обсудить свойство аддитивности сигнатуры, принадлежащее С. П. Новикову[1]. Пусть $Y$ — ориентированное $G$-многообразие размерности $2n$ с границей $X$, и пусть $\hat{H}^n(Y)$ — образ естественного гомоморфизма

$$\varphi\colon H^n(Y, X) \longrightarrow H^n(Y).$$

[1]) Обращением нашего внимания на результат Новикова мы обязаны Хирцебруху.

По двойственности Пуанкаре $H^n(Y)$ двойственно $H^n(Y, X)$, и поэтому билинейная форма $B$ на $\hat{H}^n(Y)$, определенная равенством

$$B(\varphi(a), \varphi(b)) = ab[Y],$$

невырождена. Форма $B$ симметрична для четных $n$, кососимметрична для нечетных $n$ и, как и для замкнутых многообразий, мы можем определить $\operatorname{Sign}(G, Y)$. Пусть теперь $Y'$ — другое ориентированное $G$-многообразие с границей $-X$ и $Z = Y \cup_X Y'$. Свойство аддитивности состоит в следующем.

Предложение 7.1. $\operatorname{Sign}(G, Z) = \operatorname{Sign}(G, Y) + \operatorname{Sing}(G, Y')$.

Доказательство. Рассмотрим последовательности когомологий для $(Z, Y)$ и $(Z, Y')$

$$H^n(Y', X) \xrightarrow{\alpha'} H^n(Z) \xrightarrow{\beta} H^n(Y),$$
$$H^n(Y') \xleftarrow{\beta'} H^n(Z) \xleftarrow{\alpha} H^n(Y, X),$$

где мы заменили $H^n(Z, Y)$ на $H^n(Y', X)$, и аналогично для переставленных $Y, Y'$. По двойственности Пуанкаре эти две последовательности двойственны одна другой. Поэтому $A = \operatorname{Im}\alpha$ и $A' = \operatorname{Im}\alpha'$ являются взаимными аннуляторами относительно билинейной формы $B(Z)$ на $H^n(Z)$. Поэтому $A \cap A'$ аннулирует $A + A'$ и, значит, $H^n(Z)/A + A' \cong (A \cap A')^*$. С другой стороны,

$$(A + A')/A \cap A' \cong A/A \cap A' \oplus A'/A \cap A' = \operatorname{Im}\beta\alpha \oplus \operatorname{Im}\beta'\alpha' \cong \hat{H}^n(Y) \oplus \hat{H}^n(Y').$$

Поэтому, разлагая фильтрацию $A \cap A' \subset A + A' \subset H^n(Z)$ ($G$-инвариантно), мы получаем разложение $G$-модулей

$$H^n(Z) \cong (A \cap A') \oplus \hat{H}^n(Y') \oplus \hat{H}^n(Y) \oplus (A \cap A')^*;$$

и относительно этого разложения билинейная форма $B(Z)$ задается матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & B(Y) & 0 & * \\ 0 & 0 & B(Y') & * \\ (-1)^n & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Преобразованием $T^t(\quad)T$, т. е. заменой разложения, все члены $*$ могут быть обращены в 0. Тогда

$$B(Z) \cong B(Y) \oplus B(Y') \oplus C,$$

где $C$ — естественная билинейная форма на $(A + A') \oplus (A + A')^*$. Как было замечено в § 5, $G$-сигнатура такой формы $C$ всегда равна нулю. Поэтому

$$\operatorname{Sign}(g, Z) = \operatorname{Sign}(G, Y) + \operatorname{Sign}(G, Y'),$$

что и требовалось.

Пусть теперь $X$ — замкнутое ориентированное $G$-многообразие размерности $2n - 1$, и пусть мы можем найти ориентированное $G$-многообразие $Y$ с границей $X$. Тогда для каждого элемента $g \in G$, *не имеющего неподвижных точек на* $X$, можно определить

$$\sigma(g, X) = L(g, Y) - \operatorname{Sign}(g, Y). \tag{7.1}$$

Покажем теперь, что это определение не зависит от выбора $Y$. Пусть $Y'$ — другое такое многообразие и $Z = Y \cup_X (-Y')$ — замкнутое ориентированное $G$-многообразие, получающееся склеиванием $Y$ и $-Y'$ вдоль их общей границы $X$. В силу предложения 7.1

$$\operatorname{Sign}(g, Z) = \operatorname{Sign}(g, Y) - \operatorname{Sign}(g, Y') \tag{7.2}$$

и, поскольку $Z^g$ является суммой непересекающихся множеств $Y^g$ и $(-Y')^g$,

$$L(g, Z) = L(g, Y) - L(g, Y'). \tag{7.3}$$

Вычитая (7.3) из (7.2), получаем

$$\{L(g, Y) - \operatorname{Sign}(g, Y)\} - \{L(g, Y') - \operatorname{Sign}(g, Y')\} =$$
$$= L(g, Z) - \operatorname{Sign}(g, Z) = 0 \text{ по (2.17).}$$

Поэтому наш инвариант $\sigma(g, X)$ определен корректно и является инвариантом $G$-диффеоморфизмов. В действительности, незначительное изменение приведенного выше доказательства показывает, что $\sigma(g, X)$ является инвариантом и в более сильном смысле. А именно, пусть $X'$ — другое $G$-многообразие (на котором у $g$ нет неподвижных точек), и пусть $X$ и $X'$ эквивалентны в следующем смысле:

($A$) существует ориентированное $2n$-мерное $G$-многообразие $W$, для которого

$$\partial W = X - X', \quad W^g = \varnothing, \quad \hat{H}^n(W, \mathbf{R}) = 0.$$

Тогда, если $\partial Y = X$, $\partial Y' = X'$, положим

$$Z = Y \cup_X W \cup_{X'} (-Y').$$

Вычисления, подобные приведенным раньше, показывают, что $W$ ничего не вносит в $L$ или в Sign, так что

$$\sigma(g, X) - \sigma(g, X') = L(g, Z) - \operatorname{Sign}(g, Z) = 0.$$

Нами установлена таким образом

Теорема 7.1. *Пусть $G$—компактная группа Ли и $X$ — замкнутое ориентированное $G$-многообразие размерности $(2n - 1)$, ограничивающее ориентированное $G$-многообразие $Y$. Для каждого $g \in G$, не имеющего неподвижных точек в $X$, определим комплексное число $\sigma(g, X)$ равенством*

$$\sigma(g, X) = L(g, Y) - \operatorname{Sign}(g, Y),$$

*где $L(g, Y)$ — число, возникающее в правой части формулы* (6.12) *(с заменой $X$ на $Y$), и* Sign $(g, Y)$ *определяется при действии $G$ на пространстве $\hat{H}^n(Y, \mathbf{R})$ (образе гомоморфизма $H^n(Y, X, \mathbf{R}) \to H^n(Y, \mathbf{R})$), снабженном билинейной формой, как в* (6.7) *и* (6.9). *Тогда $\sigma(g, X)$ зависит только от $X$, а не от $Y$. Более того, если $X'$ — другое $G$-многообразие и если существует свободное многообразие $W$, для которого $\partial W = X - X'$, $W^g = \varnothing$ и $\hat{H}^n(W, \mathbf{R}) = 0$, то*

$$\sigma(g, X) = \sigma(g, X'). \tag{7.4}$$

Теорема 7.1 особенно интересна в случае, когда $G$ конечно, $X$ односвязно и $G$ свободно действует на $X$, так что $X$ является универсальной накрывающей для $M = X/G$. Если $M' = X'/G$ эквивалентно $M$ в смысле $h$-кобордизмов (т. е. если существует ориентированное многообразие $V$, для которого $\partial V = M - M'$, причем $M \to V$ и $M' \to V$ гомотопически эквивалентны), то универсальная накрывающая $W$ пространства $V$ дает эквивалентность, требуемую в теореме 7.1 и, значит, $\sigma(g, X) = \sigma(g, X')$ при $g \neq 1$. Поэтому имеем

Следствие 7.1. *Пусть $M$ — ориентированное $(2n - 1)$-мерное многообразие с фундаментальной группой $G$. Пусть его универсальная накрывающая $X$ ограничивает некоторое ориентированное $G$-многообразие. Тогда $\sigma(g, X)$ при $g \neq 1$ является инвариантом $h$-кобордизмов.*

Замечание 1. Ф. Хирцебрухом и С. Т. С. Уоллом было указано, что при свободном действии конечных групп инвариант $\sigma$ может быть определен без предположений из следствия 7.1. Для этого надо воспользоваться свободной теорией кобордизмов Коннера и Флойда [12], в соответствии с которой (когда $\dim X = 2n - 1$) некоторое кратное $NX$ всегда ограничивает некоторое ориентированное свободное $G$-многообразие $Y$. Мы можем тогда определить

$$\sigma(g, X) = \frac{1}{N} \operatorname{Sign}(g, Y) \qquad (g \neq 1). \tag{7.5}$$

Хотя это определение является простым и более общим, точка зрения неподвижных точек является очень полезной для вычисления $\sigma$, как это показывает случай линзовых пространств (см. ниже).

Замечание 2. Когда $X$ — гомотопическая сфера и $g$ — свободная от неподвижных точек инволюция, Ф. Хирцебрух показал, что наш инвариант $\sigma(g, X)$ совпадает с инвариантом Браудера — Ливсея [11].

Простым частным случаем применения следствия 7.1 является случай линзовых пространств, когда $X$ — сфера, а $G$ — группа ортогональных преобразований. Этот случай подробно изучен в [2], где показано, что наш инвариант $\sigma$ различает линзовые пространства. Конечно, для линзовых пространств мы можем взять за $Y$ шар, в котором есть всего одна неподвижная точка, и тогда нам не нужна общая теория неподвижных точек, изложенная в этой статье.

Поскольку связная группа тривиально действует на когомологиях, основной интерес $\operatorname{Sign}(g, X)$ представляет для конечных групп. Для связных групп, однако, мы получаем интересные равенства, которые мы обсудим в следующем параграфе. Сейчас же мы докажем

Предложение 7.2. *Функция $\sigma$ из следствия 7.1 является аналитической функцией на открытом множестве $U \subset G$, состоящем из элементов, не имеющих неподвижных точек в $X$. Если $G$ связна, так что $R(G)$ — область целостности, $\sigma$ определяется единственным элементом из поля частных кольца $R(G)$.*

Доказательство. Для элементов $g \in G$ с одним и тем же множеством неподвижных точек в $Y$ (где $\partial Y = X$, как в следствии 7.1) точное выражение для формулы

$$\sigma(g, X) = L(g, Y) - \operatorname{Sign}(g, Y)$$

показывает, что она аналитична по $g$. В общем случае, когда множество неподвижных точек меняется от точки к точке, мы должны вернуться к свойствам индекса, изложенным в [7]. Из свойства вырезания следует, что у нас есть корректно определенный гомоморфизм

$$\operatorname{ind}^{\overset{0}{Y}}\colon K_G(T\overset{0}{Y}) \to R(G),$$

где $\overset{0}{Y}$ — открытое многообразие $Y-X$. Пусть теперь $\gamma$ — класс сопряженных элементов в $G$, не имеющих неподвижных точек в $X$, и рассмотрим вложения

$$(TY)^{\gamma} \xrightarrow{i} T\overset{0}{Y} \xrightarrow{j} TY.$$

По общей теореме локализации[1] из [20] они индуцируют изоморфизмы $(i_*)_\gamma$ и $(j_*)_\gamma$ в следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
K_G((TY)^{\gamma})_\gamma \arrow[r, "(i*)_\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & K_G(T\overset{0}{Y})_\gamma \arrow[r, "(j*)_\gamma"] \arrow[d, "\operatorname{ind}_\gamma^{\overset{0}{Y}}"] & K_G(TY)_\gamma \arrow[dl, dashed, "\operatorname{ind}_\gamma^{Y}"] \\
& R(G)_\gamma &
\end{tikzcd}$$

и, значит, можно определить $\operatorname{ind}_\gamma^Y$ так, чтобы диаграмма стала коммутативной. Если мы ограничим наше рассмотрение замкнутой подгруппой, порожденной элементом $g \in \gamma$, то гомоморфизм $\alpha$ может быть вычислен в терминах многообразия неподвижных точек $Y^g$; именно таким путем мы получили нашу общую формулу Лефшеца. Если, в частности, $a_\gamma \in K_G(TX)$ — элемент, определенный классом символа $a \in K_G(TY)$ оператора $D^+$ из § 6, диаграмма показывает, что

$$\operatorname{ind}_\gamma^Y a_\gamma[g] = L(g, Y), \tag{7.6}$$

где левая часть получается из отображения $R(G)_\gamma \to \mathbf{C}$ (вычисленного в $g$ или $\gamma$). Это выражение для $L(g, Y)$ лучше подходит для вычисления зависимости от $g$.

В действительности, как мы увидим, наше предложение получается теперь несколько формально. Положим для краткости

$$R = R(G), \quad M = K_G(T\overset{0}{Y}), \quad N = K_G(TX),$$

так что $M$ и $N$ являются $R$-модулями. Рассмотрим теперь непрерывное отображение $G \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} R(G)$, где $\operatorname{Spec} R(G)$ — аффинная схема $R(G)$, а $\varphi(g)$ — простой идеал, определенный $g$. Пусть $\widetilde{R}$ — пучок на $G$, индуцированный при помощи отображения $\varphi$ структурным пучком на $\operatorname{Spec} R(G)$. Тогда росток $\widetilde{R}^g$ будет как раз локальным кольцом $R(G)_\gamma$ (где $\gamma$ — класс элементов, сопряженных $g$), и $\widetilde{R}$ можно отождествить с подпучком пучка ростков аналити-

[1] Здесь нам нужна теорема локализации для произвольных групп $G$, в то время как в [5] мы доказали ее только для абелевых групп.

ческих функций на $G$; $R$-модули $M$ и $N$ определяют пучки $\widetilde{R}$-модулей $\widetilde{M}$ и $\widetilde{N}$ на $G$ и $R$-гомоморфизмы

$$\begin{array}{c} M \xrightarrow{j_*} N \\ \Big\downarrow \text{ind} \\ R \end{array}$$

индуцируют $\widetilde{R}$-гомоморфизмы

$$\begin{array}{c} \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{j}_*} \widetilde{N} \\ \Big\downarrow \widetilde{\text{ind}} \\ \widetilde{R} \end{array}$$

Из теоремы локализации следует, что $\widetilde{j}_*$ *является изоморфизмом над открытым множеством* $U \subset G$, поэтому, ограничиваясь множеством $U$, мы получаем диаграмму

$$\begin{array}{c} \widetilde{M}_U \xrightarrow{\approx} \widetilde{N}_U \\ \Big\downarrow \widetilde{\text{ind}}_U \\ \widetilde{R}_U \end{array}$$

Элемент $a \in N$ определяет сечение $\widetilde{N}$ и, значит, сечение $a_U$ пучка $\widetilde{M}_U$. Пусть $L_U$ — сечение $\widetilde{R}_U$, заданное формулой

$$L_U = \widetilde{\text{ind}}_U (a_U).$$

Тогда $L_U$ — аналитическая функция на $U$. С другой стороны, из (7.6) ясно, что значение $L_U$ в точке $g \in U$ есть как раз $L(g, Y)$. Таким образом, $L(g, Y)$ является аналитической функцией $g$ в $U$. Поскольку другой член $\operatorname{Sign}(g, Y)$ в определении $\sigma(g, X)$ является характером $G$, $\sigma$ аналитична в $U$. Для доказательства последней части предложения, когда $G$ связна, мы возьмем элемент $g \in U$, который порождает максимальный тор $T$ (т. е. такой, что степени $g$ плотны в $T$). Поскольку $R(G) \to R(T)$ является вложением, только нулевой элемент из $R(G)$ равен нулю в $g$. Поэтому если $\gamma$ — класс элементов, сопряженных $g$, локальное кольцо $\widetilde{R}_g = R(G)_\gamma$ является всем полем частных $F(G)$ кольца $R(G)$. Поэтому в окрестности $g$ аналитическая функция $L(\ \ , Y)$ задается элементом из $F(G)$. Если $U$ связна, мы можем воспользоваться аналитическим продолжением для установления единственности этого элемента. Однако $U$ не обязано быть связным [1]). Но мы можем рассуждать следующим образом. Пусть $V \subset U \cap T$ — множество всех элементов, имеющих те же неподвижные точки, что и $g$ (т. е. что и $T$). Тогда $V$

---

[1]) Если мы введем комплексификацию $G^c$ группы $G$, которая является аффинной алгебраической группой, то все наши пучки будут определены над открытым, по Зарискому, множестве $W$, содержащем $U$, и $L_U$ будет ограничением рациональной функции на $G^c$, не имеющей полюсов в $W$.

будет открытым (поскольку состоит из элементов, не имеющих неподвижных точек в $Y - Y^g$) и плотным (поскольку оно содержит все образующие $T$, лежащие в $U$) множеством. Для каждого элемента $h \in V$ точное выражение для $L(h, Y)$ через неподвижные точки показывает сразу же, что оно задается единственным элементом $f$ поля $F(T)$. Поскольку $V$ открыто и плотно, аналитическая функция $L$ полностью определяется элементом $f \in F(T)$. Поскольку в окрестности $g$ $L$ задается элементом из $F(G)$, то элемент $f \in F(G)$ и доказательство окончено.

В качестве простой иллюстрации рассмотрим случай действия окружности. Таким образом, мы предполагаем, что окружность $G$ действует на $Y$ без неподвижных точек (общих для всей группы) на границе $X$. Тогда

$$R(G) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}],$$
$$F(G) = \mathbf{Q}(t),$$

и мы можем интерпретировать $t$ как координату $e^{i\theta}$ «общей точки» $G$. Пусть $Z \subset Y$ — точки, неподвижные относительно всей группы. Нормальное расслоение $N$ к $Z$ в $Y$ может быть записано как (конечная) прямая сумма $N = \sum\limits_{k>0} N_k$, $N_k$ — комплексное векторное расслоение, на котором $t$ действует как $t^k$. На многообразии $Z$ индуцируется тогда ориентация из ориентаций на $N$ и $Y$. Поскольку связная группа $G$ тривиально действует на когомологиях $Y$, формула Лефшеца (6.12), примененная к общему элементу $t \in G$, дает

$$\sigma(t, X) = \left\{2^m \prod_k \left\{\prod_j \frac{t^k e^{x_j}+1}{t^k e^{x_j}-1}(N_k)\right\} \mathscr{L}(Z)\right\}[Z] - \operatorname{Sign}(Y), \tag{7.7}$$

где, как обычно, элементарные симметрические функции от $x_j(N_k)$ являются классами Черна $N_k$ и $2m = \dim Z$. Формула (7.7) ясно показывает, что $\sigma(t, X)$ является рациональной функцией $t$ (с коэффициентами из $\mathbf{Q}$), знаменатели которой являются произведением множителей вида $1 - t^k$. Поэтому $\sigma(t, X)$ может иметь полюса в тех точках $t = \alpha \in G$, множество неподвижных точек которых больше, чем $Z$. Предложение 7.2 дает, однако, более сильный результат, а именно, что $\alpha$ не может быть полюсом, если $Y^\alpha \cap Z = \varnothing$. Более того, значение $\sigma(\alpha, X)$ в такой точке $\alpha$ дается формулой (6.12), примененной к множеству неподвижных точек $Y^\alpha$.

Функция $\sigma(t, X)$ является довольно интересным инвариантом действия окружности. Простое следствие из (7.7), указанное Ф. Хирцебрухом, состоит в том, что $\sigma(t, X)$ конечно при $t \to \infty$ и что его значение там равно

$$\sigma(\infty, X) = 2^m \mathscr{L}(Z)[Z] - \operatorname{Sign} Y = \operatorname{Sign}(Z) - \operatorname{Sign}(Y). \tag{7.8}$$

Если окружность действует на $X$ *свободно*, то мы можем взять за $Y$ соответствующее расслоение кругов и тогда $Z$ будет нулевым сечением. Если $x \in H^2(Z)$ обозначает первый класс Черна расслоения $X \to Z$ со слоем окружность, то формула (7.7) сводится к

$$\sigma(t, X) = \left\{2^{n-1}\left(\frac{te^x+1}{te^x-1}\right)\mathscr{L}(Z)\right\}[Z] - \operatorname{Sign}(Y). \tag{7.9}$$

Более того, поскольку отображение $H^n(Y, X) \to H^n(Y)$ можно отождествить с гомоморфизмом $H^{n-2}(Z) \to H^n(Z)$, заданным умножением на $x$, мы видим, что $\mathrm{Sign}(Y)$ будет сигнатурой вырожденной формы на $H^{n-2}(Z)$, заданной равенством $(u, v) \to xuv[Z]$. Она равна нулю для нечетных $n$, а для четных $n$ ее можно интерпретировать как сигнатуру квадратичной формы на $H^{n-2}(Z^2)$, ограниченной на образ $H^{n-2}(Z)$, где $Z^2$ обозначает многообразие самопересечения $Z$ в $Y$.

Полюс функции $\sigma(t,X)$ в (7.9) может появиться только при $t = 1$. Значение в $t = -1$ задается, как мы видели в предложении 6.1, формулой

$$\sigma(-1, X) = \mathrm{Sign}(Z^2) - \mathrm{Sign}(Y).$$

Для произвольного действия окружности на $X$, не имеющего неподвижных точек (но не обязательного свободного), не ясно, что мы можем найти $G$-многообразие $Y$, для которого $\partial Y = X$. Однако, как было замечено выше, ограничение $\sigma_f$ функции $\sigma$ на все конечные подгруппы $G$ может быть определено без предположения и существований $Y$. Поскольку точки конечного порядка плотны в окружности, существует не более одной аналитической функции $\sigma$ (определенной при $t \neq 1$), равной $\sigma_f$ во всех точках конечного порядка. Может, однако, случиться, что $\sigma_f$ нельзя продолжить до аналитической (и даже непрерывной) функции. Это должно доказывать, что $X$ не может ограничивать никакого $G$-многообразия. Интересно было бы выяснить, встречается ли в действительности такая ситуация. Такой же вопрос возникает, конечно, для любой компактной группы Ли, поскольку элементы конечного порядка всегда плотны.

## § 8. Векторные поля

Наша общая теорема Лефшеца, примененная к однопараметрическим группам, приводит к интересным тождествам для характеристических классов, которые мы сейчас опишем. Здесь представляют особый интерес два случая — риманов и эрмитов.

Пусть $X$ — компактное ориентированное $2l$-мерное риманово многообразие. Напомним [18], что группа изометрий $X$ является компактной группой Ли $G$. Пусть $A$ — векторное поле на $X$, являющееся инфинитезимальной изометрией. Это значит, что соответствующая однопараметрическая группа $\exp(tA)$ является подгруппой $G$. Множество нулей $X^A$ поля $A$ неподвижно относительно всей группы $\exp(tA)$. Более того, при $0 < |t| < \varepsilon$ множество неподвижных точек $\exp(tA)$ совпадает с $X^A$.

Оператор $D^+$ из § 6 инвариантен относительно группы $G$ изометрий $X$ и, в частности, инвариантен относительно однопараметрической группы $\exp(tA)$. Применяя теорему о $G$-сигнатуре 6.2 к элементу $g_t = \exp(tA)$, получаем

$$\mathrm{Sign}(g_t, X) = L(g_t, X). \tag{8.1}$$

Вообще, если $V$ — произвольное векторное расслоение, связанное с римановой структурой, мы применим (6.19) и получим

$$\mathrm{Sign}(g_t, X, V) = L(g_t, X, V). \tag{8.2}$$

Рассмотрим теперь обе части этого равенства как функции $t$ при $0<t<\varepsilon$. Поскольку $\operatorname{Sign}(g_t, X, V)$ задается характером $G$, он является аналитической функцией $t$ и, значит, при $t \to 0$

$$\operatorname{Sign}(g_t, X, V) \to \operatorname{Sign}(1, X, V) = \operatorname{Sign}(X, V). \tag{8.3}$$

С другой стороны, $L(g_t, X, V)$ задается вычислением класса когомологий на $X^A$, и если мы изучим точное выражение для $L(g_t, X, V)$, то увидим, что эта функция аналитична по $t$, но имеет полюс при $t \to 0$. Точнее, каждая компонента $X^A$ размерности $2m$ задает полюс порядка (самое большое) $n-m$. Поэтому у нас есть ряд Лорана

$$L(g_t, X, V) = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i t^i, \tag{8.4}$$

где коэффициенты $a_i$ получаются вычислением некоторых точных выражений от характеристических классов на $X^A$. Из (8.2), (8.3) и (8.4) мы выводим

$$\left.\begin{aligned} &a_i = 0, \qquad -n \leqslant i \leqslant -1, \\ &a_0 = \operatorname{Sign}(X, V). \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

С другой стороны, полагая $t=0$ в (8.1), мы получим $\operatorname{Sign}(X, V) = L(X, V)$ и, значит,

$$a_0 = L(X, V). \tag{8.6}$$

Поскольку обе стороны (8.6) линейны по $V$, (8.6) выполнено при замене $V$ на любой элемент $K_G(X)$ (связанный с римановой структурой). Наиболее удобными являются элементы, задающиеся следующей леммой

Лемма 8.1. *Пусть $f(t_1, \ldots, t_l)$ — произвольный симметрический многочлен от $l$ переменных с целыми коэффициентами. Тогда существует $u_f \in R(SO(2l))$ такое, что в $H^*_{SO(2l)}(\mathbf{Q})$*

$$\operatorname{ch} u_f = f(x_1^2, \ldots, x_l^2) + \textit{члены высшего порядка}. \tag{8.7}$$

Доказательство. Поскольку характер Черна является гомоморфизмом колец $R(SO(2l)) \to H^*_{SO(2l)}(\mathbf{Q})$, достаточно показать существование $u_f$, когда $f$ — элементарная симметрическая функция $\sigma_k$ степени $k$. Определим теперь $u_k$ как коэффициент при $t^k$ в

$$\sum_{i=0}^{2l} \lambda^i t^i (1-t)^{2l-i},$$

где $\lambda^i = \lambda^i(\mathbf{C}^{2l}) = \lambda^i(\mathbf{R}^{2l}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ рассматривается как элемент $R(SO(2l))$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{2l} u_k t^k = (1-t)^{2l} \sum \lambda^i \left(\frac{t}{1-t}\right)^i$$

и, значит,

$$\operatorname{ch}\left(\sum u_k t^k\right) = (1-t)^{2l} \prod_{i=1}^{l} \left(1 + \frac{t}{1-t} e^{x_i}\right)\left(1 + \frac{t}{1-t} e^{-x_i}\right) =$$

$$= \prod (1 + t(e^{x_i} - 1))(1 + t(e^{-x_i} - 1)).$$

Поэтому, приравнивая коэффициенты, получим

$$u_k = \sigma_k (e^{x_1} - 1, \ldots, e^{x_l} - 1, \; e^{-x_1} - 1, \ldots, e^{-x_l} - 1) =$$
$$= \sigma_k (x_1, \ldots, x_l, -x_1, \ldots, -x_l) + \text{члены высшего порядка.}$$

Значит, $(-1)^k u_{2k} = \sigma_k (x_1^2, \ldots, x_l^2) + \ldots$ является требуемым элементом из $R(SO(2l))$. Пусть теперь $l = 2k$, так что $\dim X = 4k$, $f$ и $u_f$ такие же, как выше, причем $\deg f = k$. Рассмотрим элемент

$$u_f(TX) \in K_G(X),$$

связанный с касательным расслоением $X$. Для вычисления $L(g_t, X, u_f(TX))$ нам нужно вычислить

$$\mathrm{ch}\,(i^* \cdot u_f(TX))\,[g_t]$$

(где $g_t = \exp tA$). Нормальные собственные значения $e^{\pm i\theta}$ для $g_t$ имеют теперь вид $e^{\pm it\alpha}$, где $\pm i\alpha$—собственные значения кососимметрического преобразования нормальной плоскости, индуцированного векторным полем $A$. Заметим, в частности, что (при маленьких $t$) собственное значение $-1$ не встречается и, значит, $N^g(-1) = 0$. Теперь для вычисления $\mathrm{ch}\,(i^* u_f(TX))[g]$ на $2m$-мерной компоненте $X^A$ мы должны действовать следующим образом: берем $\mathrm{ch}\, u_f$, заменяем последние $l - m$ переменных $x_j$ на $y_j + it\,\alpha_j$ и затем заставляем симметрические функции $(x_1^2, \ldots, x_m^2)$ действовать на $TX^A$, в то время как симметрические функции от $y_j$, соответствующие данному $\alpha$, действуют на $N_\alpha(X^A)$ — части нормального расслоения с собственным значением $\alpha$.

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$L(g_t, X, u_j(TX)) = \left\{ 2^m \frac{\mathrm{ch}\, u_f(x_1, \ldots, x_m, \ldots, y_j + it\alpha_j, \ldots)}{\prod \mathrm{th} \dfrac{y_j + it\alpha_j}{2}} \mathscr{L}(X^A) \right\} [X^A] =$$
$$= \left\{ 2^l \frac{\mathrm{ch}\, u_f(x_1, \ldots, x_m, \ldots, y_j + it\alpha_j, \ldots)}{t^{l-m}} \prod \left( i\alpha_j + \frac{y_j}{t} \right)^{-1} Q(t) \right\} [X^A], \qquad (8.8)$$

где $Q(t)$ — степенной ряд от $t$ со свободным членом 1. Члены в фигурных скобках, имеющие подходящую степень по $(x, y)$ (а именно степень $m$), как легко видеть, голоморфны по $t$. Более того, значение при $t = 0$ включает только свободный член $Q(t)$ и первый член, а именно $f$, из $\mathrm{ch}\, u_f$. Поэтому, полагая $t = 0$, получаем

$$L(X, u_f(TX)) = \{2^l f(x_1^2, \ldots, x_m^2, \ldots, (y_j + i\alpha_j)^2, \ldots) \prod (i\alpha_j + y_j)^{-1}\} [X^A]. \quad (8.9)$$

С другой стороны, вычисляя $L(X, u_f(TX))$ непосредственно, мы находим, что

$$L(X, u_f(TX)) = 2^l f(x_1^2, \ldots, x_m^2)\,[X]. \qquad (8.10)$$

Возьмем теперь за $f$ многочлены степени $q < k$. Тогда, действуя как и раньше, мы можем вычислить

$$L(g_t, X, \rho \cdot u_f(TX)),$$

где $\rho \in R(T)$ — произвольный характер тора $T$, порожденный $\exp(tA)$, такой, что $\rho(g_t)$ делится точно на $t^{2(k-q)}$. Мы получим тогда формулу, очень похожую на (8.9) с тем исключением, что левая часть теперь равна нулю. Формально это согласуется с (8.10), поскольку, когда $\deg f < k$,

$$f(x_1^2, \ldots, x_m^2)[X] = 0.$$

Таким образом мы установили следующую теорему.

Теорема 8.1. *Пусть $X$ — компактное ориентированное многообразие размерности $4k$ и $A$ — инфинитезимальная изометрия. Пусть $X^A$ — множество нулей $A$ и $\pm i\alpha_j$ — собственные значения кососимметрического преобразования $N_A$, индуцированного $A$ в нормальном расслоении к $X^A$ (где $\alpha_j$ постоянны на каждой компоненте). Ориентируем нормальное расслоение так, чтобы в ориентированном базисе $N_A$ задавалось матрицей $\bigoplus_j \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_j \\ \alpha_j & 0 \end{pmatrix}$, еде $\alpha_j > 0$. Возьмем далее индуцированную ориентацию $X^A$. Пусть теперь $f(t_1, \ldots, t_l)$ — однородный симметрический полином степени $q \leqslant k$. Тогда*

$$\begin{aligned}\{f(\ldots, x_i^2, \ldots, (y_j + i\alpha_j)^2, \ldots) \prod (i\alpha_j + y_j)^{-1}\}[X^A] = \\ = \begin{cases} f(x_1^2, \ldots, x_{2k}^2)[X], & \text{если} \quad q = k, \\ 0, & \text{если} \quad q < k. \end{cases}\end{aligned} \tag{8.11}$$

*Здесь симметрические функции от $x_j^2$ действуют на $TX^A$ (и дают его понтрягинские классы), в то время как симметрическое функции от $y_j$ (при фиксированном $\alpha$) дают класса Черна $N_\alpha(X^A)$.*

Эта теорема дает выражение для различных чисел Понтрягина $X$ через числа Понтрягина и нормальные собственные значения $X^A$. Простейшим является случай, когда $X^A$ состоит из конечного числа точек $\{P\}$, так что (8.11) переходит

$$\begin{aligned}\sum \varepsilon(P)(-1)^k \frac{f(\alpha_1^2(P), \ldots, \alpha_{k2}^2(P))}{\Pi\alpha_j(P)} = \\ = \begin{cases} f(x_1^2, \ldots, x_{2k}^2)[X], & \text{если} \quad \deg f = k, \\ 0, & \text{если} \quad \deg f < k, \end{cases}\end{aligned} \tag{8.12}$$

где $\varepsilon(P) = 1$, если принятая нами ориентация $T_p$ совпадает с ориентацией $X$ и $\varepsilon(P) = -1$ в противном случае.

Формула (8.12) была доказана непосредственными дифференциально-геометрическими методами Боттом [9], и аналогичные методы [10] приводят к (8.11). Ботт, естественно, использовал описание характеристических классов через кривизну (см. § 1). Наше доказательство является алгебро-топологическим, поскольку, вопреки тому, что кажется, мы в действительности не использовали анализа. Фактически теорема 8.1 является простым следствием теоремы локализации из [5] и вычислений с характеристическими классами.

Перейдем теперь к случаю комплексной структуры. Если у нас есть векторное поле $A$, сохраняющее комплексную структуру, то однопараметрическая группа $\exp(tA)$ лежит в группе всех голоморфных автоморфизмов $X$. К сожалению, связная компонента единицы этой группы является группой Ли, но, вообще говоря, некомпактной. Мы не можем поэтому применять наши методы, не сделав дополнительных ограничений, в то время как дифференциально геометрические методы Ботта [9] по-прежнему применимы. С другой стороны, наши методы используют лишь *почти-комплексную структуру*, поскольку интегрируемость несущественна для наших топологических рассмотрений. Используя формулу (4.6) и вычисления, полностью аналогичные проведенным выше, получаем

Предложение 8.1. *Пусть $X$ — почти-комплексное эрмитово многообразие размерности $l$ и $A$ — векторное поле, сохраняющее метрику и почти-комплексную структуру. Пусть $X^A$ — множество нулей $A$. Тогда касательное и нормальное расслоения к $X^A$ имеют естественную комплексную структуру и косоэрмитово преобразование $N_A$, индуцируемое полем $A$ в нормальном расслоении к $X^A$, имеет собственные значения $i\alpha_j$. Пусть $f(t_1, \ldots, t_l)$ — симметрический однородный многочлен степени $q \leqslant l$. Тогда*

$$f(x_i, \ldots, y_j + i\alpha_j, \ldots), \Pi (i\alpha_j + y_j)^{-1}\} [X^A] = \\ = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_l)[X], & \text{если} \quad q = l, \\ 0, & \text{если} \quad q < l. \end{cases} \tag{8.13}$$

*Здесь симметрические функции от $x_i$ действуют на $TX^A$ (и дают его классы Черна), в то время как симметрические функции от $y_j$ (при фиксированном $\alpha$) дают классы Черна $N_A(X^A)$.*

В дополнение к результатам типа (8.12) и (8.13) имеются и более точные результаты, использующие анализ из [7]. А именно, возвращаясь к (8.1) и вспоминая, что $\mathrm{Sign}(g_t, X)$ зависит только от действия $g_t$ на когомологиях $X$, мы видим, что

$$\mathrm{Sign}(g_t, X) = \mathrm{Sign}(1, X) = \mathrm{Sign}(X)$$

в действительности не зависит от $t$. Поэтому в добавление к равенствам из (8.5) у нас в этом случае есть бесконечная последовательность равенств, получающаяся приравниванием нулю всех положительных степеней $t$ в выражении (8.4) при $V = 1$. Аналогичные замечания применяются к келеровым многообразиям. А именно, если $G$ — компактная связная групп автоморфизмов келерова многообразия, то $G$ тривиально действует на группах когомологий пучка $H^q(X, \mathcal{O})$, поскольку эти группы канонически изоморфны подпространствам комплексных групп когомологий $H^q(X, \mathbf{C})$.

## § 9. Различные частные случаи

Все частные случаи теоремы об индексе и теоремы Лефшеца, которые мы рассматривали в предыдущих параграфах, возникали из некоторых геометрических структур. В этом параграфе мы обсудим несколько примеров другой природы.

Рассмотрим сперва случай *дифференциальных операторов на нечетномерном многообразии*. Символ $\sigma$ дифференциального оператора порядка $r$ удовлетворяет условию симметричности

$$\sigma(\alpha(\xi)) = (-1)^r \sigma(\xi), \tag{9.1}$$

где $\xi$ — кокасательный вектор и $\alpha(\xi) = -\xi \in TX$. Для класса $[\sigma]$ в $K(TX)$ множитель $(-1)^r$ можно не учитывать, поэтому

$$\alpha^*[\sigma] = [\sigma] \in K(TX)$$

и, значит,

$$\operatorname{ch} \alpha^*[\sigma] = \operatorname{ch}[\sigma] \in H^*(TX, \mathbf{Q}).$$

Отсюда по теореме об индексе 2.1

$$\begin{aligned}\operatorname{index} \sigma &= (-1)^n \operatorname{ch}[\sigma] \mathcal{J}(x)[TX] = (-1)^n \operatorname{ch}[\sigma] \mathcal{J}(X)[\alpha(TX)] = \\ &= (-1)^n \operatorname{ch} \sigma \mathcal{J}(X)(-1)^n [TX] = -\operatorname{index} \sigma, \qquad (9.2)\end{aligned}$$

и, значит, $\operatorname{index} \sigma = 0$. Важнейшим моментом здесь является, конечно, тот, что отображение $\alpha$ в $TX$ меняет ориентацию при нечетном $n$. Таким образом, мы установили

Предложение 9.1. *Индекс эллиптического дифференциального оператора на компактном многообразии равен нулю.*

Замечание. Полная теорема об индексе не нужна для доказательства предложения 9.1. Нетрудно доказать, что для нечетномерного многообразия символ дифференциального оператора $d$ дает элемент конечного порядка из $K(TX)$. Если мы теперь знаем, что индекс является гомоморфизмом $K(X) \to \mathbf{Z}$, отсюда сразу следует, что $\operatorname{index} d = 0$.

Для чисел Лефшеца аналог предложения 9.1 не обязательно выполняется. В самом деле, отображение $\theta \mapsto -\theta$ окружности в себя имеет нетривиальное число Лефшеца (равное 2) относительно комплекса де Рама, т. е. относительно обычной производной $f \mapsto df$. Если, однако, мы рассмотрим только те действия, которые сохраняют ориентацию, ситуация изменится. В самом деле, если $X$ ориентировано и $g: X \to X$ сохраняет ориентацию, то расслоение $N^g(-1)$ (т. е. часть нормального расслоения к $X^g$ с собственным значением $-1$) обязательно четномерно. Поскольку все расслоения $N^g(\theta)$, соответствующие другим собственным значениям, четномерны

$$\dim X^g \equiv \dim X \pmod 2.$$

Если теперь $u$ — символ $G$-инвариантного дифференциального оператора, то ограничение $i^*u \in K_G(TX^g)$ по-прежнему будет удовлетворять условию симметричности (9.1). Поэтому, если $\dim X$ нечетно, из предложения 9.1 и из теоремы Лефшеца 3.1 следует, что число Лефшеца $L(g, u) = 0$. Таким образом, имеем

Предложение 9.2. *Пусть $X$ — компактное ориентированное нечетномерное многообразие, $G$ — компактная группа Ли преобразований $X$, сохраняющих ориентацию, и $d$ — эллиптический $G$-инвариантный дифференциальный оператор на $X$. Тогда $G$-индекс оператора $d$ равен* 0.

В оставшейся части этого параграфа будут рассматриваться примеры, в которых векторные расслоения тривиальны. Другими словами, мы рассмотрим эллиптические операторы, действующие на *системах функций*. Символом такого оператора будет непрерывное отображение

$$\sigma: S(X) \to GL(N, \mathbf{C}), \qquad (9.3)$$

где $S(X)$ — расслоение единичных сфер на $X$ и $N$ — ранг системы. Мы можем поэтому рассмотреть индуцированный гомоморфизм в когомологиях [1])

$$\sigma^*: H^*(GL(n, \mathrm{C})) \to H^*(S(X)).$$

Мы напомним сейчас некоторые факты о когомологиях $GL(N, \mathrm{C})$ и связи $\sigma^*$ с характеристическими классами.

Напомним сперва, что $U(N)$ является деформационным ретрактом $GL(N, \mathrm{C})$, так что

$$H^*(GL(N, \mathrm{C})) \cong H^*(U(N)),$$

$H^*(U(N))$ является внешний алгеброй, порожденной элементами

$$h_i^N \in H^{2i-1}(U(N)) \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Эти элементы обладают следующими свойствами:

($i$) гомоморфизм ограничения переводит $h_i^N$ в $h_i^{N-1}$ (при $i < N$);

($ii$) $h_N^N = \pi^*(u_N)$, где $\pi: U(N) \to U(N)/U(N-1) = S^{2N-1}$ — естественное отображение и $u_N \in H^{2N-1}(S^{2N-1})$ — естественная образующая [2]).

Ввиду ($i$) мы будем писать $h_i$ вместо $h_i^N$.

Поскольку гармоническими формами на $U(N)$ являются в точности двухсторонние инвариантные формы, легко написать явные выражения для дифференциальных форм $w_i$, представляющих $h_i$.

Пусть теперь $B$ — замкнутое подпространство компактного пространства $A$ и $f: B \to GL(N, \mathrm{C})$ — непрерывное отображение. Тогда (продолжая $f$ до отображения $A$ в $\mathrm{End}(\mathrm{C}^n)$) мы получаем комплекс на $A$, точный на $B$, и, значит, элемент $[f] \in K(A, B)$. Характеристические классы $[f]$ связаны с классами $f^*h_i$ формулами $c_i[f] = \delta f^* h_i$, где $\delta: H^*(B) \to H^*(A, B)$ — кограничный гомоморфизм. Отсюда следует, что

$$\mathrm{ch}[f] = \delta \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i-1} f^* h_i}{(i-1)!} \right\}.$$

Возвращаясь теперь к нашему символу $\sigma$, мы видим, что

$$\mathrm{ch}[\sigma] = \delta \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i-1} \sigma^* h_i}{(i-1)!} \right\} \in H^*(TX),$$

где

$$\delta: \quad H^*(S(X)) \to H^*(B(X), S(X)) \cong H^*(TX)$$

— кограница и $B(X)$ — расслоение единичных шаров в $TX$. Подставляя эту формулу для $\mathrm{ch}[\sigma]$ в теорему об индексе 2.1 и используя формулу

$$\delta u[TX] = u[S(X)]$$

для любого $u \in H^*(S(X))$, получаем

---

[1]) Хотя $GL(N, \mathrm{C})$ не компактна, мы рассматриваем когомологии с произвольными (некомпактными носителями).

[2]) $S^{2N-1}$ ориентирована как граница шара в $\mathrm{C}^N$.

Предложение 9.3. *Пусть* $\sigma$: $S(X) \to GL(N, \mathbf{C})$ — *символ эллиптической* $N \times N$ *системы* $d$. *Тогда*

$$\operatorname{index} d = (-1)^n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i-1} \sigma^* h_i}{(i-1)!} \mathcal{J}(X) \right\} [S(X)], \qquad (9.4)$$

*где* $h_i \in H^{2i-1}(GL(N, \mathbf{C}))$ — *образующие, нормализованные как указано в* (*ii*), $\mathcal{J}(X)$ — *индексный класс* $X$ *и* $\dim X = n$.

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда $X$ — гиперповерхность в $\mathbf{R}^{n+1}$. Тогда все классы Понтрягина $X$ равны нулю и, значит, $\mathcal{J}(X) = 1$. Поэтому из предложения 9.3 получаем

Следствие 9.1. *Пусть* $X$ — *гиперповерхность в* $\mathbf{R}^{n+1}$, $\sigma$ — *символ эллиптической* $N \times N$ *системы* $d$ *на* $X$. *Тогда*

$$\operatorname{index} d = \begin{cases} (-1)^{N+n-1} \dfrac{\sigma^* h_n}{(n-1)!} [S(X)], & \text{если} \quad N \geqslant n, \\ 0, & \text{если} \quad N < n. \end{cases} \qquad (9.5)$$

Замечание 1. Если $N = n$, то ввиду свойства (*ii*) элементов $h_n$ мы видим, что $\sigma^* h_n$ $[S(X)]$ можно интерпретировать как степень композиции

$$\pi \circ \sigma \colon S(X) \to S^{2n-1},$$

так что (9.5) приобретает простой вид

$$\operatorname{index} d = -\frac{\deg(\pi \circ \sigma)}{(n-1)!}. \qquad (9.6)$$

Замечание 2. Поскольку первый класс Понтрягина возникает в размерности 4, $\mathcal{J}(X) = 1$ при $\dim X \leqslant 3$. Поэтому (9.5) и (9.6) выполнены для любого $X$, размерность которого не больше 3.

В (9.4) значение на $[S(X)]$ можно, как обычно, заменить значением на скрученном фундаментальном классе $[X]$. Для этого мы введем гомоморфизм

$$\pi_* \colon H^*(S(X), \mathbf{Q}) \to H^*(X, \widetilde{Q}),$$

называемый обычно «интегрированием вдоль слоя». Здесь $\widetilde{Q}$ означает скрученные коэффициенты и $\pi_*$ понижает размерность на $n - 1$. Одно из возможных определений $\pi_*$ состоит в том, что $\pi_*$ является композицией

$$H^*(S(X), \mathbf{Q}) \xrightarrow{\delta} H^*(TX, \mathbf{Q}) \xrightarrow{\psi^{-1}} H^*(X, \widetilde{Q}),$$

где $\delta$ — кограница пары $(B(X), S(X))$ и $\psi$ — изоморфизм Тома. Формулу можно теперь переписать в виде

$$\operatorname{index} d = (-1)^n \left\{ \left( \sum \frac{(-1)^{i-1} \pi_* \sigma^* h_i}{(i-1)!} \right) \mathcal{J}(X) \right\} [X]. \qquad (9.7)$$

Поскольку

$$\dim \pi_* \sigma^* h_i = 2i - n,$$

суммирование в (9.7) нужно брать только по $\frac{n}{2} \leqslant i \leqslant N$. Если, в частности, $N \leqslant \frac{n-1}{2}$, множество суммирования пусто и, значит, $\operatorname{index} d = 0$. Если $n = 2N$, у нас есть в точности один член $\pi_* \sigma^* h_N$ размерности 0. Поскольку

$\mathcal{J}(X)$ использует только те размерности, которые делятся на 4, index $d=0$, если $n$ не делится на 4. Для $n$, делящегося на 4, рассмотрим точную последовательность когомологий

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(S(X),\mathbf{Q}) & \xrightarrow{\delta} & H^n(TX,\mathbf{Q}) & \xrightarrow{\alpha} & H^n(B(X),\mathbf{Q}) \\ & & \uparrow\psi & & \| \\ & & H^0(X,\widetilde{Q}) & & H^n(X,\mathbf{Q}) \end{array}$$

Предполагая, что $X$ связно, получаем

$$H^0(X,\widetilde{Q})=\begin{cases}\mathbf{Q}, & \text{если } X \text{ ориентируемо},\\ 0, & \text{если } X \text{ неориентируемо}.\end{cases}$$

Более того, если $X$ ориентировано, и $1$ — образующая $H^0(X,\mathbf{Q})$, то

$$\alpha\psi(1)=e(X),$$

где $e(X)$, как обычно, класс Эйлера. Поэтому, если $e(X)\neq 0$, имеем

$$\operatorname{Im}\delta=\operatorname{Ker}\alpha=0$$

и, значит, $\delta\sigma^*h_N=0$. Отсюда

$$\pi_*\sigma^*h_N=\psi^{-1}\delta\sigma^*h_N=0,$$

так что index $d=0$. Имеется, таким образом, следующее следствие из предложения 9.3, дающее условия, при которых index $d=0$.

Следствие 9.2. *Пусть $d$ — эллиптическая $N\times N$ система на компактном $n$-мерном многообразии $X$, где $2N\leqslant n$. Тогда* index $d=0$, *кроме случая $n=2N=4k$, $X$ ориентируемо и класс Эйлера равен* 0.

Следствие 9.2 можно применить, в частности, когда $N=1$ и $n>1$. Таким образом, *если* dim $X>1$, *индекс эллиптического оператора, действующего на функциях, всегда равен нулю.*

## ЛИТЕРАТУРА


[1] М. Атья, $K$-теория, М., «Мир», 1967.

[2] M. F. Atiyah, R. Boot, The Lefschetz fixed-point theorem for elliptic complexes, II, Ann. of Math. (1968).

[3] M. F. Atiyah, R. Boot, A. Shapiro, Clifford Modules, Topology **31** (1964), 3—38.

[4] M. F. Atiyah, D. Hirzebruch, Riemann — Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 276—281.

[5] М. F. Атья, Г. Б. Сегал, Индекс эллиптических операторов. II, УМН **23**, вып. 6 (144) (1968), 135—149.

[6] M. F. Atiyah, I. M. Singer, The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1961), 422—433.

[7] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. I, УМН **23**, вып. 5 (143) (1968), 99—142.

[8] A. Boorl, F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces, Amer. Journ. Math. **80** (1958), 458—538; **81** (1959), 315—382; **82** (1960), 491—504.

[9] R. Bott, Vector fields and characteristic numbers, (1968).

[10] R. Bott, A residuc formula for holomorphic vector ficlds, Journ. Diff. Geometrie (1968).

[11] M. Browder, G. R. Livesay, Fixed-point free involutions on homotopy spheres, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 242—245.

[12] P. Conner, E. E. Floyd, Differentiable periodic maps, Springer, 1964.
[13] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1966.
[14] F. Hirzebruch, Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch, Symp. Inter. Top. Alg., 1956, Mexico, 129—144.
[15] Ф. Хирцебрух, Эллиптические дифференциальные операторы на многообразиях, УМН **23**, вып. 1 (139) (1968), 191—210.
[16] R. P. Langlands, The dimension of spaces of automorphic formes, Amer. Journ. Math. (1963), 99—125.
[17] A. Lichnerowicz, Spineurs harmoniques, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **257** (1963), 7—9.
[18] S. B. Myers, N. E. Steenrod, The group of isometries of a Riemannian manifold, Ann. of Math. **40** (1939), 400—416.
[19] R. Palais, Seminar on the Atiyah — Singer Index Theorem, Ann. Math. Study. **57**.
[20] G. B. Segal, Equivariant $K$-theory, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris (1968).