М. Ф. Атья, Г. Б. Сегал, Индекс эллиптических операторов. II, *УМН*, 1968, том 23, выпуск 6(144), 135–149

1968 г. ноябрь — декабрь *т. XXIII, вып. 6 (144)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.4+513.83

ИНДЕКС ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. II[1])

М. Ф. Атья и Г. Б. Сегал

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Цель этой статьи — показать, каким образом теорема об индексе из [5] может быть переформулирована как общая «теорема Лефшеца о неподвижной точке», похожая на изложенную в [2]. На этом пути мы получим основную теорему из [2], обобщенную на произвольные множества неподвижных точек, но только в случае, когда преобразования принадлежат к компактной группе.

Содержание этой статьи в основном топологическое, и она может рассматриваться как статья об эквивариантной K-теории на многообразиях. Весь анализ уже был проведен в [5], а здесь мы просто выразим топологический индекс в терминах множества неподвижных точек. Эта статья не очень зависит от основной теоремы из работы [5], утверждающей равенство аналитического и топологического индекса.

Как и в [5], мы используем только K-теорию и не рассматриваем когомологии. В третьей статье этой серии мы вернемся к когомологиям и получим точную формулу в терминах характеристических классов.

Основной теоремой K_G-теории, приводящей к формуле о неподвижной точке, является так называемая теорема локализаций. Мы напомним ее в § 1. В § 2 она применяется к топологическому индексу. Некоторые представляющие специальный интерес случаи рассмотрены в § 3.

§ 1. Теорема локализации

В [5] мы напомнили основные факты о функторе $K_G(X)$ для компактной группы Ли G и локально компактного G-пространства X. Однако мы не ввели группу $K^1_G(X)$ и точную последовательность K_G-теории, которые

[1]) Перевод статьи с английского выполнен С. И. Гельфандом; первая часть опубликована в УМН 23, вып. 5 (143) (1968), стр. 99—142.

нам здесь будут нужны. Напомним [1], что мы определяем

$$K_G^{-n}(X) = K_G(\mathbf{R}^n \times X)$$

(где G тривиально действуют на $\mathbf{R}^n$), и теорема периодичности дает естественные изоморфизмы: $K_G^{-n} \cong K_G^{-n-2}$. Рассматривая n по модулю 2, введем

$$K_G^* = K_G^0 \oplus K_G^1 \qquad (K_G^0 = K_G).$$

Для компактной пары (X, Y) имеет место точный треугольник

$$\begin{tikzcd} & K_G^*(X) \arrow[dr] & \\ K_G^*(X, Y) \arrow[ur] & & K_G^*(Y), \arrow[ll, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

где δ меняет местами K_G^0 и K_G^1.

Вообще для любых локально компактных пространств, где Y замкнуто в X, у нас есть точный треугольник

$$\begin{tikzcd} & K_G^*(X) \arrow[dr] & \\ K_G^*(X-Y) \arrow[ur] & & K_G^*(Y). \arrow[ll, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Это сразу следует из компактного случая, если заменить X, Y их одноточечными компактификациями X^+, Y^+ и заметить, что $K_G^*(X^+, Y^+) = K_G^*(X^+ - Y^+) = K_G^*(X - Y)$.

Напомним теперь, что тензорное произведение индуцирует спаривание

$$K_G(X) \otimes K_G(Y) \to K_G(X \times Y)$$

для любых двух локально-компактных G-пространств X, Y. Если в частности, Y — точка, $K_G(X)$ является модулем над K_G (точка) $= R(G)$—кольцом характеров G. Заменяя X на $\mathbf{R}^1 \times X$, получим, что то же самое верно для $K_G^1(X)$ и, значит, для $K_G^*(X)$. Поэтому модуль $K_G^*(X)$ можно изучать с точки зрения коммутативной алгебры, анализируя его связь с простыми идеалами $R(G)$. Цель этого параграфа — рассмотреть основные результаты в этом направлении.

Пусть γ — класс сопряженных элементов G. Он определяет простой идеал в $R(G)$, состоящий из характеров, равных 0 на γ. Для каждого $R(G)$-модуля M обозначим через M_γ модуль, получающийся *локализацией* M по этому простому идеалу; M_γ будет модулем над кольцом $R(G)_\gamma$. Элемент $R(G)_\gamma$ — это «отношение» $\frac{u}{s}$, где $u, s \in R(G)$ и $s(\gamma) \neq 0$. При этом два отношения $\frac{u}{s}$ и $\frac{u'}{s'}$ определяют один и тот же элемент $R(G)_\gamma$, если существует такое $t \in R(G)$, что $t(\gamma) \neq 0$ и $tus' = tu's$. Элементами M_γ являются «отношения» $\frac{m}{s}$ $(m \in M,\ s \in R(G),\ s(\gamma) \neq 0)$ с тем же соотношением эквивалентности.

С другой стороны, если X есть G-пространство, мы можем рассмотреть подпространство

$$X^\gamma = \bigcup_{g \in \gamma} X^g$$

где X^g — множество неподвижных точек при действии g в X. Тогда X^γ — *замкнутое* [1] G-подпространство в X. Основной результат состоит в следующем.

Теорема 1.1 (локализации). *Пусть γ — класс сопряженных элементов в G, i: $X^\gamma \to X$ — вложение. Тогда*

$$i^*: K_G(X) \to K_G(X^\gamma)$$

становится изоморфизмом

$$i^*_\gamma: K_G(X)_\gamma \to K_G(X^\gamma)_\gamma$$

после локализации по простому идеалу в $R(G)$, определенному классом γ.

Доказательство этой теоремы дано в [7]. Однако, поскольку эта теорема играет основную роль в нашей статье, мы коротко изложим его. Первым шагом является следующая лемма о характерах.

Лемма 1.1. *Пусть H — замкнутая подгруппа компактной группы Ли G и γ — класс сопряженных элементов в G, не пересекающийся с γ. Тогда существует $\chi \in R(G)$, для которого*

$$\chi(\gamma) \neq 0, \qquad (i)$$

$$\chi(h) = 0 \quad \text{для всех } h \in H. \qquad (ii)$$

Для произвольной группы G доказательство леммы 1.1 неожиданно оказывается сложным. Однако для наших целей достаточно рассматривать *абелевы* группы. В этом случае лемма 1.1 является тривиальным следствием того, что характеры разделяют точки в фактор-группе G/H.

После локализации по простому идеалу в $R(G)$, определяемому классом γ, элемент χ из леммы 1.1 становится (ввиду (i)) обратимым в $R(G)_\gamma$. Ввиду (ii) этот обратимый элемент аннулирует $R(H)_\gamma$, где $R(H)_\gamma$ естественным образом снабжается структурой $R(G)_\gamma$-модуля. Поэтому мы получаем

Следствие 1.1. *В обозначениях леммы* 1.1. $R(H)_\gamma = 0$.

Заметим теперь, что для любого класса сопряженных элементов γ в G $R(H)_\gamma$ является кольцом отношений $R(H)$. Если M — $R(H)$-модуль, а значит, и $R(G)$-модуль, что M_γ будет $R(H)_\gamma$-модулем. Поскольку все наши модули унитарны (т. е. умножение на единицу кольца оставляет на месте элементы модуля), $M_\gamma = 0$, как только $R(H)_\gamma = 0$. Это положение возникает, если γ удовлетворяет предположениям леммы 1.1 и если за M взять модуль $K^*_G(X)$, где X — компактное G-пространство, допускающее G-отображение в G/H. Отображение

$$X \to G/H \to \text{точка}$$

приводит к отображению

$$\begin{array}{ccccc} K^*_G(X) & \leftarrow & K^*_G(G/H) & \longleftarrow & K^*_G(\text{точка}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & R(H) & \longleftarrow & R(G), \end{array}$$

так что $K^*_G(X)$ в действительности является $R(H)$-модулем. Мы получили, таким образом,

---

[1]) γ компактно и X^γ — образ в X замкнутого подпространства в $\gamma \times X$ при проекции $\gamma \times X \to X$.

Следствие 1.2. *Пусть γ, G, H такие, как в лемме* 1.1, *и X — компактное G-пространство, допускающее G-отображение в G/H. Тогда*

$$K_G^*(X)_\gamma = 0.$$

Замечание. Если Y — произвольное замкнутое G-подпространство X, то Y также допускает G-отображение в G/H и, значит, $K_G^*(Y)_\gamma = 0$. Точный треугольник пары (X, Y) и точность локализации показывают, что $K_G^*(X, Y)_\gamma = 0$.

Пусть теперь X — произвольное локально компактное G-пространство, и $Y \subset H$ — орбита со стационарной группой H. Тогда *мы можем найти замкнутую G-окрестность V подпространства Y в X и G-ретракцию V на Y.* В общем случае это следует из существования слоения (slice) (см. [7]), но для наших целей достаточно будет применять это лишь в случае, когда X — дифференцируемое G-многообразие. В этом случае Y есть G-подмногообразие, и за V мы можем взять замкнутую трубчатую окрестность, определенную G-инвариантной римановой метрикой. В каждом случае, когда такие окрестности V орбит существуют, мы можем покрыть любое компактное G-подпространство L в X конечным числом множеств $L_i = V_i \cap L$. Если H_i — стационарная группа, связанная с V_i, то у нас есть G-отображения $L_i \to G/H_i$. Пусть теперь γ — такой класс сопряженных элементов в G, что у элементов из γ *нет неподвижных точек в X*. Тогда $\gamma \cap H_i = \varnothing$ для всех i и, значит, $K_G^*(L_i)_\gamma = 0$ в силу следствия 1.2. Простая индукция по числу множеств L_i, использующая точные последовательности и приведенное выше замечание, показывает, что $K_G^*(L)_\gamma = 0$. Заменяя L на произвольное компактное G-подпространство L' и используя точный треугольник для (L, L'), получим, что $K_G^*(L, L')_\gamma = 0$. Если, в частности, U — открытое относительно компактное G-подпространство в X, то

$$K_G^*(U) = K_G^*(\overline{U}, \partial\overline{U})_\gamma = 0.$$

Поскольку $K_G^*(X)$ является пределом прямого спектра $K_G^*(U)$ для таких U, а локализация коммутирует с взятием пределов прямого спектра, то имеет место

Предложение 1.1. *Пусть X — локально компактное G-пространство, γ — класс сопряженных элементов G, не имеющий в X неподвижных точек. Тогда $K_G^*(X)_\gamma = 0$.*

Предложение 1.1 является частным случаем леммы 1.1, когда $X^\gamma = \varnothing$. Для доказательства теоремы локализации в общем случае рассмотрим точный треугольник

$$\begin{tikzcd} & K_G^*(X) \arrow[dr, "i^*"] & \\ K_G^*(X - X^\gamma) \arrow[ur] & & K_G^*(X^\gamma). \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Локализуем его по простому идеалу, определенному γ, и напомним, что локализация сохраняет свойство точности. Применяя предложение 1.1

к пространству $X - X^\gamma$ (в котором у γ нет неподвижных точек), получаем точный треугольник

$$\begin{tikzcd}
 & K_G^*(X)_\gamma \arrow[dr, "i^*"] & \\
0 \arrow[ur] & & K_G^*(X^\gamma)_\gamma, \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

который устанавливает теорему 1.1.

З а м е ч а н и е. Данное только что доказательство теоремы 1.1 является полным в случае, когда *G абелева* и *X — дифференцируемое G-многообразие* (заметим, что мы были осторожными и избегали использования одноточечной компактификации X). Только этот случай и будет использоваться в остальной части статьи.

§ 2. Формула Лефшеца

Пусть G — компактная группа Ли, X — компактное дифференцируемое G-многообразие. Касательное расслоение TX будет тогда дифференцируемым G-многообразием и мы можем рассмотреть группу $K_G(TX)$. В [5] мы определили два $R(G)$-гомоморфизма

$$a\text{-ind}\colon K_G(TX) \to R(G),$$
$$t\text{-ind}\colon K_G(TX) \to R(G).$$

Основная теорема из [5] утверждает, что эти два гомоморфизма совпадают. В этом параграфе мы покажем, как топологический индекс $t = \text{ind}$ может быть вычислен через множества неподвижных точек. В соединении с основной теоремой из [5] это даст «формулу Лефшеца о неподвижных точках» для эллиптических операторов. Для упрощения обозначений (и поскольку во всех случаях $a\text{-ind} = t\text{-ind}$) мы будем писать ind вместо t-ind. Когда нужно будет избежать ошибки, мы будем писать ind_G^X, явно указывая рассматриваемые пространство и группу.

Напомним сначала, что в [5] мы определили функториальный гомоморфизм

$$i_!\colon K_G(TX) \to K_G(TY)$$

для каждого G-вложения $i\colon X \to Y$. В терминах этого гомоморфизма топологический индекс можно определить следующим образом. Пусть $i\colon X \to E$ есть G-вложение X в пространство вещественного представления G, и пусть $j\colon P \to E$ — вложение начала координат. Тогда

$$j_!\colon K_G(TP) \to K_G(TE)$$

является изоморфизмом, и топологический индекс

$$\text{ind}\colon K_G(TX) \to K_G(TP) = R(G)$$

определяется равенством

$$\text{ind} = (j_!)^{-1} \circ i_!.$$

Из определения (и функториальности $i_!$) сразу следует, что если

$$i\colon Z \to X$$

есть G-вложение замкнутого многообразия Z, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_G(TZ) \arrow[rr, "i_!"] \arrow[dr, "\operatorname{ind}_Z"'] & & K_G(TX) \arrow[dl, "\operatorname{ind}_X"] \\ & R(G) & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

коммутативна.

Кроме ковариантного отображения

$$i_!\colon K_G(TZ) \to K_G(TX),$$

имеется, конечно, обычное контравариантное отображение ограничения

$$i^*\colon K_G(TX) \to K_G(TZ).$$

Соотношение между ними дается следующей леммой ([5], лемма 3.1).

Лемма 2.1. *Если $i\colon Z \to X$ есть G-вложение, N — нормальное расслоение, то гомоморфизм*

$$i^* i_!\colon K_G(TZ) \to K_G(TZ)$$

является умножением на

$$\lambda_{-1}(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \sum (-1)^i \lambda^i (N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}),$$

где λ^i — внешние степени, и $K_G(TZ)$ рассматривается обычным образом как $K_G(Z)$-модуль.

Предположим теперь, что G — топологически циклическая группа, т. е. в G существует элемент g, степени которого плотны в G. Тогда множество неподвижных точек g будет неподвижным относительно всей группы, т. е

$$X^g = X^G.$$

Поэтому [1]) (см. [5], § 2)

$$K_G(X^g) \cong K(X^g) \otimes R(G) \tag{2.2}$$

и значит, локализуя по простому идеалу в $R(G)$, определенному классом сопряженных элементов $\{g\}$,

$$K_G(X^g)_g \cong K(X^g) \otimes R(G)_g. \tag{2.3}$$

Следующая лемма (верная для любой группы G) характеризует обратимые элементы в этом кольце.

Лемма 2.2. *Пусть Y — компактное пространство, на котором G действует тривиально, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в $R(G)$. Тогда элемент $u \in K_G(Y)_{\mathfrak{p}}$ обратим тогда и только тогда, когда его ограничение на каждую точку $P \in Y$ обратимо в кольце $K_G(P)_{\mathfrak{p}} = R(G)_{\mathfrak{p}}$.*

---

[1]) Тензорные произведения, если не оговорено обратное, берутся над кольцом $\mathbf{Z}$ елых чисел.

Доказательство. Пусть [1]) $H^0(Y, \mathbf{Z})$ — группа непрерывных отображений $Y \to \mathbf{Z}$. Сопоставляя каждому векторному расслоению на Y его размерность (или ранг), мы получим гомоморфизм

$$rk\colon K(Y) \to H^0(Y;\ \mathbf{Z}).$$

Этот гомоморфизм расщепляется, т. е. если $K_1(Y) = \operatorname{Ker}(rk)$, то имеет место разложение

$$K(Y) = K_1(Y) \oplus H^0(Y;\ \mathbf{Z}).$$

В [1], (3.1.6), показано, что каждый элемент в $K_1(Y)$ нильпотентен. Поэтому элемент из

$$K_G(Y)_p \cong K(Y) \otimes R(G)_p \cong (K_1(Y) \otimes R(G)_p) \oplus (H^0(Y;\ \mathbf{Z}) \otimes R(G)_p)$$

обратим тогда и только тогда, когда его образ в $H^0(Y; \mathbf{Z}) \otimes R(G)_p$ обратим. Но $H^0(Y; \mathbf{Z}) \otimes R(G)_p$ можно отождествить с кольцом непрерывных функций $Y \to R(G)_p$, а элемент этого кольца обратим тогда и только тогда, когда его значение в каждой точке $P \in Y$ обратимо.

Теперь мы должны сделать некоторые замечания о множестве неподвижных точек X^g элемента $g \in G$. Поскольку G — компактная группа, мы, усреднив по G, можем предположить, что g — изометрия в некоторой римановой метрике. Пусть $P \in X^g$ и T_P — касательное пространство к X в P. Тогда g индуцирует линейное преобразование $g \mid T_P$ пространства T_P. Если $\xi \in T_P$ неподвижен относительно $g \mid T_P$, то неподвижной будет и геодезическая в направлении ξ. Из этого легко следует, что в окрестности точки P X^g является образом при экспоненциальном отображении [2]) собственного подпространства $g \mid T_P$ с собственным значением $+1$. Поэтому X^g — подмногообразие X, и у линейного преобразования $g \mid N_P$, индуцированного g на нормали N_P к X^g в P, нет собственного значения $+1$. Другими словами,

$$\det(1 - g \mid N_P) \neq 0. \tag{2.4}$$

Применим теперь лемму 2.2. для получения следующей леммы.

Лемма 2.3. *Пусть G — топологически циклическая группа с образующей g и X — компактное G-пространство. Пусть N^g — нормальное расслоение* [3]) *X^g в X. Тогда*

$$\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) \in K_G(X^g)$$

становится обратимым элементом в $K_G(X^g)_g$.

Доказательство. По лемме 2.2 достаточно рассмотреть ограничение на каждую точку $P \in X^g$. Элемент $\chi \in R(G)$, т. е. характер,

---

[1]) Для наших целей достаточен случай $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, где Y_i — связные пространства, так что $H^0(Y; \mathbf{Z})$ — свободная абелева группа, с одной образующей для каждого Y_i.

[2]) Определенном выбранной римановой метрикой

[3]) X^g может иметь компоненты различной размерности, так что N^g является векторным расслоением, размерность которого может быть различна над различными компонентами.

обратим в $R(G)_g$ тогда и только тогда, когда $\chi(g) \neq 0$. Если χ — ограничение $\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ в точке $P \in X^g$, то [1])

$$\chi(g) = \sum (-1)^i \operatorname{Tr} \lambda^i (g \mid N_P \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \det_{\mathbf{C}}(1 - g \mid N_P \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \det_{\mathbf{R}}(1 - g \mid N_P) \neq 0 \text{ в силу } (2.4).$$

Доказательство закончено.

Теперь мы можем доказать наш основной результат.

Предложение 2.1. *Пусть G — топологически циклическая группа с образующей g, X — компактное G-многообразие. Тогда*

$$i_!\colon K_G(TX^g) \to K_G(TX)$$

после локализации по простому идеалу в $R(G)$, определенному g, становится изоморфизмом

$$(i_!)_g\colon K_G(TX^g)_g \to K_G(TX)_g.$$

Обратный к нему равен

$$\frac{i_g^*}{\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})},$$

где i_g^* — локализация гомоморфизма ограничения

$$i^*\colon K_G(TX) \to K_G(TX^g).$$

Доказательство. По теореме 1.1 (локализации) i_g^* — изоморфизм; нужно только заметить, что по (2.4)

$$TX^g = (TX)^g$$

или, другими словами, что касательные векторы к X, неподвижные относительно g, как раз являются касательными векторами к X^g. Ввиду леммы 1.1 композиция $i^* i_!$ является умножением на $\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$. Поскольку G тривиально действует на TX^g,

$$K_G(TX^g) \cong K(TX^g) \otimes R(G)$$

и, значит (1 обозначает группу из одного элемента),

$$\operatorname{ind}_G^{X^g} \cong \operatorname{ind}_1^{X^g} \otimes Id.$$

Поэтому зависимость $\operatorname{ind}_G^{X^g}$ от G довольно тривиальна. С другой стороны, зависимость ind_G^X от G не так тривиальна. Однако, локализуя (2.1), мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K_G(TX^g)_g \arrow[rr, "(i_!)_g"] \arrow[dr, "(\operatorname{ind}_G^{X^g})_g"'] & & K_G(TX)_g \arrow[dl, "(\operatorname{ind}_G^X)_g"] \\ & R(G)_g & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

и из предложения 2.1 мы знаем, что $(i_!)_g$ — изоморфизм. Это значит, что ind_G^X, локализованный в g, можно вычислить через ind_1^X. Точнее, из предложения 2.1 и формулы (2.5) мы получаем следующее

[1]) Мы пишем $\det_{\mathbf{R}}$ и $\det_{\mathbf{C}}$, когда нужно отличить детерминанты вещественных и комплексных линейных преобразований.

Предложение 2.2. *Пусть G, g и X такие же, как в предложении* 2.1, *и* $u \in K_G(TX)$. *Тогда*[1])

$$(\operatorname{ind}_G^X u)_g = (\operatorname{ind}_G^{X^g})_g \left[\frac{i^* u}{\lambda^{-1}(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})}\right]. \tag{2.6}$$

Эта формула вычисляет образ $\operatorname{ind}_G^X u$ в локализованном кольце $R(G)_g$. Более обычным способом вычисления элемента из $R(G)$ является рассмотрение его как функции на G и вычисления значения этой функции на всех элементах G. Для вычисления этого значения на образующей g заметим, что отображение взятия значения $R(G) \to \mathbf{C}$, задающееся формулой $\chi \to \chi(g)$, проводится через локальное кольцо: отображение взятия значения $R(G)_g \to \to \mathbf{C}$, задаваемое формулой $\chi/\psi \to \chi(g)/\psi(g)$, определено, поскольку $\psi(g) \neq 0$. Таким образом, предложение 2.2 приводит к формуле для $(\operatorname{ind}_G^X u)(g)$. Чтобы записать ее в удобной форме, введем для каждого тривиального G-пространства Y отображение взятия значения

$$K_G(Y) \cong K(Y) \otimes R(G) \to K(Y) \otimes \mathbf{C},$$
$$K_G(Y)_g \cong K(Y) \otimes R(G)_g \to K(Y) \otimes \mathbf{C},$$

задаваемые соответственно формулами

$$u \otimes \chi \to u \otimes \chi(g),$$
$$u \otimes \chi/\psi \to u \otimes \chi(g)/\psi(g),$$

для $u \in K(Y)$. Беря $Y = TX^g$, мы можем вычислить (2.6) на элементе g и получаем формулу

$$(\operatorname{ind}_G^X u)(g) = (\operatorname{ind}_1^{X^g} \otimes Id)\left\{\frac{i_* u(g)}{\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g)}\right\}, \tag{2.7}$$

где

$$\operatorname{ind}_1^{X^g} \otimes Id\colon K(TX^g) \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{Z} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{C}$$

— естественное расширение $\operatorname{ind}_1^{X^g}$, получаемое тензорным умножением на $\mathbf{C}$.

В (2.7) мы предположили, что G — топологически циклична и порождена элементом g. Для произвольной группы G и любого $g \in G$ обозначим через H подгруппу, порожденную g. Для $u \in K_G(TX)$ пусть u_H — элемент в $K_H(TX)$, индуцированный u. Ввиду естественности топологического индекса

$$\operatorname{ind}_G^X u(g) = \operatorname{ind}_H^X u_H(g).$$

Применяя (2.7) с H вместо G, мы получаем точное выражение для топологического индекса-характера ind_G^X через обычный топологический (целочисленный) индекс различных множеств неподвижных точек; другими словами, группу G можно исключить из рассмотрения.

Если мы соединим эту формулу для топологического индекса с основной теоремой из [5], мы получим общую «формулу Лефшеца». А именно, пусть E — эллиптический комплекс на X, инвариантный относительно G и $\sigma(E)$ —

[1]) Выражение в квадратных скобках нужно понимать, конечно, как элемент локализованного кольца $K_G(TX^g)_g$.

его последовательность символов. Она определяет элемент $u = [\sigma(E)] \in K_G(TX)$, и аналитический индекс u, вычисленный в g, есть число Лефшеца

$$L(g, E) = \sum (-1)^i \operatorname{Tr}(g \mid H^i(E)),$$

где $H^i(E)$ — группы гомологий эллиптического комплекса.

Формула (2.7) приводит теперь к следующей общей теореме Лефшеца о неподвижной точке для G-инвариантного эллиптического комплекса.

Теорема 2.1. *Пусть G — компактная группа Ли, X — компактное G-многообразие, E — эллиптический комплекс на X, на котором действует G. Для каждого $g \in G$ обозначим через X^g множество неподвижных точек g, через N^g — нормальное расслоение к X^g в X. Пусть, наконец, $u = [\sigma(E)] \in K_G(TX)$ — класс символа E и $i^*u \in K_G(TX^g)$ — его ограничение на X^g. Применяя отображение взятия значения*

$$K_G(TX^g) \cong K(TX^g) \otimes R(G) \to K(TX^g) \otimes \mathbf{C},$$

задаваемое формулой $a \otimes \chi \to a \otimes \chi(g)$, мы можем образовать элементы $i^*u(g)$ и $\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g)$ в $K(TX^g) \otimes \mathbf{C}$. Второй из этих элементов обратим, и поэтому можно определить

$$\frac{i^*u(g)}{\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g)} \in K(TX^g) \otimes \mathbf{C}.$$

Тогда число Лефшеца $L(g, E)$ задается формулой

$$L(g, E) = \operatorname{ind}\left\{\frac{i^*u(g)}{\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g)}\right\}, \tag{2.8}$$

где $\operatorname{ind}: K(TX^g) \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ — *естественное расширение топологического индекса* $K(TX^g) \to \mathbf{Z}$.

Замечание 1. Теорема 2.1 сводит задачу вычисления индекса в $R(G)$, или числа Лефшеца, к вычислению обычного индекса в $\mathbf{Z}$. В принципе этим можно было бы воспользоваться для доказательства равенства a-ind $=$ t-ind с группой G из соответствующего равенства без группы. Однако это было бы довольно искусственно, поскольку основным шагом в любом случае является коммутативная диаграмма (2.1) (и для a-ind и для t-ind).

Замечание 2. Применяя точную когомологическую формулу для индекса из [4] к теореме 2.1 можно, конечно, получить соответствующее выражение для $L(g, E)$. Это будет подробно проделано в статье III этой серии.

Замечание 3. Когда множество неподвижных точек X^g конечно, топологический индекс $K(TX^g) \to \mathbf{Z}$ тривиален и теорема 2.1 немедленно приводит к точной формуле Лефшеца из [2]. Это будет развито в следующем параграфе, а сейчас мы хотим только уточнить связь нашей теоремы 2.1 с основной теоремой из [2]. В [2] рассматриваются произвольные отображения с простыми неподвижными точками. Эти отображения не обязаны быть обратимыми, и даже если они обратимы, они могут не лежать ни в какой компактной группе автоморфизмов эллиптического комплекса. Методы деформации, пригодные в случае компактных групп (ввиду дискретности характеров) здесь неприменимы и доказательство в [2] ведется прямым анализом. В случае, когда множество неподвижных точек имеет более высокую размерность, для прямых рассмотрений требуется более тонкий анализ, и поэтому наше использование деформаций очень выгодно, правда, лишь в тех случаях, когда оно применимо, т. е. в случае компактной группы.

Замечание 4. Правая часть формулы (2.8) является a priori произвольным комплексным числом. Число Лефшеца $L(g, E)$ является, с другой стороны, значением характера группы G в точке g. Если, например, G конечна, эти значения должны быть целыми алгебраическими числами. Таким образом, теорема 2.1 приводит к «теоремам целочисленности» для действия групп на многообразиях. Это будет разъяснено в следующем параграфе. Следует, возможно, указать, что для циклических групп эти «теоремы целочисленности» не зависят от анализа в [5], поскольку мы определили число Лефшеца топологически.

§ 3. Частные случаи и приложения

Прежде всего, мы, как отмечено в замечании 3, рассмотрим случай, когда множество неподвижных точек X^g состоит из конечного числа точек. В этом случае

$$K(TX^g) = \prod_P K(P),$$

где P пробегает неподвижные точки g. Топологический индекс совпадает на каждом сомножителе $K(P)$ с естественным изоморфизмом $K(P) \cong \mathbf{Z}$. Нормальное расслоение N^g в P совпадает с касательным пространством T_P к X в P и

$$\lambda_{-1}(T_P \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g) = \det(1 - g \mid T_P).$$

Если, наконец, E_i — расслоения эллиптического комплекса E, то компонента $(i^x u)_P$ есть $\Sigma(-1)^i E_i$ и ее значение в g равно

$$\sum (-1)^i \operatorname{Tr}(g \mid E_i).$$

Поэтому в качестве частного случая теоремы 2.1 получается

Теорема 3.1. *Пусть G — компактная группа Ли, X — компактное G-многообразие, E — эллиптический комплекс на X, на котором действует G. Пусть $g \in G$ имеет конечное число неподвижных точек. Тогда число Лефшеца $L(g, E)$ задается формулой*

$$L(g, E) = \sum_P \nu(P),$$

где суммирование ведется по всем неподвижным точкам g и

$$\nu(P) = \frac{\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(g \mid E_{i,P})}{\det(1 - g \mid T_P)}. \tag{3.1}$$

Покажем теперь, что эта формула совпадает с формулой, приведенной в [2]. Для этого рассмотрим отображение $f \colon X \to X$, заданное формулой $f(x) = g^{-1}x$, и отображения

$$\varphi_{i,x} \colon E_{i, f(x)} \to E_{i,x},$$

определенные действием g. Отображение T_i на сечениях E_i, индуцированное (f, φ_i), совпадает с естественным действием g: если $s \in \Gamma(E_i)$, то

$$(gs)(gx) = g(s(x))$$

или

$$(gs)(y) = g(s(g^{-1}y)) = \varphi_{i,x} s(f(y)) = (T_i s)(y).$$

Поэтому $L(g, E) = L(T)$ совпадает с числом Лефшеца из [2]. Что касается членов $\nu(P)$ в [2], они определялись там формулой

$$\frac{\sum (-1)^i \operatorname{Tr} \varphi_{i,P}}{|\det(1 - df_P)|}.$$

Но $\varphi_{i,P} = g | E_{i,P}$ и $df_P = g^{-1} | T_P$. Поскольку $g | T_P$ ортогональное преобразование,

$$\det(1 - g^{-1} | T_P) = \det(1 - g | T_P) > 0.$$

Поэтому

$$\det(1 - g^{-1} | T_P) = |\det(1 - df_P)|,$$

так что члены $\nu(P)$ в (3.1) равны соответствующим членам в [2].

Теорема 3.1 имеет несколько интересных приложений, но поскольку эти вопросы подробно рассматривались в [3], мы не будем заниматься ими здесь.

Другой, представляющий специальный интерес случай возникает, когда X — компактное комплексное многообразие, а G — конечная группа комплексных аналитических автоморфизмов X. Пусть, кроме того, V — голоморфное векторное G-расслоение на X. Тогда комплекс Дольбо $A(V)$

$$\longrightarrow A^{0,p}(V) \xrightarrow{\bar\partial} A^{0,p+1}(V) \longrightarrow$$

(где $A^{0,p}(V)$ — дифференциальные формы типа $(0, p)$ на X с коэффициентами из V) является эллиптическим комплексом, на котором действует G. Группы гомологий этого комплекса можно отождествить с группами когомологий $H^p(X, \mathcal{O}(V))$ пучка $\mathcal{O}(V)$ ростков голоморфных сечений V. Число Лефшеца равно поэтому

$$L(g, A(V)) = \sum_p (-1)^p \operatorname{Tr}(g | H^p(X, \mathcal{O}(V))).$$

Рассмотрим теперь множество X^g неподвижных точек элемента g. Это — комплексное подмногообразие X. Если $a(X, V) \in K_G(TX)$ — класс символа комплекса Дольбо $A(V)$, то его ограничение на $K_G(TX^g)$ задается равенством

$$i^* a(X, V) = a(X^g, V | X^g)\, \lambda_{-1}(\bar N^*),$$

где N — (комплексное) нормальное расслоение X^g в X. Это следует из обычного разложения внешней алгебры в прямую сумму. Кроме того, у нас есть изоморфизмы

$$N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong N \oplus \bar N, \qquad \bar N \cong N^*,$$

и, значит,

$$\frac{\lambda_{-1}(\bar N^*)}{\lambda_{-1}(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})} = \frac{\lambda_{-1}(N)}{\lambda_{-1}(N) \cdot \lambda_{-1}(N^*)} = \frac{1}{\lambda_{-1}(N^*)}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\frac{i^*a(X, V)}{\lambda_{-1}(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})} = \frac{a(X^g, V \mid X^g)}{\lambda_{-1}(N^*)} = \frac{a(X^g)[V \mid X^g]}{\lambda_{-1}(N^*)}, \tag{3.2}$$

где $a(X^g)$ — класс символа комплекса Дольбо на X^g.

Если U — голоморфное векторное расслоение на компактном комплексном многообразии Y, через $\chi(Y, U)$ обычно обозначается эйлерова характеристика

$$\sum (-1)^p \dim H^p(Y, \mathcal{O}(U)),$$

т. е. индекс комплекса Дольбо $A(Y, U)$. Мы распространим это обозначение на любое $u \in K(Y) \otimes \mathbf{C}$, т. е. положим

$$\chi(Y, u) = \operatorname{ind}(a(Y) \cdot u) \in \mathbf{C}.$$

В этих обозначениях (3.2) принимает вид

$$\operatorname{ind}\left\{\frac{i^*a(X, V)(g)}{\lambda_{-1}(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g)}\right\} = \chi\left(X^g, \frac{[V \mid X^g](g)}{\lambda_{-1}(N^*)(g)}\right).$$

Учитывая это равенство в теореме 2.1, получаем, что имеет место следующая

Теорема 3.2. *Пусть X — компактное комплексное многообразие, V — голоморфное векторное расслоение на X, G — конечная группа автоморфизмов пары (X, V). Для каждого $g \in G$ через X^g обозначим множество неподвижных точек g в X, а через N^g — (комплексное) нормальное расслоение к X^g в X. Тогда*

$$\sum (-1)^p \operatorname{Tr}(g \mid H^p(X, \mathcal{O}(V))) = \chi\left(X^g, \frac{[V \mid X^g](g)}{\lambda_{-1}((N^g)^*)(g)}\right).$$

Замечание. В случае общего эллиптического комплекса E с классом символа u мы можем ограничить на $K_G(TX^g)$ только u, а не сам комплекс. В голоморфном случае, однако, имеется в некотором смысле естественное ограничение, и поэтому теорему 3.2 можно сформулировать без обращения к символам.

Покажем теперь, что из теоремы 3.2 в действительности следует теорема Римана — Роха для комплексного пространства X/G. Для этого нам нужна следующая

Лемма 3.1. *Пусть X, V, G — такие, как и в теореме 3.2 и $f: X \to X/G$ — проекция X на аналитическое пространство X/G. Тогда имеют место естественные изоморфизмы*

$$(H^p(X, \mathcal{O}(V)))^G \cong H^p(X/G, (f_* \mathcal{O}(V))^G),$$

где $(\quad)^G$ обозначает инвариантную часть относительно действия G.

Доказательство. Напомним, что структурным пучком на X/G является, по определению, $f_*(\mathcal{O}_X)^G$. Все высшие прямые образы $R^q f_*(\mathcal{O}(V))$ ($q \geqslant 0$ равны нулю, поскольку каждая точка $y \in X/G$ имеет базис окрестностей U таких, что $f^{-1}(U)$ является объединением конечного числа непересекающихся комплексных шаров. Поэтому спектральная последовательность Лере

$$H^p(X/G, R^q f_*(\mathcal{O}(V))) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{O}(V))$$

вырождается и приводит к изоморфизмам

$$H^p(X/G,\ f_*(\mathcal{O}(V)))\cong H^p(X,\ \mathcal{O}(V)).$$

Беря инвариантные части с обеих сторон и замечая, что

$$H^p(X/G,\ (f_*(\mathcal{O}(V)))^G)\cong H^p(X/G,\ f_*(\mathcal{O}(V)))^G$$

(поскольку $(\ )^G$ — точный функтор в категории векторных пространств над $\mathbf{C}$), получаем нужный результат.

Если W — голоморфное векторное расслоение на $Y = X/G$, то $V = f^*W$ — голоморфное G-векторное расслоение на X и $(f_*(\mathcal{O}(V)))^G \cong \mathcal{O}(W)$. Поэтому эйлерова характеристика

$$\chi(Y,\ W)=\sum(-1)^p\dim H^p(Y,\ \mathcal{O}(W))$$

может быть вычислена из следующей теоремы:

Теорема 3.3. *Пусть G — конечная группа автоморфизмов компактного комплексного многообразия X и W — голоморфное векторное расслоение на комплексном пространстве $Y = X/G$. Тогда*

$$\chi(Y,\ W)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mu(g),$$

где

$$\mu(g)=\chi\left(X^g,\ \frac{[f^*W(X^g)](g)}{\lambda_{-1}((N^g)^*)(g)}\right),$$

N^g — нормальное расслоение к X^g в X и $|G|$ — число элементов в G.

Доказательство. По лемме 3.1

$$\chi(Y,\ W)=\sum(-1)^p\dim H^p(X,\ \mathcal{O}(f^*W))^G.$$

Теорема сразу следует из соединения этого равенства с теоремой 3.2 и того, что для любого G-модуля M

$$\dim M^G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr}(g\mid M).$$

Замечание 1. Теорема 3.3 сводит теорему Римана — Роха для *пространства с особенностями* X/G к теореме Римана — Роха для *многообразий* X. Поэтому если члены $\mu(g)$ выражены в точной когомологической форме, мы получим точную формулу для $\chi(Y,\ W)$. Это особенно интересно в случае автоморфных форм (см. [6]).

Замечание 2. Возможно, что теоремы 3.2 или 3.3 обобщаются на абстрактную алгебраическую геометрию в предположении, что $|G|$ взаимно просто с характеристикой основного поля.

Другим интересным частным случаем теоремы является оператор Дирака спинорного многообразия, но мы отложим этот пример до статьи III (в случае, когда неподвижные точки изолированы, см. [3] § 8).

Теорема 2.1 становится особенно простой, если нормальное расслоение N^g на X^g будет G-тривиально (т. е. изоморфно $X^g\times M$ для некоторого G-модуля M), или если оно по крайней G-тривиально на каждой связной компоненте. В этом случае на каждой связной компоненте $\lambda_{-1}(N\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})$

будет элементом $R(G)$, значение которого в g равно

$$\lambda_{-1}(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})(g) = \det(1 - g \mid N_P),$$

где P — любая точка соответствующей связной компоненты, и формула (2.8) приводится к виду

$$L(g, E) = \sum_j \sigma_j,$$

где суммирование ведется по всем связным компонентам X_j^g множества X^g

$$\sigma_j = \frac{1}{\det(1 - g \mid N_j)} \operatorname{ind} i_j^* u(g)$$

$i^* u_j \in K_G(TX_j^g)$ и N_j — слой N в какой-нибудь точке X_j^g. Теорема 3.1, относящаяся к конечному множеству является, конечно, частным случаем ситуации, когда нормальное расслоение тривиально на каждой связной компоненте.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ф. Атья, K-теория, М., «Мир», 1967.
[2] M. F. Atiyah, R. Bott, The Lefschetz fixed-point theorem for elliptic complexes. I, Ann of Math. **86** (1967), 374—407.
[3] M. F. Atiyah, R. Bott, The Lefschetz fixed-point theorem for elliptic complexes. II, Ann. of Math. **00** (1968).
[4] M. F. Atiyah, I. M. Singer, The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422—433.
[5] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. I, УМН **23**, вып. 5 (143) (1968), 99—142.
[6] Ф. Хирцебрух, Эллиптические дифференциальные операторы на многообразиях, УМН **23**, вып. 1 (139) (1968), 191—209.
[7] G. B. Segal, Equivariant K-theory, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci (Paris) (1968).