М.Хирш

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Книга принадлежит перу известного американского тополога и представляет собой учебное пособие по дифференциальной топологии, включающее разнообразные сведения из анализа и алгебраической топологии. Изложение построено так, что необходимый запас предварительных знаний сведен к минимуму. Много внимания уделено методической стороне дела: мотивированности определений и геометрической наглядности формулировок автор придает не меньшее значение, чем полноте доказательств.

Книга будет полезна математикам всех специальностей, а также студентам физико-математических факультетов университетов и пединститутов.

Содержание

Предметный указатель

В эгой книге излагаются некоторые из основных топологических идей, используемых при изучении гладких многообразий и отображений. Предварительные требования сведены к минимуму: достаточную подготовку обеспечивают стандартные курсы анализа и общей топологии. Краткий обзор этого материала содержится в приложении.

Чтобы подчеркнуть геометрические и интуитивные аспекты дифференциальной топологии, я старался избегать применения алгебраической топологии; несколько отдельных мест, где это мне не удалось, читатель вполне может пропустить. По тем же причинам я не использовал дифференциальных форм и тензоров.

На мой взгляд, продвинутая алгебраическая техника, скажем теория гомологий, делается более ясной, если сначала понять, как из геометрического или аналитического сырья извлекаются числовые инварианты, подобные тем, которые изучаются в этой книге: степень отображения, число Эйлера векторного расслоения, род поверхности, кобордический класс многообразия и т. д. После знакомства с подобными примерами внедрение в топологию гомологий или гомотопий должно показаться вполне естественным.

В книге имеются сотни упражнений, как совсем простых, так и более сложных, вплоть до нерешенных проблем. Они содержат примеры и дополнения к основному материалу и лишь в очень немногих случаях используются в доказательствах теорем.

Посвящается памяти
Генри Уайтхеда

Введение

Если проблема нелинейна по своему характеру, если в ней участвует более чем одна система координат или более чем одно переменное или если она касается нелокальным образом определяемой структуры, то решение этой проблемы обычно требует привлечения топологии или теории групп. Классический анализ, как правило, применяется при решении подобных проблем как средство предварительного локального изучения, последующая же глобализация производится с помощью топологии или теории групп.

М. Морс, Вариационное исчисление в целом, 1934

Возможность использования дифференциальной модели — вот, на мой взгляд, последнее оправдание применения количественных моделей в науках.

Р. Том, Структурная устойчивость и морфогенез, 1972

Во многих разделах математики приходится сталкиваться с пространствами, которые локально могут быть описаны наборами из n вещественных чисел. Такие объекты называются многообразиями: *многообразие есть топологическое пространство, которое локально гомеоморфно евклидову n-пространству* $\mathbb{R}^n$. Можно представлять себе многообразие как составленное из кусков пространства $\mathbb{R}^n$, склеенных друг с другом посредством гомеоморфизмов. Если эти гомеоморфизмы выбраны гладкими, мы получаем *гладкое многообразие*. Эта книга посвящена главным образом гладким многообразиям.

Развитие дифференциальной топологии

Понятие многообразия появилось не сразу: оно постепенно выходило из геометрии и теории функций девятнадцатого столетия. Дифференциальные геометры исследовали кривые и поверхности в «обычном пространстве»; их по большей части интересовали локальные понятия, такие, как кривизна. В то же время специалисты по теории функций приняли более глобальную точку зрения; они поняли, что инварианты функции F нескольких вещественных или комплексных переменных можно строить с помощью топологических инвариантов множеств $F^{-1}(c)$; «для большинства» значений c последние являются многообразиями.

Все же можно сказать, что землю, на которой выросла теория многообразий, распахал Риман, построив то, что мы называем римановыми поверхностями. Они были, вероятно, первыми абстрактными многообразиями, определявшимися не как подмножества евклидова пространства.

Римановы поверхности доставляют отличную иллюстрацию того, как многообразия могут применяться к исследованию глобальных вопросов. Идея рассматривать сходящиеся степенные ряды (от одного комплексного переменного) сама по себе не нова. Но процесс аналитического продолжения превращает это простое локальное понятие в довольно сложное глобальное. Совокупность всех возможных аналитических продолжений данного сходящегося степенного ряда имеет совершенно неуловимую глобальную сущность. Однако этот глобальный аспект делается ясным, как только вводятся в рассмотрение римановы поверхности: продолжения составляют (однозначную) функцию на такой поверхности. *Поверхность выражает глобальную природу процесса аналитического продолжения.* Так геометризуется эта проблема.

Риман ввел и глобальный инвариант поверхности: ее *связность*. Это — увеличенное на единицу максимальное число замкнутых кривых, объединение которых не разрезает поверхность. Уже в 60-х годах прошлого века было известно и «доказано», что компактные ориентируемые поверхности топологически классифицируются своей связностью. Удивительно, что никто в девятнадцатом веке не видел необходимости доказывать тонкую и трудную теорему, что связность компактной поверхности всегда *конечна.*

Топологический анализ трехмерных многообразий начал Пуанкаре. В серии работ, объединяемых названием «Analysis Situs», замечательной своей оригинальностью и мощью, он построил многие из основных инструментов алгебраической топологии. Он завещал нам также самую важную из нерешенных проблем дифференциальной топологии, так называемую *гипотезу Пуанкаре*: всякое ли односвязное компактное 3-многообразие без края гомеоморфно 3-сфере?

Интересно, что в начале своей серии работ Пуанкаре использовал чисто дифференциальные методы, а затем переключился на комбинаторную технику. И на протяжении тридцати последующих лет топологи сосредоточились почти исключительно на комбинаторных и алгебраических методах.

Хотя определение абстрактных гладких многообразий было дано Германом Вейлем в 1912 г. (в книге, посвященной римановым поверхностям), это понятие сделалось важным математическим объектом, имеющим собственный круг проблем и методов, только после работы Уитни 1936 г. и более поздних его работ.

Работы Уитни дали толчок быстрому развитию дифференциальной топологии. Были вскрыты многие ее плодотворные связи с алгебраической и кусочно-линейной топологией; удалось достичь значительного прогресса в решении проблем, связанных с вложениями, погружениями и классификациями с точностью до гомотопической эквивалентности или диффеоморфизма. Однако гипотеза Пуанкаре не доказана и не опровергнута до сих пор.

В последние годы дифференциальная топология сделалась одной из важнейших математических дисциплин, методы и результаты которой проникают во многие разделы математики.

Природа дифференциальной топологии

В сегодняшних математических науках многообразия встречаются повсеместно. В алгебре они появляются как группы Ли; в теории относительности — как пространство-время; в экономике — как поверхности безразличия; в механике — как фазовые пространства и уровни энергии. Всюду, где приходится иметь дело с динамическими процессами (в гидродинамике, генетике популяций, теории электрических цепей и т. д.), многообразия используются в качестве «пространств состояний», т. е. пространств, в которых можно моделировать процесс с помощью дифференциального уравнения или отображения.

В большинстве из этих примеров историческое развитие следует общему образцу, который можно описать как *переход от локального к глобальному*. Например, группы Ли были первоначально «локальными группами», имеющими единую параметризацию как окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$. Лишь позднее возникли глобальные вопросы, такие, как классификация компактных групп. Во всех случаях введением многообразий достигается (хотя бы частичная) геометризация глобальной природы предмета. Например, в механике различия в возможном долгосрочном поведении двух физических систем делаются понятными, если известно, скажем, что один уровень энергии есть сфера, а другой — тор.

Когда многообразия «естественно» появляются в той или иной области математики, они обязательно несут какую-нибудь дополнительную структуру: риманову метрику, бинарную операцию, динамическую систему, конформную структуру и т. д. Обычно эта структура и оказывается главным объектом изучения; многообразие же играет роль декорации. Но дифференциальный тополог изучает многообразия сами по себе, используя дополнительные структуры в качестве инструментов.

С дополнительными структурами бывают связаны очень интересные локальные вопросы. Скажем, в римановой геометрии кривизна может меняться от точки к точке. Но *в дифференциальной* *топологии нет локальных вопросов.* (Правильнее сказать, они принадлежат математическому анализу.) Многообразие устроено совершенно одинаково во всех своих точках, потому что оно локально евклидово. В действительности многообразие (связное, без края) однородно в более точном смысле: группа его диффеоморфизмов действует транзитивно.

Вопросы, на которые пытается ответить дифференциальная топология, глобальны: они касаются всего многообразия. Вот несколько типичных вопросов. Может ли данное многообразие быть вложено в другое данное многообразие? Если два многообразия гомеоморфны, обязаны ли они быть диффеоморфными? Какие многообразия являются краями компактных многообразий? Обладают ли какими-нибудь специальными свойствами топологические инварианты многообразий? Всякое ли многообразие допускает нетривиальное действие какой-нибудь конечной циклической группы?

Каждый из такого рода вопросов требует для своего решения построения специальной *теории.* Например, вопрос о вложениях в действительности означает: определить и вычислить дифференциальные инварианты, с помощью которых можно узнать, вкладывается ли M в N и сколько имеется существенно различных способов такого вложения.

Если бы мы знали, как построить все возможные многообразия и как узнать по «вычислимым» инвариантам, какие из них диффеоморфны, нам было бы легко ответить на любой вопрос, касающийся многообразий. К несчастью, в настоящее время трудно надеяться доказать такую классификационную теорему, если не ограничиваться очень специальными классами многообразий (такими, как поверхности). Поэтому нам приходится атаковать в лоб каждую конкретную задачу, создавая для каждой из них отдельную теорию. Некоторые из этих теорий или их части представлены в этой книге.

Содержание этой книги

Первая трудность, с которой мы сталкиваемся при изучении многообразий, заключается в их однородности. Многообразие не имеет выделенных частей: каждая его точка выглядит абсолютно так же, как любая другая его точка. Как нам разбить его на более простые объекты?

Выход заключается в том, чтобы искусственно ввести в многообразие какую-нибудь неоднородную структуру, легко поддающуюся изучению. После этого главная задача будет состоять в том, чтобы извлечь внутренние свойства исходного многообразия из свойств искусственной структуры.

Такая процедура применяется во многих разделах математики. Например, изучая векторные пространства, вводят координаты, фиксируя базис. Число элементов этого базиса, как затем доказывается, зависит только от исходного векторного пространства. В алгебраической топологии гомологические группы полиэдра определяются с помощью фиксированной триангуляции, и только после этого доказывается, что эти группы от триангуляции не зависят.

В действительности и многообразия часто изучаются с помощью триангуляций. Однако более естественное разбиение доставляют линии уровня $f^{-1}(y)$ гладкой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, особенности (вырождения дифференциала) которой устроены простейшим возможным образом. Этот метод восходит к Пуанкаре и даже к Мёбиусу (1866); однако его систематическое развитие является заслугой Марстона Морса, и в настоящее время он называется *теорией Морса*. Гл. 6 этой книги посвящена элементарным аспектам теории Морса. В гл. 9 теория Морса применяется к классификации компактных поверхностей.

Основной идеей дифференциальной топологии может считаться идея *общего положения*, или *трансверсальности*; этот предмет изучается в гл. 3. Два подмногообразия A, B многообразия N находятся в общем положении, если в любой точке пересечения $A \cap B$ касательные пространства многообразий A и B порождают касательное пространство многообразия N. Если A и B не находятся в общем положении, их можно привести в общее положение сколь угодно малым возмущением одного из них. Если они уже находятся в общем положении, они остаются в нем при произвольном достаточно малом возмущении; пересечение $A \cap B$ является при этом подмногообразием «правильной» размерности. Отображение $f\colon M \to N$ называется *трансверсальным* к A, если график этого отображения и произведение $M \times A$ находятся в общем положении в $M \times N$. В этом случае $f^{-1}(A)$ оказывается подмногообразием многообразия M, и топологические свойства указанного подмногообразия отражают свойства отображения f. На этом пути устанавливаются важные связи между многообразиями и отображениями.

Трансверсальность играет в дифференциальной топологии унифицирующую роль; многие результаты дифференциальной топологии, в том числе многие результаты этой книги, в конечном счете основаны на той или иной разновидности трансверсальности.

В следующем смысле основана на трансверсальности теория степени отображения, которую мы строим в гл. 5. Пусть $f\colon M \to N$ — отображение между компактными ориентируемыми многообразиями одной размерности, не имеющими края. Предположим, что f трансверсально к некоторой точке $y \in N$; такая точка называется регулярным значением отображения f. Степень отображения f есть «алгебраическое» число точек прообраза $f^{-1}(y)$, т. е. число точек этого прообраза, в которых f сохраняет ориентацию, минус число точек, в которых f обращает ориентацию. Оказывается, что степень не зависит от выбора y [1]) и зависит в действительности только от гомотопического класса отображения f. Если $N = S^n$, то степень является *единственным* гомотопическим инвариантом. На этом пути можно получить один из классических результатов алгебраической топологии: множество гомотопических классов $[M, S^n]$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с группой целых чисел

Сильнее всего взаимосвязь между алгебраической и дифференциальной топологией ощущается в теории расслоений, особенно в теории векторных расслоений. Скроенные по образцу касательных и нормальных расслоений многообразий, векторные расслоения аналогичны многообразиям по форме, но значительно легче, чем многообразия, поддаются изучению. Среди наиболее глубоких дифференциальных инвариантов большинство составляют инварианты касательного расслоения. В гл. 4 мы построим элементарную теорию векторных расслоений, включающую классификационную теорему: классы изоморфных векторных расслоений над M естественно соответствуют гомотопическим классам отображений базы M в так называемое грассманово многообразие. Этот результат открывает путь новому и очень важному взаимодействию между теорией гомотопий и дифференциальной топологией.

Другим результатом, делающим теорию векторных расслоений важной для дифференциальной топологии, является теорема о трубчатых окрестностях: подмногообразие B многообразия M обладает, по существу, единственной трубчатой окрестностью, которая устроена как векторное расслоение над B.

В 1954 г. Рене Том предложил новое отношение эквивалентности между многообразиями: *кобордизм* [2]). Два многообразия называются кобордантными, если вместе они составляют край компактного многообразия. Возникающее множество классов эквивалентности в каждой размерности обладает естественной структурой абелевой группы. Пользуясь мощнейшими средствами дифференциальной и алгебраической топологии, Том показал, что эти группы совпадают с определенными гомотопическими группами, и значительно продвинулся в вычислении последних. Элементарные аспекты теории Тома, которая представляет собой прекрасную смесь трансверсальности, трубчатых окрестностей и классификации векторных расслоений, излагаются в гл. 7.

Опишем коротко темы остальных глав. Гл. 1 содержит основные определения и доказательство «легкой» теоремы Уитни о вло-

---

[1]) Если N связно.— *Прим. перев.*

[2]) Годом раньше это отношение, под названием «внутренняя гомологичность», было введено В. А. Рохлиным.— *Прим. перев.*

жениях: любое отображение компактного n-многообразия в $(2n + 1)$-многообразие может быть аппроксимировано вложениями. Гл. 2 посвящена топологизации множества отображений одного многообразия в другое и аппроксимационным теоремам. Важнейший результат заключается в том, что в большинстве ситуаций можно считать все многообразия принадлежащими классу C^∞. Читатель, интересы которого с самого начала ограничиваются компактными C^∞-многообразиями, бо̀льшую часть этой главы может пропустить. Техническая гл. 8, посвященная изотопиям, содержит описание некоторых часто используемых методов деформаций вложений; ее результаты необходимы для последней главы, посвященной классификации поверхностей.

Первые три главы необходимы для всех остальных частей книги. Бо̀льшая часть гл. 6 (Теория Морса) может читаться сразу после гл. 3; в то же время гл. 7 (Кобордизмы) может читаться сразу после гл. 4. Классификация поверхностей, т. е. гл. 9, использует материал всех предшествующих глав, кроме гл. 7.

Наиболее трудные упражнения, а также упражнения, требующие использования алгебраической топологии и других специальных предметов, отмечены звездочкой. Те немногие, которые отмечены двумя звездочками, в действительности слишком трудны, чтобы их можно было рассматривать как упражнения; они имеют своей целью ознакомить читателя с содержащимися в них результатами. Наконец, «упражнения» с тремя звездочками — это проблемы, решение которых мне не известно.

Ссылка на теорему 1 из § 2 гл. 3 кодируется как 3.2.1, или как 2.1, если эта ссылка встречается в гл. 3. Весь параграф называется при этом § 3.2. Числа в квадратных скобках означают ссылки на список литературы.

Благодарности

Я благодарен Алану Дэрфи за исправление большого количества ошибок[1]; Марни Макэлхини за перепечатку рукописи; Национальному научному фонду и Миллеровскому институту за финансовую помощь, которая неоднократно мне оказывалась, пока я работал над этой книгой.

[1]) Все же их осталость порядочно и на нашу долю.— *Прим. перев.*

Глава 1

МНОГООБРАЗИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ

> Прежде всего необходимо рассмотреть вопрос об определении многообразий.
>
> П. Хегор, Диссертация, 1892

> Семейство точек, лежащих на поверхности, есть двукратная многообразность; семейство точек, лежащих в трехмерном пространстве, есть трехкратная многообразность; значения непрерывной функции n аргументов представляют собой n-кратную многообразность.
>
> Г. Кристал, Британская Энциклопедия, 1892

> Введение чисел как координат ... есть акт насилия ...
>
> Г. Вейль, Философия математики и естествознания, 1949

Дифференциальная топология представляет собой раздел математики, изучающий гладкие многообразия и гладкие отображения. Многообразие — это топологическое пространство, которое локально выглядит как декартово n-пространство $\mathbb{R}^n$; оно составлено из кусков пространства $\mathbb{R}^n$, склеенных между собой посредством гомеоморфизмов. Если эти гомеоморфизмы являются гладкими, то мы получаем гладкое многообразие.

Задача дифференциальной топологии заключается в выявлении и исследовании глобальных свойств многообразий. Эти свойства часто оказываются довольно тонкими. Чтобы их изучать, а иногда даже просто для того, чтобы сказать, в чем они заключаются, приходится привлекать широкий круг топологических, аналитических и алгебраических средств. С некоторыми из этих средств мы познакомимся в последующих главах.

В этой главе вводятся основные понятия дифференциальной топологии: гладкие многообразия, подмногообразия и отображения и касательный функтор. Последний относит каждому гладкому многообразию M другое многообразие, TM, называемое многообразием касательных векторов, и каждому гладкому отображению $f\colon M \to N$ относит некоторое отображение $Tf\colon TM \to TN$. В локальных координатах Tf, по существу, есть дифференциал отображения f. Хотя в определении касательного функтора не удается избежать некоторой громоздкости, он необходим для решения многих проблем дифференциальной топологии;

с его помощью можно глубже проникнуть в структуру многообразий.

В § 1.3 мы докажем некоторые фундаментальные теоремы о подмногообразиях, отображениях и вложениях. Здесь мы познакомимся с ключевыми понятиями регулярных значений и трансверсальности. В частности, будет доказана теорема о регулярном значении, которая является глобальным вариантом теоремы о неявной функции. В ней предполагается заданным некоторое отображение f: $M \to N$ и утверждается, что при определенных условиях прообраз $f^{-1}(y)$ будет подмногообразием многообразия M. Свойства многообразия $f^{-1}(y)$ и отображения f оказываются тесно связанными; это приводит к возникновению чрезвычайно мощного и плодотворного взаимодействия

$$\boxed{\text{Теоремы о многообразиях}} \rightleftarrows \boxed{\text{Теоремы об отображениях}}$$

В последующих главах мы неоднократно будем эксплуатировать это взаимодействие.

В § 1.3 будет также установлен приятный факт, что всякое компактное многообразие вкладывается в некоторое $\mathbb{R}^q$. Привлекая аналитическую лемму, доказываемую в одной из последующих глав, мы докажем затем один из вариантов более глубокой теоремы вложения, принадлежащей Уитни: всякое отображение компактного n-многообразия в $\mathbb{R}^{2n+1}$ может быть аппроксимировано вложениями.

В § 1.4 вводятся многообразия с краем, или ∂-многообразия. Они доставляют естественное, и в действительности совершенно необходимое расширение понятия многообразия, определяемого в § 1.1; присутствие края приводит, однако, к дополнительным сложностям в самых разных разделах математики. Изменения в доказательствах, необходимые при переходе к ∂-многообразиям, как правило, вполне очевидны; чтобы не прерывать изложение главных идей, мы часто будем откладывать или даже пропускать доказательства теорем о ∂-многообразиях.

В конце главы мы примем соглашение, имеющее своей целью исключить патологию нехаусдорфовых и непаракомпактных многообразий.

Через всю эту главу проходит идея, вообще очень характерная для дифференциальной топологии: переход от локального к глобальному. Этот переход имеется уже в самом определении многообразия и повторяется, явно или неявно, в каждом утверждении, касающемся многообразий. Например, доказательство теоремы о регулярном значении состоит из замечания, что предположение и заключение теоремы носят локальный характер, и применения теоремы о неявной функции (которая, со своей стороны, заключается в переходе от инфинитезимального к локальному). Компактная теорема вложения доказывается посредством составления глобального вложения из локальных. Основанная на этой теореме теорема Уитни использует, в дополнение к этому, лемму о существовании регулярных значений. Доказательство этой леммы, как мы увидим в гл. 3, представляет собой прямую глобализацию довольно тонкого локального свойства гладких отображений.

Каждый дифференциально-топологический объект содержит в себе сопоставление локального с глобальным, и многие определения, теоремы и доказательства делаются значительно более ясными, если разделить в них локальные и глобальные аспекты.

0. ПОДМНОГООБРАЗИЯ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^{n+k}$

Формальным определениям мы предпошлем неформальное обследование знакомого пространства S^n и затем более общих подмногообразий евклидова пространства.

Сначала рассмотрим *единичную n-сферу*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\},$$

где $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)^{1/2}$. Нижеследующая конструкция определяет в S^n локальные координаты.

При $j = 1, \ldots, n+1$ определим открытые полусферы

$$U_{2j-1} = \{x \in S^n \mid x_j > 0\},$$
$$U_{2j} = \{x \in S^n \mid x_j < 0\}.$$

Далее, при $i = 1, \ldots, 2n+2$ определим отображения

$$\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n,$$
$$\varphi_i(x) = (x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1}), \quad \text{если} \quad i = 2j-1 \quad \text{или} \quad 2j;$$

эта запись означает n-членную последовательность, получающуюся из x удалением j-й координаты. Очевидно, φ_i гомеоморфно отображает U_i на открытый n-диск

$$B = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < 1\}.$$

Ясно также, что обратное отображение $\varphi_i^{-1}\colon B \to \mathbb{R}^{n+1}$ является аналитическим.

Пары (φ_i, U_i) называются «картами» сферы S^n; множество всех карт есть «атлас». Этот атлас позволяет придать смысл высказыванию «$f\colon S^n \to \mathbb{R}^k$ есть гладкое отображение класса C^r»: это значит, что каждая композиция

$$f \circ \varphi_i^{-1}\colon B \to \mathbb{R}^k$$

принадлежит классу C^r. Если отображение $g\colon S^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ принадлежит в этом смысле классу C^r и образ $g(S^n)$ содержится в S^m, то отображение $g\colon S^n \to S^m$ естественно назвать C^r-отображением. Это определение допускает следующую переформулировку. Пусть $\{(\psi_j, V_j)\}$ — атлас сферы S^m. Отображение $g\colon S^n \to S^m$ принадлежит классу C^r, если каждое отображение

$$\psi_j g \varphi_i^{-1}\colon \varphi_i g^{-1}(V_j) \to \mathbb{R}^m$$

принадлежит классу C^r; последнее имеет смысл, потому что $\varphi_i g^{-1}(V_j)$ есть открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, *мы распространили понятие C^r-отображения на единичные сферы S^n, $n = 1, 2, \ldots$* Легко проверить, что композиция C^r-отображений (в этом расширенном смысле) снова есть C^r-отображение.

Следующая конструкция доставляет более широкий класс многообразий. Пусть $f\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ — произвольное C^r-отображение с $r \geqslant 1$. Положим $M = f^{-1}(0)$. Если ранг отображения f в каждой точке множества $f^{-1}(0)$ равен k, то мы называем M «регулярной поверхностью уровня». Таковой является и единичная n-сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$: она отвечает функции $f(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$.

Локальные координаты в M определяются следующим образом. Возьмем любую точку $p \in M$. Линейной заменой координат мы можем добиться того, чтобы $k \times k$-матрица $\partial f_i/\partial x_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, имела в точке p ранг k. Отождествим теперь $\mathbb{R}^{n+k}$ с $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ и положим $p = (a, b)$. Согласно теореме о неявной функции, существует такая окрестность $U \times V$ точки (a, b) в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ и такое C^r-отображение $g\colon U \to V$, что $g(x) = y$ в том и только том случае, если $f(x, y) = 0$. Таким образом,

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$$

$$= \text{график отображения } g.$$

Положим

$$W = M \cap (U \times V),$$

$$\varphi\colon W \to \mathbb{R}^n$$

$$(x, g(x)) \mapsto x \quad (x \in U).$$

Тогда пара (φ, W) может быть принята за локальную систему координат на M. Эти координаты позволяют сделать определение C^r-отображения еще более общим: оно охватывает теперь отображения между регулярными поверхностями уровня.

Предыдущая конструкция без каких-либо изменений проходит в случае, когда областью определения отображения f является не все пространство $\mathbb{R}^{n+k}$, а произвольное открытое подмножество этого пространства.

Значительно более широкий класс многообразий составляют подмножества M пространства $\mathbb{R}^{n+k}$, которые *локально* являются регулярными поверхностями уровня C^r-отображений. Последнее означает, что каждая точка множества M обладает в $\mathbb{R}^{n+k}$ такой окрестностью W, что

$$W \cap M = f^{-1}(0)$$

для некоторого C^r-отображения $f\colon W \to \mathbb{R}^k$, имеющего ранг k в каждой точке пересечения $W \cap M$. Локальные координаты и C^r-отображения определяются так же, как прежде. Многообразия этого типа называются «n-мерными подмногообразиями пространства $\mathbb{R}^{n+k}$».

Общим для всех рассмотренных примеров является тот факт, что *переходы от одной системы координат к другой принадлежат классу* C^r. Эти переходы представляют собой отображения

$$\varphi_j\varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

где (φ_i, U_i) и (φ_j, U_j) пробегают атлас рассматриваемого многообразия. (Отображения $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ определены и принимают значения в открытых подмножествах евклидова пространства, так что утверждение об их принадлежности классу C^r имеет смысл.)

Важное следствие этого факта: чтобы убедиться в том, что отображение $f\colon M \to N$ принадлежит классу C^r, достаточно для каждой точки $x \in M$ найти хотя бы одну пару карт (φ, U), (ψ, V) многообразий M, N с $x \in U$, $f(U) \subset V$, такую, что отображение

$$\mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \xrightarrow{\psi f \varphi^{-1}} \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

принадлежит классу C^r. Действительно, предположим, что последнее условие выполнено, и рассмотрим произвольные карты $(\bar\varphi, \bar U)$, $(\bar\psi, \bar V)$ многообразий M, N; мы должны показать, что композиция $\bar\psi f \bar\varphi^{-1}$ принадлежит классу C^r. Для этого мы заметим, что любая точка области определения отображения $\bar\psi f \bar\varphi^{-1}$ имеет вид $\bar\varphi(x)$, где $x \in \bar U \cap f^{-1}(\bar V)$. Если (φ, U), (ψ, V) — карты многообразий M, N, такие, что $x \in U$, $f(U) \subset V$ и отображение $\psi f \varphi^{-1}$ принадлежит классу C^r, то в некоторой окрестности точки $\bar\varphi(x)$

$$\bar\psi f \bar\varphi^{-1} = (\bar\psi\psi^{-1})(\psi f \varphi^{-1})(\varphi\bar\varphi^{-1}).$$

Таким образом, отображение $\bar{\psi} f \bar{\varphi}^{-1}$ локально представляется в виде композиции трех C^r-отображений; значит, и само оно принадлежит классу C^r.

Обратимся теперь к многообразию касательных векторов n-мерного подмногообразия M пространства $\mathbb{R}^{n+k}$. Пусть $x \in M$, и пусть (φ, U) — карта, покрывающая x (т. е. такая, что $x \in U$). Положим $a = \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через E_x подпространство пространства $\mathbb{R}^{n+k}$, которое является образом линейного отображения

$$D\varphi_a^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}.$$

В силу известных свойств дифференциалов гладких отображений. пространство E_x не зависит от выбора карты (φ, U), а определяется точкой x.

Множество $x \times E_x = M_x$ называется «касательным пространством» к M в точке x. Оно наследует от E_x векторную структуру. Заметим, что $D\varphi_a^{-1}$ индуцирует линейный изоморфизм между пространствами $\mathbb{R}^n$ и M_x.

Относя точке $(x, y) \in M_x$ точку $x + y \in \mathbb{R}^{n+k}$, мы получаем вложение $M_x \to \mathbb{R}^{n+k}$. Образ этого вложения представляет собой аффинную n-плоскость в $\mathbb{R}^{n+k}$, проходящую через x. Последняя касается многообразия M в том смысле, что она состоит из векторов с началом x, касающихся кривых в M, проходящих через x.

Если $f\colon M \to N$ есть C^r-отображение (между подмногообразиями) и $f(x) = z$, то возникает линейное отображение Tf_x: $M_x \to N_z$, определяемое следующим образом. Пусть (φ, U), (ψ, V) — карты многообразий M, N, покрывающие точки x, z, Положим $\varphi(x) = a$ и зададим Tf_x формулой

$$Tf_x(x, y) = (z, D(\psi f \varphi^{-1})_a y);$$

независимость от выбора карт (φ, U), (ψ, V) очевидна.

Объединение TM всех касательных пространств к многообразию M называется его «многообразием касательных векторов». Линейные отображения Tf_x составляют отображение $Tf\colon TM \to TN$. Последнее играет роль «дифференциала» отображения f: $M \to N$.

С помощью отображения Tf мы можем распространить понятие «ранга» на отображения между подмногообразиями: ранг отображения f в точке $x \in M$ определяется как ранг линейного отображения Tf_x: $M_x \to N_z$.

Множество TM представляет собой подмножество произведения $M \times \mathbb{R}^{n+k}$ и, значит, произведения $\mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k}$. Естественно поинтересоваться, будет ли TM подмногообразием.

Если (φ, U) — карта многообразия M, мы можем построить естественную карту (Φ, TU) для TM, отождествляя TU с $\{(x, y) \in TM \mid x \in U\}$ и полагая

$$\Phi: TU \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$\Phi(x, y) = (\varphi(x), (D\varphi_a^{-1})^{-1} y).$$

Эти карты превращают TM в C^{r-1}-подмногообразие. Отображения Tf также принадлежат классу C^{r-1}.

На этом мы заканчиваем наш предварительный обзор понятий *многообразия, отображения и многообразия касательных векторов* в специальном случае подмногообразий евклидова пространства. Мы переходим теперь к абстрактным многообразиям.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

Топологическое пространство M называется n-мерным *многообразием*, если оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Последнее означает, что у M есть открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$, такое, что при каждом $i \in \Lambda$ существует отображение φ_i: $U_i \to \mathbb{R}^n$, гомеоморфно отображающее U_i на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. При этом мы называем (φ_i, U_i) *картой* (или *системой координат*) с областью определения U_i; множество $\Phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \Lambda}$ всех карт представляет собой *атлас*.

Говорят, что две карты (φ_i, U_i), (φ_j, U_j) имеют C^r*-перекрытие*, если *переход*

$$\varphi_j \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

от одних координат к другим обладает гладкостью класса C^r и если $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ также принадлежит классу C^r (см. рис. 1—1). Здесь r может быть натуральным[1]) числом, ∞ или ω (последнее обозначает вещественную аналитичность). Определение имеет смысл, поскольку $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ и $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ — открытые множества в $\mathbb{R}^n$.

Атлас Φ многообразия M называется принадлежащим классу C^r, если любые две его карты имеют C^r-перекрытие. В этом случае существует единственный максимальный C^r-атлас Ψ, содержащий Φ: он состоит из всех карт, которые имеют C^r-перекрытие с каждой картой атласа Φ.

Максимальный C^r-атлас α на M иначе называется *дифференциальной структурой класса* C^r; пара (M, α) называется *многообразием класса* C^r. Многообразие класса $\geqslant 1$ называется *гладким*.

---

[1]) То есть целым неотрицательным.— *Прим. перев.*

Чтобы задать дифференциальную структуру класса C^r, достаточно указать любой C^r-атлас, который в ней содержится. Например, пространство $\mathbb{R}^n$ обладает единственной дифференциальной структурой класса C^r, содержащей тождественную карту. Более общий пример: всякое открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ обладает

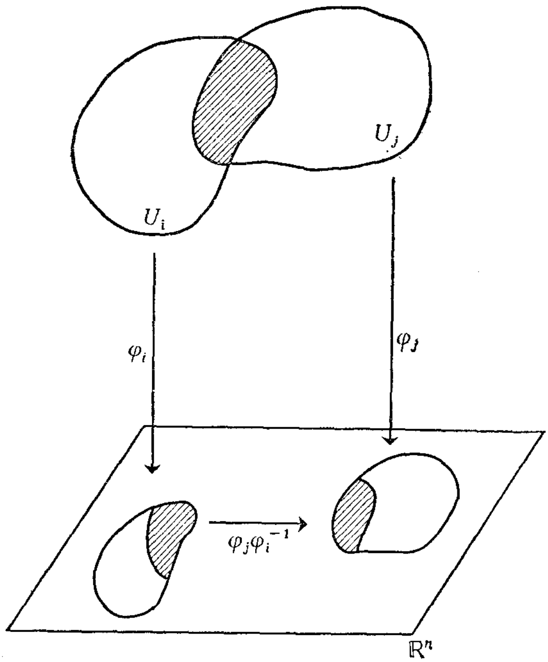


Рис. 1—1. Перекрывающиеся карты.

единственной дифференциальной структурой класса C^r, содержащей включение $U \to \mathbb{R}^n$.

Предположим, что α есть дифференциальная структура класса C^s на M и что $1 \leqslant r < s$. Поскольку α есть и C^r-атлас, на M имеется единственная C^r-структура, содержащая α: она получается присоединением к α всех карт, имеющих C^r-перекрытие с каждой картой из α. Поэтому каждое C^s-многообразие можно рассматривать как C^r-многообразие; в гл. 2 мы увидим, что верно и обратное.

На протяжении некоторого времени мы будем пропускать значок C^r; все это время r будет считаться фиксированным.

Декартово произведение многообразий (M, Φ), (N, Ψ) определяется как многообразие $(M \times N, \Theta)$, где Θ — дифференциальная структура, содержащая все карты вида

$$(\varphi \times \psi,\ U \times V); \quad (\varphi, U) \in \Phi, \quad (\psi, V) \in \Psi.$$

Здесь $\varphi \times \psi$ отображает $U \times V$ в произведение $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, которое мы отождествляем с $\mathbb{R}^{m+n}$.

Если (M, Φ) — многообразие и $W \subset M$ — открытое множество, то *индуцированная* дифференциальная структура $\Phi \mid W$ на W определяется как $\{(\varphi, U) \in \Phi \mid U \subset W\}$.

Дифференциальная структура Φ на M часто определяется *склеиванием* дифференциальных структур Φ_i на открытых множествах U_i, покрывающих M. Это значит, что

$$\Phi_i \mid U_i \cap U_j = \Phi_j \mid U_i \cap U_j \quad \text{для всех} \quad i, j$$

и Φ есть единственная дифференциальная структура на M, содержащая каждую структуру Φ_i в качестве подмножества.

Пусть M — топологическое пространство, (N, Φ) — многообразие и $h: M \to N$ — гомеоморфизм пространства M на открытое подмножество пространства N. *Индуцированная* дифференциальная структура $h^*\Phi$ на M определяется формулой

$$h^*\Phi = \{(\varphi h,\ h^{-1}U) \mid (\varphi, U) \in \Phi \quad \text{и} \quad U \subset h(M)\}.$$

Единичная n-сфера S^n обладает дифференциальной структурой класса C^ω, определяемой атласом, описанным в предыдущем параграфе.

Вещественное проективное n-пространство P^n есть C^ω-многообразие, которое получается как топологическое пространство из сферы S^n посредством отождествления, производимого антиподальным отображением: каждую точку $x \in S^n$ мы отождествляем с $-x$. Чтобы задать в P^n дифференциальную структуру, заметим, что естественная проекция $p: S^n \to P^n$ гомеоморфно отображает каждую открытую полусферу на ее образ. Пусть $\{U_1, \ldots, U_k\}$ — покрытие сферы S^n открытыми полусферами. Если мы придадим каждому множеству $p(U_i) = V_i$ дифференциальную структуру Φ_i, индуцированную отображением $(p \mid U_i)^{-1}$, то, очевидно, структуры Φ_i и Φ_j будут согласованы на $V_i \cap V_j$. Благодаря этому возможно склеивание структур Φ_i, и это склеивание определяет дифференциальную структуру в P^n.

Дальнейшие примеры многообразий содержатся в упражнениях в конце этого параграфа.

Иногда многообразия естественным образом содержатся в других многообразиях, как, скажем, S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$. Подмножество A

C^r-многообразия (M, Φ) называется его C^r*-подмногообразием*, если для некоторого целого числа $k \geqslant 0$ каждая точка множества A принадлежит области определения такой карты $(\varphi, U) \in \Phi$, что

$$U \cap A = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k),$$

где $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ — множество векторов, у которых последние $n - k$ координат равны 0 [1]). Всякую такую карту (φ, U) мы называем *нормальной картой* пары (M, A). Ясно, что если A есть подмногообразие многообразия M, то отображения

$$\varphi | U \cap A: U \cap A \to \mathbb{R}^k,$$

где (φ, U) пробегает все нормальные карты, составляют C^r-атлас пространства A. Таким образом, A есть самостоятельное C^r-многообразие размерности k. Число $n - k$ называется его *коразмерностью.*

Пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, и пусть $f: W \to \mathbb{R}^q$ есть C^r-отображение с $1 \leqslant r \leqslant \omega$. Предположим, что $y \in f(W)$ есть *регулярное значение* отображения f, т. е. f имеет в каждой точке прообраза $f^{-1}(y)$ ранг q. (Следовательно, $q \leqslant n$.) Тогда $f^{-1}(y)$ есть C^r-подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$ коразмерности q. Это следует из теоремы о неявной функции, как разъяснялось в предыдущем параграфе.

УПРАЖНЕНИЯ

1. *Многообразие Грассмана* $G_{n,k}$, составленное из всех k-мерных линейных подпространств, или *k-плоскостей*, пространства $\mathbb{R}^n$, наделяется следующим атласом. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — какая-нибудь k-плоскость и $E^{\perp}$ — ее ортогональное дополнение. Отождествим $\mathbb{R}^n$ с $E \times E^{\perp}$. Всякая k-плоскость, достаточно близкая к E, представляет собой график единственного линейного отображения $E \to E^{\perp}$. Вследствие этого окрестность точки $E \in G_{n,k}$ гомеоморфно отображается на некоторое открытое подмножество векторного пространства линейных отображений $E \to E^{\perp}$. Это делает $G_{n,k}$ аналитическим многообразием размерности $k(n-k)$.

2. *Комплексное проективное n-пространство* $\mathbb{C}P^n$ есть многообразие (вещественной) размерности $2n$, определяемое следующим образом. Элемент множества $\mathbb{C}P^n$ есть класс $[z_0, \ldots, z_n]$ $(n+1)$-членных последовательностей комплексных чисел, среди которых не все равны 0. Отношение эквивалентности: $[z_0, \ldots, z_n] = [wz_0, \ldots, wz_n]$, где w — ненулевое комплексное число. Топология определяется как естественная топология факторпространства. Наконец, атлас $\{\varphi_i, U_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, определяется следующим образом. Примем за U_i множество классов последовательностей, у которых i-й член отличен от 0, и определим отображение множества U_i в $\mathbb{C}^n$ формулой

$$[z_0, \ldots, z_n] \longmapsto (z_0/z_i, \ldots, \widehat{z_i/z_i}, \ldots, z_n/z_i),$$

[1]) При $r = 0$ такие подмножества иногда называют *локально плоскими* C^0-*подмногообразиями.*

где $\wedge$ означает, что соответствующий элемент нужно пропустить. С учетом естественного отождествления комплексного n-пространства $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ эти отображения составляют на $\mathbb{C}P^n$ C^ω-атлас.

3. *Кватернионное проективное n-пространство* есть $4n$-мерное многообразие, которое определяется конструкцией, описанной в упр. 2, если в этой конструкции заменить комплексные числа кватернионами.

4. Группа $O(n)$ ортогональных $n \times n$-матриц есть компактное подмногообразие векторного пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ всех $n \times n$-матриц; размерность этого подмногообразия равна $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k$. Компонента единицы есть подгруппа $SO(n)$ ортогональных матриц с определителем 1.

5. Пусть $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ — атлас некоторого n-мерного многообразия M. Положим $\varphi_i(U_i) = V_i \subset \mathbb{R}^n$ и обозначим через X пространство, получающееся из $\bigcup\limits_{i \in \Lambda} V_i \times i$ посредством отождествления (x, i) с $\left(\varphi_j \varphi_i^{-1}(x), j\right)$. Тогда X гомеоморфно M.

6. Если A — подмногообразие многообразия M, то A есть (относительно) замкнутое подмногообразие некоторого открытого подмногообразия многообразия M.

7. Пусть $G_\lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — график функции $y = x^\lambda$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$. Если $r \leqslant \lambda \leqslant r + 1$, где $r \in Z$, то G_λ есть C^r-подмногообразие, но не есть C^{r+1}-подмногообразие. Что будет, если $\lambda \in Z$?

8. *Атлас класса C^r* на *множестве* X определяется иногда как совокупность обратимых отображений подмножеств множества X на открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, такие, что все переходы от одних координат к другим принадлежат классу C^r. Если задан такой атлас Φ, то X обладает единственной топологией, по отношению к которой Φ является C^r-атласом пространства X (в смысле определения в тексте).

9. Пусть C — множество счетных порядковых чисел. Положим $M = C \times [0, \infty)$ и упорядочим M формулой

$$(\alpha, t) < (\alpha', t'), \text{ если } \alpha < \alpha' \text{ или } \alpha = \alpha' \text{ и } t < t'.$$

Введем, далее, в M топологию порядка. Тогда M становится 1-многообразием, которое хаусдорфово, но не паракомпактно; это многообразие называется *длинной прямой*. Оно обладает дифференциальной структурой класса C^ω, но не имеет римановой метрики. (См. Кох и Пуппе [1], Кнезер и Кнезер [1].)

10. Пусть L — пространство, получающееся из $(\mathbb{R} \times 1) \cup (\mathbb{R} \times 0)$ отождествлением $(x, 1)$ с $(x, 0)$ при всех $x \neq 0$. Тогда L есть нехаусдорфово 1-многообразие, называемое *прямой с двумя нулями*. Это многообразие обладает C^ω-структурой.

*11. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — непустое открытое множество. Предположим, что на U задано не обращающееся в нуль векторное поле класса C^r с $r > 0$, такое, что каждая интегральная кривая этого поля замкнута[1]) в U. Пусть, далее, M — пространство, получающееся из U посредством отождествления всех точек каждой интегральной кривой в одну точку. Тогда M есть 1-многообразие класса C^r,

[1]) Как подмножество.— *Прим. перев.*

которое не обязано быть хаусдорфовым. (Указание: для построения карт используйте маленькие интервалы, трансверсальные интегральным кривым.)

**12. *Многообразие метризуемо в том и только том случае, если оно паракомпактно и хаусдорфово*; в этом случае оно обладает полной метрикой. Связное метризуемое многообразие удовлетворяет второй аксиоме счетности. В то же время можно построить связное сепарабельное хаусдорфово 2-многообразие, не являющееся паракомпактным (таковым является удвоение многообразия M из упр. 7 к § 4.6).

**13. Паракомпактные многообразия являются абсолютными окрестностными ретрактами (см. Ханнер [1]).

2. ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И МНОГООБРАЗИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ

Начиная с этого места, в обозначении гладкого многообразия мы, как правило, не будем явно указывать дифференциальную структуру.

Пусть M и N — многообразия класса C^r и $f\colon M \to N$ — произвольное отображение. Пара, составленная из карты (φ, U) многообразия M и карты (ψ, V) многообразия N, называется *приспособленной к* f, если $f(U) \subset V$. В этом случае определено отображение

$$\psi f \varphi^{-1}\colon\ \varphi(U) \to \psi(V);$$

мы называем его *локальным представлением отображения* f по отношению к данным картам или локальным представлением этого отображения *в точке* x, если $x \in U$.

Отображение f называется *гладким* в точке x, если таково некоторое его локальное представление в этой точке. Определение имеет смысл, поскольку локальные представления являются отображениями между открытыми подмножествами евклидовых пространств. Подобным же образом, говорят, что f *принадлежит классу* C^r, если в любой точке многообразия M оно имеет локальное представление класса C^r.

Если f принадлежит классу C^r, то и каждое его локальное представление принадлежит классу C^r. Чтобы убедиться в этом, фиксируем приспособленную к f пару карт (φ, U), (ψ, V) и предположим, что f принадлежит классу C^r; мы должны показать, что композиция $\psi f \varphi^{-1}$ принадлежит классу C^r. Возьмем произвольную точку $y \in \varphi(U)$ и положим $x = \varphi^{-1}(y)$. В силу предположения, локальное представление отображения f по отношению к некоторой приспособленной к f паре карт (φ_0, U_0), (ψ_0, V_0) с $x \in U_0$ принадлежит классу C^r. Заменяя, если нужно, множества U_0 и V_0 меньшими открытыми множествами, мы добьемся включений $U_0 \subset U$ и $V_0 \subset V$. В этой ситуации на множестве $\varphi(U_0)$

$$\psi f \varphi^{-1} = (\psi\psi_0^{-1})(\psi_0 f \varphi_0^{-1})(\varphi_0\varphi^{-1}).$$

В правой части первое и третье отображения принадлежат классу C^r, поскольку они являются переходами от одной системы координат к другой, а второе является локальным представлением отображения f по отношению к картам (φ_0, U_0), (ψ_0, V_0) и потому также принадлежит классу C^r. Следовательно, и композиция этих отображений $\psi f \varphi^{-1} | \varphi(U_0)$ принадлежит классу C^r. Таким образом, мы доказали, что композиция $\psi f \varphi^{-1}$ принадлежит классу C^r в окрестности любой точки; значит, она принадлежит классу C^r.

Пусть $f: M \to N$ и $g: N \to P$ — отображения класса C^r между C^r-многообразиями. Легко показать, с помощью локальных представлений, что композиция $gf: M \to P$ также принадлежит классу C^r. Принадлежат классу C^r, очевидно, тождественные и постоянные отображения. Таким образом, можно говорить о категории C^r-многообразий и C^r-отображений.

Изоморфизм в C^r-категории называется *C^r-диффеоморфизмом.* (При $r = 0$ это просто гомеоморфизм.) Более явным образом C^r-диффеоморфизм можно определить как C^r-отображение $f: M \to N$ между C^r-многообразиями M и N, которое является гомеоморфизмом и обратное к которому $f^{-1}: N \to M$ также принадлежит классу C^r. Если такое отображение существует, мы называем M и N *C^r-диффеоморфными* и пишем $M \approx N$. Это — главное отношение эквивалентности в дифференциальной топологии.

Чтобы читатель не потерял голову при виде бесконечной последовательности отношений эквивалентности, поспешим заметить, что в этом определении нет существенной разницы между C^r и C^s, если $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$ (или даже $s = \omega$, но этот случай значительно более труден). В гл. 3 мы увидим, что всякое C^r-многообразие C^r-диффеоморфно C^ω-многообразию, причем последнее единственно с точностью до C^ω-диффеоморфизма; кроме того, всякое C^r-отображение может быть аппроксимировано C^ω-отображениями.

В противоположность этому перекинуть мост от C^0-случая к C^1-случаю не удается. Как показали Кервер [1] и Смейл [1], существуют компактные многообразия, на которых вообще невозможно ввести дифференциальную структуру; это открытие послужило началом одному из самых интересных разделов в дифференциальной топологии. (Известно, что такие «несглаживаемые» многообразия должны иметь размерность, не меньшую 4; явные примеры известны в размерностях, начиная с 8.)

Основная задача дифференциальной топологии заключается в построении методов, с помощью которых можно было бы узнать, диффеоморфны ли данные многообразия. Конечно, диффеоморфные многообразия гомеоморфны и имеют одинаковый гомотопический тип. Поэтому проблема диффеоморфизма обычно ставится так: что нужно знать о многообразиях в дополнение к тому, что они имеют одинаковый гомотопический тип, чтобы можно было гарантировать их диффеоморфность?

Довольно часто дифференциальные инварианты оказываются инвариантами топологического или гомотопического типа. (Классический пример — сумма индексов нулей векторного поля на компактном гладком многообразии, которая оказывается равной эйлеровой характеристике.) Такие инварианты неспособны различать недиффеоморфные многообразия, которые гомеоморфны. Зато когда дифференциальный инвариант оказывается гомотопическим, его гораздо легче вычислять.

Один из важнейших дифференциальных инвариантов — многообразие касательных векторов. В последующих главах мы изучим его довольно подробно; здесь мы ограничимся тем, что дадим определение этого многообразия и определение дифференциала отображения.

Пусть (M, Φ) — некоторое C^{r+1}-многообразие с $0 \leqslant r \leqslant \omega$ (мы полагаем $\infty + 1 = \infty$ и $\omega + 1 = \omega$), где $\Phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \Lambda}$. Интуитивно «касательный вектор» к M в точке $x \in M$ можно представлять себе просто как вектор в $\mathbb{R}^n$, заданный вместе с картой, которая отождествляет точки, лежащие вблизи x, с точками пространства $\mathbb{R}^n$.

Следует, однако, сделать касательный вектор не зависящим от выбора карты, и мы принимаем такое определение. *Касательный вектор* к многообразию M есть класс $[x, i, a]$ троек

$$(x, i, a) \in M \times \Lambda \times \mathbb{R}^n$$

относительно следующего отношения эквивалентности:

$$[x, i, a] = [y, j, b]$$

в том и только том случае, если $x = y$ и

$$D\left(\varphi_j \varphi_i^{-1}\right)_{\varphi_i(x)} a = b.$$

Другими словами, a переводится в b дифференциалом перехода от одной системы координат к другой, вычисленным в точке $\varphi_i(x)$. Что это — отношение эквивалентности, показывают правила вычисления дифференциала композиции и обратного отображения.

Множество всех касательных векторов обозначается через TM и называется *многообразием касательных векторов*. Определено естественное отображение

$$p = p_M \colon TM \to M,$$
$$[x, i, a] \mapsto x.$$

Для произвольного подмножества A многообразия M мы полагаем $p^{-1}(A) = T_A M$; мы полагаем также $p^{-1}(x) = M_x$ для произвольной точки $x \in M$. Если множество $U \subset M$ открыто, то $(U, \Phi \mid U)$ также есть C^{r+1}-многообразие, и мы производим безвредное отождествление $T_U M = TU$.

Теперь установим, что TM действительно есть многообразие. Для каждой карты $(\varphi_i, U_i) \in \Phi$ имеется корректно определенное обратимое отображение

$$T\varphi_i \colon TU_i \to \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$
$$[x, i, a] \mapsto (\varphi_i(x), a).$$

Отображение

$$(T\varphi_j)(T\varphi_i)^{-1} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

действует при этом по формуле

$$(y, a) \mapsto (\varphi_j\varphi_i^{-1}(y), D(\varphi_j\varphi_i^{-1})_y a)$$

и является, очевидно, гомеоморфизмом. Следовательно, TM обладает топологией, по отношению к которой каждое из отображений $T\varphi_i$ является гомеоморфизмом, и топология с этим свойством единственна. Более того, так как $(T\varphi_j)(T\varphi_i)^{-1}$ есть C^r-диффеоморфизм, совокупность карт $\{(T\varphi_i, TU_i)\}_{i \in \Lambda}$ составляет C^r-атлас на TM. Этот атлас делает TM C^r-многообразием, причем проекция $p \colon TM \to M$ делается C^r-отображением. Карты $(T\varphi_i, TU_i)$ называются *естественными картами* на TM.

Пусть $x \in U_i$. Отображение $T\varphi_{ix} \colon M_x \to \mathbb{R}^n$, определяемое как композиция

$$M_x \subset TU_i \xrightarrow{T\varphi} \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

обратимо; следовательно, оно переносит в M_x структуру n-мерного векторного пространства. *Эта структура не зависит от выбора* i, поскольку если $x \in U_j$, то

$$(T\varphi_{jx})(T\varphi_{ix})^{-1} = D(\varphi_j\varphi_i^{-1})_{\varphi_i x},$$

последнее же есть линейный автоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$. Таким образом, TM есть объединение попарно непересекающихся векторных пространств M_x, или, как говорят, «пучок векторных пространств». В последующих главах эта структура многообразия TM будет играть особую роль.

Проще всего устроено многообразие касательных векторов у открытого множества $W \subset \mathbb{R}^q$. В этом случае мы отождествляем TW с $W \times \mathbb{R}^q$ посредством естественной карты, отвечающей включению $\varphi: W \to \mathbb{R}^q$. Проекция $TW \to W$ превращается при этом в естественную проекцию $W \times \mathbb{R}^q \to W$. Если M есть двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^3$, то касательные векторы к M можно изображать стрелками, а M_x можно представлять себе как лежащую в $\mathbb{R}^3$ плоскость; см. рис. 1—2.

Пусть $f: M \to N$ — некоторое C^{r+1}-отображение с $0 \leqslant r \leqslant \omega$. Определим C^r-отображение $Tf: TM \to TN$ следующим образом: локальное представление отображения Tf по отношению к естественным картам в TM и TN есть дифференциал соответствующего локального представления отображения f. Подробнее, пусть $\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^m$, $\psi_j: V_j \to \mathbb{R}^n$ — такие карты многообразий M, N, что $f(U_i) \subset V_j$. Применяя правило вычисления дифференциала композиции, мы видим, что C^r-отображение

$$(Tf)_{ij}: TU_i \to TV_j,$$

$$[x,\ i,\ a] \longmapsto \left[f(x),\ j,\ D\left(\psi_j f \varphi_i^{-1}\right)_{\varphi_i x} a\right]$$

не зависит от выбора i, j. Вследствие этого имеется единственное отображение $Tf: TM \to TN$, которое совпадает с $(Tf)_{ij}$ на TU_i.

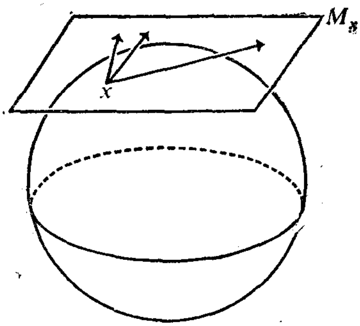


Рис. 1—2. Касательные векторы к $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Если $f(x) = y$, то Tf отображает M_x в N_y и сужение отображения Tf доставляет *линейное* отображение $T_x f: M_x \to N_y$.

В естественных картах последнее есть не что иное, как дифференциал в точке x соответствующего локального представления отображения f. Это дает нам право называть $T_x f$ дифференциалом отображения f в точке x. Заметим, впрочем, что его область определения и область значений зависят от x.

Как это очевидным образом доказывается с помощью естественных карт, диаграмма

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "p_M"'] & TN \arrow[d, "p_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $f \circ p_M = p_N \circ Tf$. Подобным же образом, диаграмма

$$\begin{tikzcd} & TN \arrow[dr, "Tg"] & \\ TM \arrow[ur, "Tf"] \arrow[rr, "T(g \circ f)"'] & & TQ \end{tikzcd}$$

коммутативна для любых C^{r+1}-отображений $f: M \to N$, $g: N \to Q$; другими словами,

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf.$$

И уж совсем очевидно, что

$$T1_M = 1_{TM}.$$

(Тождественное отображение пространства S обозначается через 1_S.) Совокупность двух последних равенств означает, что сопоставления $M \longmapsto TM$, $f \longmapsto Tf$ определяют ковариантный функтор T из категории C^{r+1}-многообразий в категорию C^r-многообразий.

Если M есть C^{r+1}-подмногообразие многообразия N и j: $M \to N$ — включение, то Tj: $TM \to TN$ есть C^r-вложение, образ которого есть C^r-подмногообразие многообразия TN; это очевидным образом доказывается с помощью естественных карт. Мы отождествляем TM с этим C^r-подмногообразием многообразия TN.

В частности, если $M \subset \mathbb{R}^q$, то TM есть подмногообразие многообразия $T\mathbb{R}^q = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$.

По-другому касательный вектор к многообразию M иногда определяют как класс C^1-отображений f: $[0, a) \to M$, где f считается эквивалентным отображению g: $[0, b) \to M$, если $f(0) = g(0)$ и для некоторой (а, значит, и для любой) карты (φ_i, U_i) многообразия M, покрывающей точку $f(0)$,

$$D(\varphi_i f)_0 = D(\varphi_i g)_0.$$

Такому классу мы относим касательный вектор (в смысле прежнего определения)

$$[f(0),\ i,\ D(\varphi_i f)_0].$$

Обратно, касательному вектору $[x, i, a]$ мы относим класс C^1-отображений, которому принадлежит отображение

$$f: [0, a) \to M,$$

$$f(t) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + ta),$$

определенное при достаточно малом $a > 0$.

Эти сопоставления взаимно обратны, так что два определения эквивалентны; но первое определение, как мы увидим, лучше приспособлено к многообразиям с краем.

В заключение мы введем два специальных обозначения, точнее, расширим границы применимости двух стандартных обозначений из анализа. Если $J \subset \mathbb{R}$ есть интервал и $f\colon J \to M$ есть C^1-отображение, то для каждого $x \in J$ обозначим через $f'(x)$ образ при отображении Tf касательного вектора

$$(x,\ 1) \in T_x J = J \times \mathbb{R}.$$

Если $U \subset \mathbb{R}^n$ есть открытое множество и $f\colon M \to U$ есть C^1-отображение, то для каждого $x \in M$ мы определим линейное отображение

$$Df_x\colon M_x \to \mathbb{R}^n$$

как композицию

$$M_x \xrightarrow{Tf} TU = U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть M, N — два C^r-многообразия. Отображение $f\colon M \to N$ в том и только том случае принадлежит классу C^r, если композиция $f \circ g\colon W \to N$ принадлежит классу C^r для любого C^r-отображения $g\colon W \to M$, где W — открытое подмножество некоторого евклидова пространства.

*2. Пусть M есть C^r-многообразие с $r \geqslant 1$ и $A \subset M$ — связное подмножество. Предположим, что имеется C^r-ретракция $f\colon M \to A$, т. е. C^r-отображение $f\colon M \to A$ с тождественным сужением $f|A$. Тогда A есть C^r-подмногообразие. (Обратное доказывается в гл. 4.)

[Указание: f имеет постоянный ранг вблизи A.]

3. Пусть A, M_1, M_2 — многообразия класса C^r. Отображение $f\colon A \mapsto M_1 \times M_2$, действующее по формуле $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, в том и только том случае принадлежит классу C^r, если каждое отображение $f_i\colon A \to M_i$ принадлежит классу C^r.

4. Отображение $G_{n,k} \to G_{n,n-k}$, определяемое формулой $E \mapsto E^{\perp}$ (см. упр. 1 из § 1.1), является C^{ω}-диффеоморфизмом.

5. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — произвольное непрерывное отображение. Тогда на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ существует такая дифференциальная структура Φ класса C^{ω}, что отображение

$$g\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,\ \Phi)$$
$$g(x) = (x,\ f(x))$$

является C^{ω}-вложением.

*6. Связное паракомпактное хаусдорфово 1-многообразие диффеоморфно окружности, если оно компактно, и диффеоморфно прямой, если оно не компактно.

7. Пусть Q — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$. Тогда $Q^{-1}(y)$ при $y > 0$ диффеоморфно S^{n-1}.

*8. Всякое непустое звездное открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ C^∞-диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. (Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *звездным*, если существует такая точка $x \in \mathbb{R}^n$, что M вместе с каждой своей точкой содержит замкнутый интервал, соединяющий эту точку с x.)

9. C^r-отображение, являющееся C^1-диффеоморфизмом, является и C^r-диффеоморфизмом.

10. (a) Многообразие $G_{3,2}$ двумерных подпространств пространства $\mathbb{R}^3$ диффеоморфно вещественному проективному 2-пространству P^2.

*(b) $SO(3) \approx P^3$.

*(c) Многообразие ориентированных двумерных подпространств пространства $\mathbb{R}^4$ (придумайте точное определение) диффеоморфно $S^2 \times S^2$.

*11. Подмножество пространства $\mathbb{R}^2$, гомеоморфное S^1, является C^0-подмногообразием. (Доказательство опирается на теорему Шёнфлиса.)

12. При каждом $n \geqslant 0$

$$(TS^n) \times \mathbb{R} \approx S^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

(Указание: имеются *естественные* изоморфизмы $T_xS^n \oplus \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{n+1}$.)

13. Имеет место естественный диффеоморфизм

$$T(M \times N) \approx TM \times TN.$$

14. Пусть $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — график функции $y = |x|^{1/3}$. Тогда G обладает дифференциальной структурой класса C^∞, делающей включение $G \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ C^∞-отображением.

**15. (М. Браун [1].) Пусть M есть n-многообразие вида $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, где каждое M_k диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ и $M_k \subset M_{k+1}$. Тогда $M \approx \mathbb{R}^n$.

3. ВЛОЖЕНИЯ И ПОГРУЖЕНИЯ

Пусть $f\colon M \to N$ есть C^1-отображение (где M и N — многообразия класса C^r с $r \geqslant 1$). Назовем отображение f *иммерсивным* в точке $x \in M$, если линейное отображение $T_xf\colon M_x \to N_{f(x)}$ мономорфно, и *субмерсивным*, если T_xf эпиморфно. Если отображение f иммерсивно в каждой точке многообразия M, оно называется *иммерсией* или *погружением*; если оно субмерсивно в каждой точке, оно называется *субмерсией*.

Назовем, далее, отображение $f\colon M \to N$ *вложением*, если f есть иммерсия, гомеоморфно отображающая многообразие M на его образ. Для вложений можно использовать запись $f\colon M \hookrightarrow N$.

3.1. Теорема. *Пусть N есть C^r-многообразие с $r \geqslant 1$. Подмножество $A \subset N$ в том и только том случае является C^r-подмногообразием, если оно есть образ C^r-вложения.*

Доказательство. Предположим, что A есть C^r-подмногообразие. Тогда, как мы видели в п. 1, A обладает естественной дифференциальной структурой класса C^r, определяемой с помощью покрытия нормальными картами. По отношению к этой дифференциальной структуре включение A в N является C^r-вложением.

Предположим, что f: $M \to N$ есть C^r-вложение с $r \geqslant 1$. Свойство быть подмногообразием носит *локальный характер*, т. е. оно в том и только том случае справедливо для $A \subset N$, если оно справедливо для $A_i \subset N_i$, где $\{A_i\}$ есть открытое покрытие множества A и каждое N_i есть открытое подмножество многообразия N, содержащее A. Кроме того, это свойство инвариантно относительно C^r-диффеоморфизмов, т. е. $A \subset N$ в том и только том случае есть C^r-подмногообразие, если таковым является $g(A) \subset \subset N'$, где g: $N \to N'$ есть C^r-диффеоморфизм (или даже C^r-вложение).

Чтобы воспользоваться локальностью и инвариантностью относительно диффеоморфизмов, введем в рассмотрение семейство $\Psi = \{\psi_i\colon N_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in \Lambda}$ карт многообразия N, покрывающих A. Затем найдем атлас $\Phi = \{\varphi_i\colon M_i \to \mathbb{R}^m\}_{i \in \Lambda}$ многообразия M, такой, что $f(M_i) \subset N_i$ (изменив, если нужно, индексацию семейства Ψ). Поскольку f есть вложение, Φ и Ψ могут быть выбраны таким образом, что $f(M_i) = A \cap N_i$. В силу инвариантности, достаточно показать, что C^r-подмногообразием является $\psi_i f(M_i) \subset \mathbb{R}^n$. Положим

$$U_i = \varphi_i(M_i) \subset \mathbb{R}^m,$$

$$f_i = \psi_i f \varphi_i^{-1}\colon U_i \to \mathbb{R}^n.$$

Тогда f_i есть C^r-вложение и $f_i(U_i) = \psi_i f(M_i)$. Таким образом, мы свели наше утверждение к специальному случаю, в котором $N = \mathbb{R}^n$, M есть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^m$ и $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ есть C^r-вложение. А в этом случае существование нормальной карты класса C^r у пары $(\mathbb{R}^n, f(U))$ в каждой точке множества $f(U)$ является следствием теоремы об обратной функции. ▮

Доказанная теорема служит иллюстрацией общего принципа взаимодействия *локального* с *глобальным*. Она устанавливает, что объект, определяемый локальными свойствами, — подмногообразие — не отличается от объекта, определяемого в глобальных терминах, — образа вложения. Первая часть доказательства просто склеивает локально заданные нормальные карты (суженные на A) в дифференциальную структуру на A; это делает включение A в N вложением.

Во второй части доказательства появляется новая идея: переход от *инфинитезимального* к *локальному*. Условие, что f: $M \to N$ есть погружение, является «инфинитезимальным», поскольку оно накладывает ограничения только на поведение отображения f в каждой точке. Сцепление инфинитезимального условия с локальным (под этим подразумевается утверждение о поведении отображения f в целых окрестностях точек) осуществляет теорема об обратной функции.

Прежде чем формулировать следующую теорему, дадим несколько важных определений. Пусть $f\colon M \to N$ есть C^1-отображение. Назовем точку $x \in M$ *регулярной*, если f в этой точке субмерсивно; в противном случае x называется *критической точкой*, а $f(x)$ называется *критическим значением*. Если точка $y \in N$ не есть критическое значение, она называется *регулярным значением*, причем последнее название применяется и в случае, когда y не лежит в $f(M)$[1]. Если $y \in f(M)$ есть регулярное значение, то $f^{-1}(y)$ называется *регулярной поверхностью уровня*.

Следующая *теорема о регулярном значении* доставляет распространенный способ задания многообразий.

3.2. Теорема. *Пусть $f\colon M \to N$ есть C^r-отображение с $r \geqslant 1$. Если $y \in f(M)$ есть регулярное значение, то $f^{-1}(y)$ есть C^r-подмногообразие многообразия M.*

Доказательство. Пользуясь, как в доказательстве теоремы 3.1, локальностью и инвариантностью свойства быть подмногообразием, мы сводим теорему к случаю, когда M есть открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ и $N = \mathbb{R}^n$. А в этом случае теорема снова вытекает из теоремы об обратной функции. ∎

Теоремы 3.2 и 3.1 двойственны друг другу в том неформальном смысле, в котором иммерсии двойственны субмерсиям и ядра образам (прообраз $f^{-1}(y)$ естественно считать «ядром» отображения f). Эта двойственность неполна, поскольку импликация в теореме 3.2 является односторонней. В действительности подмногообразие, вообще говоря, не является прообразом регулярного значения; см. упр. 11.

Важное обобщение последней теоремы касается отображения $f\colon M \to N$, которое *трансверсально подмногообразию* $A \subset N$. Это означает, что если $f(x) = y \in A$, то

$$A_y + T_x f(M_x) = N_y,$$

т. е. касательное пространство к N в точке y натянуто на касательное пространство к A в точке y и на образ касательного пространства к M в точке x.

3.3. Теорема. *Пусть $f\colon M \to N$ есть C^r-отображение с $r \geqslant 1$ и A есть C^r-подмногообразие многообразия N. Если f трансвер-*

[1] В соответствии с принципом, по которому в математике, как и в жизни, развесистая клюква не обязательно является развесистой и не обязательно является клюквой.

сально к A, то $f^{-1}(A)$ есть C^r-подмногообразие многообразия M. Это подмногообразие имеет в M такую же коразмерность, какую A имеет в N.

Доказательство. Поскольку утверждение носит локальный характер, мы можем заменить пару (N, A) парой $(U \times V, U \times 0)$, где $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^q$ — открытые окрестности начала координат. Легко видеть, что отображение f: $M \to U \times V$ в том и только

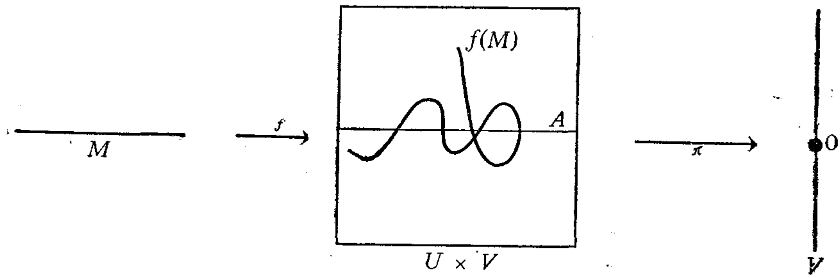


Рис. 1—3. $\pi f = g$.

том случае трансверсально к $U \times 0$, если 0 есть регулярное значение сквозного отображения

$$g: M \xrightarrow{f} U \times V \xrightarrow{\pi} V$$

(см. рис. 1—3). Так как $f^{-1}(U \times 0) = g^{-1}(0)$, теорема следует из теоремы 3.2. ▮

В гл. 3 мы увидим, что всякое отображение может быть аппроксимировано отображениями, трансверсальными к данному подмногообразию.

Следующий результат делает абстрактное понятие многообразия в известном смысле более конкретным.

3.4. Теорема. *Пусть M — компактное хаусдорфово многообразие класса C^r с $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Тогда существует C^r-вложение многообразия M в $\mathbb{R}^q$ с некоторым q.*

Доказательство. Пусть $n = \dim M$ — размерность многообразия M. Обозначим через $D^n(\rho)$ замкнутый шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром 0 и радиусом ρ [1]). Так как многообразие M компактно, оно обладает конечным атласом, и легко построить для него конечный атлас $\{\varphi_i, U_i\}_{i=1}^m$ с двумя свойствами:

$$M = \bigcup \operatorname{Int} \varphi_i^{-1}(D^n(1))$$

[1]) Это означает, что $D^n(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant \rho\}$; *единичный шар* $D^n(1)$ обозначается также через D^n.

и для каждого i

$$\varphi_i(U_i) \supset D^n(2).$$

Фиксируем C^∞-отображение $\lambda: \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, равное 1 на $D^n(1)$ и 0 на $\mathbb{R}^n - D^n(2)$. (Такое отображение построено в § 2.2.) Определим, далее, C^r-отображения

$$\lambda_i: M \to [0, 1]$$

формулой

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda \circ \varphi_i & \text{на } U_i, \\ 0 & \text{на } M - U_i. \end{cases}$$

Очевидно, множества

$$B_i = \lambda_i^{-1}(1) \subset U_i$$

покрывают M. Определим, наконец, отображения

$$f_i: M \to \mathbb{R}^n$$

формулой

$$f_i(x) = \begin{cases} \lambda_i(x)\,\varphi_i(x), & \text{если } x \in U_i, \\ 0, & \text{если } x \in M - U_i, \end{cases}$$

и положим

$$g_i = (f_i, \lambda_i): M \to \mathbb{R}^n \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

$$g = (g_1, \ldots, g_m): M \to \mathbb{R}^{n+1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m(n+1)}.$$

Ясно, что отображение g принадлежит классу C^r. Если $x \in B_i$, то отображение g_i, а с ним и отображение g, иммерсивно в точке x, так что g есть иммерсия. Чтобы убедиться в том, что g взаимно однозначно, предположим, что $y \in B_i$ и $x \neq y$. Если $x \in B_i$, то $g(x) \neq g(y)$, потому что $f_i | B_i = \varphi_i | B_i$; если же $x \notin B_i$, то $\lambda_i(y) = 1 \neq \lambda_i(x)$ и опять-таки $g(x) \neq g(y)$. Таким образом, отображение g является взаимно однозначной C^r-иммерсией. В силу компактности M это означает, что оно является вложением. ∎

Изложенное доказательство следует по характерному для дифференциальной топологии пути глобализации: глобальная конструкция (вложение) проводится склеиванием локальных объектов (карт φ_i). Локальная часть построения в этом доказательстве отсутствует: она неявно содержится в определении многообразия. Стоит сказать, однако, что часто именно локальная конструкция оказывается более трудной.

Во многих задачах глобализация встречает то или иное «препятствие». В этом случае обычно стараются сначала представить это препятствие как число или другой алгебраический объект, а затем связать его с другими инвариантами. Как это делается, мы увидим на многих примерах.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству следующего усиления теоремы 3.4, известного под названием «легкая теорема Уитни о вложении»

3.5. **Теорема.** *Пусть M — компактное хаусдорфово n-мерное C^r-многообразие с $2 \leqslant r \leqslant \infty$. Тогда существует C^r-вложение многообразия M в* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

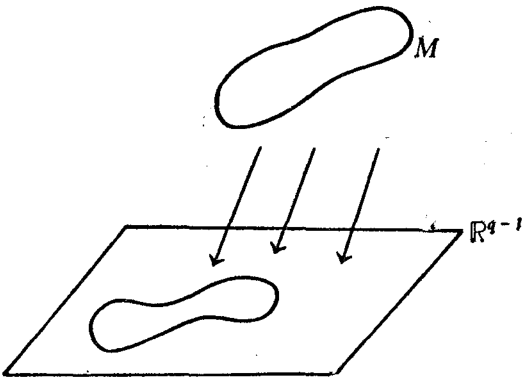


Рис. 1—4. Проектирование многообразия $M \subset \mathbb{R}^q$ в $\mathbb{R}^{q-1}$.

Доказательство. В силу теоремы 3.4, многообразие M вкладывается в некоторое $\mathbb{R}^q$. Если $q \leqslant 2n+1$, то доказывать больше нечего, так что мы предположим, что $q > 2n+1$. Поскольку многообразие M можно заменить его образом при вложении, мы предположим, что M есть C^r-подмногообразие пространства $\mathbb{R}^q$. Достаточно показать, что M вкладывается в $\mathbb{R}^{q-1}$: чтобы получить вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$, нужно просто повторить это рассуждение надлежащее число раз.

Итак, мы предполагаем, что $M \subset \mathbb{R}^q$, $q > 2n+1$. Отождествим $\mathbb{R}^{q-1}$ с $\{x \in \mathbb{R}^q \mid x_q = 0\}$. Для $v \in \mathbb{R}^q - \mathbb{R}^{q-1}$ обозначим через f_v проекцию пространства $\mathbb{R}^q$ на $\mathbb{R}^{q-1}$ параллельно v. *Мы найдем такой вектор v, что*

$$f_v \mid M\colon\ M \to \mathbb{R}^{q-1}$$

будет C^r-вложением. (См. рис. 1—4.) Искать будем среди единичных векторов.

Что требуется от v? Взаимная однозначность отображения $f_v \mid M$ означает, что вектор v не параллелен никакой хорде многообразия M; другими словами, для любых двух различных точек x, y многообразия M должно выполняться условие

$$v \neq \frac{x-y}{|x-y|}. \tag{1}$$

Более деликатным является требование, чтобы отображение $f_v | M$ было иммерсией. Ядро линейного отображения f_v есть, очевидно, прямая, определяемая вектором v. Поэтому касательный вектор $z \in M_x$ в том и только том случае принадлежит ядру отображения $T_x f_v$, если он параллелен v. Таким образом, можно обеспечить иммерсивность отображения $f_v | M$, наложив требование, чтобы для всякого ненулевого вектора $z \in TM$ выполнялось условие

$$v \neq \frac{z}{|z|}. \tag{2}$$

Здесь z, в соответствии со сказанным в § 1.2, отождествляется с вектором пространства $\mathbb{R}^q$, так что $|z|$ имеет смысл.

Условие (1) можно исследовать при помощи отображения

$$\sigma\colon (M \times M) - \Delta \to S^{q-1},$$

$$\sigma(x, y) = \frac{x-y}{|x-y|},$$

где Δ есть *диагональ*:

$$\Delta = \{(a, b) \in M \times M \mid a = b\}.$$

Ясно, что вектор v в том и только том случае удовлетворяет условию (1), если он *не лежит* в образе отображения σ. Рассматривая $(M \times M) - \Delta$ как открытое подмногообразие произведения $M \times M$, мы можем сказать, что σ принадлежит классу C^r. Заметим, далее, что

$$\dim((M \times M) - \Delta) = 2n < \dim S^{q-1}.$$

Таким образом, существование вектора v, удовлетворяющего условию (1), вытекает из следующего утверждения.

Лемма. *Пусть $g\colon P \to Q$ есть C^1-отображение. Если $\dim Q > \dim P$, то образ отображения g нигде не плотен в Q.*

Доказательство этой леммы требует развития новых идей, и мы откладываем его до гл. 3. В нашем случае $P = (M \times M) - \Delta$ и $Q = S^{q-1}$. Принимая утверждение леммы, мы получаем, что всякое непустое открытое подмножество сферы S^{q-1} содержит точку v, не лежащую в образе отображения σ.

Переходя к условию (2), мы замечаем, что оно выполнено для всех $z \in TM$, если оно выполнено для всех z с $|z| = 1$. Положим

$$T_1 M = \{z \in TM \mid |z| = 1\}.$$

Это *многообразие единичных касательных векторов* многообразия M. Оно представляет собой C^{r-1}-подмногообразие многообразия TM. Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$T_1M = \nu^{-1}(1),$$

где ν: $TM \to \mathbb{R}$ — отображение, действующее по формуле $\nu(z) = |z|^2$. Поскольку отображение ν есть сужение на TM C^ω-отображения $T\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, действующего по формуле $z \mapsto |z|^2$, оно принадлежит классу C^{r-1}. Ясно, что 1 есть регулярное значение отображения ν: если $\nu(z) = 1$, то

$$\frac{d}{dt}\nu(tz)|_{t=1} \neq 0.$$

Следовательно, $\nu^{-1}(1)$ есть C^{r-1}-подмногообразие многообразия TM (см. теорему 3.2). Ясно, что оно компактно, поскольку компактно M.

Определим C^{r-1}-отображение τ: $T_1M \to S^{q-1}$ следующим образом. Отождествляя TM с подмножеством произведения $M \times \mathbb{R}^q$, мы делаем T_1M подмножеством произведения $M \times S^{q-1}$. Отображение τ определяется просто как сужение на T_1M проекции последнего произведения на S^{q-1}. Геометрически τ есть параллельное перенесение единичных векторов, приложенных в точках многообразия M, в точку 0.

Очевидно, τ принадлежит классу C^{r-1}. Заметив, что

$$\dim T_1M = 2n - 1 < \dim S^{q-1},$$

мы применяем нашу лемму и заключаем, что образ отображения τ нигде не плотен. Ввиду компактности T_1M из этого следует, что дополнение W образа τ представляет собой всюду плотное открытое подмножество сферы S^{q-1}. Таким образом, W пересекается с $S^q \cap (\mathbb{R}^q - \mathbb{R}^{q-1})$ по непустому открытому множеству W_0. Согласно предыдущему, W_0 содержит вектор v, не лежащий в образе отображения τ. Этот вектор обладает тем свойством, что $f_v | M$: $M \to \mathbb{R}^q$ есть взаимно однозначное погружение. Так как M компактно и хаусдорфово, $f_v | M$ есть вложение. ∎

По поводу доказанной теоремы мы сделаем несколько замечаний. Во-первых, ее легко превратить в *аппроксимационную теорему*: для любого C^r-отображения g: $M \to \mathbb{R}^k$ с $k \geqslant 2n + 1$ и любого $\varepsilon > 0$ существует C^r-вложение f: $M \to \mathbb{R}^k$, такое, что $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ при любом $x \in M$[1]). Для доказательства

[1]) Приводимое ниже рассуждение служит, в действительности, доказательством аппроксимируемости отображения g вложениями в более сильном смысле, глобализующем аналитическое понятие сходимости с производными. Точные формулировки содержатся в § 2.2.— *Прим. перев.*

фиксируем C^r-вложение h: $M \to \mathbb{R}^s$ с некоторым s. Тогда отображение

$$H = g \times h: M \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$$

будет C^r-вложением, а g будет композицией отображения H с проекцией π: $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^k$. Отождествляя M с $H(M) \subset \mathbb{R}^{k+s}$, мы видим, что достаточно аппроксимировать проекцию π C^r-отображением, сужение которого на M есть вложение. Но π есть композиция линейных проекций

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{s-1} \to \ldots \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k.$$

Индукция по s позволяет ограничиться доказательством того, что если $M \subset \mathbb{R}^{k+s}$ и $k + s > 2n + 1$, то всякая линейная проекция $\mathbb{R}^{k+s} \to \mathbb{R}^{k+s-1}$ может быть аппроксимирована линейной проекцией, сужение которой на M есть вложение. А это как раз и есть то, что мы доказали.

Далее, Уитни [4] показал, что теорему 3.5 можно улучшить: если $n > 0$, то всякое паракомпактное хаусдорфово n-многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^{2n}$; более того, оно погружается в $\mathbb{R}^{2n-1}$, если $n > 1$. Однако аппроксимационный вариант теоремы 3.5 *не допускает* подобного улучшения: если образом отображения окружности S^1 в $\mathbb{R}^2$ служит самопересекающаяся кривая («восьмерка»), то никакое достаточно близкое отображение не является взаимно однозначным.

Требование $r \geqslant 2$ в теореме 3.5 может быть ослаблено до требования $r \geqslant 1$. Это следует из доказываемой в следующей главе теоремы о том, что всякое C^1-многообразие обладает C^∞-структурой, согласованной с его C^1-структурой. В действительности теорема 3.5 справедлива и для C^0-многообразий, и даже для компактных метрических пространств; см., например, книги Понтрягина [2] или Гуревича и Волмэна [1]. Возможно распространение теоремы 3.5 и в другом направлении: она справедлива для вещественно аналитических многообразий; см. главы 2 и 4. Впрочем, уже наше доказательство показывает, что если многообразие M обладает C^ω-вложением в $\mathbb{R}^q$ с некоторым q, то оно C^ω-вкладывается в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

В заключение этого параграфа заметим, что если мы хотим получить не вложение, а погружение, то теорему 3.5 можно улучшить на одну размерность. Действительно, считая, что $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, мы можем найти вектор $v \in S^{2n} - \mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющий условию (2). Таким образом, мы видим, что всякое компактное хаусдорфово n-многообразие класса C^r с $r \geqslant 2$ обладает C^r-погружением в $\mathbb{R}^{2n}$. Более того, всякое C^r-отображение $M \to \mathbb{R}^{2n}$ может быть аппроксимировано погружениями.

Более тонкими аппроксимационными теоремами этого типа являются теоремы 3.2.12 и 3.2.13. Наиболее сложные части доказательств приведены в § 2.4 и в конце гл. 3.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Взаимно однозначное погружение может не быть вложением, поскольку существует взаимно однозначное погружение прямой в плоскость, образ которого есть восьмерка. Однако взаимно однозначное погружение компактного хаусдорфова многообразия всегда является вложением.

*2. Пусть M — связное некомпактное хаусдорфово C^r-многообразие с $r \geqslant 0$. Тогда существует замкнутое C^r-вложение полупрямой $[0, \infty)$ в M.

3. (a) Существует погружение *проколотого тора* $S^1 \times S^1$ — {точка} в $\mathbb{R}^2$. [Указание: растяните прокол.]

*(b) Существует погружение проколотого n-тора $(S^1)^n$ — {точка} в $\mathbb{R}^n$.

4. Любое произведение сфер может быть вложено в евклидово пространство на единицу большей размерности.

*5. Не существует погружения ленты Мёбиуса в плоскость.

6. Прямая с двумя нулями (см. упр. 10 к § 1.1) может быть погружена в $\mathbb{R}$.

7. T_1S^2 (многообразие единичных касательных векторов к S^2) диффеоморфно P^3.

8. Пусть M — компактное C^1-многообразие. Тогда всякое C^1-отображение $M \to \mathbb{R}$ имеет по крайней мере две критические точки.

9. Пусть f: $S^1 \to \mathbb{R}$ — некоторое C^1-отображение и $y \in \mathbb{R}$ — его регулярное значение.

(a) $f^{-1}(y)$ состоит из четного числа точек.

(b) Если $f^{-1}(y)$ содержит $2k$ точек, то у f имеется по крайней мере $2k$ критических точек.

*(c) Пусть g: $S^2 \to \mathbb{R}$ — некоторое C^1-отображение и $y \in g(S^2)$ — его регулярное значение. Если $g^{-1}(y)$ имеет k компонент, то у g имеется по крайней мере $k+1$ критических точек. [Воспользуйтесь теоремой Жордана о кривых.]

*10. Всякое C^2-отображение f: $T^2 \to \mathbb{R}$ имеет по крайней мере 3 критические точки. [$T^2 = S^1 \times S^1$ — тор. Если у f есть только максимум p_+ и минимум p_-, то нужно взять односвязную окрестность U точки p_- и рассмотреть градиентный поток φ_t: $T^2 \to T^2$ $(t \in \mathbb{R})$ функции f. Можно показать, что $T^2 - p_+ = \bigcup_{t>0} \varphi_t(U)$, а из этого следует, что $T^2 - p_+$ односвязно.]

11. (a) Рассматривая S^1 как экватор сферы S^2, мы делаем P^1 подмногообразием многообразия P^2. Показать, что P^1 не есть регулярная поверхность уровня ни для какого C^1-отображения многообразия P^2. [Указание: никакая окрестность многообразия P^1 в P^2 не разрезается этим многообразием.]

(b) Обобщите (a) на случай $P^n \subset P^{n+1}$.

12. *Поверхность рода p* есть 2-мерное многообразие, гомеоморфное пространству, получающемуся из сферы S^2 удалением внутренностей $2p$ непересекающихся 2-дисков и приклеиванием p непересекающихся цилиндров к их границам (рис. 1—5).

*(a) Для каждого неотрицательного целого p существует полиномиальное отображение f_p: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, для которого 0 есть регулярное значение и $f^{-1}(0)$ есть поверхность рода p. Например:

$$f_0(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1;$$

$$f_1(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 - 1;$$

$$f_2(x, y, z) = [4x^2(1 - x^2) - y^2]^2 + z^2 - 1/4.$$

[Рассмотрите функции вида $(F(x, y))^2 + z^2 - \varepsilon^2$, где $F(x, y) = 0$ определяет в $\mathbb{R}^2$ замкнутую кривую с $p - 1$ самопересечениями.]

***(b) Какова минимальная степень многочлена f_p [1])?

*13. Всякая C^1-поверхность рода p при любом $p \geqslant 0$ допускает C^1-отображение в $\mathbb{R}$, имеющее ровно 3 критические точки.

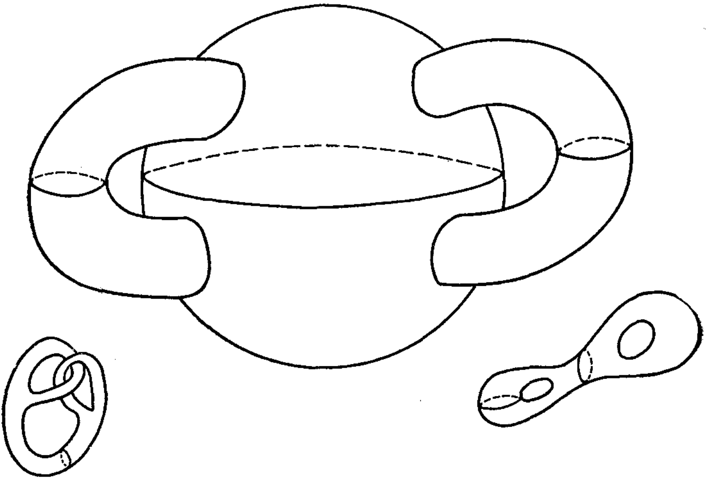


Рис. 1—5. Ориентируемые поверхности рода $p = 2$.

*14. Доказательство теоремы 3.4 о вложениях компактных многообразий можно переделать в доказательство гомеоморфности произвольного паракомпактного хаусдорфова многообразия замкнутому подмножеству банахова пространства. Последнее показывает, что такое многообразие всегда обладает полной метрикой.

*15. P^2 вкладывается в $\mathbb{R}^4$. [Представьте P^2 как объединение ленты Мёбиуса M и диска D. Вложите M и D в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы они имели общую граничную окружность S; затем вдавите их в $\mathbb{R}^4$ по разные стороны от $\mathbb{R}^3$, оставив неподвижной окружность S.]

16. Вложения P^n в S^{n+k} можно строить следующим образом (Хопф [1], Джеймс [1]). Пусть $h: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+k+1}$ — симметрическое билинейное отображение, такое, что $h(x, y) \neq 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$. Определим $g: S^n \to S^{n+k}$ формулой $g(x) = h(x, x)/|h(x, x)|$.

(a) $g(x) = g(y)$ в том и только том случае, если $x = \pm y$. [Указание: если $h(x, x) = \lambda^2 h(y, y)$, рассмотрите выражение $h(x + \lambda y, x - \lambda y)$.]

(b) g индуцирует аналитическое вложение $P^n \to S^{n+k}$.

---

[1]) Нижнюю оценку доставляют неравенство Петровского—Олейник и дальнейшие результаты топологии вещественных алгебраических многообразий, относящиеся, правда, к поверхностям в проективном пространстве. См. обзорную статью Д. А. Гудкова в *УМН*, **29** (1974), № 4, с. 3—79.— *Прим. перев.*

(с) P^n вкладывается в S^{2n}. [Указание: определите $h\colon \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{2n+1}$ формулой

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_n) = (z_0, \ldots, z_{2n}),$$

где $z_k = \Sigma_{i+j=k}\, x_i y_j$.]

4. МНОГООБРАЗИЯ С КРАЕМ

Наше определение многообразия исключает многие объекты, для которых естественным образом определены гладкие отображения и касательные векторы; примером служит замкнутый единичный шар $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Многие из этих объектов охватываются понятием «многообразия с краем», которое мы сейчас введем.

Полупространство пространства $\mathbb{R}^n$, или *n-полупространство*, есть множество вида

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(x) \geqslant 0\},$$

где λ есть линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Если $\lambda \equiv 0$, то $H = \mathbb{R}^n$; в противном случае говорят, что H есть *собственное* полупространство. Если полупространство H собственно, то ядро отображения λ называется его *границей* или *краем* и обозначается через ∂H; это линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $n-1$. В случае $H = \mathbb{R}^n$ мы полагаем $\partial H = \varnothing$.

Расширим теперь определение карты пространства M, понимая отныне карту как отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, гомеоморфно отображающее открытое множество $U \subset M$ на открытое подмножество некоторого полупространства пространства $\mathbb{R}^n$. Это определение охватывает все старые карты, поскольку само $\mathbb{R}^n$ есть полупространство, а также большое количество новых карт. Используя этот расширенный запас карт, мы соответствующим образом модифицируем понятия атласа, C^r-атласа, дифференциальной C^r-структуры и, наконец, C^r-многообразия.

Пусть (M, Φ) есть C^r-многообразие (в новом смысле). Предположим, что $(\varphi, U) \in \Phi$ и что $\varphi(U)$ есть открытое подмножество собственного полупространства $H \subset \mathbb{R}^n$. Если $x \in \varphi^{-1}(\partial H)$, то говорят, что x есть *граничная* или *краевая* точка по отношению к карте (φ, U). *Это условие не зависит от выбора карты.* Последнее утверждение равносильно высказыванию, что замена координат не может превратить внутреннюю точку полупространства в его граничную точку. А это следует при $r \geqslant 1$ из теоремы об обратной функции, а при $r = 0$ — из «теоремы об инвариантности области». Так называется классическая и трудная топологическая теорема, утверждающая, что подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное открытому подмножеству этого пространства, само открыто; см., например, Гуревич и Волмэн [1].

Край многообразия (M, Φ) определяется как множество точек $x \in M$, являющихся краевыми точками по отношению к некоторой (и, значит, любой) карте; край обозначается через ∂M.

Если (M, Φ) есть C^r-многообразие, то можно следующим образом построить C^r-атлас для ∂M. Предположим, что $(\varphi, U) \in \Phi$ и что $U \cap \partial M \neq \varnothing$. Пусть $H \subset \mathbb{R}^n$ есть полупространство, содержащее $\varphi(U)$ и такое, что $U \cap \partial M = \varphi^{-1}(\partial H)$. Пусть L: $\partial H \to \mathbb{R}^{n+1}$ — какой-нибудь линейный изоморфизм; тогда $(L\varphi, U \cap \partial M)$ есть карта пространства ∂M. Множество всех таких карт и является C^r-атласом для ∂M. Таким образом ∂M делается C^r-многообразием размерности $n-1$.

Если $\partial M \neq \varnothing$, мы называем M *∂-многообразием*. Если $\partial M = \varnothing$, мы называем M *многообразием без края*.

Определение C^r-отображения между C^r-многообразиями при переходе к краевому случаю не меняется, как не меняются определения касательного вектора и многообразия касательных векторов. Не требуют серьезных изменений и понятия погружения, субмерсии, диффеоморфизма и вложения.

Некоторая осторожность необходима, однако, при рассмотрении понятия подмногообразия. Хотелось бы, например, считать замкнутый диск подмногообразием плоскости. Но что делать, скажем, с замкнутым диском, который лежит в полупространстве пространства $\mathbb{R}^3$ и граница которого пересекается с границей полупространства по одной точке? Или, еще хуже, по канторовому множеству? Все это — образы вложений, и мы должны считать их подмногообразиями.

Переходя к аккуратному определению, посмотрим сначала, какое новое содержание приобретает понятие k-мерного C^r-подмногообразия пространства $\mathbb{R}^n$. Оно должно означать теперь такое множество $V \subset \mathbb{R}^n$, что каждая его точка принадлежит области определения некоторой карты ψ: $W \to \mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию

$$V \cap W = \psi^{-1}(H)$$

для некоторого k-полупространства $H \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть теперь M есть C^r-многообразие, с краем или без него. Подмножество A многообразия M называется его C^r-подмногообразием, если каждая точка из A принадлежит области определения некоторой карты φ: $U \to \mathbb{R}^n$ многообразия M, такой, что $\varphi(U \cap A)$ есть C^r-подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$ в только что определенном смысле.

Эквивалентное определение: для каждой точки $x \in A$ найдутся открытое множество $N \subset M$, содержащее x, C^r-вложение g: $N \to \mathbb{R}^n$ $(n = \dim M)$ и k-полупространство $H \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ с открытым подмножеством W, такие, что

$$A \cap N = g^{-1}(W).$$

Это определение подмногообразия охватывает прежнее определение. Теорема 3.1 остается верной: при $r \geqslant 1$ C^r-подмногообразие есть образ C^r-вложения, и наоборот.

Полезно иметь специальное название для подмногообразий $A \subset M$, край которых лежит в ∂M и достаточно хорошо там расположен. Мы будем называть подмногообразие A *правильным*, если $\partial A = A \cap \partial M$ и A покрывается такими картами (φ, U) многообразия M, что

$$A \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m),$$

где $m = \dim A$. (См. рис. 1—6.) *Правильное вложение* —это вложение, образ которого есть правильное подмногообразие.

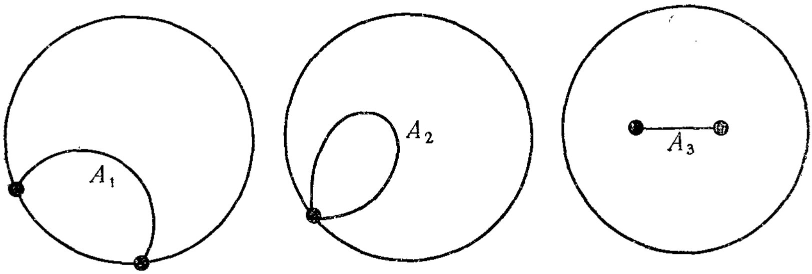


Рис. 1—6. A_1 правильно; A_2 и A_3 неправильны.

Если A есть подмногообразие многообразия M и $\partial A = \varnothing$, то A правильно тогда и только тогда, когда $A \cap \partial M = \varnothing$. В общем случае A правильно тогда и только тогда, когда $\partial A = A \cap \partial M$ и (при $r \geqslant 1$) A не касается ∂M ни в одной точке $x \in \partial A$; последнее означает, что $A_x \not\subset (\partial M)_x$.

Теорема о регулярном значении в случае ∂-многообразий принимает следующий вид.

4.1. Теорема. *Пусть M есть ∂-многообразие класса C^r с $r \geqslant 1$ и N — произвольное C^r-многообразие. Пусть, далее, f: $M \to N$ — некоторое C^r-отображение. Если $y \in N - \partial N$ есть регулярное значение как для f, так и для $f \mid \partial M$, то $f^{-1}(y)$ есть правильное C^r-подмногообразие многообразия M.*

А вот обобщение на ∂-случай теоремы 3.3.

4.2. Теорема. *Пусть A есть C^r-подмногообразие многообразия N и f: $M \to N$ — отображение класса C^r. Предположим, что либо* (i) $\partial A \subset \partial N$ *и f, $f \mid \partial M$ трансверсальны к A, либо* (ii) $A \subset N - \partial N$ *и f, $f \mid \partial M$ трансверсальны как к A, так и к ∂A. Тогда $f^{-1}(A)$ есть C^r-подмногообразие многообразия M и $\partial f^{-1}(A) = f^{-1}(\partial A)$.*

Доказательства теорем 4.1 и 4.2 оставляются читателю.

Теоремы 3.4 и 3.5 о вложениях проходят с небольшими изменениями. Ценой некоторых усилий можно получить следующий результат.

4.3. Теорема. *Пусть M — компактное хаусдорфово n-мерное C^r-многообразие с $r \geqslant 1$. Тогда существует правильное C^r-вложение многообразия M в полупространство пространства* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Замечания, следующие за теоремой 3.5, сохраняют силу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Произведение двух ∂-многообразий (класса C^0) есть ∂-многообразие.

2. Всякое C^1-отображение $M \to N$ переводит свои регулярные точки, лежащие в $M - \partial M$, в $N - \partial N$.

3. Пусть M есть замкнутая верхняя полуплоскость. Легко видеть, что для всякого C^1-отображения $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ каждая точка полуплоскости M является регулярной точкой отображения $f\colon M \to \mathbb{R}$, определяемого формулой $f(x, y) = y + g(x)$. Положим

$$g(x) = \begin{cases} e^{-(1/x^2)} \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда f принадлежит классу C^∞, 0 есть регулярное значение, но $f^{-1}(0)$ не есть многообразие.

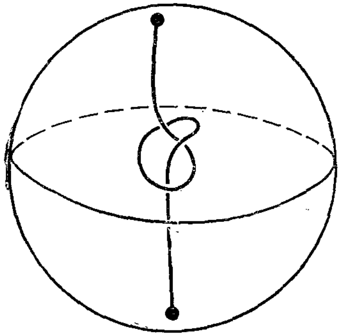


Рис. 1—7.

4. Пусть A — правильное C^r-подмногообразие многообразия N, $r \geqslant 0$. Пусть, далее, $f\colon (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ — произвольное C^r-отображение. Предположим, наконец, что каждая точка многообразия A [соответственно края ∂A] есть регулярное значение отображения f [соответственно отображения $f\colon \partial M \to \partial N$]. Тогда $f^{-1}(A)$ есть правильное C^r-подмногообразие многообразия M.

5. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ есть функция класса C^r с $r \geqslant 0$. Предположим, что эта функция постоянна на каждой компоненте края ∂M. Тогда для любых регулярных значений a, b множества $f^{-1}(a)$, $f^{-1}[a, b]$, $f^{-1}(a, b]$ и $f^{-1}[a, \infty)$ являются C^r-подмногообразиями многообразия M.

*6. Существует C^∞-отображение $f\colon D^3 \to D^2$, для которого $0 \in D^2$ есть регулярное значение и $f^{-1}(0)$ есть заузленная кривая (рис. 1—7).

7. *Удвоением* ∂-многообразия M называется пространство, которое получится из объединения $(M \times 0) \cup (M \times 1)$, если в этом объединении отождествить при каждом $x \in \partial M$ точку $(x, 0)$ с точкой $(x, 1)$. Доказать, что удвоение есть C^r-многообразие той же размерности, что M, содержащее M в качестве подмногообразия.

8. Если $\partial M = \varnothing$, то M является краем, т. е. $M = \partial N$ для некоторого ∂-многообразия N. Однако в случае компактного M может оказаться невоз-

можным найти компактное N с этим свойством. [Предположите, например, что M нульмерно.]

9. Одномерное связное паракомпактное хаусдорфово ∂-многообразие класса C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ C^r-диффеоморфно замкнутому или полуоткрытому конечному интервалу. (При $r = \omega$ это верно, но трудно доказывается.)

10. Края диффеоморфных многообразий диффеоморфны.

11. C^1-многообразие называется *ориентируемым*, если оно обладает атласом, у которого замены координат во всех точках имеют положительный якобиан. Если M ориентируемо, то и ∂M ориентируемо; обратное же неверно.

12. Подмножество Q пространства $\mathbb{R}^n$ называется *ортантом*, если существует такой линейный изоморфизм $L: \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k}$ и такие полупространства $H_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, что $L(Q) = H_1 \times \ldots \times H_k$. Существует категория «$C^r$-многообразий с углами», карты которых представляют собой гомеоморфизмы на открытые подмножества ортантов. Эта категория содержит все C^r-многообразия, с краем и без края, и *замкнута по отношению к перемножению*.

5. СОГЛАШЕНИЕ

Хотя непаракомпактные многообразия не лишены интереса, они никогда не появляются естественным образом. Кроме того, и это, пожалуй, хуже, для них трудно что-нибудь доказать. С нехаусдорфовыми многообразиями иногда приходится сталкиваться (см. упр. 11 к § 1.1), но и для них трудно доказать что-либо интересное. Наконец, удобно иметь дело с многообразиями, число компонент которых счетно. Ввиду всего этого мы принимаем следующее соглашение.

Если явно не утверждается противное, все многообразия, о которых пойдет речь, предполагаются паракомпактными и имеющими счетную базу, а все пространства — хаусдорфовыми.

Конечно, для каждого пространства или многообразия, которое мы будем рассматривать, нам придется доказывать, что оно обладает этими свойствами; доказательство обычно оказывается тривиальным.

Глава 2

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Иногда говорят, что в природе существуют только аналитические функции; с моей точки зрения, это — абсурд.

Ф. Клейн, Лекции по математике, 1893

Многие проблемы дифференциальной топологии могут быть сформулированы на языке функциональных пространств; это часто приводит к более правильному пониманию проблем и позволяет взглянуть на них с единой точки зрения. Например, в гл. 1 мы «вручную» построили вложение произвольного компактного многообразия M в некоторое $\mathbb{R}^q$; в этой главе мы введем в множество отображений многообразия M в N топологию и покажем, что всякое отображение $M \to N$ может быть аппроксимировано вложениями, если $\dim N > 2 \dim M$.

Наиболее полезной топологией на множестве $C^r(M, N)$ всех C^r-отображений многообразия M в N оказывается так называемая сильная топология. Грубо говоря, окрестность отображения f в сильной топологии состоит из всех отображений g, достаточно близких к f вместе с производными до порядка r. Степень близости определяется произвольно задаваемыми положительными числами, оценивающими разность производных координатных функций локальных представлений отображений f и g.

Слабая (или «C^r-компактно-открытая») топология на $C^r(M, N)$ учитывает близость отображений только на компактных множествах. Если M компактно, слабая топология не отличается от сильной.

В § 2.3 мы вкратце перечислим изменения, необходимые для распространения аппроксимационных теорем на ∂-многообразия и пары многообразий.

В § 2.4 вводятся струи, с помощью которых дается новое, косвенное определение слабой и сильной топологии. Здесь плотность множества вложений передоказывается на основании свойства Бэра. В последнем параграфе приводятся без доказательства различные результаты об аналитических аппроксимациях.

Углубление аппроксимационной и глобализационной техники позволит нам уточнить теоремы Уитни о вложениях и погружениях, доказанные в предыдущей главе. Уточнению подлежат утверждения о плотности множеств вложений и погружений, к которым мы вернемся в § 2.1 и 2.2 и затем еще раз в § 2.4. Окончательная формулировка свойства плотности вложений содержится в теореме 2.13.

1. СЛАБАЯ И СИЛЬНАЯ ТОПОЛОГИИ В $C^r(M, N)$

Для C^r-многообразий M, N через $C^r(M, N)$ обозначается множество всех C^r-отображений $M \to N$. Мы предположим сначала, что r конечно.

Слабая топология в $C^r(M, N)$ порождается множествами, определяемыми следующим образом. Пусть $f \in C^r(M, N)$, и пусть (φ, U), (ψ, V) — карты многообразий M, N. Пусть, далее, $K \subset U$ — компактное множество, такое, что $f(K) \subset V$; пусть, наконец, $0 < \varepsilon \leqslant \infty$. Мы определяем *слабую предбазисную окрестность*

$$\mathcal{N}^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon) \tag{1}$$

как множество таких C^r-отображений $g: M \to N$, что $g(K) \subset V$ и для любых $x \in \varphi(K)$, $k = 0, \ldots, r$,

$$\|D^k(\psi f \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi g \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon.$$

Это означает, что локальные представления отображений f, g вместе с их первыми r производными различаются не более, чем на ε, в каждой точке множества K.

Слабая топология в $C^r(M, N)$ порождается множествами (1); этим определяется топологическое пространство $C^r_W(M, N)$. Окрестностью точки f по отношению к этой топологии является, таким образом, всякое множество, содержащее пересечение конечного числа множеств типа (1).

Анализируя доказательство легкой теоремы Уитни о вложении (теоремы 1.3.5) [1]), мы видим, что оно является в действительности доказательством следующего аппроксимационного утверждения.

1. 0. Предложение. *Пусть M — компактное C^r-многообразие с $2 \leqslant r \leqslant \infty$. Тогда вложения составляют плотное в $C^r_W(M, \mathbb{R}^q)$ множество при $q > 2 \dim M$, а погружения — при $q \geqslant 2 \dim M$* [2]).

Можно показать, что пространство C^r_W обладает рядом привлекательных качеств: например, оно допускает плотную метрику и счетную базу; в случае компактного M оно локально стягиваемо, а $C^r_W(M, \mathbb{R}^m)$ является даже банаховым пространством.

Однако если M не компактно, то слабая топология недостаточно хорошо контролирует поведение отображений «на бесконечности». Для этой цели более подходит *сильная топология* (которая называется также *тонкой топологией* или *топологией Уитни*). База этой топологии состоит из множеств следующего типа.

---

[1]) С учетом следующего за этим доказательством замечания.— *Прим. перев.*

[2]) C^∞_W определяется чуть ниже.— *Прим. перев.*

Пусть $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ — *локально конечное* множество карт многообразия M; это означает, что каждая точка из M обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств U_i. Пусть, далее, $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ — семейство компактных подмножеств многообразия M с $K_i \subset U_i$, $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda}$ — семейство карт многообразия N и $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \Lambda}$ — семейство положительных чисел. Если отображение $f \in C^r(M, N)$ переводит каждое K_i в V_i, мы определяем *сильную базисную окрестность*

$$\mathcal{N}^r(f;\ \Phi, \Psi, K, \varepsilon) \tag{2}$$

как множество таких C^r-отображений $g: M \to N$, что для каждого $i \in \Lambda$

$$g(K_i) \subset V_i$$

и для любых $x \in \varphi_i(K_i)$, $k = 0, \ldots, r$,

$$\| D^k(\psi_i f \varphi_i^{-1})(x) - D^k(\psi_i g \varphi_i^{-1})(x) \| < \varepsilon_i.$$

Всевозможные множества этого вида и составляют базу сильной топологии.

Следует, конечно, проверить, что множества (2) со всевозможными f, Φ, Ψ, K, ε действительно составляют базу некоторой топологии. Мы оставляем эту проверку читателю; впрочем, это будет также видно из другого описания сильной топологии, которое мы дадим в § 4.

Топологическое пространство $C^r_S(M, N)$, получающееся при введении сильной топологии, не отличается от $C^r_W(M, N)$ в случае компактного M. Однако если M не компактно, а N имеет положительную размерность, то сильная топология значительно богаче слабой. В этом случае пространство $C^r_S(M, N)$ не метризуемо, ни в какой точке не имеет счетной базы и распадается в сумму несчетного числа компонент. Все же это пространство обладает одним достоинством: для него справедлива теорема Бэра о категории; это будет доказано в § 4.

Определим теперь пространства $C^\infty_W(M, N)$ и $C^\infty_S(M, N)$. Слабая топология в $C^\infty(M, N)$ есть просто объединение топологий, индуцируемых включениями $C^\infty(M, N) \to C^r_W(M, N)$ с конечными r, а сильная топология в $C^\infty(M, N)$ есть объединение топологий, индуцируемых включениями $C^\infty(M, N) \to C^r_S(M, N)$.

Наконец, слабая и сильная топологии в $C^\omega(M, N)$ индуцируются слабой и сильной топологиями в $C^\infty(M, N)$.

Сильная топология тем удобна для дифференциальной топологии, что многие важные множества оказываются в ней открытыми. Например:

1.1. Теорема. *Множество* $\mathrm{Imm}^r(M, N)$ C^r*-погружений открыто в* $C_S^r(M, N)$ $[r \geqslant 1]$.

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{Imm}^r(M, N) = \mathrm{Imm}^1(M, N) \cap C^r(M, N),$$

достаточно доказать это при $r = 1$. Если $f: M \to N$ есть C^1-погружение, то можно следующим образом построить окрестность $\mathcal{N}^1(f; \Phi, \Psi, K, \varepsilon)$, состоящую из погружений. Возьмем произвольный атлас $\Psi^0 = \{\psi_\beta, V_\beta\}_{\beta \in B}$ многообразия N и построим такой атлас $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ многообразия M, что каждое U_i имеет компактное замыкание и для каждого $i \in \Lambda$ существует $\beta(i) \in B$ с $f(U_i) \subset V_{\beta(i)}$[1]. Положим $V_{\beta(i)} = V_i$, $\psi_{\beta(i)} = \psi_i$ и $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda}$. Пусть $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ — компактное покрытие многообразия M с $K_i \subset U_i$.

Очевидно,

$$A_i = \{D(\psi_i f \varphi_i^{-1})(x) \mid x \in \varphi_i(K_i)\}$$

есть компактное множество линейных мономорфизмов $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Так как множество линейных мономорфизмов открыто в векторном пространстве $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ всех линейных отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, существует такое $\varepsilon_i > 0$, что если $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ и $\|T - S\| < \varepsilon_i$, где $S \in A_i$, то T мономорфно. Положим $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$. Мы видим, что всякий элемент множества $\mathcal{N}^1(f; \Phi, \Psi, K, \varepsilon)$ представляет собой погружение. ∎

Доказательство следующего предложения аналогично, и мы оставляем его читателю.

1.2. Теорема. *Множество субмерсий открыто в* $C_S^r(M, N)$ *при* $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

Наша следующая цель — установить открытость множества вложений. Для этого нам необходим следующий факт.

1.3. Лемма. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^m$ *— открытое множество и* $W \subset U$ *— открытое множество, замыкание которого компактно и содержится в* U. *Пусть, далее,* $f: U \to \mathbb{R}^n$ *есть* C^1*-вложение. Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что если* $g: U \to \mathbb{R}^n$ *— произвольное* C^1*-отображение с*

$$\|Dg(x) - Df(x)\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

при всех $x \in W$, *то* $g|W$ *есть вложение.*

[1]) Необходимо потребовать также, чтобы атлас Φ был локально конечен; возможность выбора такого атласа обеспечивается паракомпактностью многообразия M.— *Прим. перев.*

Доказательство. Из теоремы 1.1 (или, скорее, ее доказательства) и компактности замыкания $\overline{W}$ следует существование столь малого $\varepsilon_0 > 0$, что если $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ и $\|Dg(x) - Df(x)\| < \varepsilon_0$ при всех $x \in W$, то $g|W$ есть погружение. Поэтому если бы лемма была неверна, то существовала бы последовательность $g_n \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, такая, что

$$\|Dg_n(x) - Df(x)\| \to 0$$

и

$$|g_n(x) - f(x)| \to 0 \tag{3}$$

равномерно по W и в то же время при каждом n в W найдутся различные точки a_n, b_n с $g_n(a_n) = g_n(b_n)$. Компактность замыкания $\overline{W}$ позволяет нам предположить, что $a_n \to a \in U$, $b_n \to b \in U$. Тогда, в силу (3), $f(a) = f(b)$ и, значит, $a = b$. Ограничиваясь, в случае надобности, подпоследовательностями наших последовательностей, мы можем предположить, что последовательность единичных векторов

$$v_n = \frac{a_n - b_n}{|a_n - b_n|}$$

сходится к некоторому единичному вектору $v \in S^{m-1}$. Наконец, ввиду равномерности сходимости ряда Тейлора,

$$|g_n(a_n) - g_n(b_n) - Df(b_n)(a_n - b_n)|/|a_n - b_n| \to 0.$$

Таким образом, $Df(b_n)v_n \to 0$. Но в то же время эта последовательность сходится к $Df(b)v$. Следовательно, $Df(b)v = 0$, а это противоречит тому, что f есть погружение. ∎

Теперь все готово для доказательства открытости множества вложений.

1.4. Теорема. *При* $r \geqslant 1$ *множество* $\mathrm{Emb}^r(M, N)$ C^r-*вложений многообразия* M *в* N *открыто в* $C^r_S(M, N)$.

Доказательство. Мы можем считать, что $r = 1$. Пусть $f \in \mathrm{Emb}^r(M, N)$. Предыдущая лемма позволяет нам найти следующие объекты: (i) локально конечный атлас $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ многообразия M; (ii) множество $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda}$ карт многообразия N с $f(U_i) \subset V_i$; (iii) семейство компактных множеств $K_i \subset U_i$, внутренности W_i которых покрывают M; (iv) такие $\varepsilon_i > 0$, что если

$$g \in \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}^r(f;\ \Phi, \Psi, K, \varepsilon),$$

то $g(U_i) \subset V_i$ и $g|W_i$ есть C^r-вложение.

Так как f есть вложение, то при каждом $i \in \Lambda$ существуют непересекающиеся открытые множества A_i, $B_i \subset N$, такие, что $f(K_i) \subset A_i$ и $f(M - U_i) \subset B_i$. Отображение f обладает в $C_S^r(M, N)$ (и даже в $C_S^0(M, N)$) такой окрестностью $\mathcal{N}_1$, что для любого $g \in \mathcal{N}_1$

$$g(K_i) \subset A_i, \quad g(M - U_i) \subset B_i.$$

Мы покажем, что всякое $g \in \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{N}_1$ есть вложение. Действительно, g есть погружение в силу выбора множества $\mathcal{N}_0$. Чтобы показать, что g взаимно однозначно, возьмем произвольные различные точки x, y многообразия M с $x \in K_i$. Если $y \in U_i$, то $g(x) \neq g(y)$ в силу взаимной однозначности сужения $g|U_i$; если же $y \in M - U_i$, то $g(x) \in A_i$ и $g(y) \in B_i$, так что снова $g(x) \neq g(y)$. Наконец, чтобы показать, что g: $M \to g(M)$ есть гомеоморфизм, достаточно установить, что если y_n — последовательность в M и $g(y_n) \to g(x)$, то $y_n \to x$. Если $x \in K_i$, то $g(x) \in A_i$; поэтому лишь конечное число точек $g(y_n)$ может попасть в B_i, так что все точки y_n, за исключением конечного числа, лежат в U_i. Поскольку $g|U$: $U \to g(U)$ есть гомеоморфизм, из этого вытекает, что $y_n \to x$. ∎

Отображение f называется *собственным*, если f^{-1} переводит компактные множества в компактные множества.

1.5. Теорема. *Множество* $\operatorname{Prop}^r(M, N)$ *собственных* C^r*-отображений* $M \to N$ *открыто в* $C_S^r(M, N)$ *при всех* $r \geqslant 0$.

Доказательство. Для всякого отображения f: $M \to N$ существуют компактное покрытие $\{K_i\}_{i \in \Lambda}$ многообразия M и открытое покрытие $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \Lambda}$ многообразия N, такие, что $f(K_i) \subset V_i$. Если f собственно, то можно дополнительно потребовать, чтобы $\mathcal{V}$ было *локально конечным*. Зафиксируем окрестность $\mathcal{N}$ отображения f, такую, что если $g \in \mathcal{N}$, то $g(K_i) \subset V_i$ при всех i. Чтобы показать, что такое g собственно, возьмем компактное множество $L \subset N$. Это множество пересекается лишь с конечным числом множеств V_i; следовательно, $g^{-1}(L)$ есть замкнутое подмножество многообразия M, покрытое конечным числом компактных множеств K_i; следовательно, $g^{-1}(L)$ компактно. ∎

Так как вложение f: $M \to N$ в том и только том случае является собственным, если его образ $f(M)$ замкнут в N, мы получаем

Следствие. *При любом* $r \geqslant 1$ *множество замкнутых вложений открыто в* $C_S^r(M, N)$.

Обозначим через $\operatorname{Diff}^r(M, N)$ множество всех C^r-диффеоморфизмов многообразия M на N.

1.6. Теорема. *Если M и N — произвольные C^r-многообразия без края, то при любом $r \geqslant 1$ множество* $\operatorname{Diff}^r(M, N)$ *открыто в* $C^r_S(M, N)$.

Доказательство. Диффеоморфизм индуцирует взаимно однозначное соответствие между компонентами многообразия M и компонентами многообразия N. Очевидно, некоторая окрестность такого отображения состоит из отображений, индуцирующих то же самое соответствие. Поэтому мы можем предположить, что M и N связны.

Диффеоморфизм является одновременно вложением, субмерсией и собственным отображением. Обратно, всякое отображение g между связными многообразиями, обладающее этими тремя свойствами, является диффеоморфизмом; действительно, образ субмерсии открыт (в силу теоремы об обратной функции), а образ собственного отображения замкнут, так что g есть вложение, образ которого совпадает со всем N, т. е. диффеоморфизм. Таким образом, $\operatorname{Diff}^r(M, N)$ есть пересечение трех открытых подмножеств множества $C^r_S(M, N)$. ∎

Для ∂-многообразий теорема 1.6 неверна. Можно показать, однако, что множество $\operatorname{Diff}^r(M, N)$ открыто в подпространстве

$$C^r_S(M, \partial M; N, \partial N) = \{f \in C^r_S(M, N) \mid f(\partial M) \subset \partial N\}$$

пространства $C^r_S(M, N)$.

Теорема 1.6 не имеет места и при $r = 0$: множество гомеоморфизмов не является открытым в $C^0_S(M, N)$ (за исключением того случая, когда оно пусто или $\dim M = 0$). Однако, справедливо следующее утверждение.

1.7. Теорема. *Пусть M и N — многообразия без края и $f: M \to N$ — гомеоморфизм. Тогда f обладает в $C^0_S(M, N)$ окрестностью, составленной из отображений, образ которых совпадает с N.*

Доказательство. Пусть g близко к f; тогда $f^{-1}g$ близко к тождественному отображению. Благодаря этому мы можем ограничиться случаем $M = N$ и $f = 1_M$.

Пусть $\{\varphi_i, U_i\}$ — локально конечное покрытие многообразия M такими картами, что $\varphi_i(U_i)$ содержит D^n — замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ — и $M = \bigcup \varphi_i^{-1}(D^n)$. Для каждого i фиксируем в $\varphi_i(U_i)$ чуть больший замкнутый шар B_i, так что $0 \in D^n \subset \operatorname{Int} B_i$. Нам достаточно найти такие $\varepsilon_i > 0$, что для любого непрерывного отображения $h_i: B_i \to \mathbb{R}^n$ с $|h_i(x) - x| < \varepsilon_i$ при всех x образ $h_i(B_i)$ содержит D^n. Действительно, если числа ε_i обладают указанными свойствами, то отображения $g: M \to M$ с

$$g\varphi_i^{-1}(B_i) \subset U_i,$$
$$|\varphi_i g \varphi_i^{-1}(x) - x| < \varepsilon_i$$

при всех i, u, $x \in B_i$ имеют образ, совпадающий с N (чтобы убедиться в этом, достаточно положить $\varphi_i g \varphi_i^{-1} = h_i$), и составляют окрестность отображения f.

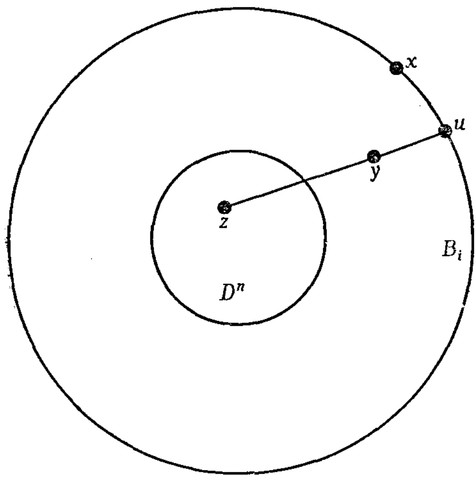


Рис. 2—1.

Возьмем число $\varepsilon_i > 0$ столь малым, что для любых $z \in D^n$, $x \in \partial B_i$ и $y \in \mathbb{R}^n$ с $|x - y| < \varepsilon_i$ луч, выходящий из точки z и проходящий через точку y, пересекает ∂B_i в точке u с $|u - x| <$ diam B_i (рис. 2—1). Предположим, далее, что непрерывное отображение $h: B_i \to \mathbb{R}^n$ обладает тем свойством, что $|h(x) - x| < \varepsilon_i$, и что найдется точка $z \in D^n - h(B_i)$. Пусть $H: B_i \to \partial B_i$ — отображение, переводящее точку $x \in B_i$ в точку пересечения окружности ∂B_i с лучом, исходящим из z и проходящим через $h(x)$. В силу выбора ε_i, $H(x) \neq -x$ при любом $x \in \partial B_i$. Поэтому отображение $H|\partial B_i: \partial B_i \to \partial B_i$ гомотопно тождественному: при гомотопии точка равномерно движется по более короткой дуге, соединяющей $H(x)$ с x (рис. 2—2). Однако классическая топологическая теорема утверждает, что отображение $(n-1)$-мерной сферы в себя, продолжающееся до отображения n-мерного шара в сферу, не может быть гомотопным тождественному. (Мы это докажем в свое время: см. теорему 3.1.4.) Противоречие показывает, что $D^n \subset h(B_i)$, и это завершает доказательство теоремы 1.7. ▮

Для ∂-многообразий можно показать, что всякий гомеоморфизм $h: M \to N$ обладает в $C_S^0(M, \partial M; N, \partial N)$ окрестностью, состоящей

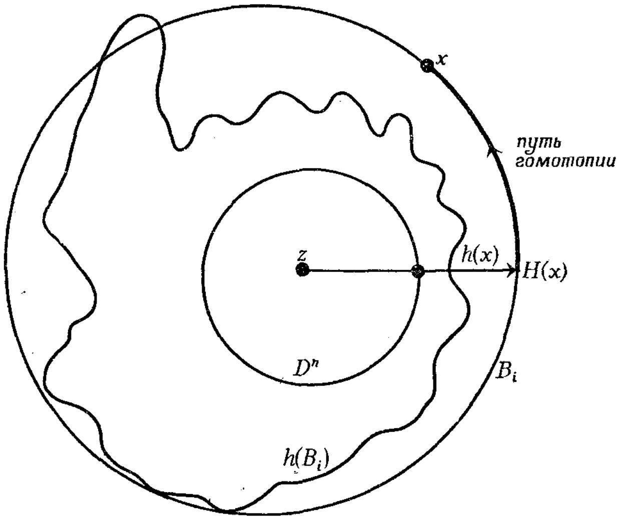


Рис. 2—2.

из отображений, образ которых совпадает с N. Это можно вывести из теоремы 1.7, продолжая h до гомеоморфизма между удвоениями многообразий M и N.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пространство $C_S^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с любым $r \geqslant 0$ не имеет ни в одной точке счетной базы и, таким образом, неметризуемо. По отношению к обычным операциям оно является топологической группой, но не является топологическим векторным пространством.

2. Предположим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к g в $C_S^r(M, N)$, $r \geqslant 0$. Тогда существуют такое n_0 и такое компактное множество $K \subset M$, что $f_n(x) = g(x)$ при всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in M - K$.

3. При любом $n \geqslant 0$ пространства $C_S^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $C_W^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ гомеоморфны соответственно $C_S^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ и $C_W^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

*4. Полиномы плотны в $C_W^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, но не в $C_S^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5. Множество замкнутых отображений замкнуто, но не открыто в $C_S^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Отображение f называется *замкнутым*, если оно переводит замкнутые множества в замкнутые.)

6. При любом $r \geqslant 1$ множество замкнутых погружений открыто в $C^r_S(M, N)$. В то же время множество взаимно однозначных погружений не открыто в $C^1_S(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2)$.

7. Собственное C^1-погружение $f: M \to N$, взаимно однозначное на замкнутом множестве $K \subset M$, взаимно однозначно на окрестности множества K. Более того, существуют такая окрестность $\mathcal{N} \subset C^1_S(M, N)$ отображения f и такая окрестность $U \subset M$ множества K, что всякое $g \in \mathcal{N}$ взаимно однозначно на U. Если K компактно, то $\mathcal{N}$ можно выбрать открытым в $C^1_W(M, N)$.

8. Множество собственных отображений открыто и замкнуто в $C^0_S(M, N)$.

9. Множество таких $f \in C^1_S(M, N)$, что $f: M \to N$ есть накрытие, открыто. Если M и N — компактные многообразия одной размерности, то всякая субмерсия $M \to N$ *является накрытием*.

10. Если непрерывное отображение $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таково, что

$$\limsup_{|x| \to \infty} |x - g(x)| / |x| < 2,$$

то его образ совпадает с $\mathbb{R}^n$.

11. При любом $r \geqslant 1$ множество правильных вложений многообразия M в N открыто в $C^r_S(M, \partial M; N, \partial N)$. Однако правильные вложения не составляют замкнутого подмножества пространства $C^1_S(D^1, D^2)$.

12. При $0 \leqslant r < \infty$ базу сильной топологии в $C^r(M, N)$ составляют уже те из множеств $\mathcal{N}^r(f; \Phi, \Psi, K, \varepsilon)$, у которых $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ есть покрытие многообразия M *компактными множествами*.

13. Обозначим через $\mathrm{Imm}^r_K(M, N)$ множество C^r-отображений $M \to N$ $(r \geqslant 1)$, иммерсивных в каждой точке множества $K \subset M$. Если K компактно, то это множество открыто в $C^r_W(M, N)$.

14. Обозначим через $\mathrm{Emb}^r_K(M, N)$ множество C^r-отображений $f: M \to N$ $(r \geqslant 1)$, таких, что $f \mid U$ есть вложение для некоторого (зависящего от f) открытого множества U с $K \subset U \subset M$. Если K компактно, то $\mathrm{Emb}^r_K(M, N)$ открыто в $C^r_W(M, N)$.

15. Пусть M, N — произвольные C^r-многообразия с $0 \leqslant r \leqslant \infty$. Пусть, далее, $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ есть локально конечное семейство открытых подмножеств многообразия M, и пусть $\mathcal{A}_i \subset C^r_W(U_i, N)$ — открытые множества. Тогда множество C^r-отображений $f: M \to N$, таких, что $f \mid U_i \in \mathcal{A}_i$ при каждом i, открыто в $C^r_S(M, N)$.

16. Пусть M, N — произвольные C^r-многообразия с $0 \leqslant r \leqslant \infty$, и пусть $V \subset M$ — открытое множество.

(a) Отображение

$$\delta: C^r(M, N) \to C^r(V, N),$$

определяемое формулой $\delta(f) = f \mid V$, непрерывно по отношению к слабым топологиям, но может не быть непрерывным по отношению к сильным топологиям. С другой стороны:

* (b) δ открыто по отношению к сильным топологиям, но может не быть открытым по отношению к слабым топологиям.

2. АППРОКСИМАЦИИ

В этом параграфе все многообразия предполагаются многообразиями без края.

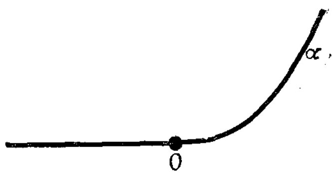
Первое, чем мы займемся, — построение для заданных чисел a, b с $b > a > 0$ C^∞-отображения $\lambda: \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ со следующими свойствами:

(i) $\lambda(x) = 1$ при $|x| \leqslant a$,
(ii) $1 > \lambda(x) > 0$ при $a < |x| < b$,
(iii) $\lambda(x) = 0$ при $|x| \geqslant b$.

Такое отображение называют иногда *буферной функцией*.

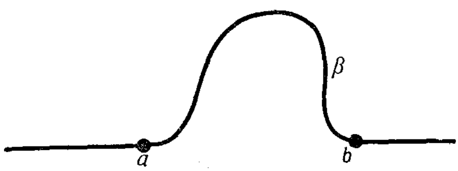
Мы начинаем с C^∞-отображения $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ e^{-1/x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$



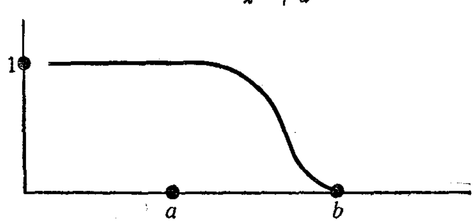
Затем определим $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\beta(x) = \alpha(x - a)\,\alpha(b - x).$$



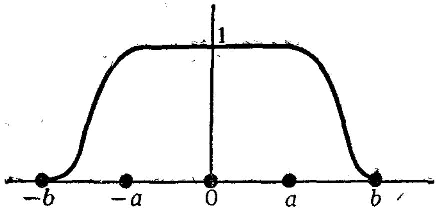
Далее, определим $\gamma: \mathbb{R} \to [0, 1]$:

$$\gamma(x) = \int_x^b \beta \Big/ \int_a^b \beta.$$



Наконец, зададим $\lambda: \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ формулой

$$\lambda(x) = \gamma(|x|).$$



Определим, далее, *носитель* $\operatorname{Supp} f$ непрерывной вещественнозначной функции f как замыкание множества $f^{-1}(\mathbb{R} - 0)$. Дополнение к $\operatorname{Supp} f$ есть наибольшее открытое множество, на котором f тождественно равняется нулю.

Пусть M есть C^r-многообразие, $0 \leqslant r \leqslant \infty$, и $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ — открытое покрытие этого многообразия. По определению, *разбиение единицы класса C^r, подчиненное покрытию $\mathcal{U}$*, есть семейство C^r-отображений $\lambda_i: M \to [0, 1]$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\operatorname{Supp} \lambda_i \subset U_i \quad (i \in \Lambda);$$

семейство $\{\operatorname{Supp} \lambda_i\}_{i \in \Lambda}$ локально конечно;

$$\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i(x) = 1 \quad \text{при любом} \quad x \in M.$$

Локальная конечность гарантирует, что каждая точка многообразия M обладает окрестностью, на которой все λ_i, кроме конечного числа, тождественно равны нулю; поэтому последняя сумма локально конечна.

В силу третьего условия

$$M = \bigcup_i \operatorname{Int} \operatorname{Supp} \lambda_i.$$

Таким образом, $\{\operatorname{Int} \operatorname{Supp} \lambda_i\}_{i \in \Lambda}$ есть локально конечное покрытие многообразия M, и это покрытие является ужатием покрытия $\mathcal{U}$. (Покрытие $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \Lambda}$ называется *ужатием* покрытия $\mathcal{U}$, если $\overline{V}_i \subset U_i$ при каждом i.)

Часто оказывается полезным следующее замечание. *Если $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть открытое покрытие многообразия M, вписанное в $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$, и если $\mathcal{V}$ обладает подчиненным ему разбиением единицы класса C^r, то $\mathcal{U}$ также обладает подчиненным ему разбиением единицы класса C^r.* Действительно, пусть $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ —

разбиение единицы, подчиненное $\mathscr{V}$. Фиксируем отображение $f\colon A \to \Lambda$, такое, что $V_\alpha \subset U_{f(\alpha)}$, и положим

$$\mu_i\colon M \to [0, 1],$$

$$\mu_i(x) = \sum \{\lambda_\alpha(x);\ \alpha \in f^{-1}(i)\}.$$

Тогда покрытие $\{\operatorname{Supp} \mu_i\}_{i \in \Lambda}$ локально конечно, поскольку $\mu_i(x) \neq 0$, только если $i = f(\alpha)$ и $\lambda_\alpha(x) \neq 0$. Ясно, что $\operatorname{Supp} \mu_i \subset U_i$ и $\sum\limits_i \mu_i(x) = \sum\limits_\alpha \lambda_\alpha(x) \equiv 1$.

Следующая теорема, одно из главных технических средств дифференциальной топологии, часто употребляется для приведения глобальной теоремы к локальному виду. Для аналитических отображений такой теоремы быть не может, и это — причина, по которой с ними так трудно иметь дело.

2.1. Теорема. *Пусть M есть C^r-многообразие с $0 \leqslant r \leqslant \infty$. Всякое открытое покрытие многообразия M обладает подчиненным ему разбиением единицы класса C^r.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ — открытое покрытие многообразия M. Выберем локально конечный атлас $\{\varphi_\alpha, V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многообразия M, такой, что покрытие $\{\overline{V}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ вписано в $\mathscr{U}$; мы можем при этом считать, что все множества $\varphi_\alpha(V_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ ограничены и что все замыкания $\overline{V}_\alpha \subset M$ компактны. Возьмем ужатие $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ покрытия $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$; множества $\overline{W}_\alpha \subset V_\alpha$ также компактны. Нам достаточно указать разбиение единицы класса C^r, подчиненное покрытию $\mathscr{V}$.

Для каждого $\alpha \in A$ покроем компактное множество $\varphi_\alpha(\overline{W}_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ конечным множеством замкнутых шаров

$$B(\alpha, 1), \ \ldots, \ B(\alpha, k(\alpha)),$$

содержащихся в $\varphi_\alpha(V_\alpha)$. Выберем C^∞-отображения

$$\lambda_{\alpha, j}\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1], \quad j = 1, \ldots, k(\alpha),$$

такие, что

$$\lambda_{\alpha, j}(x) > 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x \in \operatorname{Int} B(\alpha, j).$$

Положим

$$\lambda_\alpha = \sum_{j=1}^{k(\alpha)} \lambda_{\alpha, j}\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty).$$

Тогда

$$\lambda_\alpha(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \varphi_\alpha(\overline{W}_\alpha),$$

$$\lambda_\alpha(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n - \bigcup_j B(\alpha, j).$$

Положим

$$\mu_\alpha : M \to [0, \infty),$$

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} \lambda_\alpha(\varphi_\alpha(x)) & \text{при} \quad x \in V_\alpha, \\ 0 & \text{при} \quad x \in M - V_\alpha. \end{cases}$$

Ясно, что отображение μ_α принадлежит классу C^r, что $\mu_\alpha > 0$ на $\overline{W}_\alpha$ и что $\operatorname{Supp} \mu_\alpha \subset V_\alpha$. Мы полагаем $\nu_\alpha = \mu_\alpha / \sum_\alpha \mu_\alpha$. Очевидно, $\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть разбиение единицы класса C^r, подчиненное покрытию $\mathscr{V}$. ∎

Разбиение единицы используют для того, чтобы из локально определенных отображений в $\mathbb{R}^n$ склеивать отображение, заданное глобально. Например, если $\{\lambda_i\}_{i \in \Lambda}$ есть разбиение единицы класса C^s, подчиненное открытому покрытию $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ многообразия M, и $g_i: U_i \to \mathbb{R}^n$ при каждом i есть C^s-отображение, то можно определить

$$g: M \to \mathbb{R}^n,$$

$$g(x) = \sum \lambda_i(x) g_i(x),$$

где суммирование производится по множеству $\{i \in \Lambda \mid x \in U_i\}$. Это корректно определенное C^s-отображение, поскольку каждая точка x обладает открытой окрестностью, на которой все λ_i, за исключением конечного числа, тождественно равны нулю.

Следующая теорема показывает, как условие $\sum_i \lambda_i = 1$ используется при построении аппроксимаций.

2.2. Теорема. *Пусть M есть C^s-многообразие с $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Тогда $C^s(M, \mathbb{R}^n)$ плотно в $C^0_S(M, \mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — локально конечное открытое покрытие многообразия M, и пусть для каждого $\alpha \in A$ задано число $\varepsilon_\alpha > 0$. Возьмем непрерывное отображение $f: M \to \mathbb{R}^n$ и предположим, что мы хотим построить C^s-отображение g, удовлетворяющее условию $|f - g| < \varepsilon_\alpha$ на V_α при каждом α. Для $x \in M$ зафиксируем окрестность $W_x \subset M$ точки x, пересекающуюся лишь с конечным числом множеств V_α. Положим, далее,

$$\delta_x = \min\{\varepsilon_\alpha \mid x \in V_\alpha\} > 0.$$

Пусть $U \subset W_x$ — столь малая открытая окрестность точки x, что при $y \in U_x$

$$|f(y) - f(x)| < \delta_y.$$

Введем постоянные отображения

$$g_x: M \to \mathbb{R}^n,$$
$$g_x(y) = f(x).$$

В более привычных обозначениях результат нашей конструкции может быть описан следующим образом: мы построили открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in \Lambda} = \mathcal{U}$ многообразия M и C^s-отображения $g_i: M \to \mathbb{R}^n$, такие, что при $y \in U_i \cap V_\alpha$

$$|g_i(y) - f(y)| < \varepsilon_\alpha.$$

Пусть теперь $\{\lambda_i\}_{i \in \Lambda}$ — разбиение единицы класса C^s, подчиненное $\mathcal{U}$. Рассмотрим отображение

$$g: M \to \mathbb{R}^n,$$
$$g(y) = \sum_i \lambda_i(y) g_i(y).$$

Это отображение принадлежит классу C^s и

$$|g(y) - f(y)| = \left| \sum \lambda_i(y) g_i(y) - \sum \lambda_i(y) f(y) \right| \leqslant \sum \lambda_i(y) |g_i(y) - f(y)|.$$

Следовательно, при $y \in V_\alpha$

$$|g(y) - f(y)| < \sum \lambda_i(y) \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha. \blacksquare$$

Наша следующая задача — аппроксимировать C^r-отображения в сильной C^r-топологии C^s-отображениями с $s > r \geqslant 1$. Предыдущее рассуждение не пройдет, поскольку появятся производные функций λ_i. Чтобы преодолеть эту трудность, нам нужно аппроксимировать $f|U_i$ не постоянными отображениями, а C^s-отображениями, равномерно стремящимися к f с производными до порядка r. Для отображений, определенных в открытых подмножествах пространтва $\mathbb{R}^n$, это делается с помощью описываемой ниже техники сверток.

Пусть $\theta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — отображение с компактным носителем. Возьмем наименьшее $\sigma \geqslant 0$, такое, что Supp θ содержится в замкнутом шаре $B_\sigma(0) \subset \mathbb{R}^m$ радиуса σ с центром 0. Мы называем это σ *опорным радиусом* отображения θ.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $f: U \to \mathbb{R}^n$ — отображение. Если $\theta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ имеет компактный носитель, то мы определяем *свертку отображения* f *посредством* θ как отображение

$$\theta * f : U_\sigma \to \mathbb{R}^n,$$

задаваемое формулой

(1) $$\theta * f(x) = \int\limits_{B_\sigma(0)} \theta(y) f(x-y)\,dy \quad (x \in U_\sigma),$$

где

$$U_\sigma = \{x \in U \mid B_\sigma(x) \subset U\}.$$

Здесь интеграл понимается как интеграл Лебега, а dy обозначает обычную меру в $\mathbb{R}^m$.

Подынтегральное выражение в формуле (1) обращается в нуль на границе шара $B_\sigma(0)$; мы продолжаем его до непрерывного отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, полагая его равным нулю вне $B_\sigma(0)$. Таким образом,

(2) $$\theta * f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta(y) f(x-y)\,dy \quad (x \in U_\sigma).$$

Для фиксированного $x \in U_\sigma$ мы можем сделать в (1) сохраняющую меру замену переменной $z = x - y$. Получаем

(3) $$\theta * f(x) = \int\limits_{B_\sigma(x)} \theta(x-z) f(z)\,dz$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta(x-z) f(z)\,dz \quad (x \in U_\sigma),$$

где опять подынтегральное выражение считается равным 0 вне $B_\sigma(x)$.

Отображение $\theta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ называется *ядром свертки*, если оно неотрицательно, его носитель компактен и $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta = 1$. Ясно, что существуют ядра свертки класса C^∞ с каким угодно опорным радиусом.

Можно представлять себе $\theta * f(x)$ как взвешенное среднее значений отображения f вблизи x. С этой точки зрения естественно ожидать, что $\theta * f$ будет аппроксимацией отображения f и что эта аппроксимация будет гладкой, если гладко θ.

Введем обозначение

$$\|f\|_{r,K} = \sup\{\|D^k f(x)\| \mid x \in K,\ 0 \leqslant k \leqslant r\},$$

в котором f есть некоторое C^r-отображение открытого множества $U \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, K — произвольное подмножество множества U и $\|D^k f(x)\|$ — норма k-й производной отображения f в точке x. Здесь $\|D^0 f(x)\|$ означает просто $|f(x)|$, а k-я производная отображения f в точке x при $k > 0$ есть k-линейное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Норма же $\|S\|$ k-линейного отображения

$$S: \mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

определяется как максимум выражения $|S(x_1, \ldots, x_k)|$, где векторы $x_1, \ldots, x_k$ пробегают единичную сферу пространства $\mathbb{R}^m$. Для $\|f\|_{r, K}$ допускается значение ∞. Если K есть вся область определения отображения f, мы пишем просто $\|f\|_r$. Заметим, что при любых $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^m$

$$|S(y_1, \ldots, y_k)| \leqslant \|S\| |y_1| \ldots |y_k|.$$

Имеет место следующий фундаментальный факт.

2.3. Теорема. *Пусть $\theta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ имеет положительный опорный радиус σ. Пусть, далее, $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $f: U \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда свертка $\theta * f: U_\sigma \to \mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами.*

(a) *Если сужение $\theta \mid \operatorname{Int} \operatorname{Supp} \theta$ принадлежит классу C^k с $1 \leqslant k \leqslant \infty$, то и $\theta * f$ принадлежит классу C^k. Более того, если k конечно, то*

$$D^k(\theta * f)_x(Y_1, \ldots, Y_k) = \int_{\mathbb{R}^m} D^k\theta(x - z)(Y_1, \ldots, Y_k) f(z)\, dz$$

на U_σ.

(b) *Если f принадлежит классу C^k, то*

$$D^k(\theta * f) = \theta * (D^k f).$$

(c) *Предположим, что f принадлежит классу C^r с $0 \leqslant r \leqslant \infty$, и пусть $K \subset U$ — компактное множество. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$, такое, что $K \subset U_\sigma$, и если θ есть ядро свертки класса C^r с опорным радиусом σ, то $\theta * f$ принадлежит классу C^r и*

$$\|\theta * f - f\|_{r, K} < \varepsilon.$$

Доказательство. Чтобы доказать (b), заметим, что область интегрирования в (1) может быть сужена до $\operatorname{Int} \operatorname{Supp} \theta$; тогда подынтегральное выражение будет дифференцируемым по x и (b) доказывается с помощью индукции по k и дифференцирования под знаком интеграла. Утверждение (a) доказывается аналогичным образом с помощью формулы (3). Наконец, при доказательстве (c) можно, в силу (b), ограничиться случаем $r = 0$. Поскольку $d(K, \mathbb{R}^m - U) > 0$, мы можем взять σ столь малым, что $K \subset U_\sigma$. Так как, далее, отображение f равномерно непрерывно на компактной окрестности множества K, существует столь малое σ, что если $x \in K$ и $|x - y| \leqslant \sigma$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}^m} \theta = 1,$$

интегрируя по $\mathbb{R}^m$, мы получаем

$$\begin{aligned} |\theta * f(x) - f(x)| &= \left| \int \theta(y)(f(x-y) - f(x))\, dy \right| \\ &\leqslant \int \theta(y)\, |f(x-y) - f(x)|\, dy \\ &\leqslant \varepsilon \int \theta(y)\, dy = \varepsilon. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Из теоремы 2.3 немедленно следует, что всякое C^r-отображение открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ может быть C^r-аппроксимировано C^∞-отображениями в окрестностях компактных множеств. Разбиения единицы позволяют нам доказать следующую, более сильную аппроксимационную теорему.

2.4. Теорема. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^m$ *и* $V \subset \mathbb{R}^n$ — *открытые множества. Тогда при* $0 \leqslant r < \infty$ *множество* $C^\infty(U, V)$ *плотно в* $C^r_S(U, V)$.

Доказательство. Поскольку $C^r_S(U, V)$ открыто в $C^r_S(U, \mathbb{R}^n)$, достаточно доказать теорему в случае $V = \mathbb{R}^n$.

Пусть $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$. Базу окрестностей точки f в $C^r_S(U, \mathbb{R}^n)$ можно составить из множеств следующего вида. Пусть $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ — локально конечное семейство компактных подмножеств множества U, пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \Lambda}$ — семейство положительных чисел, и пусть $\mathcal{N}(f, K, \varepsilon)$ — множество таких C^r-отображений g: $U \to \mathbb{R}^n$, что при всех $i \in \Lambda$

$$\|g - f\|_{r, K_i} < \varepsilon_i; \tag{4}$$

множества $\mathcal{N}(f, K, \varepsilon)$ и составляют базу окрестностей точки f. Зафиксировав f, K и ε, мы должны показать, что

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{N}(f, K, \varepsilon) \neq \varnothing.$$

Пусть $\{\lambda_j\}_{j \in \mathrm{M}}$ — разбиение единицы на U класса C^∞, у которого все множества $\operatorname{Supp} \lambda_j$ компактны. Каковы бы ни были положительные числа $\{\alpha_j\}_{j \in \mathrm{M}}$, найдутся C^∞-отображения g_j: $U \to \mathbb{R}^n$, такие, что

$$\|g_j - f\|_{r, \operatorname{Supp} \lambda_j} < \alpha_j.$$

Рассмотрим отображение

$$g\colon U \to \mathbb{R}^n,$$

$$g(x) = \sum_j \lambda_j(x)\, g_j(x).$$

Очевидно, оно принадлежит классу C^∞. Чтобы оценить $\|D^k g(x) - D^k f(x)\|$, мы заметим, что если отображения λ: $U \to \mathbb{R}$ и φ: $U \to \mathbb{R}^n$ принадлежат классу C^k и $\psi(x) = \lambda(x)\varphi(x)$, то $D^k\psi(x)$ есть билинейная функция от $D^p\lambda(x)$, $D^q\varphi(x)$ $(p, q = 0,\ldots, k)$; *эта билинейная функция универсальна и не зависит от* x, λ *и* φ. Поэтому существуют универсальные константы $A_k > 0$, такие, что

$$\|D^k(\lambda\varphi)(x)\| \leqslant A_k \max_{0\leqslant p\leqslant k}\|D^p\lambda(x)\| \max_{0\leqslant q\leqslant k}\|D^q\varphi(x)\|.$$

Положим

$$A = \max(A_0, \ldots, A_r).$$

Фиксируем, далее, $i \in \Lambda$ и положим

$$\mathrm{M}_i = \{j \in \mathrm{M} \mid \operatorname{Supp}\lambda_j \cap K_i \neq \varnothing\}.$$

Это — конечное множество; пусть m_i — число его элементов. Положим, наконец,

$$\mu_i = \max\{\|\lambda_j\|_{r, K_i} \mid j \in \mathrm{M}_i\},$$

$$\beta_i = \max\{\alpha_j \mid j \in \mathrm{M}_i\}.$$

В нижеследующих суммах j пробегает M_i. Если $x \in K_i$ и $0 \leqslant k \leqslant r$, то

$$\|D^k g(x) - D^k f(x)\| = \Big\|\sum_j D^k(\lambda_j g_j - \lambda_j f)(x)\Big\| \leqslant \sum_j \|D^k(\lambda_j(g_j - f))(x)\| \leqslant m_i A\mu_i\beta_i.$$

Ясно, что при надлежащем выборе чисел α_j

$$m_i A\mu_i\beta_i < \varepsilon_i.$$

При таком выборе α_j для всех $i \in \Lambda$

$$\|g - f\|_{r, K_i} < \varepsilon_i. \blacksquare$$

Для глобализации аппроксимационных теорем нам потребуется некоторое уточнение теоремы 2.4. Предположим, что мы хотим аппроксимировать некоторое C^r-отображение f: $U \to \mathbb{R}^n$ C^r-отображением h, которое принадлежит классу C^s в окрестности некоторого (относительно) замкнутого множества $K \subset U$. Пусть мы хотим в то же время (по техническим причинам), чтобы h совпадало с f вне некоторого открытого множества $W \subset U$; конечно, мы должны при этом предположить, что f уже принадлежит классу C^s в некоторой окрестности множества $K - W$. Следующая *относительная аппроксимационная теорема* показывает, что отображение f может быть сколь угодно точно аппроксимировано отображениями h с указанными свойствами.

2.5. Теорема. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества и $f\colon U \to V$ — некоторое C^r-отображение. Пусть, далее, $K \subset U$ замкнуто и $W \subset U$ открыто, и пусть f принадлежит классу C^s в некоторой окрестности множества $K—W$. Тогда всякая окрестность $\mathcal{N}$ отображения f в $C^r_S(U, V)$ содержит C^r-отображение $h\colon U \to V$, принадлежащее классу C^s в окрестности множества K и совпадающее с f на $U—W$.*

Доказательство. Мы можем считать, что $V = \mathbb{R}^n$ (см. доказательство теоремы 2.4). Пусть $A \subset U$ — открытое множество, содержащее $K — W$ и такое, что $f|A$ принадлежит классу C^s. Пусть, далее, $W_0 \subset U$ — такое открытое множество, что

$$K - A \subset W_0 \subset \overline{W}_0 \subset W.$$

Зафиксируем разбиение единицы $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ класса C^s, подчиненное открытому покрытию $\{W, U — \overline{W}_0\}$ множества U. Таким образом, λ_0 и λ_1 — такие C^s-отображения $U \to [0, 1]$, что $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, $\lambda_0 = 0$ в окрестности множества $U—W$ и $\lambda_1 = 0$ в окрестности множества $\overline{W}_0$.

Определим отображение

$$G\colon C^r_S(U, \mathbb{R}^n) \to C^r_S(U, \mathbb{R}^n)$$

формулой

$$G(g)(x) = \lambda_0(x)\, g(x) + \lambda_1(x)\, f(x).$$

Очевидно, $G(g) = g$ в W_0 и $G(g) = f$ в $U—W$. Ясно также, что $G(g)$ принадлежит классу C^s во всяком открытом множестве, в котором принадлежат классу C^s и f, и g. Легко показать, что отображение G непрерывно. Так как $G(f) = f$, существует содержащее f открытое множество $\mathcal{N}_0 \subset C^r_S(U, \mathbb{R}^n)$, такое, что $G(\mathcal{N}_0) \subset \mathcal{N}$. Согласно теореме 2.4, существует C^s-отображение $g \in \mathcal{N}_0$. Отображение $h = G(g)$ и обладает требуемыми свойствами. ∎

Теперь мы можем доказать основную аппроксимационную теорему для многообразий без края. В следующем параграфе мы распространим ее на ∂-многообразия и на пары многообразий.

2.6. Теорема. *Пусть M и N — некоторые C^s-многообразия с $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Тогда $C^s(M, N)$ плотно в $C^r_S(M, N)$ при $0 \leqslant r < s$.*

Доказательство. Пусть $f\colon M \to N$ есть C^r-отображение. Фиксируем локально конечный атлас $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ многообразия M и семейство $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda}$ карт многообразия N, такое, что $f(U_i) \subset V_i$ при любом $i \in \Lambda$. Пусть, далее, $L = \{L_i\}_{i \in \Lambda}$ — такое замкнутое покрытие многообразия M, что $L_i \subset U_i$, и

$\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \Lambda}$ — семейство положительных чисел. Положим $\mathcal{N} = \mathcal{N}^r(f;\ \Phi,\ \Psi,\ L,\ \varepsilon) \subset C^r(M,\ N)$.

Мы должны найти C^s-отображение $g \in \mathcal{N}$. Поскольку Λ счетно, мы можем предположить, что $\Lambda = \mathbb{Z}_+$ или, в случае компактного M, $\Lambda = \{1,\ \ldots,\ p\}$. (Мы обозначаем множество целых чисел через $\mathbb{Z}$, множество положительных целых чисел — через $\mathbb{Z}_+$; $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ есть множество натуральных чисел.)

Пусть $\{W_i\}_{i \in \Lambda}$ — семейство открытых множеств в M, такое, что $L_i \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset U_i$.

Мы определим по индукции семейство C^r-отображений $g_k \in \mathcal{N}$ ($k \in \mathbb{N}$), обладающих следующими свойствами: $g_0 = f$ и при $k \geqslant 1$

$(5)_k$ $$g_k = g_{k-1} \text{ на } M - W_k,$$

$(6)_k$ $$g_k \text{ принадлежит классу } C^s \text{ в окрестности объединения } \bigcup_{0 \leqslant j \leqslant k} L_j.$$

Предположим на мгновение, что g_k существуют. Тогда $g\colon M \to N$ определяется формулой $g(x) = g_{\varkappa(x)}(x)$, где $\varkappa(x) = \max\{k \mid x \in \overline{U}_k\}$. Очевидно, у каждой точки x есть окрестность, на которой $g = g_{\varkappa(x)}$. Следовательно, g принадлежит классу C^s и $g \in \mathcal{N}$, и наша теорема доказана.

Остается построить g_k. Положим $g_0 = f$; тогда $(5)_0$ и $(6)_0$ выполняются автоматически. Предположим, что при некотором $m > 0$ мы уже построили отображения $g_k \in \mathcal{N}$ с $0 \leqslant k < m$, удовлетворяющие условиям $(5)_k$ и $(6)_k$.

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{G} = \{h \in C^r_S(U_m, V_m) \mid h = g_{m-1} \text{ на } U_m - W_m\}$$

и отображение

$$T\colon \mathcal{G} \to C^r_S(M,\ N),$$

$$T(h) = \begin{cases} h & \text{на } U_m, \\ g_{m-1} & \text{на } M - U_m. \end{cases}$$

Легко показать, что T непрерывно. Так как, очевидно, $T(g_{m-1} \mid U_m) = g_{m-1}$, то $T^{-1}(\mathcal{N}) \neq \varnothing$.

Положим $K = \bigcup_{k \leqslant m} L_k \cap U_m$. Ясно, что K есть замкнутое подмножество множества U_m и что отображение $g_{m-1}\colon U_m \to V_m$ принадлежит классу C^s в некоторой окрестности множества $K - W_m$. Поскольку U_m и V_m C^r-диффеоморфны открытым подмножествам пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, мы можем применить к $C^r_S(U_m,\ V_m)$ теорему 2.5. Из этой теоремы следует, что подмножество множества $\mathcal{G}$, составленное из отображений, которые принадлежат классу C^s в окрестности множества K, плотно в $\mathcal{G}$. Значит, и $T^{-1}(\mathcal{N})$ содержит такое отображение h. Мы полагаем $g_m = T(h)$; очевидно, g_m содержится в $\mathcal{N}$ и удовлетворяет условиям $(5)_m$ и $(6)_m$. ∎

В следующем применении теоремы 2.6 мы предполагаем, что $G^k(M, N) \subset C^k(M, N)$ $(k \geqslant 1)$ обозначает одно из следующих множеств:

диффеоморфизмы,
вложения,
замкнутые вложения,
погружения,
субмерсии,
собственные отображения.

2.7. Теорема. *Пусть M и N — некоторые C^s-многообразия с $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Если $1 \leqslant r < s$, то $G^s(M, N)$ плотно в $G^r(M, N)$ по отношению к сильной C^r-топологии. В частности, M и N в том и только том случае C^s-диффеоморфны, если они C^r-диффеоморфны.*

Доказательство. Это следует из теоремы 2.6 и теорем открытости § 2.1. ∎

Следующая лемма потребуется нам при повышении класса гладкости многообразия.

2.8. Лемма. *Пусть U есть C^r-многообразие с $0 \leqslant r < \infty$, и пусть $W \subset U$ — открытое множество. Предположим, что $V \subset \mathbb{R}^n$ есть открытое множество, $f \in C^r_S(U, V)$, и положим $V' = f(W)$. Тогда существует окрестность $\mathcal{N} \subset C^r_S(W, V')$ сужения $f \mid W$, такая, что для любого $g_0 \in \mathcal{N}$ отображение*

$$T(g_0)\colon U \to V,$$

$$T(g_0) = \begin{cases} g_0 & \text{на } W, \\ f & \text{на } U - W \end{cases}$$

принадлежит классу C^r и что отображение $T\colon \mathcal{N} \to C^r_S(U, V)$ непрерывно.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ — локально конечное семейство карт многообразия U, покрывающее границу $\operatorname{Bd} W$ множества W. Фиксируем семейство $\{L_i\}_{i \in \Lambda}$ замкнутых подмножеств многообразия U, покрывающих $\operatorname{Bd} W$ и таких, что $L_i \subset U_i$.

Пусть $\mathcal{N} \subset C^r_S(W, V')$ — множество таких C^r-отображений $h\colon W \to V'$ что если $i \in \Lambda$, $y \in \varphi_i(L_i)$ и $0 \leqslant k \leqslant r$, то

$$\left\| D^k(h\varphi_i^{-1})\, y - D^k(f\varphi_i^{-1})\, y \right\| < d(y, \varphi_i(U_i - W)). \tag{7}$$

Множество $\mathcal{N}$ является окрестностью сужения $f|W$: в силу паракомпактности многообразия U множество W обладает локально конечным замкнутым покрытием $\{K_\alpha\}$, таким, что каждое K_α пересекается лишь с конечным числом множеств L_i и что на каждом $K_\alpha \cap L_i$ функция $x \longmapsto d(\varphi_i(x), \varphi_i(U_i - W))$ ограничена снизу положительной константой.

Для $h \in \mathcal{N}$ рассмотрим отображение

$$T(h) = g\colon U \to V,$$
$$g = \begin{cases} h & \text{на } W, \\ f & \text{на } U - W. \end{cases}$$

Покажем, что g принадлежит классу C^r. Для этого достаточно доказать, что принадлежит классу C^r всякое отображение $\lambda_i = (g - f)\,\varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U_i) \to \mathbb{R}^n$. Но

$$\lambda_i = \begin{cases} h\varphi_i^{-1} - f\varphi_i^{-1} & \text{на } \varphi_i(W), \\ 0 & \text{на } \varphi_i(U_i - W). \end{cases}$$

Из этого видно, что λ_i принадлежит классу C^r на $\varphi_i(W)$. Далее, в силу (7) при $0 \leqslant k \leqslant r$

$$D^k\lambda_i(y) \to 0 \quad \text{при} \quad d(y, \varphi_i(U_i - W)) \to 0$$

равномерно по $y \in \varphi_i(W)$. Следовательно, λ_i принадлежит классу C^r и все производные всех координатных функций обращаются в 0 на $\varphi_i(U_i - W)$. Следовательно, g принадлежит классу C^r и отображение $T\colon C^r(W, V') \to C^r(U, V)$ определено корректно. Проверку непрерывности отображения T мы оставляем читателю в качестве упражнения. ∎

Пусть α есть дифференциальная структура класса C^r на многообразии M. Дифференциальная структура β класса C^s на M с $s > r$ называется *согласованной* с α, если $\beta \subset \alpha$. Это означает, что всякая карта атласа β есть карта атласа α. Эквивалентным образом, это означает, что тождественное отображение многообразия M является C^r-диффеоморфизмом $(M, \alpha) \to (M, \beta)$.

2.9. Лемма. *Пусть α — дифференциальная структура класса C^r на многообразии M. Тогда для каждого s с $r < s \leqslant \infty$ найдется согласованная с α дифференциальная структура β класса C^s, и структура β единственна с точностью до C^s-диффеоморфизма.*

Доказательство. Для краткости мы будем обозначать одной и той же буквой дифференциальную структуру и ее сужение на открытое множество. В силу леммы Цорна существуют непустое отрытое множество $B \subset M$ и дифференциальная структура β

класса C^s на B, согласованная с α и такая, что (B, β) максимально по отношению к этому свойству. Мы должны доказать, что $B = M$.

Если $B \neq M$, то существует карта (φ, U) многообразия M, такая, что $U \cap (M - B) \neq \varnothing$. Положим $\varphi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n$, $U \cap B = W$ и $\varphi(W) = W'$.

На W имеются две дифференциальные структуры: C^r-структура α и согласованная с ней C^s-структура β. Мы построим C^r-диффеоморфизм $\theta\colon (U, \alpha) \to U'$, такой, что сужение $\theta | W\colon (W, \beta) \to W'$ будет C^s-диффеоморфизмом. Карта (θ, U) будет тогда иметь C^s-перекрытие с β; C^s-атлас $\beta \cup (\theta, U)$ на $B \cup U$ будет содержаться в α, а это противоречит максимальности (B, β).

Чтобы построить θ, мы замечаем, что в силу теоремы 2.8 сужение $\varphi | W\colon W \to W'$ обладает в $C^r_S((W, \beta), W')$ окрестностью $\mathcal{N}$ со следующим свойством. Для любого $\psi_0 \in \mathcal{N}$ отображение

$$T(\psi_0)\colon U \to U',$$

$$\psi = \begin{cases} \psi_0 & \text{на } W, \\ \varphi & \text{на } U - W, \end{cases}$$

принадлежит классу C^r и возникающее при этом отображение

$$T\colon C^r_S((W, \beta), W') \to C^r_S(U, U')$$

непрерывно. Так как $T(\varphi | W)$ есть диффеоморфизм, существует окрестность $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$ сужения $\varphi | W$, такая, что $T(\mathcal{N}_0) \subset \mathrm{Diff}^r(U, U')$. В силу аппроксимационной теоремы 2.6 существует C^s-диффеоморфизм $\theta_0 \in \mathcal{N}_0$; в качестве θ мы можем теперь взять $T(\theta_0)$. ∎

Интересно, что ни паракомпактность, ни хаусдорфовость многообразия M не использовались в предыдущем доказательстве; этими свойствами должна обладать только координатная область U.

Из теорем 2.7 и 2.9 мы выводим следующий фундаментальный факт.

2.10. Теорема.

(a) *Пусть* $1 \leqslant r < \infty$. *Всякое* C^r-*многообразие* C^r-*диффеоморфно* C^∞-*многообразию.*

(b) *Пусть* $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$. *Если два* C^s-*многообразия* C^r-*диффеоморфны, то они* C^s-*диффеоморфны.*

Ввиду этой теоремы мы можем вообще не рассматривать более C^r-многообразий с $1 \leqslant r < \infty$; кроме того, для многих целей можно ограничиться C^∞-отображениями. Заметим, что C^∞-категория имеет несколько преимуществ перед C^r-категориями с конечными r. Очевидное преимущество состоит в ее замкнутости по отношению к взятию производных. Более тонкое преимущество доставляет теорема Морса—Сарда, которую мы докажем в следующей главе.

Мы уже замечали, что во многих доказательствах прослеживается тема *глобализации*. Этот переход от локального к глобальному имеет один абстрактный аспект, который, если его распознать, может сделать все доказательство очевидным; во всяком случае он позволяет выбрать правильную стратегию доказательства. Поскольку нам предстоит еще несколько раз проделать глобализацию, стоит формализовать этот прием; это делается следующим образом.

Пусть X — множество и $\mathfrak{B}$ — семейство его подмножеств. Мы предполагаем, что $X \in \mathfrak{B}$ и что объединение любого набора множеств из $\mathfrak{B}$ снова принадлежит $\mathfrak{B}$. (На практике X обычно бывает многообразием, а $\mathfrak{B}$ порождается элементами открытого покрытия или локально конечного замкнутого покрытия.) Предположим, что задан контравариантный функтор из частично упорядоченного (по включению) множества $\mathfrak{B}$ в категорию множеств. Другими словами, со всяким $A \in \mathfrak{B}$ сопоставлено некоторое множество $\mathscr{F}(A)$ и каждой паре A, $B \in \mathfrak{B}$ с $A \subset B$ отнесено отображение $\mathscr{F}_{AB}$: $\mathscr{F}(B) \to \mathscr{F}(A)$, такое, что $\mathscr{F}_{AB}\mathscr{F}_{BC} = \mathscr{F}_{AC}$ при $A \subset B \subset C$ и $\mathscr{F}_{AA}$ есть тождественное отображение множества $\mathscr{F}(A)$; вместо $\mathscr{F}_{AB}(x)$, где $x \in B$, мы будем писать $x \,|\, A$.

Пара $(\mathscr{F}, \mathfrak{B})$ называется *структурным функтором* на X. Элемент множества $\mathscr{F}(A)$ следует представлять себе как некоторого рода «структуру» на A, для которой имеет смысл «сужение» на подмножества множества A. Мы хотим показать, что структурой обладает все X, т. е. что $\mathscr{F}(X) \neq \varnothing$.

Структурный функтор называется *непрерывным*, если выполняется следующее условие. Каково бы ни было линейно упорядоченное семейство $\{Y_\alpha\}$ элементов множества $\mathfrak{B}$, обратный предел отображений $\mathscr{F}_{Y_\alpha Y}$: $\mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(Y_\alpha)$, где $Y = \bigcup\limits_\alpha Y_\alpha$, есть обратимое отображение $\mathscr{F}(Y) \to \operatorname{inv}\lim \mathscr{F}(Y_\alpha)$.

Структурный функтор называется *локально продолжаемым*, если каждая точка множества X принадлежит такому $V \in \mathfrak{B}$, что для любого $Y \in \mathfrak{B}$ образ отображения

$$\mathscr{F}_{Y,\, Y \cup V}\colon \mathscr{F}(Y \cup V) \to \mathscr{F}(Y)$$

совпадает с $\mathscr{F}(Y)$. Структурный функтор называется *нетривиальным*, если $\mathscr{F}(Y) \neq \varnothing$ для некоторого $Y \in \mathfrak{B}$.

Пусть, например, X есть C^r-многообразие с $0 \leqslant r \leqslant \infty$ и $\mathfrak{B}$ — совокупность всех его открытых множеств. Обозначим через $\mathscr{F}(Y)$ множество всех дифференциальных структур класса C^s с некоторым фиксированным $s \geqslant r$, согласованных с имеющейся

C^r-структурой. Очевидно, $(\mathcal{F}, \mathfrak{V})$ есть структурный функтор, который нетривиален и непрерывен. Если $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$, то этот функтор является также локально продолжаемым, как было показано в доказательстве теоремы 2.9.

Другой пример: пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество. Пусть, далее, $\mathfrak{V}$ порождается локально конечным покрытием множества X компактными множествами. Обозначим через $\mathcal{F}(Y)$ множество всех Y-ростков аналитических отображений в $\mathbb{R}$; под *Y-ростком* понимается класс эквивалентных отображений, определенных в окрестности множества Y, причем два отображения считаются эквивалентными, если они совпадают в некоторой окрестности множества Y. Очевидно, функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{V})$ непрерывен и нетривиален, но не является локально продолжаемым.

2.11. Глобализационная теорема. *Пусть $(\mathcal{F}, \mathfrak{V})$ — нетривиальный структурный функтор на X, который непрерывен и локально продолжаем. Тогда $\mathcal{F}(X) \neq \varnothing$. Более того, если $\mathcal{F}(Y_0) \neq \varnothing$, то образ отображения $\mathcal{F}_{Y_0X} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y_0)$ есть все $\mathcal{F}(Y_0)$.*

Доказательство. Пусть $a_0 \in \mathcal{F}(Y_0)$. Обозначим через S множество пар (Y, a), в которых $Y_0 \subset Y \in \mathfrak{V}$ и $a \in \mathcal{F}(Y)$, $a|Y_0 = a_0$. Множество S мы наделяем частичным порядком, полагая $(Y', a') \leqslant (Y, a)$ при $Y' \subset Y$ и $a|Y' = a'$. В силу замкнутости семейства $\mathfrak{V}$ относительно объединения, а также аксиомы непрерывности, S обладает максимальным элементом (Y^*, a^*).

Мы утверждаем, что $Y^* = X$. Если нет, то в силу локальной продолжаемости существуют такие $V \in \mathfrak{V}$ и $b \in \mathcal{F}(Y^* \cup V)$, что $b|Y^* = a^*$. Но тогда $(Y^* \cup V, b) > (Y^*, a^*)$, что противоречит максимальности (Y^*, a^*). Следовательно, $Y^* = X$. ∎

Этот метод часто оказывается удобным для доказательства существования глобальной структуры в ситуации, когда уже известны локальное существование и продолжаемость. Примером служит теорема 2.9. Вот другой пример.

2.12. Теорема. *Пусть M, N — произвольные C^r-многообразия с $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Если $\dim N \geqslant 2 \dim M$, то погружения составляют в $C^r_S(M, N)$ плотное множество.*

Доказательство. Удобно считать, что $r = 2$. Это не есть существенное ограничение, поскольку в случае $r < 2$ мы можем воспользоваться тем, что всякое C^1-многообразие обладает C^2-структурой, согласованной с его C^1-структурой, а в случае $r > 2$ — тем, что всякое C^2-погружение может быть аппроксимировано C^r-погружениями. Итак, мы предположим, что $r = 2$, и будем считать, не оговаривая этого, что все рассматриваемые отображения принадлежат классу C^2.

Пусть f_0: $M \to N$ — некоторое отображение, и пусть $\mathcal{N}_0 \subset C^2_S(M, N)$ — его окрестность. Зафиксируем меньшую окрестность $\mathcal{N}$ отображения f_0 вида $\mathcal{N}^2(f_0; \Phi, \Psi, K, \varepsilon)$, где $\Psi = \{\psi_i: V_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in \Lambda}$ есть семейство карт многообразия N; $\Phi = \{\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^m\}_{i \in \Lambda}$ есть локально конечный атлас многообразия M, такой, что $f_0(U_i) \subset V_i$ и что уже множества $K_i = \varphi_i^{-1}(D^m)$ покрывают M; $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$; наконец, $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \Lambda}$ — некоторый набор положительных чисел.

Определим теперь структурный функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})$. За $\mathfrak{B}$ мы принимаем семейство всевозможных объединений дисков K_i, частично упорядоченное по включению. Для $A \in \mathfrak{B}$ мы определяем $\mathcal{F}(A)$ как множество A-ростков отображений $f \in \mathcal{N}$, таких, что f есть погружение на некотором открытом множестве, содержащем A. Если $A \subset B$, то всякий B-росток содержится в единственном A-ростке; это соответствие определяет отображение $\mathcal{F}_{AB}: \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$.

Очевидно, функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})$ непрерывен. Покажем, что он локально продолжаем. Для этого мы возьмем открытую окрестность $W \subset M$ множества $A \in \mathfrak{B}$ и отображение $f \in \mathcal{N}$, такое что $f|W$ есть погружение. Отображение f представляет тогда некоторый A-росток $\alpha \in \mathcal{F}(A)$. Если $A \neq M$, выберем $K_i \not\subset A$. Распространить α на $A \cup K_i$ — значит найти отображение $g \in \mathcal{N}$, совпадающее с f в некоторой окрестности множества A и являющееся погружением в некоторой окрестности множества $A \in K$. Это делается следующим образом.

Пусть $B \subset U_i$ — диск, внутренность которого содержит K_i. Тогда $f(B) \subset V_i$, а V_i диффеоморфно открытому подмножеству пространства $\mathbb{R}^n$ с $n \geqslant 2 \dim M$. Поэтому в силу теоремы 1. сужение $f|B$: $B \to V_i$ может быть C^2-аппроксимировано погружениями.

Пусть λ: $M \to [0, 1]$ — отображение, принимающее значение 0 на открытой окрестности Z множества $A \cup (M - \operatorname{Int} B)$ и значение 1 на открытой окрестности Y разности $K_i - W$. Для произвольного погружения g: $B \to V_i$ определим отображение $S(g)$: $M \to N$ формулой

$$S(g)x = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in M - B, \\ (1-\lambda(x))f(x) + \lambda(x)g(x) & \text{при} \quad x \in B. \end{cases}$$

Здесь мы отождествляем V_i с открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}^n$ посредством ψ_i. Отображение

$$S: C^2_S(B, V_i) \to C^2_S(M, N)$$

непрерывно и

$$S(f|B)=f,$$
$$S(g)=f \quad \text{на} \quad Z,$$
$$S(g)=g \quad \text{на} \quad Y.$$

Из первого равенства вытекает, что если g достаточно близко к $f|B$, то $S(g) \in \mathcal{N}$. Второе равенство показывает, что $S(g)$ и f имеют один и тот же A-росток. Наконец, в силу третьего равенства отображение $S(g)$ является на Y погружением. Но если g достаточно близко к $f|B$, то отображение $S(g)$ является погружением и в окрестности множества K_i. Действительно, пусть X — такая окрестность множества K_i—Y, что замыкание $\overline{X}$ содержится в W и компактно. Поскольку $f|W$ есть погружение, f обладает такой окрестностью $\mathcal{N}_1$, что для любого $h \in \mathcal{N}_1$ сужение $h|X$ является погружением. Если g достаточно близко к $f|B$, то $S(g) \in \mathcal{N}_1$, и потому $S(g)|X$ есть погружение. Такое $S(g)$ является, следовательно, погружением в окрестности множества $A \cup K_i$. Этим доказано, что функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{Y})$ является локально продолжаемым. В силу теоремы 2.11, $\mathcal{F}(M) \neq \varnothing$, т. е. $\mathcal{N}$ содержит погружение.

Другое доказательство теоремы 2.12 мы дадим в конце § 3.2. ∎

Если M не компактно, то независимо от размерностей многообразий M, N вложения могут не составлять в $C^r_S(M, N)$ плотное множество. Пусть, например, $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ — отображение, образ которого есть множество всех точек, имеющих рациональные координаты. Пусть, далее, $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ — любое отображение с

$$|g(n)-f(n)|<\frac{1}{|n|}$$

при $n \neq 0$. Тогда образ отображения g плотен в $\mathbb{R}^n$, так что множество $g(\mathbb{Z})$ не дискретно и g не может быть вложением.

Препятствие, на которое наталкивается попытка перенести доказательство теоремы 2.12 на вложения, заключается в том, что структурный функтор, определяемый A-ростками вложений, не является, вообще говоря, непрерывным. Он непрерывен, однако, если M компактно; а если в дополнение к тому $\dim N \geqslant 2 \dim M+1$, то можно доказать и его локальную продолжаемость. Если $\dim N \geqslant 2 \dim M + 1$, то непрерывность и локальная продолжаемость структурного функтора, определяемого A-ростками отображений из окрестности $\mathcal{N} \in C^r_S(M, N)$, являющимися вложениями в окрестности множества A, могут быть доказаны в более общей ситуации, когда M и N произвольны, но $\mathcal{N}$ состоит из собственных отображений. На этом пути можно получить доказательство следующего предложения (детали оставляются читателю в качестве упражнения).

2.13. Теорема. *Пусть M, N — произвольные C^r-многообразия с $1 \leqslant r \leqslant \infty$ и $\dim N \geqslant 2 \dim M + 1$. Если M компактно, то вложения составляют в $C^r_S(M, N)$ плотное подмножество. При любом M вложения плотны в $\mathrm{Prop}^r_S(M, N)$.*

В качестве следствия мы получаем классическую теорему Уитни:

2.14. Теорема. *Всякое n-мерное многообразие класса C^r с $1 \leqslant r \leqslant \infty$ C^r-диффеоморфно замкнутому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Доказательство. Чтобы вывести это из теоремы 2.13, достаточно указать хотя бы одно собственное отображение $f: M \to \mathbb{R}$. Если M компактно, в качестве f можно взять константу. Если M некомпактно, мы фиксируем исчерпывающую возрастающую последовательность $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ компактных подмножеств многообразия M с $M_k \subset \mathrm{Int}\, M_{k+1}$.

Положим для каждого $k \geqslant 1$

$$f(M_{2k+1} - M_{2k}) = 2k + 1$$

и распространим f до непрерывного отображения, переводящего $M_{2k} - M_{2k-1}$ в $[2k - 1, 2k + 1]$, с помощью теоремы Титце. Очевидно, при этом получится собственное отображение. ∎

Мы вернемся к теореме 2.13 в § 2.4.

УПРАЖНЕНИЯ

*1. (a) Пусть X — замкнутое подмножество C^r-многообразия M с $0 \leqslant r \leqslant \infty$. Тогда существует C^r-отображение $f: M \to [0, \infty)$ с $X = f^{-1}(0)$.

(b) Если X, Y — непересекающиеся замкнутые подмножества C^r-многообразия M с $0 \leqslant r \leqslant \infty$, то существует C^r-отображение $\lambda: M \to [0, 1]$ с $\lambda^{-1}(0) = X$, $\lambda^{-1}(1) = Y$.

2. Любые две точки в связном C^r-многообразии M с $0 \leqslant r \leqslant \infty$ могут быть соединены C^r-путем $f: [0, 1] \to M$, а если $r \geqslant 1$, то f может быть сделано вложением. (Все это верно и при $r = \omega$, но доказательство делается трудным.)

3. Пусть $p: M \to N$ есть C^s-отображение и $f: N \to M$ есть C^r-сечение отображения p (т. е. $pf = 1_N$).

(a) Если $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$, то f может быть C^r-аппроксимировано C^s-сечениями. Более того, если g достаточно C^r-близко к f, то $g(N)$ есть образ некоторого сечения.

(b) Если $0 = r \leqslant s \leqslant \infty$ и p есть субмерсия, то f может быть C^r-аппроксимировано C^s-сечениями.

4. Теоремы 2.6, 2.9, 2.12 и 2.13 имеют относительные варианты.

5. Что представляют собой билинейные функции A_k из доказательства теоремы 2.4?

3. АППРОКСИМАЦИИ НА ∂-МНОГООБРАЗИЯХ И ПАРАХ МНОГООБРАЗИЙ

В этом параграфе мы распространим аппроксимационные теоремы § 2.2 на ∂-многообразия и пары многообразий.

Для построения дифференциальной структуры класса C^∞ на ∂-многообразии класса C^r нужно уметь аппроксимировать C^∞-отображениями C^r-отображения $(M, \partial M) \to (N, \partial N)$. Это приводит нас к рассмотрению пространства $C^r_S(M, \partial M; N, \partial N)$ C^r-отображений $f: M \to N$ с $f(\partial M) \subset \partial N$, наделенного сильной топологией. Мы будем рассматривать и более общее пространство $C^r_S(M, M_0; N, N_0)$, где $M_0 \subset M$ и $N_0 \subset N$ — замкнутые C^r-подмногообразия.

Доказательства совершенно аналогичны доказательствам из § 2.2. Главное изменение состоит в перенесении на случай пар аппроксимационной теоремы 2.4. Мы проводим детально соответствующее рассуждение только в случае ∂-многообразий, а остальные доказательства вообще опускаем.

Определение нормы $\|f\|_{r,K}$ без изменений переносится на случай, когда отображение f задано на открытом подмножестве полупространства.

3.1. Лемма. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^n$ — полупространства, $U \subset E$ — открытое множество и $f: U \to F$ — произвольное C^r-отображение с $0 \leqslant r < \infty$. Пусть, далее, $K \subset U$ — компактное множество и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют открытая окрестность $U' \subset U$ множества K и C^∞-отображение $g: U' \to F$, такие, что $\|g - f\|_{r, U'} < \varepsilon$. Более того, если задано множество $X \subset \partial U$, такое, что $f(X) \subset \partial F$, то g можно выбрать под условием $g(X \cap U') \subset \partial F$.*

Доказательство. Мы можем считать, что хотя бы одно из множеств ∂U, ∂F непусто, поскольку если оба они пусты, то теорема 3.1 покрывается предыдущими результатами. Если $\partial U = \varnothing$, то мы сначала аппроксимируем f отображением

$$x \longmapsto f(x) + y,$$

где $y \in F - \partial F$ имеет норму $<\varepsilon$, а затем применяем теорему 2.4.

Если $\partial U \neq \varnothing$, но $\partial F = \varnothing$, то мы продолжаем f до C^r-отображения, заданного на некоторой окрестности множества U в $\mathbb{R}^m$, пользуясь локальными продолжениями и разбиениями единицы класса C^r; после этого мы опять применяем теорему 2.4.

Наконец, если непусты оба края ∂U, ∂F, произведем естественные отождествления

$$\mathbb{R}^m = (\partial E) \times \mathbb{R}, \quad E = (\partial E) \times [0, \infty),$$

$$\mathbb{R}^n = (\partial F) \times \mathbb{R}, \quad E = (\partial F) \times [0, \infty).$$

Положим для $(x, y) \in (\partial E) \times \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (f_0(x, y), f_1(x, y)) \in \partial F \times [0, \infty).$$

Таким образом, $f_1 \geqslant 0$.

Дальнейшее рассуждение состоит в варьировании свертки, определенной в § 2.2. Пусть $\theta\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — ядро свертки класса C^∞, имеющее специальный вид

$$\theta(x, y) = \alpha(x)\beta(y),$$

где $\alpha\colon \partial E \to \mathbb{R}$, $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ядра свертки класса C^∞. Предположим, что радиусы носителей функций α, β и θ меньше некоторого $\delta > 0$. Положим $U' = \{(x, y) \in U \mid (x, z) \in U$ при $y \leqslant z < y + \delta\}$ и определим отображение $h\colon U' \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$h(x, y) = \int\limits_{t \geqslant 0} \int\limits_{s \in \partial E} f(x - s, y + t)\,\alpha(s)\,\beta(t)\,ds\,dt.$$

Тогда h принадлежит классу C^∞ и $\|h - f\|_{r, U'} \to 0$ при $\delta \to 0$. Более того, $h(U') \subset F$, поскольку f_1 и β неотрицательны. Если $f(\partial U) \subset \partial F$, то $f(x, y) \geqslant f(x, 0)$, откуда следует, что $h(x, y) \geqslant h(x, 0)$. Положим теперь $g(x, y) = h(x, y) - h(x, 0)$. Очевидно, $g(U') \subset F$ и $g(\partial U') \subset \partial F$. Если δ достаточно мало, то отображение $g\colon U' \to F$ удовлетворяет условиям леммы.

3.2. Лемма. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^n$ — полупространства и $U \subset E$, $V \subset F$ — открытые множества. Тогда при любом $r < \infty$ множество $C^\infty(U, V)$ плотно в $C^r_S(U, V)$ и множество $C^\infty(U, \partial U; V, \partial V)$ плотно в $C^r_S(U, \partial U; V, \partial V)$.*

Доказательство почти не отличается от доказательства теоремы 2.4. Детали оставляются читателю. ∎

3.3. Теорема. *Пусть M и N — многообразия класса C^s с $1 \leqslant s \leqslant \infty$; края ∂M и ∂N могут быть непусты. Тогда при любом $r < s$ множество $C^s(M, N)$ плотно в $C^r_S(M, N)$ и множество $C^s(M, \partial M; N, \partial N)$ плотно в $C^r_S(M, \partial M; N, \partial N)$.*

Доказательство состоит из двух частей, копирующих доказательства теорем 2.5 и 2.6. ∎

3.4. Теорема. *Всякое C^r-многообразие с $1 \leqslant r < \infty$ C^r-диффеоморфно C^∞-многообразию, и последнее единственно с точностью до C^∞-диффеоморфизма.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.9 и оставляется читателю. ∎

Под *парой C^r-многообразий* (M, M_0) мы понимаем C^r-многообразие M с его C^r-подмногообразием M_0. Нижеследующие результаты могут быть получены с помощью нашей техники аппроксимации и глобализации; их доказательства по общему плану не отличаются от предыдущих, и мы оставляем их читателю.

3.5. Теорема. *Пусть (M, M_0) и (N, N_0) — пары C^s-многообразий с $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Предположим, что M_0 замкнуто в M и что либо $M_0 \subset M - \partial M$, либо $M_0 \subset \partial M$, либо M_0 есть правильное подмногообразие. Тогда при любом $r < s$ множество $C^s(M, M_0; N, N_0)$ плотно в $C^r_S(M, M_0; N, N_0)$. Если $1 \leqslant r < s$ и пары (M, M_0), (N, N_0) C^r-диффеоморфны, то они и C^s-диффеоморфны.*

3.6. Теорема. *Пусть (M, M_0) — пара C^r-многообразий. Если $0 < r < s \leqslant \infty$, то пара (M, M_0) обладает C^s-структурой, соглассванной с ее C^r-структурой (т. е. пара (M, M_0) C^r-диффеоморфна паре C^s-многообразий). Если сверх того M_0 замкнуто в M и либо $M_0 \subset M - \partial M$, либо $M_0 \subset \partial M$, либо M_0 есть правильное подмногообразие, то эта C^s-структура единственна с точностью до C^r-диффеоморфизма между парами многообразий.*

Теорема 3.6 полезна для тех разделов анализа, в которых естественно возникают подмногообразия низкой гладкости (например, в теории инвариантных многообразий).

Имеются контрпримеры к существованию C^∞-структуры у C^0-пар (M, M_0) даже в случае, когда каждое из многообразий M, M_0 обладает C^∞-структурой.

Мы оставляем читателю перенесение на случай ∂-многообразий теорем 2.12, 2.13 и 2.14.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$. Существуют C^s-многообразия M, N и замкнутые множества $A \subset M$, $B \subset N$, такие, что множество $C^s(M, A; N, B)$ *не плотно* в $C^r_S(M, A; N, B)$. [Указание: положите $A = M$, возьмите в качестве B C^r-подмногообразие многообразия N, не являющееся C^s-подмногообразием, и в качестве $f\colon M \to B$ C^r-диффеоморфизм.]

2. Справедливы относительные варианты теорем 3.3—3.6.

3. Теоремы 3.5 и 3.6 распространяются на отображения между *n-адами многообразий* $\{M_i\} \to \{N_i\}$, где $M_n \subset \ldots \subset M_0 \subset M$ и $N_n \subset \ldots \subset N_0 \subset N$ — вложенные семейства замкнутых правильных подмногообразий.

4. Пусть M есть C^∞-многообразие и A — его замкнутое правильное подмногообразие. Если $q > 2 \dim M$, то всякое C^∞-вложение края ∂M или подмногообразия A в $\mathbb{R}^q$ продолжается до C^∞-вложения многообразия M.

4. СТРУИ И СВОЙСТВО БЭРА

Топологии в множестве $C^r(M, N)$ имеют удобное описание, не использующее координатных карт. Оно основано на том обстоятельстве, что множество $C^r(M, N)$ может быть отождествлено с подмножеством множества $C^0(M, J^r(M, N))$, где $J^r(M, N)$ есть многообразие r-струй отображений многообразия M в N. В этом смысле множество $C^r(M, N)$ является множеством непрерывных отображений. Наша первая цель в этом параграфе — определить на таких множествах сильную и слабую топологии.

Мы обозначаем через $C(X, Y)$ множество всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y. *Компактно-открытая* топология на $C(X, Y)$ определяется предбазой, состоящей из всех множеств вида

$$\{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset V\},$$

где $K \subset X$ компактно и $V \subset Y$ открыто. Мы называем эту топологию также *слабой* (в противоположность определяемой ниже сильной топологии). Получающееся топологическое пространство обозначается через $C_W(X, Y)$.

Слабая топология особенно полезна, когда X локально компактно. Если Y есть метрическое пространство, то эта топология не отличается от топологии равномерной сходимости на компактных множествах. Если при этом X компактно, то $C_W(X, Y)$ обладает метрикой

$$d(f, g) = \sup_x d(f(x), g(x)).$$

Если Y есть полное метрическое пространство, то эта метрика полна. Имеет место и более общий факт:

4.1. Теорема. *Предположим, что каждая компонента пространства X локально компактна и обладает счетной базой. Пусть, далее, Y есть полное метрическое пространство. Тогда $C_W(X, Y)$ обладает полной метрикой.*

Доказательство. Достаточно построить полную метрику на $C_W(X_\alpha, Y)$ для каждой компоненты X_α пространства X; поэтому мы предположим, что само X локально компактно и обладает счетной базой. Тогда X допускает счетное покрытие компактными множествами $\{X_n\}$. По предыдущему, каждое пространство $C_W(X_n, Y)$ обладает полной метрикой.

Рассмотрим отображение

$$\rho: C_W(X, Y) \to \prod_n C_W(X_n, Y),$$

$$\rho_n(f) = f \mid X_n.$$

Очевидно, ρ есть гомеоморфизм на замкнутое подпространство. Так как произведение счетного числа полных метрических пространств обладает полной метрикой, то $C_W(X, Y)$ оказывается гомеоморфным замкнутому подмножеству полного метрического пространства и само получает от последнего полную метрику. ∎

Пусть теперь X и Y — произвольные пространства. Пространство $C_S(X, Y)$ определяется как множество $C(X, Y)$, наделенное нижеследующей *сильной* топологией. Пусть $\Gamma_f \subset X \times Y$ — график отображения f. Для открытого множества $W \subset X \times Y$, содержащего Γ_f, положим

$$\mathcal{N}(f, W) = \{g \in C(X, Y) \mid \Gamma_g \subset W\}.$$

Всевозможные множества такого вида и составляют базу сильной топологии. Топология, индуцируемая на подмножествах множества $C(X, Y)$, также называется сильной.

Если X — паракомпактное пространство, а Y — метрическое пространство, то $C_S(X, Y)$ обладает также базой, составленной из множеств вида

$$\mathcal{N}(f, \varepsilon) = \{g \mid d(g(x), f(x)) < \varepsilon(x) \quad \text{при всех} \quad x \in X\},$$

где f и ε пробегают множества $C(X, Y)$ и $C(X, \mathbb{R}_+)$.

В случае компактного X слабая и сильная топологии совпадают.

Нельзя ожидать, что сильная топология обладает полной метрикой, поскольку она может оказаться вообще не метризуемой. Но мы увидим, что во многих случаях $C_S(X, Y)$ является *пространством Бэра*, т. е. обладает тем свойством, что пересечение счетного числа открытых плотных множеств плотно.

Пусть Y — метрическое пространство. Подмножество пространства $C(X, Y)$ называется *равномерно замкнутым*, если оно содержит предел всякой содержащейся в нем равномерно сходящейся последовательности. Заметим, что это свойство зависит от метрики в Y. Заметим также, что подмножество, замкнутое относительно поточечной сходимости, является и равномерно замкнутым, поскольку оно замкнуто по отношению к слабой топологии.

4.2. Теорема. *Пусть X — паракомпактное пространство и Y — полное метрическое пространство. Тогда всякое равномерно* *замкнутое множество $Q \subset C(X, Y)$ является пространством Бэра по отношению к сильной топологии.*

Следствие. *Каковы бы ни были C^0-многообразия M и N, всякое слабо замкнутое множество $Q \subset C(M, N)$ является пространством Бэра по отношению к сильной топологии.*

Доказательство теоремы. Пусть $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность открытых плотных подмножеств множества Q (здесь и ниже множество Q считается наделенным сильной топологией), и пусть $U \subset Q$ — произвольное непустое открытое множество. Тогда пересечение $A_0 \cap U$ непусто и открыто. Поэтому существуют такие $f_0 \in A_0 \cap U$ и $\varepsilon_0 \in C(X, \mathbb{R}_+)$, что

$$Q \cap \overline{\mathcal{N}}(f_0, \varepsilon_0) \subset A_0 \cap U,$$

где $\overline{\mathcal{N}}(f_0, \varepsilon_0) = \{g \mid d(f_0(x), g(x)) \leqslant \varepsilon_0(x)\}$. Мы можем, разумеется, считать, что $\varepsilon_0 < 1$.

Повторяя эту конструкцию, мы получаем последовательность $\{f_n\}$ в Q и последовательность $\{\varepsilon_n\}$ в $C(X, \mathbb{R}_+)$, такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$Q \cap \overline{\mathcal{N}}(f_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset A_{n+1} \cap \mathcal{N}(f_n, \varepsilon_n)$$

и $\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_n/2$. Последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию

$$d(f_{n+1}(x), f_n(x)) \leqslant 2^{-n}$$

и потому равномерно сходится. Ее предел f лежит в Q, поскольку Q равномерно замкнуто. Кроме того, f принадлежит каждому из множеств $\mathcal{N}(f_n, \varepsilon_n)$, и потому $f \in U$ и $f \in \bigcap A_n$. ∎

Мы переходим теперь к определению струй конечного порядка r, ограничиваясь сперва многообразиями без края. Предположим, что заданы C^r-многообразия M, N с $0 \leqslant r < \infty$. Под *r-струей из M в N* понимается класс $[x, f, U]_r$ эквивалентных троек (x, f, U), где $U \subset M$ — открытое множество, $x \in U$ и $f\colon U \to N$ — отображение класса C^r; эквивалентность определяется так: $[x, f, U]_r = [x', f', U']_r$, если $x = x'$ и локальные представления отображений f, f' в точке x по отношению к некоторой (и, значит, к любой) паре карт имеют одинаковые производные до r-го порядка включительно. Для $[x, f, U]_r$ мы будем использовать обозначения $j_x^r f$ и $j^r f(x)$ и название *r-струя отображения f в точке x*. Точка x называется *источником* струи $[x, f, U]_r$, а точка $f(x)$ — ее *устьем*.

Множество всех r-струй из M в N обозначается через $J^r(M, N)$. Определены *отображение источника* и *отображение устья*:

$$\sigma\colon J^r(M, N) \to M, \quad \sigma[x, f, U]_r = x;$$

$$\tau\colon J^r(M, N) \to N, \quad \tau[x, f, U]_r = f(x).$$

Мы полагаем

$$\sigma^{-1}(x)=J_x^r(M,\ N),\quad \tau^{-1}(y)=J^r(M,\ N)_y$$

и

$$J_x^r(M,\ N)\cap J^r(M,\ N)_y=J_{x,\ y}^r(M,\ N);$$

последнее есть множество всех r-струй из M в N с источником x и устьем y.

В частном случае $M=\mathbb{R}^m$, $N=\mathbb{R}^n$ используется сокращенное обозначение:

$$J^r(\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^n)=J^r(m,\ n).$$

Пусть $U\subset\mathbb{R}^m$ — открытое множество и $f\in C^r(U,\ \mathbb{R}^n)$. Для r-струи отображения f в точке $x\in U$ имеется канонический представитель, а именно многочлен Тейлора порядка r отображения f в точке x. Это полиномиальное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, однозначно определяемое списком производных порядка $\leqslant r$ координатных функций отображения f в точке x. Этот список представляет собой элемент векторного пространства

$$P^r(m,\ n)=\mathbb{R}^n\times\prod_{k=1}^{r}L_{\mathrm{sym}}^k(\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^n),$$

где $L_{\mathrm{sym}}^k(\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^n)$ есть векторное пространство симметрических k-линейных отображений пространства $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Наоборот, всякий элемент пространства $P^r(m,\ n)$ получается из единственной струи из $J_x^r(m,\ n)$. Мы приходим к отождествлениям

$$J_x^r(m,\ n)=P^r(m,\ n),$$

$$J^r(m,\ n)=\mathbb{R}^m\times P^r(m,\ n).$$

В частности, $J^r(m,\ n)$ есть конечномерное векторное пространство (напомним, что r конечно). Если $U\subset\mathbb{R}^m$ и $V\subset\mathbb{R}^n$ — открытые множества, то $J^r(U,\ V)$ есть открытое подмножество пространства $J^r(m,\ n)$.

Пусть теперь M, N — многообразия класса C^r и размерностей m, n соответственно. Предположим сначала, что края ∂M, ∂N пусты. Очевидно, для любых карт $(\varphi,\ U)$, $(\psi,\ V)$ многообразий M, N отображение θ: $J^r(U,\ V)\to J^r(\varphi(U),\ \psi(V))$, определяемое формулой

$$\theta(j_x^rf)=j_y^r(\psi f\varphi^{-1}),\quad y=f(x),$$

является взаимно ознозначным соответствием. (Можно сказать, что θ переводит струю отображения в струю его локального представления.) Далее, $J^r(\varphi(U),\ \psi(V))$ есть открытое множество в векторном пространстве $J^r(m, n)$, изоморфном евклидову пространству. Поэтому мы можем рассматривать $(\theta, J^r(U, V))$ как карту на $J^r(M, N)$. Эти карты определяют на множестве $J^r(M, N)$ топологию и делают его C^0-многообразием. Более того, если многообразия M, N принадлежат классу C^{r+s}, многообразие $J^r(M, N)$ обладает дифференциальной структурой класса C^s.

Для C^r-отображения $f: M \to N$ мы определяем отображение

$$j^r f: M \to J^r(M, N)$$

формулой $x \mapsto j^r f(x)$. Это *r-расширение отображения* f непрерывно и даже принадлежит классу C^s, если M, N и f принадлежат классу C^{r+s}. Мы рассматриваем $j^r f$ как своего рода внутреннюю r-ю производную отображения f. Ясно, что отображение j^r множества $C^r(M, N)$ в $C^0(M, J^r(M, N))$ является вложением.

4.3. Теорема. *Образ отображения*

$$j^r: C^r(M, N) \to C^0(M, J^r(M, N))$$

замкнут по отношению к слабой топологии.

Доказательство. Мы должны показать, что этот образ замкнут по отношению к равномерной сходимости на компактных множествах. Достаточно рассмотреть выпуклые компактные подмножества координатных карт. Другими словами, мы должны доказать, что если $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $\{f_n\}$ — такая последовательность, что при каждом $k = 0, \ldots, r$ последовательность $\{D^k f_n(x)\}$ сходится равномерно на U к непрерывному отображению $g_k: U \to L^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то $g_k = D^k g_0$. Это доказывается индукцией по k. Для простоты мы ограничимся переходом от $k = 1$ к $k = 2$. Если последовательность Df_n равномерно сходится к g_1, а последовательность f_n равномерно сходится к g_0, то при $x, x + y \in U$

$$\begin{aligned} g_0(x+y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x+y) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} \int_0^1 Df_n(x+ty)\, y\, dt \\ &= g_0(x) + \int_0^1 g_1(x+ty)\, y\, dt \end{aligned}$$

(последнее в силу равномерности сходимости). Из этого очевидным образом вытекает, что $g_1 = Dg_0$. ∎

Читатель без труда сможет проверить, что если мы наделим множество $C^r(M, N)$ топологиями, индуцированными сильной и слабой топологиями пространства $C(M, J^r(M, N))$ посредством отображения j^r, то мы получим пространства, не отличающиеся от $C^r_W(M, N)$ и $C^r_S(M, N)$.

Следующие факты вытекают из теорем 4.1, 4.2, 4.3.

4.4. Теорема. (a) *Пространство* $C^r_W(M, N)$ *обладает полной метрикой.*

(b) *Всякое слабо замкнутое подмножество множества* $C^r_S(M, N)$ *по отношению к сильной топологии является пространством Бэра.*

Пусть теперь M, N — многообразия класса C^∞. Мы определяем множество $J^\infty(M, N)$ как обратный предел последовательности

$$J^0(M, N) \leftarrow J^1(M, N) \leftarrow \ldots,$$

а $J^\infty_x(M, N)$ как обратный предел последовательности

$$J^0_x(M, N) \leftarrow J^1_x(M, N) \leftarrow \ldots.$$

Элемент множества $J^\infty_x(M, N)$, по определению, есть ∞-*струя в точке* x.

Отображения j^r с разными r между собой надлежащим образом согласованы, так что возникает предельное отображение

$$j^\infty\colon C^\infty(M, N) \to C^0(M, J^\infty(M, N)).$$

Образ этого отображения тоже слабо замкнут, и, подобно предыдущему, слабая и сильная топологии на $C^\infty(M, N)$ не отличаются от топологий, индуцируемых посредством j^∞ соответствующими топологиями на $C\left(M, J^\infty(M, N)\right)$. Следовательно, $C^\infty_W(M, N)$ обладает полной метрикой и всякое слабо замкнутое подмножество множества $C^\infty_S(M, N)$ является пространством Бэра по отношению к сильной топологии. В частности, само $C^\infty_S(M, N)$ является пространством Бэра.

Вернемся теперь к проблеме плотности вложений и дадим новое доказательство теоремы 2.13. Достаточно доказать, что если $f_0\colon M \to N$ есть собственное отображение класса C^r и $\mathcal{N} \subset \mathrm{Prop}^r(M, N)$ — окрестность отображения f_0, то $\mathcal{N}$ содержит взаимно однозначное погружение; оно будет вложением, поскольку таковыми являются все собственные взаимно однозначные погружения.

Мы можем считать, что

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\Phi, \Psi, K, \varepsilon)$$

(обозначение имеет прежний смысл), где $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ — семейство координатных дисков, покрывающих M.

Положим для $i \in \Lambda$

$$X_i = \{f \in \mathcal{N} \mid f \mid K_i \text{ есть вложение}\}.$$

Множество X_i открыто и плотно в $\mathcal{N}$. Действительно, пусть $B_i \subset U_i$ — чуть больший координатный диск, содержащий K_i в своей внутренности. В силу теоремы 1.3.5 мы можем аппроксимировать $f \mid B_i$ вложением g_i; склеивание отображений g_i и f посредством C^r-отображения λ: $M \to [0, 1]$, принимающего значение 1 на D_i и 0 на $M - K_i$, доставляет отображение, которое является вложением на D_i и которое стремится к f, когда g_i стремится к $f \mid B_i$. Следовательно, множество X_i плотно; его открытость следует из открытости множества вложений.

Аналогичное рассуждение показывает, что если при некоторых i, j пересечение $K_i \cap K_j$ пусто, то множество

$$X_{ij} = \{f \in \mathcal{N} \mid f \mid K_i \cup K_j \text{ есть вложение}\}$$

плотно и открыто.

Пусть $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots$ — такое семейство покрытий, вписанных в покрытие K, что каждое $K^{(j)}$ есть локально конечное покрытие многообразия M координатными дисками и что для любых различных точек x, $y \in M$ существуют непересекающиеся диски $K_1^{(j)}, K_2^{(j)} \in K^{(j)}$ с $x \in K_1^{(j)}$, $y \in K_2^{(j)}$. Поскольку M обладает счетной базой, каждое из покрытий $K^{(n)}$ может быть сделано счетным.

Пусть $X^{(n)}$ — множество таких $f \in \mathcal{N}$, что для любых непересекающихся дисков $K_i^{(n)}$, $K_j^{(n)}$ из $K^{(n)}$ сужение $f \mid K_i^{(n)} \cup K_j^{(n)}$ является вложением. Тогда каждое $X^{(n)}$, а значит, и пересечение $\bigcap_n X^{(n)}$, является пересечением счетного семейства плотных открытых подмножеств множества $\mathcal{N}$. Поскольку свойство Бэра наследуется открытыми множествами, $\mathcal{N}$ есть пространство Бэра. Следовательно, пересечение $\bigcap_n X^{(n)}$ плотно в $\mathcal{N}$. Но это пересечение есть в точности множество всех взаимно однозначных погружений, содержащихся в $\mathcal{N}$. Таким образом, вложения составляют плотное множество.

В струйном подходе мы с самого начала сделали предположение, что $\partial M = \partial N = \varnothing$. Рассмотрим теперь общий случай, когда многообразиям M и N разрешается иметь край.

Определение r-струи остается в этом случае прежним, но к топологии в $J^r(M, N)$ следует подходить с осторожностью. Рассмотрим сначала открытые подмножества U, V полупространств

$E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^n$. Для каждой точки $(x, y) \in U \times V$ имеется каноническое отождествление (при $r < \infty$):

$$J^r_{x,\,y}(U, V) = \prod_{k=1}^{r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = J^r_{0,\,0}(m, n).$$

Вследствие этого

$$J^r(U, V) = U \times V \times J^r_{0,\,0}(m, n).$$

Если хотя бы одно из множеств ∂U, ∂V пусто, то это открытое подмножество полупространства. Однако оно не является таковым, если $\partial U \neq \varnothing$ и $\partial V \neq \varnothing$. Все же и в этом случае оно гомеоморфно открытому подмножеству полупространства: это вытекает из аналогичного свойства произведения $U \times V$, которое в свою очередь является следствием гомеоморфизма

$$[0, \infty) \times [0, \infty) \approx \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Таким образом, $J^r(M, N)$ по-прежнему есть C^0-многообразие, и все сказанное выше сохраняет силу. (Только если M и N являются ∂-многообразиями класса C^{r+s}, многообразие $J^r(M, N)$ не имеет естественной C^s-структуры.) Сказанное о ∞-струях переносится на ∂-случай дословно, и теорема 3.4 справедлива для каких угодно многообразий. Переносится на случай ∂-многообразий и доказательство плотности множества вложений в пространстве $\mathrm{Prop}^r_S(M, N)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Предположим, что пространство X локально компактно и паракомпактно, а пространство Y допускает открытое покрытие полно метризуемыми подпространствами. Тогда всякое слабо замкнутое подмножество множества $C(X, Y)$ является пространством Бэра по отношению к сильной топологии.

***2. При каких условиях естественное отображение

$$C_S(X, C_S(Y, Z)) \to C_S(X \times Y, Z)$$

является гомеоморфизмом?

3. Пусть X — паракомпактное пространство и Y — метрическое пространство. Для $\varepsilon \in C(X, \mathbb{R}_+)$ определим метрику d_ε на $C(X, Y)$ формулой

$$d_\varepsilon(f, g) = \min\{1, \sup_x d(f(x), g(x))/\varepsilon(x)\}.$$

(a) Если Y полно, то метрика d_ε полна.

(b) Если множество $Q \subset C(X, Y)$ равномерно замкнуто и функция ε ограничена, то множество Q замкнуто в метрическом пространстве $(C(X, Y), d_\varepsilon)$.

(c) Сильная топология на множестве $C(X, Y)$ совпадает с топологией, индуцируемой семейством метрик

$$\{d_\varepsilon \mid \varepsilon \in C(X, \mathbb{R}_+)\},$$

4. Свойство Бэра для сильной топологии на равномерно замкнутых подмножествах множества $C(X, Y)$ можно вывести из предыдущего упражнения и следующего факта. Пусть Q — пространство, топология которого определяется семейством Δ полных метрик. Предположим, что семейство Δ является направленным множеством по отношению к естественному частичному порядку:

$$d_1 \leqslant d_2, \quad \text{если} \quad d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \quad \text{для всех} \quad (x, y).$$

Тогда Q обладает свойством Бэра.

5. Пусть $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$ — семейство полных метрических пространств. Пусть, далее, X — произведение множеств X_i, наделенное следующей *сильной топологией произведения*: множество открыто в том и только том случае, если открыта каждая из его проекций на сомножители. Если множество $Q \subset X$ замкнуто в обычной топологии произведения, то по отношению к сильной топологии произведения Q обладает свойством Бэра.

6. Если M компактно, то при $r < \infty$ пространство $C^r_W(M, \mathbb{R}^n)$ является банаховым.

*7. $C^r_W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ есть полное локально выпуклое топологическое векторное пространство, но в нем не существует нормы. Таким образом, это не банахово пространство. [Указание. Пусть E — топологическое векторное пространство. Назовем множество $X \subset E$ *ограниченным*, если для каждой окрестности $N \subset E$ точки 0 существует такое $t > 0$, что $tX \subset N$. Тогда E в том и только том случае обладает нормой, если у точки 0 есть выпуклая ограниченная окрестность.]

8. $C^\infty_W(M, \mathbb{R})$ есть сепарабельное полное локально выпуклое топологическое векторное пространство, однако оно не имеет нормы. (См. упр. 7.)

9. Пусть M есть C^r-многообразие с $0 \leqslant r \leqslant \omega$. Множество $\operatorname{Diff}^r(M)$ всех C^r-диффеоморфизмов многообразия M, наделенное как сильной, так и слабой топологией, является топологической группой по отношению к композиции.

10. Пусть M, N, P — произвольные C^r-многообразия с $0 \leqslant r \leqslant \infty$.

(a) Компонирование

$$C^r(N, P) \times C^r(M, N) \to C^r(M, P),$$
$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

непрерывно по отношению к слабым топологиям.

(b) При фиксированном f компонирование непрерывно по g по отношению к сильным топологиям.

(c) При фиксированном g компонирование в том и только том случае непрерывно по f по отношению к сильным топологиям, если отображение g собственно.

(d) Компонирование непрерывно в точке (f_0, g_0) по отношению к сильным топологиям в том и только том случае, если отображение g_0 собственно.

11. Найдите размерность пространства $J^r(M, N)$.

***12. Является ли пространство $C^0_S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ паракомпактным? Нормальным?

13. Множество

$$\{f \in C^0_S(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \operatorname{Supp} f \text{ компактно}\}$$

замкнуто, но не обладает свойством Бэра.

14. *Предельное множество* $L(f)$ отображения $f\colon M \to N$ по определению состоит из таких точек $y \in N$, что $y = \lim f(x_n)$ для некоторой последовательности $\{x_n\}$ из M, которая не имеет сходящейся подпоследовательности. Если $\dim N \geqslant 2 \dim M$ и $1 \leqslant r \leqslant \infty$, то множество вложений плотно в

$$\mathscr{L} = \{f \in C_S^r(M, N) \mid f(M) \cap L(f) = \varnothing\}.$$

[Если $f \in \mathscr{L}$, то существует открытое множество $N_0 \subset N$, содержащее $f(M)$ и такое, что отображение $f\colon M \to N_0$ собственно; это позволяет применить теорему 2.13.]

15. Открытое множество $P \subset J^r(m, n)$ называется *естественным*, если оно замкнуто относительно компонирования со струями локальных диффеоморфизмов пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$. Если задано такое P, то для C^r-многообразий M, N размерностей m, n через $P(M, N)$ обозначают множество C^r-отображений $M \to N$, у которых все r-струи локальных представлений лежат в P. Тогда $P(M, N)$ открыто в $C_S^r(M, N)$.

16. Множество погружений является подмножеством Бэра пространства $C_W^r(M, N)$ с $1 \leqslant r \leqslant \infty$, если $\dim M \leqslant 2 \dim N$. (*Подмножество Бэра* — это пересечение счетного семейства открытых плотных множеств.)

*17. При $0 \leqslant r \leqslant \infty$ пространство $C_S^r(M, N)$ вполне регулярно.

5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ

При построении аналитических аппроксимаций нельзя пользоваться разбиениями единицы, поскольку всякая аналитическая функция в $\mathbb{R}^n$, имеющая ограниченный носитель, является константой. Необходима более тонкая глобализационная техника.

Пользуясь методами комплексного анализа, Грауэрт [1] получил следующий глубокий результат.

5.1. Теорема. *Пусть M и N — многообразия класса C^ω. Тогда $C^\omega(M, N)$ плотно в $C_S^r(M, N)$* $[0 \leqslant r \leqslant \infty]$.

Эта теорема явилась для топологов хорошим подарком, поскольку она показывает, что C^ω-теория не отличается от C^∞-теории в таких вопросах, как дифференциальная классификация многообразий, существование вложений и погружений и т. д. Все эти вопросы касаются *открытых* множеств отображений одного многообразия в другое. Когда же речь идет о *замкнутых* множествах отображений или об индивидуальных отображениях, например когда рассматриваются решения дифференциальных уравнений, степень гладкости может играть важную роль. Она оказывается также важной, когда рассматриваются отображения многообразия в себя. Для таких отображений возникают проблемы сопряженности и итераций, в которых предположения о высокой гладкости приобретают иногда решающее значение.

Во всех этих ситуациях аналитические отображения оказываются особенно полезными, поскольку их поверхности уровня —

даже критические — являются аналитическими пространствами. Хотя аналитические пространства и не являются, вообще говоря, многообразиями, их топологическое устройство остается очень простым. В частности, они могут быть триангулированы.

Для компактных многообразий теорема 5.1 была доказана также Морри [1]. Элегантный подход к этому случаю в предположении существования аналитической римановой метрики был предложен Бохнером [1].

Из теоремы 5.1 уже нетрудно вывести существование C^ω-структур на C^r-многообразиях, согласованных с их C^∞-структурами; доказательство использует те же соображения максимальности, которые использовались в доказательстве теоремы 2.9. Это существование было впервые доказано Уитни [2], который пользовался следующей, более простой аппроксимационной теоремой.

5.2. Теорема (Уитни [6]). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $f: U \to \mathbb{R}$ — произвольное C^r-отображение с $0 \leqslant r < \infty$. Пусть, далее, $v: \mathbb{R}^m \to [0, 1]$ — отображение класса C^∞ с ограниченным носителем, равное 1 в окрестности компактного множества $K \subset U$. Положим $h(x) = v(x) f(x)$ и определим отображение $\delta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ формулой $\delta(x) = \exp(-|x|^2)$. Положим, наконец, $T = 1 \Big/ \int_{\mathbb{R}^n} \delta$ и фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда для достаточно большого $\varkappa > 0$ свертка g функции h с $T\varkappa^m\delta(\varkappa x)$ аналитична и удовлетворяет неравенству $\|g - f\|_{r, K} < \varepsilon$.*

Доказательство этой теоремы совсем просто, но ввиду отсутствия разбиений единицы не очень легко перейти от теоремы 5.2 к аппроксимационным теоремам для абстрактных C^ω-многообразий. Однако для C^ω-подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$ теорема 5.2 оказывается адекватным средством, поскольку в этом случае можно пользоваться техникой трубчатых окрестностей.

Как вывести из теоремы 5.2 существование у C^∞-многообразия C^ω-структуры, согласованной с его C^∞-структурой, мы покажем в § 4.6.

Нэш [1] доказал, что связное компактное C^∞-многообразие без края C^∞-диффеоморфно компоненте вещественного алгебраического многообразия [1]); он доказал также алгебраическую аппроксимационную теорему для отображений между такими многообразиями.

[1]) Эта теорема Нэша усилена А. Тоньоли, показавшим, что всякое компактное C^∞-многообразие без края диффеоморфно вещественному алгебраическому многообразию; см. Tognoli A. Su una congettura di Nash. *Ann Suola norm. super. Pisa,* Sci fis. e mat., **27** (1973), № 1, 167—185.— *Прим. перев.*

Интересное топологическое применение результата Нэша было найдено Артином и Мазуром [1]: если M — связное компактное C^∞-многообразие, то в $C^\infty_S(M, M)$ имеется плотное подмножество, составленное из таких отображений f: $M \to M$, что число неподвижных точек отображения f^n ограничено сверху выражением вида $Ae^{\lambda n}$, где A и λ — положительные константы.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^m$ многочлены составляют в $C^\infty_W(U, \mathbb{R})$ плотное множество. [Указание: замените в теореме 5.2 экспоненту многочленом Тейлора.]

Глава 3

ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

> Трансверсальность — это ключ, отпирающий секреты многообразий.
>
> Г. Э. Винкельнкемпер

> «Transversal» — существительное; соответствующее *прилагательное* — «*transverse*».
>
> Дж. Г. К. Уайтхед, 1959

Рассмотрим следующие утверждения.

1. Если отображение f: $S^2 \to \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1, то для «большинства» точек $y \in \mathbb{R}^2$ прообраз $f^{-1}(y)$ конечен.

2. Две линии в $\mathbb{R}^3$, «как правило», не пересекаются.

3. Если функция f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принадлежит классу C^1, то «почти никакая» горизонтальная линия в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ нигде не касается графика функции f.

4. «Вообще говоря», C^1-погружение $S^1 \to \mathbb{R}^2$ имеет лишь конечное число точек самопересечения.

Такого рода высказывания встречаются в дифференциально-топологических рассуждениях сплошь и рядом. Большинство математиков согласится, что они выглядят правдоподобными. Все же они вызывают некоторую неуверенность, главным образом из-за неясности взятых в кавычки слов. Но даже если дать точные определения, останется ощущение, что нужно что-то доказать. Цель этой главы и состоит в построении математической теории, предназначенной для легализации подобных утверждений.

В основе этой теории лежит фундаментальная теорема анализа, принадлежащая Э. П. Морсу и А. Сарду[1]). Она утверждает, что если f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ есть C^r-отображение с $r > \max(0, n-k)$, то множество критических значений отображения f имеет (в $\mathbb{R}^k$) меру 0. Мы докажем это только при $r = \infty$. Этот вариант теоремы Морса—Сарда значительно проще, и для дифференциальной топологии его достаточно.

Если читатель пожелает, он может принять утверждение теоремы Морса—Сарда (теорема 1.3) на веру: метод ее доказательства больше нигде не используется.

---

[1]) Первая теорема такого рода было доказана А. Б. Брауном [1]. См. также Дубовицкий [1].

В § 3.2 теорема Морса—Сарда применяется к доказательству различных теорем трансверсальности. Эти теоремы обеспечивают существование достаточного количества отображений $f: M \to N$, трансверсальных к заданному подмногообразию A многообразия N. Это фундаментальный результат дифференциальной топологии; в теории топологических или комбинаторных многообразий подобные утверждения неверны.

В этой главе и вообще в остающейся части книги *все многообразия предполагаются принадлежащими классу* C^∞, если противное явно не оговорено. Ввиду аппроксимационных результатов предыдущей главы, это ограничение не слишком серьезно.

1. ТЕОРЕМА МОРСА—САРДА

Мы определяем n-куб $C \subset \mathbb{R}^n$ *с ребром* $\lambda > 0$ как произведение

$$C = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

замкнутых интервалов длины λ; таким образом,

$$I_j = [a_j,\ a_j + \lambda] \subset \mathbb{R}.$$

Мера (или *n-мера*) куба C есть, по определению,

$$\mu(C) = \mu_n(C) = \lambda^n.$$

Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ *имеет меру* 0, если при любом $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто семейством n-кубов, сумма мер которых меньше ε. Очевидно, счетное объединение множеств меры 0 имеет меру 0. Поэтому для того, чтобы X имело меру 0, достаточно, чтобы каждая точка из X имела в X окрестность меры 0 (по принципу Линделёфа).

1.1. Лемма. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ *— открытое множество и* $f: U \to \mathbb{R}^n$ *— отображение класса* C^1. *Если* $X \subset U$ *имеет меру* 0, *то и* $f(X)$ *имеет меру* 0.

Доказательство. Каждая точка множества X принадлежит открытому шару $B \subset U$, на котором норма $\|Df(x)\|$ равномерно ограничена сверху некоторым положительным числом $\varkappa$. Тогда

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varkappa |x - y|$$

для всех $x, y \in B$. Из этого следует, что если $C \subset B$ есть n-куб с ребром λ, то $f(C)$ содержится в n-кубе C' с ребром, меньшим $\sqrt{n}\varkappa\lambda = L\lambda$. Следовательно, $\mu(C') < L^n \mu(C)$.

Представим X в виде объединения $\bigcup\limits_1^\infty X_j$, где каждое X_j содержится в компактном подмножестве шара B предыдущего типа. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, $X_j \subset \bigcup\limits_k C_k$, где каждое C_k есть n-куб и $\sum \mu(C_k) < \varepsilon$. Следовательно, $f(X_j) \subset \bigcup\limits_k C'_k$, где сумма мер

n-кубов C'_k меньше $L^n\varepsilon$. Таким образом, каждое из множеств $f(X_j)$ имеет меру 0, и, значит, $f(X)$ имеет меру 0. ∎

Пусть теперь M есть n-мерное многообразие (класса C^∞). Говорят, что множество $X \subset M$ *имеет меру* 0, если для любой карты (φ, U) имеет меру 0 множество $\varphi(U \cap X) \subset \mathbb{R}^n$. Лемма 1.1 показывает, что при проверке этого условия можно ограничиться картами некоторого атласа.

Заметим, что мы не определяем «меру» подмножества многообразия M, а только описываем некоторый класс подмножеств, о которых говорим, что они «имеют меру 0». Это находится в полном соответствии с «принципом развесистой клюквы» (см. примечание на стр. 34).

Можно показать, что куб не имеет меры 0. Поэтому множество меры 0 в $\mathbb{R}^n$ не может содержать куба; следовательно, оно имеет пустую внутренность. Следовательно, *замкнутое* подмножество меры 0 пространства $\mathbb{R}^n$ или многообразия M нигде не плотно. Более того, предположим, что множество $X \subset M$ имеет меру 0 и *σ-компактно*, т. е. является объединением счетного множества компактных множеств. Каждое из последних нигде не плотно, так что $M - X$ всюду плотно в силу теоремы Бэра о категории. Дополнение к X является *массивным* множеством, т. е. содержит пересечение счетного семейства плотных открытых множеств. Теорема Бэра утверждает, что массивное подмножество полного метрического пространства всюду плотно. Заметим, что пересечение счетного семейства массивных множеств массивно.

1.2. Предложение. *Пусть M, N — многообразия с* $\dim M < \dim N$. *Если отображение $f\colon M \to N$ принадлежит классу C^1, то множество $N - f(M)$ всюду плотно.*

Доказательство. Достаточно показать, что $f(M)$ имеет меру 0. А для этого достаточно доказать соответствующее локальное утверждение: если $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^1 с $m < n$, то $g(U) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0. Представим g как композицию C^1-отображений:

$$U = U \times 0 \subset U \times \mathbb{R}^{n-m} \xrightarrow{\pi} U \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, $U \times 0$ имеет n-меру 0 в

$$U \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n,$$

так что наше предложение вытекает из леммы 1.1, примененной к πg. ∎

Напомним, что точка $x \in M$ называется *критической* для C^1-отображения $f\colon M \to N$, если линейное отображение $T_x f\colon M_x \to$

$N_{f(x)}$ не эпиморфно. Мы обозначаем через Σ_f множество критических точек отображения f. Заметим, что $N - f(\Sigma_f)$ есть множество регулярных значений отображения f.

1.3. Теорема Морса—Сарда. *Пусть M, N — многообразия размерностей m, n и f: $M \to N$ — отображение класса C^r. Если*

$$r > \max(0, m - n),$$

то $f(\Sigma_f)$ имеет меру 0 в N. Множество регулярных значений отображения f массивно и потому всюду плотно.

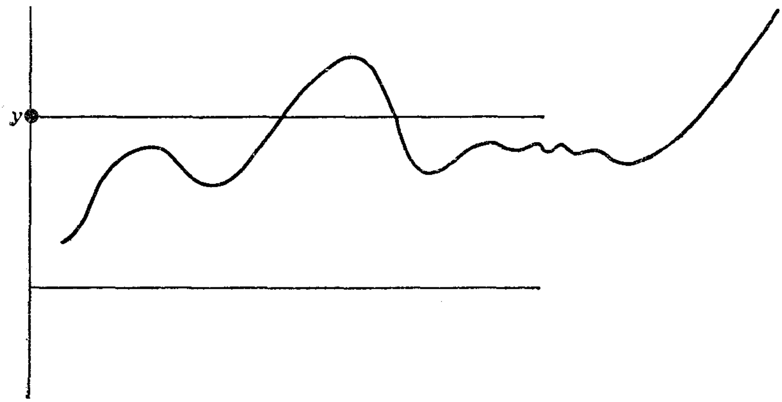


Рис. 3—1.

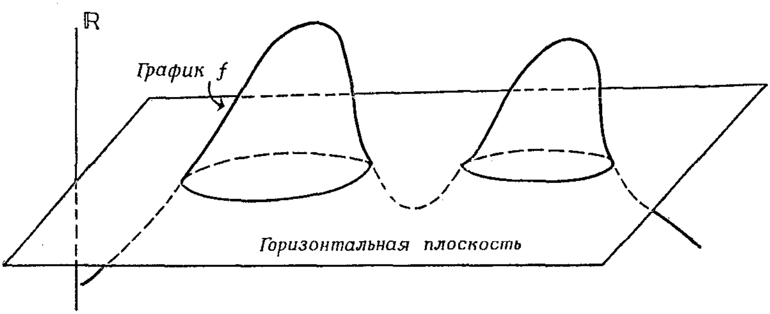


Рис. 3—2.

Предположение о гладкости выглядит странным, но является необходимым. Мы докажем теорему только в C^∞-случае. Прежде чем приступать к доказательству, посмотрим, что дает эта теорема в некоторых частных случаях.

Пусть f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1. Если y есть регулярное значение, то горизонтальная линия $\mathbb{R} \times y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ трансверсальна графику функции f (рис. 3—1). Таким образом, теорема показывает, что «большинство» горизонтальных линий трансверсально к графику.

Рассмотрим теперь отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. В этом случае теорема утверждает, что большинство горизонтальных плоскостей $\mathbb{R}^2 \times z \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ трансверсальнс графику отображения f, *если f принадлежит классу C^2* (рис. 3—2). Это кажется правдоподобным. Но ведь кажется правдоподобным, что это верно и в случае, когда f принадлежит только классу C^1; однако Уитни [1] нашел контрпример к последнему утверждению! Уитни в действительности построил такое C^1-отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, что его критическое множество содержит топологическую дугу I, но сужение $f\,|\,I$ не постоянно, так что $f\,(\Sigma_f)$ содержит открытое подмножество прямой $\mathbb{R}^1$. Это приводит к следующему парадоксу: график отображения f есть поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$; на этой поверхности лежит дуга A, в каждой точке которой поверхность имеет горизонтальную касательную плоскость, и все же A не имеет постоянной высоты. Чтобы представить это себе более живо, можно считать, что S есть холмистая местность, а A — дорога на ней. В каждой точке дороги местность горизонтальна, а дорога тем не менее имеет подъемы и спуски.

Доказательство теоремы Морса—Сарда для C^∞-отображений. Достаточно доказать локальную теорему. Мы имеем дело, таким образом, с C^∞-отображением $f\colon W \to \mathbb{R}^n$, где $W \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество. Если $m < n$, то $f\,(W)$ имеет меру 0, и мы отныне предполагаем, что $m \geqslant n$.

Дифференциальный оператор первого порядка есть по определению отображение $C^\infty\,(W, \mathbb{R}) \to C^\infty\,(W, \mathbb{R})$ вида

$$g \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x_k}$$

для некоторого $k \in \{1, \ldots, m\}$. Композиция ν таких операторов называется *дифференциальным оператором порядка* ν.

Мы представим критическое множество Σ_f как объединение следующих трех подмножеств. Положим $f\,(x) = (f_1\,(x), \ldots, f_m\,(x))$.

Σ^1 есть множество таких точек $p \in \Sigma_f$, что $\Delta f_i\,(p) = 0$ для всех дифференциальных операторов Δ порядка $\leqslant m/n$ и всех $i = 1, \ldots, m$.

Σ^2 есть множество таких точек $p \in \Sigma_f$, что $\Delta f_i\,(p) \neq 0$ для некоторого i и некоторого дифференциального оператора Δ порядка $\geqslant 2$.

Σ^3 есть множество таких точек $p \in \Sigma_f$, что $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(p) \neq 0$ для некоторых i, j.

Очевидно, $\Sigma_f = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$.

Сначала мы покажем, что $f(\Sigma^1)$ имеет меру 0. Пусть ν есть наименьшее целое число с $\nu > m/n$. Разложение Тейлора степени ν отображения f в точке множества Σ^1 показывает, что всякая точка из Σ^1 обладает в W такой окрестностью U, что если $p \in \Sigma^1 \cap U$ и $q \in U$, то

$$|f(p) - f(q)| \leqslant B|x - y|^\nu, \quad B \geqslant 0.$$

В качестве U мы возьмем куб. Достаточно показать, что $f(U \cap \Sigma^1)$ имеет меру 0.

Пусть λ — ребро куба U и s — большое натуральное число. Разобьем U в сумму s^m кубиков с ребром λ/s. Те из них, которые пересекаются с Σ^1, мы обозначим через C_k, где $k = 1, \ldots, t$ и $t \leqslant s^m$.

Каждый из кубиков C_k содержится в шаре радиуса $(\lambda/s)\sqrt{m}$ с центром в точке из $U \cap X$. Поэтому $f(C_k)$ содержится в кубе $C'_k \subset \mathbb{R}^n$, ребро которого не больше

$$2B\left(\frac{\lambda}{s}\sqrt{m}\right)^\nu = A\left(\frac{\lambda}{s}\right)^\nu.$$

Поэтому сумма $\sigma(s)$ n-мер этих кубов C'_k не больше

$$s^m A^n \left(\frac{\lambda}{s}\right)^{\nu n} = s^{m-\nu n} A^n \lambda^{\nu n}.$$

Так как $m - \nu n < 0$, из этого вытекает, что $\sigma(s) \to 0$ при $s \to \infty$. Следовательно, $f(U \cap \Sigma^1)$ имеет меру 0.

Заметим, что если $n = m = 1$, то $\Sigma^1 = \Sigma_f$, так что в этом случае теорема Морса—Сарда уже доказана. Применим индукцию по m, т. е. предположим, что $m > 1$ и что теорема справедлива для любого C^∞-отображения $P \to Q$ с $\dim P < m$.

Теперь мы покажем, что множество $f(\Sigma^2 - \Sigma^3)$ имеет меру 0. Для каждой точки $p \in \Sigma^2 - \Sigma^3$ существует дифференциальный оператор θ, такой, что

$$\begin{cases} \theta f_i(p) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_j} \theta f_i(p) \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

для некоторых i, j. Пусть X — множество точек, обладающих этим свойством при фиксированных θ, i, j. Достаточно доказать, что $f(X)$ имеет меру 0.

Формула (1) показывает, что $0 \in \mathbb{R}^n$ есть регулярное значение отображения $\theta f_i \colon W \to \mathbb{R}^n$. Поскольку f_i принадлежит классу C^∞, ему принадлежит и θf_i. Поэтому X есть C^∞-подмногообразие пространства $\mathbb{R}^m$ размерности $m - 1$. Очевидно, $\Sigma_f \cap X \subset \Sigma_{f|X}$. Но по предположению индукции $f(\Sigma_{f|X})$ имеет меру 0. Значит, и $f(\Sigma^2 - \Sigma^3)$ имеет меру 0.

Остается доказать, что $f(\Sigma^3)$ имеет меру 0. Каждая точка $p \in \Sigma^3$ обладает открытой окрестностью $U \subset W$, на которой $\partial f_i/\partial x_j \neq 0$ при некоторых i, j. В силу теоремы о неявной функции окрестность U можно выбрать таким образом, что будут существовать открытое множество $A \times B \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ и C^∞-диффеоморфизм h: $A \times B \to U$ с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{h} & U \\ \downarrow & & \downarrow f_i \\ B & \subset & \mathbb{R} \end{array}$$

Другими словами, $f_i(x_1, \ldots, x_{m-1}, t) = t$ при $(x, t) \in A \times B$.

Для удобства записи мы переупорядочим координаты в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы $f_i = f_n$. Множество U мы отождествляем с $A \times B$ посредством диффеоморфизма h. Тогда $f \mid U$ имеет вид

$$\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \supset A \times B \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R},$$

$$f(x, t) = (u_t(x), t),$$

где $u_t\colon A \to \mathbb{R}^{n-1}$ при каждом $t \in B$ есть C^∞-отображение. Легко видеть, что точка (x, t) в том и только в том случае является критической для f, если точка x является критической для u_t. Таким образом,

$$\Sigma_f \cap (A \times B) = \bigcup_{t \in B} (\Sigma_{u_t} \times t).$$

Так как $\dim A = n - 1$, из предположения индукции вытекает, что

$$\mu_{n-1}(u_t(\Sigma_{u_t})) = 0,$$

где μ_{n-1} обозначает лебегову меру в $\mathbb{R}^{n-1}$. Следовательно, в силу теоремы Фубини

$$\mu_n\Big(\bigcup_{t \in B} f(\Sigma_{u_t} \times t)\Big) = \int_B \mu_{n-1}(u_t(\Sigma_{u_t}))\, dt$$

$$= \int_B 0 \, dt = 0.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, мы видим, что $f(\Sigma \cap U)$ имеет меру 0. ∎

В качестве первого применения теоремы Морса—Сарда мы докажем следующее топологическое предложение, эквивалентное теореме Брауэра о неподвижной точке.

1.4. Теорема. *Не существует ретракции $D^n \to S^{n-1}$.*

Доказательство. Предположим, что $f\colon D^n \to S^{n-1}$ есть ретракция, т. е. такое непрерывное отображение, что сужение $f \mid S^{n-1}$

тождественно. Тогда мы можем построить новую ретракцию g: $D^n \to S^{n-1}$, которая принадлежит классу C^∞ в окрестности сферы S^{n-1} в D^n; например, можно положить

$$g(x) = \begin{cases} f(x/|x|) & \text{при} \quad 1/2 \leqslant |x| \leqslant 1, \\ f(2x) & \text{при} \quad 0 \leqslant |x| \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Аппроксимируем g C^∞-отображением h: $D^n \to S^{n-1}$, совпадающим с g в окрестности сферы S^{n-1}; отображение h будет C^∞-ретракцией.

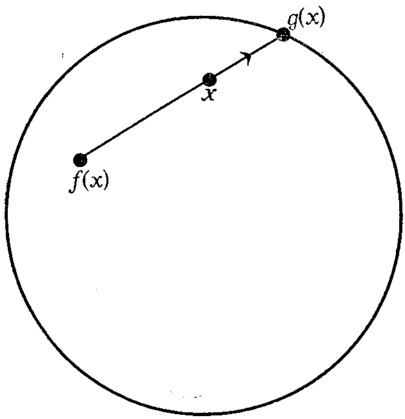


Рис. 3—3.

В силу теоремы 1.3 у отображения h имеется регулярное значение $y \in S^{n-1}$. (Все, что нам нужно, — *одно* регулярное значение!) Тогда $h^{-1}(y)$ есть компактное одномерное подмногообразие V шара D^n и

$$\partial V = V \cap S^{n-1}.$$

Поэтому y есть краевая точка многообразия V. Компонента многообразия V, содержащая y, диффеоморфна замкнутому интервалу; поэтому *у нее должна быть еще одна краевая точка* $z \in S^{n-1}$, $z \neq y$. Но $h(z) = z$, что противоречит включению $z \in h^{-1}(y)$. ∎

Точно такое же рассуждение доказывает, что если M — произвольное компактное гладкое многообразие, то не существует ретракции $M \to \partial M$. Это верно и без предположения о гладкости, но доказательство требует обращения к алгебраической топологии.

Теорема Брауэра о неподвижной точке утверждает, что всякое непрерывное отображение $f\colon D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку, т. е. $f(x) = x$ для некоторого x. Это следует из 1.5. Действительно, если $f(x) \neq x$ ни при каком x, то можно построить ретракцию $g\colon D^n \to S^{n-1}$, отобразив точку x в точку пересечения сферы S^{n-1} с лучом, исходящим из $f(x)$ и проходящим через x; см. рис. 3—3.

Доказательство неретрагируемости шара на сферу иллюстрирует взаимосвязь между отображениями и многообразиями. Доказательство заканчивается замечанием, что компактное одномерное многообразие имеет четное число краевых компонент. Так совсем простая топология 1-многообразий приводит к весьма нетривиальному результату об отображениях.

Этот метод изучения отображений часто используется в дифференциальной топологии. Его общая схема такова: аппроксимировать C^∞-отображением, найти регулярное значение и затем использовать топологию прообраза регулярного значения.

Важное расширение этого метода использует вместо регулярного значения подмногообразие, к которому отображение трансверсально. Чтобы достичь трансверсальности, нужны дальнейшие аппроксимационные теоремы. О них пойдет речь в следующем параграфе.

УПРАЖНЕНИЯ

*1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция (не обязательно принадлежащая классу C^1). Тогда множество критических значений имеет меру 0.

2. (a) Для любого $y_0 \in N$ множество

$$\{f \in C^r(M, N) \mid y_0 \text{ есть регулярное значение}\}$$

открыто и плотно в $C^r_S(M, N)$ $[1 \leqslant r \leqslant \infty]$.

(b) Каковы бы ни были точка $y_0 \in N$, отображение $f_0\colon M \to N$, окрестность $\mathcal{N} \subset C^r_S(M, N)$ отображения f_0 и окрестность $W \subset M$ множества $f_0^{-1}(y_0)$, существует такое $g \in \mathcal{N}$, что y_0 есть регулярное значение отображения g и $g = f_0$ на $M - W$.

3. Пусть M — многообразие без края и $K \subset M$ — замкнутое множество. Всякая окрестность $U \subset M$ множества K содержит замкнутую окрестность множества K, которая является гладким подмногообразием многообразия M. [Возьмите множество $\lambda^{-1}[0, y]$, где отображение $\lambda\colon M \to [0, 1]$ тождественно равно 1 на K и имеет носитель, содержащийся в U, а точка y есть регулярное значение отображения λ.]

4. (a) Пусть M — связное многообразие и $f\colon M \to N$ — аналитическое отображение. Пусть, далее, $\Sigma \subset M$ — множество критических точек отображения f. Если $\Sigma \neq M$, то множество $f^{-1}f(\Sigma)$ имеет меру 0.

(b) Предыдущее утверждение станет неверным, если ослабить требование аналитичности до требования принадлежности классу C^∞

***5. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ и $V \subset \mathbb{R}^2$ — открытые множества. Верно ли, что если f есть C^1-отображение множества U на множество V, то f имеет ранг 2 в какой-нибудь точке множества U?

2. ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

Пусть $f\colon M \to N$ — отображение класса C^1 и A — подмногообразие многообразия N. Для $K \subset M$ мы пишем $f \pitchfork_K A$ и говорим, что f *трансверсально к* A *вдоль* K, если для любой точки $x \in K$ с $f(x) = y \in A$ касательное пространство N_y порождается своими подпространствами A_y и $T_x f(M_x)$. Если $K = M$, мы пишем просто $f \pitchfork A$.

В § 1.3 и 1.4 было показано, что если $f \pitchfork A$, то $f^{-1}(A)$ есть подмногообразие (при некоторых дополнительных предположениях, касающихся краев). Это одна из главных причин, по которым трансверсальность важна.

Введем обозначения

$$\pitchfork_K^r(M, N;\ A) = \{f \in C^r(M, N) \mid f \pitchfork_K A\},$$

$$\pitchfork^r(M, N;\ A) = \pitchfork_M^r(M, N;\ A).$$

Следующая теорема есть главный результат этого параграфа. (Напомним, что подмножество топологического пространства называется *массивным*, если оно содержит пересечение счетного числа плотных открытых множеств; напомним также, что все многообразия и подмногообразия молчаливо предполагаются принадлежащими классу C^∞.)

2.1. Теорема трансверсальности. *Пусть M, N — многообразия и A — подмногообразие многообразия N. Пусть, далее, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Тогда:*

(a) *Множество $\pitchfork^r(M, N; A)$ массивно (и, следовательно, плотно) в $C^r(M, N)$ по отношению как к слабой, так и к сильной топологии.*

(b) *Предположим, что A замкнуто в N. Если L — замкнутое [соответственно компактное] подмножество многообразия M, то множество $\pitchfork_L^r(M, N;\ A)$ плотно и открыто в $C_S^r(M, N)$ [соответственно в $C_W^r(M, N)$].*

Локальная часть доказательства основывается на теореме Морса—Сарда, а глобализация аналогична соответствующей части доказательства открытости и плотности множества погружений в гл. 2. Поскольку эта техника будет применяться еще не раз, мы начнем с ее абстрактного построения.

Пусть M и N — произвольные C^r-многообразия с $0 \leqslant r \leqslant \infty$. Под *классом C^r-отображений на* (M, N) мы понимаем функцию $\mathscr{X}$ следующего типа. Область определения функции $\mathscr{X}$ составляют тройки (L, U, V), где $U \subset M$, $V \subset N$ — открытые множества, а $L \subset M$ — замкнутое множество с $L \subset U$. Такой тройке $\mathscr{X}$ относит множество отображений $\mathscr{X}_L(U, V) \subset C^r(U, V)$. При этом предполагается, что $\mathscr{X}$ удовлетворяет следующей *аксиоме локализации*.

Пусть (L, U, V) — одна из наших троек. Для принадлежности отображения $f \in C^r(V, U)$ множеству $\mathscr{X}_L(U, V)$ достаточно, чтобы существовали тройки (L_i, U_i, V_i) и отображения $f_i \in \in \mathscr{X}_{L_i}(U_i, V_i)$, такие, что $L \subset \bigcup L_i$ и при каждом i отображение f_i совпадает с f в окрестности множества L_i.

Фундаментальный пример:

$$\mathscr{X}_L(U, V) = \pitchfork_L^r(U, V;\ V \cap A).$$

Класс $\mathscr{X}$ называется *богатым*, если существуют открытые покрытия $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ многообразий M, N, такие, что если $U \subset M$, $V \subset N$ — открытые подмножества элементов покрытий $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ и L — компактное подмножество множества U, то множество $\mathscr{X}_L(U, V)$ плотно и открыто в $C_W^r(U, V)$.

2.2. Глобализационная теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — богатый класс C^r-отображений на (M, N), $0 \leqslant r \leqslant \infty$. Для всякого замкнутого множества $L \subset M$:*

(a) *множество $\mathscr{X}_L(M, N)$ плотно и открыто в $C_S^r(M, N)$;*

(b) *множество $\mathscr{X}_L(M, N)$ плотно и открыто в $C_W^r(M, N)$, если L компактно.*

Доказательство. Фиксируем L и $f \in C^r(M, N)$. Всюду ниже мы считаем, что i пробегает счетное множество индексов Λ. Пусть $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}$ — локально конечный атлас многообразия M, $K_i \subset U_i$ — такие компактные множества, что $L = \bigcup K_i$, и $\Psi = \{\psi_i, V_i\}$ — такое семейство карт многообразия N, что $f(K_i) \subset U_i$. Поскольку класс $\mathscr{X}$ богат, мы можем выбрать U_i и V_i под дополнительным условием, что множество $\mathscr{X}_{K_i}(E, V_i)$ плотно и открыто в $C_W^r(E, V_i)$ для всякого открытого множества $E \subset U_i$, содержащего K_i.

Определим $\mathscr{M} \subset C^r(M, N)$ как множество таких отображений $g \in C^r(M, N)$, что

$$g \mid U_i \in \mathscr{X}_{K_i}(U_i, V_i) \quad \text{при всех} \quad i \in \Lambda.$$

В силу аксиомы локализации, $\mathscr{M} \subset \mathscr{X}_L(M, N)$.

Предположим, что $f \in \mathscr{X}_L(M, N)$. Тогда, опять-таки в силу аксиомы локализации, $f \in \mathscr{M}$. Из нашего предположения, что каждое из множеств $\mathscr{X}_{K_i}(U_i, V_i)$ слабо открыто, вытекает, что если L компактно, то $\mathscr{M}$ слабо открыто (в этом случае множество Λ конечно). В общем же случае $\mathscr{M}$ сильно открыто (поскольку атлас Φ локально конечен). Этим доказаны оба утверждения теоремы 2.2, относящиеся к открытости.

Теперь мы отбрасываем предположение, что $f \in \mathscr{X}_L(M, N)$, и переходим к доказательству части теоремы 2.2, относящейся к плотности.

Пусть для каждого i задано $\varepsilon_i > 0$. Тогда определена сильная базисная окрестность

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^r(f;\ \Phi,\ \Psi,\ K,\ \varepsilon),$$

где $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ и $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \Lambda}$.

Возьмем произвольное $j \in \Lambda$ и положим $E = U_j \cap f^{-1}(V_j)$; очевидно, $K_j \subset E$. Поскольку класс $\mathscr{X}$ богат, множество $\mathscr{X}_{K_j}(E, V_j)$ плотно. Пусть λ: $E \to [0, 1]$ — такое C^r-отображение с компактным носителем, что $\lambda = 1$ вблизи K_j.

Чтобы упростить запись, отождествим V_j с открытым подмножеством полупространства посредством отображения ψ_j; таким образом, для элементов множества V_j имеют смысл векторные операции.

Если отображение $g \in C^r_W(E, V_j)$ достаточно близко к $f \mid E$, то корректно определено следующее отображение $\Gamma(g) = h \in C^r(M, N)$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + \lambda(x)[g(x) - f(x)] & \text{при } x \in E, \\ f(x) & \text{при } x \in M - E. \end{cases}$$

Более того, если g стремится к $f \mid E$ в слабой топологии, то h стремится к f в сильной топологии. Поскольку множество $\mathscr{X}_{K_j}(E, V_j)$ всюду плотно, мы можем выбрать отображение $g \in \mathscr{X}_{K_j}(E, V_j)$ столь близким к $f \mid E$, что $h \in \mathcal{N}$. Поскольку $h = g$ вблизи K_j, из этого вытекает, что $h \in \mathscr{X}_{K_j}(M, N)$.

Таким образом, при всяком $i \in \Lambda$ множество $\mathscr{X}_{K_i}(M, N)$ плотно в $C^r_S(M, N)$, и мы уже знаем, что оно открыто. Благодаря этому из теоремы Бэра следует, что пересечение $\bigcap_i \mathscr{X}_{K_i}(M, N)$ всюду плотно по отношению к сильной топологии. Так как это множество содержит $\mathscr{X}_L(M, N)$, последнее также сильно плотно.

Доказательство того, что множество $\mathscr{X}_L(M, N)$ слабо плотно, если L компактно, аналогично. ∎

Доказательство теоремы 2.1 основано на следующем полулокальном результате.

2.3. Лемма. *Пусть K — компактное подмножество многообразия U, $\mathbb{R}^a$ — подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Тогда множество*

$$\pitchfork^r_K(U, V;\ \mathbb{R}^a \cap V)$$

открыто и плотно в $C^r_W(U, V)$ $[1 \leqslant r \leqslant \infty]$.

Доказательство. Поскольку множество $C^r_W(U, V)$ открыто в $C^r_W(U,\ \mathbb{R}^n)$, достаточно рассмотреть случай $V = \mathbb{R}^n$.

Пусть π: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$ — проекция. Если $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ и $x \in U$, то $f \pitchfork_x \mathbb{R}^a$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий: (i) $f(x) \notin \mathbb{R}^a$; (ii) $f(x) \in \mathbb{R}^a$ и x есть регулярная точка отображения πf: $U \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$.

Предположим, что $f \pitchfork_K \mathbb{R}^a$. Тогда каждая точка $y \in K$ обладает такой компактной окрестностью $K_y \subset K$, что либо для всех точек $x \in K_y$ выполнено (i), либо для всех точек $x \in K_y$ выполнено (ii). Пусть такое K_y выбрано. Легко видеть, что независимо от того, какая из двух названных возможностей реализуется, множество таких $f \in C^r_W(U, \mathbb{R}^n)$, что $f \pitchfork_{K_y} \mathbb{R}^a$, открыто. Так как K покрывается конечным числом окрестностей вида K_y, то и множество $\pitchfork^r_K(U, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^a)$ открыто.

Докажем теперь плотность. Поскольку C^∞-отображения плотны в $C^r_W(U, \mathbb{R}^n)$, достаточно доказать, что всякое C^∞-отображение g: $U \to \mathbb{R}^n$ принадлежит замыканию множества $\pitchfork^r_K(U, \mathbb{R}^n; E)$. Пусть $\{y_k\}$ — стремящаяся к 0 последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$, такая, что каждое $\pi(y_k)$ есть регулярное значение отображения πg: $U \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$ [1]). Рассмотрим отображение

$$g_k: U \to \mathbb{R}^n,$$
$$g_k(x) = g(x) - y_k.$$

Тогда $g_k \to g$ в $C^r_W(U, \mathbb{R}^n)$. Так как $g_k \pitchfork \mathbb{R}^a$, это показывает, что $\pitchfork^r_K(U, \mathbb{R}^n)$ плотно в $C^r_W(U, \mathbb{R}^n)$. ∎

Доказательство теоремы трансверсальности 2.1. Сначала мы предположим, что A есть замкнутое подмногообразие, и докажем теорему 2.1 (b). Мы начнем со случая $\partial N = \varnothing$.

Легко проверить, что при $1 \leqslant r \leqslant \infty$

$$\mathscr{X}: (L, U, V) \mapsto \pitchfork^r_L(U, V; A \cap V)$$

есть класс C^r-отображений на (M, N) (это уже говорилось). При наших предположениях, что $\partial N = \varnothing$ и A замкнуто, класс $\mathscr{X}$ является богатым. Для доказательства достаточно взять в качестве $\mathscr{U}$ любое открытое покрытие многообразия M, а в качестве $\mathscr{V}$ атлас многообразия N, составленный из карт, участвующих в определении дифференциальной структуры на подмногообразии (см. § 1.1), и применить лемму 2.3. Благодаря этому из теоремы 2.2 вытекает, что множество $\pitchfork^r_L(M, N; A)$ плотно и открыто по от-

[1]) Существование такой последовательности обеспечивается теоремой Морса—Сарда, и это единственное место в доказательстве теоремы трансверсальности, где теорема Морса—Сарда используется.— *Прим. перев.*

ношению к сильной топологии, а если L компактно, то плотно и открыто по отношению к слабой топологии.

Теперь предположим, что A по-прежнему замкнуто, но $\partial N \neq \varnothing$. Можно считать, что N — замкнутое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^q$. Тогда слабая и сильная топологии на $C^r(M, N)$ индуцируются слабой и сильной топологиями множества $C^r(M, \mathbb{R}^q)$. Мы уже знаем, что множество $\pitchfork^r(M, \mathbb{R}^q; A)$ сильно открыто, поскольку A замкнуто (в $\mathbb{R}^q$) и $\partial\mathbb{R}^q = \varnothing$; поэтому равенство

$$\pitchfork^r(M, N; A) = C^r(M, N) \cap \pitchfork^r(M, \mathbb{R}^q; A)$$

показывает, что множество $\pitchfork^r(M, N; A)$ сильно открыто в $C^r(M, N)$. Аналогично доказывается, что множество $\pitchfork^r_L(M, N; A)$ сильно открыто всегда и слабо открыто, если L компактно. Чтобы доказать плотность, положим $N_0 = N - \partial N$ и $A_0 = A - \partial N$, так что $\partial N_0 = \varnothing$ и A_0 есть замкнутое подмногообразие многообразия N_0. Тогда множество $\pitchfork^r_L(M, N_0; A_0)$ сильно плотно в $C^r(M, N_0)$ и слабо плотно, если L компактно [1]). Далее, $C^r(M, N_0)$ плотно в $C^r(M, N)$ как в слабом, так и в сильном смысле. Поэтому множество $\pitchfork^r_L(M, N_0; A_0)$ является в $\pitchfork^r_L(M, N; A)$ сильно плотным всегда и слабо плотным в случае компактного L. Этим теорема 2.1 (b) доказана в полной общности.

Чтобы доказать теорему 2.1 (a) для произвольного A, выберем покрывающую A счетную последовательность компактных координатных дисков A_k. Тогда

$$\pitchfork^r(M, N; A) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \pitchfork^r(M, N; A_k).$$

Так как A_k замкнуто, $\pitchfork^r(M, N; A_k)$ сильно плотно и открыто, откуда следует, что множество $\pitchfork^r(M, N; A)$ массивно по отношению к сильной топологии. Представим M в виде объединения $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ с компактными M_j. Тогда

$$\pitchfork^r(M, N; A_k) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \pitchfork^r_{M_j}(M, N; A_k).$$

Из этого видно, что каждое $\pitchfork^r(M, N; A_k)$ слабо массивно; поэтому и $\pitchfork^r(M, N; A)$ слабо массивно. Доказательство теоремы 2.1 закончено. ∎

---

[1]) Это добавление малосодержательно, поскольку сильная плотность сильнее слабой.— *Прим. перев.*

Трансверсальность часто применяется для приведения подмногообразий A, B многообразия N *в общее положение*; общность положения означает, что включение $B \to N$ трансверсально к A, т. е. что $A_x + B_x = N_x$ при любом $x \in A \cap B$. Заметим, что это условие симметрично. Если A и B находятся в общем положении, то $A \cap B$ есть подмногообразие каждого из многообразий A, B.

2.4. Теорема. *Пусть A, B — произвольные C^r-подмногообразия многообразия N с $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Всякая окрестность включения $B \to N$ в $C^r_S(B, N)$ содержит вложение, трансверсальное к A.*

Доказательство. Аппроксимационные результаты гл. 2 позволяют нам считать, что $r = \infty$. В этом же случае теорема следует из теоремы 2.1 и открытости множества вложений. ∎

Часто требуется, чтобы отображение $M \to N$ было трансверсальным не к одному подмногообразию, а к каждому из нескольких заданных подмногообразий $A_0, \ldots, A_q$. Если каждое A_i замкнуто, то множество таких отображений открыто и плотно: это следует из открытости и плотности множеств $\pitchfork^r(M, N; A_i)$. Если же A_i не замкнуты, это множество может оказаться не открытым. (См., однако, упражнения 15 и 8.)

2.5. Теорема. *Пусть $A_0, \ldots, A_q$ — произвольные C^r-подмногообразия многообразия N с $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Множество $\pitchfork^r(M, N; A_0, \ldots, A_q)$ C^r-отображений $M \to N$, трансверсальных к каждому из многообразий A_i, массивно в $C^r_S(M, N)$.*

Доказательство. Поскольку каждое из множеств $\pitchfork^r(M, N; A_k)$ массивно, их пересечение также массивно. ∎

Доказательство следующего, весьма полезного для дальнейшего, предложения доставляет типичный пример применения трансверсальности. Обозначим для целых чисел n, k с $n \geqslant k \geqslant 0$ через $V_{n,k}$ *многообразие Штифеля* линейных отображений $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ранга k. Это открытое подмногообразие векторного пространства $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Точку многообразия $V_{n,k}$ удобно представлять себе как *k-репер*, т. е. как упорядоченный набор из k линейно независимых векторов пространства $\mathbb{R}^n$: образ стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^k$.

2.6. Теорема. *Пусть M — многообразие размерности q и $K \subset M$ — замкнутое множество. Если $q \leqslant n - k$, то всякое отображение $K \to V_{n,k}$ продолжается до отображения $M \to V_{n,k}$.*

Доказательство. Исключая из рассмотрения тривиальные случаи, мы предполагаем, что $n > k > 0$. Покрывая M локально конечным семейством координатных дисков и производя последовательные продолжения отображений, можно свести теорему к случаю, когда $M = D^q$; рассмотрим этот случай. Продолжим заданное отображение $f\colon K \to V_{n,k}$ до непрерывного отображения $g\colon D^q \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ и положим $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) - V_{n,k} = A$. В силу компактности шара D^q, множество $g^{-1}(A)$ замкнуто, и ясно, что это множество не пересекается с K. Относительная аппроксимационная теорема (теорема 2.2.5) позволяет нам считать, что отображение g принадлежит классу C^∞ на открытом множестве $M_0 \subset D^q$, содержащем $g^{-1}(A)$ и таком, что K не пересекается с замыканием множества M_0.

Множество $A \subset L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ является объединением множеств

$$L(k, n; \rho) = \{T \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{rank} T = \rho\}$$

: $\rho = 0, \ldots, k-1$. Каждое из этих множеств является подмногообразием пространства $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Действительно, фиксируем $T \in L(k, n; \rho)$. Пусть $i\colon \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{R}^k$ — линейное вложение, трансверсальное ядру отображения T, и пусть $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\rho$ — линейный эпиморфизм, ядро которого трансверсально к образу T. Для каждого $S \in L(k, n; \rho)$ из достаточно малой окрестности U отображения T линейное отображение

$$pSi\colon \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{R}^\rho$$

является изоморфизмом. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon U \to G_{k,k-\rho} \times L(\mathbb{R}^\rho, \mathbb{R}^\rho) \times G_{n,\rho},$$
$$S \longmapsto (\operatorname{Ker} S,\ pSi,\ \operatorname{Im} S);$$

здесь $G_{m,l}$ есть многообразие Грассмана l-подпространств пространства $\mathbb{R}^m$; его размерность равна $l(m-l)$. Очевидно, φ гомеоморфно отображает U на открытое множество. Всевозможные отображения этого типа составляют для $L(k, n; \rho)$ атлас. Поскольку обращение отображения φ есть C^ω-отображение в $L(k, n; \rho)$, множество $L(k, n; \rho)$ является C^ω-подмногообразием пространства $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ размерности

$$d_\rho = (k-\rho)\rho + \rho^2 + \rho(n-\rho)$$
$$= nk - (n-\rho)(k-\rho)$$

и коразмерности $(n-\rho)(k-\rho)$. Заметим, что d_ρ возрастает с ростом ρ.

Положим $A_\rho = L(k, n; \rho)$. Тогда теорема 2.5 позволяет считать, что g трансверсально к каждому A_ρ. Но

$$d_{k-1} = (k-1)(n+1).$$

Поэтому при $\rho \leqslant k-1$

$$\dim L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) - d_\rho \geqslant kn - (k-1)(n+1) = n-k+1.$$

Следовательно, если $\dim M < n-k+1$, то образ отображения g не задевает $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}$; таким образом, $g(M) \subset V_{n,k}$. ▮

Часто приходится иметь дело не со всеми C^r-отображениями $M \to N$, а только с семейством отображений, параметризованным другим многообразием V. Иначе говоря, рассматривается отображение $F\colon V \to C^r(M, N)$ и подмногообразие A многообразия N; требуется найти такое $v \in V$, что отображение

$$F(v) = F_v\colon M \to N$$

трансверсально к A. Конечно, на F должны быть наложены ограничения. Следующую теорему мы называем *параметрической теоремой трансверсальности*. Для простоты мы формулируем ее только в случае многообразий без края.

2.7. Теорема. *Пусть V, M, N — многообразия класса C^r без края и A — некоторое C^r-подмногообразие многообразия N. Предположим, что отображение $F\colon V \to C^r(M, N)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(a) *отображение $F^{\mathrm{ev}}\colon V \times M \to N$, определяемое формулой $(v, x) \longmapsto F_v(x)$ («эвалюационное отображение») принадлежит классу C^r;*

(b) *отображение F^{ev} трансверсально к A;*

(c) $r > \max(0, \dim N + \dim A - \dim M)$.

Тогда множество

$$\pitchfork(F; A) = \{v \in V \mid F_v \pitchfork A\}$$

массивно и, следовательно, всюду плотно. Если A замкнуто в N и F непрерывно по отношению к сильной топологии в $C^r(M, N)$, то множество $\pitchfork(F; A)$ также и открыто.

Доказательство. Последнее утверждение следует из открытости множества $\pitchfork^r(M, N; A)$. Для доказательства остающейся части теоремы положим $W = (F^{\mathrm{ev}})^{-1}(A) \subset V \times M$. В силу (a) и (b), W есть C^r-подмногообразие произведения $V \times M$. Пусть $\pi\colon V \times M \to V$ — проекция. Легко проверить, что $F_v \pitchfork A$ в том и только в том случае, если $v \in V$ есть регулярное значение отображения $\pi \mid W\colon W \to V$. Это отображение принадлежит классу C^r, а размерность многообразия W равна $\dim V + \dim M - \dim N + \dim A$. Таким образом, наше утверждение вытекает из теоремы Морса—Сарда. ▮

Во многих случаях и параметрической трансверсальности оказывается недостаточно: вместо отображения многообразия в пространство отображений приходится рассматривать отображения, определенные на другом пространстве отображений. Область определения такого отображения часто оказывается бесконечномерным многообразием; имеется обобщение теоремы 2.7 на этот случай, принадлежащее Абрахаму [1].

Подобные трудности возникают, в частности, при рассмотрении отображения

$$j^r\colon C^s(M, N) \to C^{s-r}(M, J^r(M, N)).$$

Здесь $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$. Задача заключается в том, чтобы аппроксимировать C^s-отображение $g\colon M \to N$ C^s-отображениями $h\colon M \to N$, у которых струйное расширение $j^r h\colon M \to J^r(M, N)$ трансверсально к заданному подмногообразию A многообразия $J^r(M, N)$. Обозначим множество таких отображений h через $\pitchfork^s(M, N; j^r, A)$.

2.8. Струйная теорема трансверсальности. *Пусть M, N — многообразия (класса C^∞) без края, и пусть A есть C^∞-подмногообразие многообразия $J^r(M, N)$. Предположим, что $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$. Тогда множество $\pitchfork^s(M, N; j^r, A)$ массивно и, следовательно, плотно в $C^s_S(M, N)$ и открыто, если A замкнуто.*

Доказательство. Предположим, что A замкнуто. Требуемая открытость следует из открытости множества $\pitchfork^{s-r}(M, J^r(M, N); A)$. Чтобы доказать плотность, возьмем произвольные открытые множества $U \subset M$, $V \subset N$ и замкнутое в M множество $L \subset U$. Положим, далее,

$$\mathscr{X}_L(U, V) = \{f \in C^s(U, V) \mid j^r f \pitchfork_L A\}.$$

Легко проверить, что $\mathscr{X}$ есть класс C^s-отображений на (M, N). В силу глобализационной теоремы 2.2, достаточно показать, что класс $\mathscr{X}$ богат. В качестве покрытий $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$, входящих в определение богатства, возьмем открытые покрытия координатными областями. Тогда достаточно показать, что если $U \subset \mathbb{R}^m$ есть открытое множество и A есть замкнутое подмногообразие многообразия $J^r(U, \mathbb{R}^n)$, то множество $\pitchfork^s(U, \mathbb{R}^n; j^r, A)$ открыто и плотно в $C^s_W(U, \mathbb{R}^n)$. Более того, достаточно доказать это для конечного $s > r$. Фиксируем $f \in C^s(U, \mathbb{R}^n)$. Открытость очевидна. Замысел доказательства плотности состоит в том, чтобы подобрать C^∞-многообразие X и отображение $\alpha\colon X \to C^s_W(U, \mathbb{R}^n)$ с $f \in \alpha(x)$ и затем применить параметрическую трансверсальность к композиции

$$F\colon X \xrightarrow{\alpha} C^s(U, \mathbb{R}^n) \xrightarrow{j^r} C^{s-r}(U, J^r(U, \mathbb{R}^n)).$$

Для этого нужно, чтобы отображение

$$F^{\mathrm{ev}}\colon X \times U \to J^r(U, \mathbb{R}^n)$$

было трансверсально к A и достаточно гладко. В действительности F^{ev} будет C^∞-субмерсией.

Положим $X = J_0^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Всякий элемент множества X является s-струей в 0 единственного отображения $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, координатные функции $g_1, \ldots, g_n$ которого являются многочленами степени $\leqslant s$ от координат пространства $\mathbb{R}^m$. Мы отождествляем элементы множества X с такими отображениями g.

Рассмотрим отображения $\alpha\colon X \to C_W^s(U, \mathbb{R}^n)$, $g \mapsto f + g|U$ и

$$F = j^r \circ \alpha\colon X \to C^{s-r}(U, J^r(U, \mathbb{R}^n)).$$

Очевидно, $F(0) = f$. Чтобы вычислить F^{ev}, произведем естественное отождествление

$$J^r(U, \mathbb{R}^n) = J_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U.$$

Тогда отображение

$$F^{\mathrm{ev}}\colon J_0^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U \to J_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U$$

будет задаваться формулой

$$(j_0^s(g), x) \mapsto (j_0^r(g+f), x).$$

Отображение

$$\beta\colon J_0^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to J_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$
$$j_0^s(g) \mapsto j_0^r(g+f)$$

аффинно, вследствие чего F принадлежит классу C^∞. Более того, дифференциал отображения β в любой точке есть «забывающее» линейное отображение

$$J_0^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to J_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$
$$j_0^s(g) \mapsto j_0^r(g),$$

которое, очевидно, эпиморфно. Следовательно, $F^{\mathrm{ev}} \pitchfork A$; согласно теореме 2.7, из этого следует, что множество

$$\{x \in X \mid j^r(\alpha(x)) \pitchfork A\}$$

плотно в X. Так как отображение

$$\alpha\colon X \to C_W^s(U, \mathbb{R}^n)$$

непрерывно, f принадлежит замыканию множества

$$\{h \in C^s_W(U, \mathbb{R}^n) \mid j^r h \pitchfork A\}.$$

Этим доказано, что класс $\mathscr{R}$ богат. Таким образом, в случае замкнутого A теорема 2.8 следует из теоремы 2.2. Если же A не замкнуто, мы представим его в виде объединения $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где каждое A_k есть компактный координатный диск в A. Тогда каждое из множеств $\pitchfork^s(M, N; j^r, A_k)$ будет плотно и открыто в $C^s_S(M, N)$. В силу теоремы Бэра, их пересечение, которое есть не что иное, как $\pitchfork^s(M, N; j^r, A)$, плотно. ∎

Как и обыкновенная трансверсальность, струйная трансверсальность распространяется на семейства подмногообразий. Мы оставляем читателю доказательство следующего факта.

2.9. Теорема. *Пусть $A_0, \ldots, A_q$ — подмногообразия (класса C^∞) многообразия $J^r(M, N)$. Если $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$, то множество*

$$\{f \in C^s(M, N) \mid j^r f \pitchfork A_k,\ k = 0, \ldots, q\}$$

массивно в $C^s_S(M, N)$.

В качестве применения дадим новое доказательство плотности множества погружений в $C^2_S(M, N)$. Пусть $A_k \subset J^1(M, N)$ — множество 1-струй ранга k. Пусть $m = \dim M$, $n = \dim N$. Тогда $A_0, \ldots, A_{m-1}$ есть семейство подмногообразий (класса C^∞). Отображение $f\colon M \to N$ есть погружение в том и только том случае, если образ отображения $j^1 f$ не задевает $A_0 \cup \ldots \cup A_{m-1}$. Отображения $f \in C^2(M, N)$, у которых $j^1 f$ трансверсально к $A_0, \ldots, A_{m-1}$, составляют множество, плотное в $C^2_S(M, N)$. Если $\dim A_i + \dim M < \dim J^1(M, N)$ при $i = 0, \ldots, m-1$, то из этой трансверсальности следует, что f есть погружение. Повторяя выкладку из доказательства теоремы 2.6, мы находим, что (при $m \leqslant n$)

$$\dim A_i \leqslant \dim A_{m-1} = 2m + mn - 1,$$

$$\dim J^1(M, N) = mn + m + n.$$

Плотность множества погружений обеспечивается, таким образом, неравенством

$$(2m + mn - 1) + m < mn + m + n,$$

которое эквивалентно найденному ранее условию $n \geqslant 2m$.

Это доказательство геометрически не очень удовлетворительно: оно не содержит никакого указания, как строить погружения. Тем не менее оно иллюстрирует могущество трансверсальности: существование и даже плотность погружений доказываются одним лишь подсчетом размерностей!

УПРАЖНЕНИЯ

1. Говорят, что погружение $f: M \to N$ *имеет чистые двойные точки*, если для любых двух различных точек $x, y \in M$ с $f(x) = f(y)$ найдутся непересекающиеся окрестности U, V, такие, что $f|U$ и $f|V$ — вложения и подмногообразия $f(U)$, $f(V)$ многообразия N находятся в общем положении (в смысле определения из § 3.2). Множество погружений, имеющих чистые двойные точки, плотно и открыто в $\mathrm{Imm}_S^r(M, N)$ $[1 \leqslant r \leqslant \infty]$.

2. Говорят, что погружение $f: M \to N$ является *погружением общего положения*, если для любого $k \geqslant 2$ и любых попарно различных точек $x_1, \ldots, x_k \in M$ с $f(x_1) = \ldots = f(x_k) = y$ пространство N_y порождается своими подпространствами $Tf(M_{x_k})$ и

$$Tf(M_{x_1}) \cap \ldots \cap Tf(M_{x_{k-1}}).$$

Множество собственных погружений общего положения плотно и открыто в $\mathrm{Imm}_S^r(M, N)$ $[1 \leqslant r \leqslant \infty]$.

3. Если отображение $f: M \to N$ трансверсально к подмногообразиям $A_0, \ldots, A_q$, составляющим комплекс, то и $f^{-1}(A_0), \ldots, f^{-1}(A_q)$ есть комплекс подмногообразий (определение комплекса подмногообразий см. в упр. 15).

4. Существует открытое плотное множество $\mathscr{S} \subset C_S^\infty(M, N)$, такое, что если $f \in \mathscr{S}$, то $(m = \dim M,\ n = \dim N)$:

(a) для каждого $\rho = 0, \ldots, \min(m, n)$ множество

$$R(f, \rho) = \{x \in M \mid \operatorname{rank} T_x f = \rho\}$$

есть подмногообразие многообразия M;

(b) если $(m - \rho)(n - \rho) > m$, то $R(f, \rho) = \varnothing$;

(c) если $(m - \rho)(n - \rho) \leqslant m$, то

$$\operatorname{codim} R(f, \rho) = (m - \rho)(n - \rho);$$

(d) подмногообразия

$$R(f, 0), \ \ldots, \ R(f, \min(m, n))$$

составляют комплекс подмногообразий (см. упр. 15).

5. Если $\dim M = m$ и $\dim N = 2m - 1$, то плотное множество в $C_S^1(M, N)$ составляют отображения $f: M \to N$, всюду имеющие ранг $> m - 2$ и такие, что множество точек, в которых f имеет ранг $m - 1$, есть замкнутое 0-мерное подмногообразие многообразия M (возможно, пустое).

*6. Говорят, что отображение $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет *сборку* в точке $x \in \mathbb{R}^2$, если (i) Df_x имеет ранг 1; (ii) отображение $j^1 f$ трансверсально в точке x к множеству 1-струй ранга 1; (iii) пространство $\operatorname{Ker} Df_x$ касается многообразия $R(f, 1)$ (см. упр. 4).

(a) $(0, 0)$ есть сборка отображения $(x, y) \mapsto (x^3 - xy, y)$.

(b) Если $U \subset \mathbb{R}^2$ есть произвольная окрестность точки $(0, 0)$, то существует слабая C^2-окрестность $\mathscr{N}$ указанного отображения, такая, что всякое отображение из $\mathscr{N}$ имеет сборку в U.

*7. Говорят, что $x \in M$ есть *k-кратная точка* отображения $f: M \to N$, если существует k различных точек $x_1, \ldots, x_k$ с $x_i = x$ и $f(x_1) = \ldots = f(x_k)$. Пусть M и N — такие многообразия, что

$$\frac{k+1}{k} < \frac{\dim N}{\dim M} < \frac{k}{k-1} \quad (k \geqslant 2).$$

(a) При $1 \leqslant r \leqslant \infty$ в $C_S^r(M, N)$ существует плотное открытое множество, составленное из отображений, не имеющих $(k+1)$-кратных точек и таких, что множество k-кратных точек составляет замкнутое C^r-подмногообразие размерности $km - (k-1)n$ (возможно, пустое).

(b) В $C_S^r(M, N)$ существует непустое открытое множество отображений, каждое из которых имеет непустое множество k-кратных точек.

8. Теоремы трансверсальности 2.5, 2.8, 2.9, скомбинированные с упр. 15, принимают следующую форму для слабой топологии.

(a) В теореме 2.5 множество отображений $M \to N$, трансверсальных к $A_0, \ldots, A_q$, массивно в $C_W^r(M, N)$; это множество открыто, если объединение $\bigcup A_i$ компактно и $\{A_i\}$ есть комплекс подмногообразий.

(b) В теореме 2.8 множество $\pitchfork^s(M, N; j^r, A)$ массивно в $C_W^s(M, N)$ и открыто, если A компактно.

(c) В теореме 2.9 множество отображений, r-струи которых трансверсальны к $A_0, \ldots, A_q$, массивно в $C_W^s(M, N)$ и открыто, если объединение $\bigcup A_i$ компактно и $\{A_i\}$ есть комплекс подмногообразий.

9. Будем считать, что многообразие Грассмана $G_{s, k}$ вложено в $G_{s+1, k+1}$, отождествляя k-плоскость $P \subset \mathbb{R}^s$ с $P \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{s+1}$. Если $\dim M \leqslant k$, то всякое отображение $f: M \to G_{s+1, k+1}$ гомотопно некоторому отображению $g: M \to G_{s, k}$. Если $\dim M < k$, то гомотопический класс отображения g однозначно определяется гомотопическим классом отображения f.

10. Пусть $F: V \to C^r(M, N)$ — такое отображение, что $F^{\text{ev}}: V \times M \to N$ принадлежит классу C^r (см. параметрическую теорему трансверсальности 2.7). Тогда отображение F непрерывно в сильной топологии, если V компактно, или, точнее, в том и только том случае, если F постоянно вне компактного подмножества многообразия V.

11. В струйной теореме трансверсальности предположение, что A есть C^∞-подмногообразие многообразия $J^r(M, N)$, может быть ослаблено до следующего предположения: A есть C^k-подмногообразие для некоторого $k < \infty$, зависящего от r, s, $\dim M$ и $\dim N$. Вычислите k.

***12. Верны ли параметрическая и струйная теоремы трансверсальности 2.7 и 2.8 в ситуации, когда многообразиям V, M, N и A разрешается иметь край? (Доказательство теоремы 2.8 использует теорему 2.7. В теореме 2.7 возникают две трудности: во-первых, если V и M имеют край, то $V \times M$ не есть многообразие; вторая, более неприятная трудность, заключается в том, что если N и A имеют край, то $(F^{\text{ev}})^{-1}(A)$ может не быть подмногообразием.)

13. Пусть $p: V \to M$ есть C^1-субмерсия и $f: M \to V$ есть C^r-сечение субмерсии p (т. е. $pf = 1_M$) с $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Пусть, далее, A есть C^r-подмногообразие многообразия V. Тогда всякая окрестность отображения f в $C_S^r(M, V)$ содержит C^∞-сечение, трансверсальное к A. (См. упр. 3 к § 2.2.)

14. Пусть $g: A \to N$ — произвольное C^1-отображение. Говорят, что отображение $f: M \to N$ *трансверсально к* g, и пишут $f \pitchfork g$, если всякий раз, когда $f(x) = g(y) = z$, образы отображений $T_x f$ и $T_y g$ порождают N_z.

(а) $f \pitchfork g$ в том и только том случае, если отображение $f \times g$: $M \times A \to N \times N$ трансверсально к диагонали.

***(b) Верно ли, что (как это кажется правдоподобным) множество $\{f \in C^\infty(M, N) \mid f \pitchfork g\}$ массивно в $C^\infty_S(M, N)$ и открыто в случае собственного g?

15. Говорят, что подмногообразия $A_0, \ldots, A_q$ многообразия N составляют *комплекс подмногообразий*, если (i) A_0 замкнуто и

$$\overline{A}_{i+1} - A_{i+1} \subset A_0 \cup \ldots \cup A_i;$$

(ii) $\dim A_{i-1} \leqslant \dim A_i$; (iii) для любой последовательности $\{x_n\}$ точек многообразия A_j, сходящейся к $y \in A_i$ с $i \leqslant j$, найдется последовательность $\{E_n \subset T_{x_n}A_j\}$ плоскостей размерности $\dim A_i$, сходящаяся к T_yA_i.

(а) Множество C^r-отображений $M \to N$, трансверсальных ко всем A_i, открыто и плотно в сильной топологии.

*(b) Подмногообразия A_ρ из доказательства теоремы 2.6 составляют комплекс подмногообразий.

Глава 4

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ТРУБЧАТЫЕ ОКРЕСТНОСТИ

Можно считать совершенно установленным парадоксальный факт, что крайние абстракции служат вернейшим средством, позволяющим контролировать наши представления о конкретных фактах.

А. Н. Уайтхед, Наука и современный мир, 1925

Комитет, учрежденный в Риме для унификации векторных обозначений, как можно было предвидеть, не достиг ни малейшего успеха.

Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, 1908

Хотя две замкнутые поверхности, скажем рода 0, расположенные в многообразии четырех измерений, всегда эквивалентны, их *окружения*, как мы увидим, могут оказаться различными.

Хегор, *Диссертация*, 1898

Хотя понятие касательного расслоения было введено в первой главе, мы им до сих пор почти не пользовались. В настоящей главе мы формализуем некоторые черты касательного расслоения и придем к определению смешанного тополого-алгебраического объекта, называемого векторным расслоением. Большинство нетривиальных инвариантов многообразия тесно связано с касательным расслоением; их изучение требует общей теории векторных расслоений.

Векторное расслоение можно представлять себе как семейство $\{E_x\}_{x \in B}$ отдельных векторных пространств, параметризованных точками пространства B. Объединение этих векторных пространств представляет собой топологическое пространство E, и отображение $p : E \to B$, определяемое формулой $p(E_x) = x$, непрерывно. Более того, p *локально тривиально* в том смысле, что локально (по отношению к B) E выглядит как произведение на $\mathbb{R}^n$: существуют открытые множества U, покрывающие B, и гомеоморфизмы $p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, отображающие каждый слой E_x линейно на $x \times \mathbb{R}^n$. *Морфизм* одного векторного расслоения в другое — это отображение, линейно отображающее слои в слои.

Векторное расслоение аналогично многообразию в том отношении, что оба они составлены из элементарных объектов, склеенных при помощи отображений специального вида. В случае многообразий элементарные объекты — открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, а склеивающие отображения — диффеоморфизмы. В случае векторных расслоений элементарные объекты — «тривиальные» расслоения $U \times \mathbb{R}^n$, а склеивающие отображения — морфизмы $U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n$ вида $(x, y) \mapsto (x, g(x) y)$, где g — отображение $U \to GL(n)$.

В § 4.1 даются основные определения и доказывается теорема о накрывающей гомотопии. Этот важный результат устанавливает связь между векторными расслоениями и гомотопиями.

Как для многообразий, так и для векторных расслоений ключевую роль играют линейные отображения. Но если в теории многообразий линейные отображения появляются как дифференциалы, т. е. довольно косвенным образом, то в теорию векторных расслоений они входят явным образом. Благодаря этому категория векторных расслоений оказывается намного более гибкой, чем категория многообразий; следствием является относительная легкость, с которой они поддаются изучению. Для векторных расслоений проходят многие естественные конструкции, невозможные для многообразий, такие, как прямое суммирование, факторизация и индуцирование. Эти конструкции обсуждаются в § 4.2.

В § 4.3 мы докажем для векторных расслоений важную классификационную теорему. Эта теорема говорит, что для заданных целых чисел k, n с $n \geqslant 0$ существует и может быть явно указано k-мерное векторное расслоение $\xi \to G$, которое *универсально* в следующем смысле: для любого k-мерного векторного расслоения $\eta \to M$, где M есть многообразие размерности $\leqslant n$, существует отображение f: $M \to G$, такое, что η изоморфно $f^*\xi$ (расслоение, индуцированное ξ посредством f), и при этом такое f единственно с точностью до гомотопии. Это означает, что классы изоморфных k-мерных векторных расслоений над M находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений $M \to G$. Указанное соответствие превращает вопросы, касающиеся расслоений над M, в вопросы о гомотопических классах отображений $M \to G$.

В § 4.4 вводится важное понятие ориентации векторных пространств, векторных расслоений и многообразий. Ориентируемость или неориентируемость многообразий представляет собой их важный инвариант. В качестве применения мы получим некоторые теоремы невложимости.

В § 4.5 и 4.6 мы находим новое связующее звено между векторными расслоениями и топологией многообразий: трубчатую окрестность. Если M — правильное подмногообразие многообразия N, то M обладает в N окрестностью, которая выглядит как нормальное векторное расслоение многообразия M в N; более того, такая окрестность в известном смысле единственна. Таким образом, изучение окрестностей, которые данное многообразие M может иметь в многообразиях бо́льших размерностей, сводится к классификации векторных расслоений над M. Например, вопрос, может ли данное вложение $M \to N$ быть аппроксимировано вложениями $M \to N - M$, эквивалентен проблеме существования не обращающегося в нуль сечения у нормального расслоения многообразия M в N.

Наконец, в § 4.7 техника трубчатых окрестностей применяется к доказательству того факта, что всякое компактное многообразие без края обладает вещественно аналитической структурой, согласованной с его дифференциальной структурой.

1. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Пусть $p\colon E \to B$ — непрерывное отображение. *Картой векторного расслоения* размерности n на (p, E, B) с областью определения U, где U — открытое подмножество пространства B, называется гомеоморфизм $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

коммутативна; здесь $\pi_1(x, y) = x$. Определим для $x \in U$ гомеоморфизм φ_x как композицию

$$\varphi_x\colon p^{-1}(x) \xrightarrow{\varphi} x \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, для любого $y \in p^{-1}(x)$

$$\varphi(y) = (x, \varphi_x(y)).$$

Атлас Φ *векторного расслоения* размерности n на (p, E, B) есть по определению семейство карт векторного расслоения размерности n на (p, E, B) с областями определения, покрывающими B, такое, что для любых $(\varphi, U), (\psi, V) \in \Phi$ и $x \in U \cap V$ гомеоморфизм

$$\psi_x\varphi_x^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

линеен. При этом отображение

$$U \cap V \to GL(n),$$
$$x \mapsto \psi_x \varphi_x^{-1}$$

должно быть непрерывным; оно называется *функцией перехода* между парой карт (φ, U), (ψ, V). Таким образом, с атласом $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ ассоциируется семейство $\{g_{ij}\}$ функций перехода

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \to GL(n).$$

Эти функции удовлетворяют соотношениям

$$g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x) \quad (x \in U_i \cap U_j \cap U_k),$$
$$g_{ii}(x) = 1 \in GL(n).$$

Семейство $\{g_{ij}\}$ называют также *коциклом* атласа Φ векторного расслоения. Если Φ есть максимальный атлас векторного расслоения, то Φ называется также *структурой векторного расслоения* на (p, E, B). В этой ситуации мы называем $\xi = (p, E, B, \Phi)$ *векторным расслоением*, имеющим *размерность* (*слоя*) n, *проекцию* p, *тотальное пространство* E и *базу* B. Структуру Φ часто не указывают явно. Обозначения E и ξ могут употребляться одно вместо другого. Наконец, иногда бывает удобно полагать $E = E\xi$, $B = B\xi$ и т. д.

Всякий податлас структуры Φ называется *атласом расслоения* ξ.

Слой над точкой $x \in B$ есть по определению пространство $p^{-1}(x) = \xi_x = E_x$. Мы наделяем ξ_x структурой векторного пространства, по отношению к которой каждое из отображений $\varphi_x: \xi_x \to \mathbb{R}^n$ является изоморфизмом; очевидно, такая структура существует и единственна. Таким образом, E есть «пучок» векторных пространств.

Если A — произвольное подмножество множества B, то прообраз $p^{-1}(A)$ обозначается через ξ_A, $\xi | A$, E_A или $E | A$. *Сужение* расслоения ξ на A есть по определению векторное расслоение

$$\xi | A = (p | E_A, E_A, A, \Phi_A),$$

где Φ_A состоит из всех карт вида

$$\varphi | p^{-1}(A \cap U): E | A \cap U \to (A \cap U) \times \mathbb{R}^n$$

с $(\varphi, U) \in \Phi$.

Нулевым сечением расслоения ξ называют отображение $Z: B \to$, относящее точке x нуль пространства ξ_x. Иногда нулевым сечением называют подпространство $Z(B)$ пространства E. Очень часто оказывается удобным отождествить B с $Z(B)$ посредством Z.

Пусть $\xi_i = (p_i, E_i, B_i, \Phi_i)$, где $i = 0, 1$, — векторные расслоения. *Послойное отображение* $F: \xi_0 \to \xi_1$ — это отображение

$F\colon E_0 \to E_1$, накрывающее некоторое отображение $f\colon B_0 \to B_1$ в том смысле, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p_0"'] & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\ B_0 \arrow[r, "f"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Таким образом, если $x \in B_0$ и $f(x) = y$, то F отображает слой над точкой x в слой над точкой y, так что возникает отображение $F_x\colon \xi_{0x} \to \xi_{1y}$.

Если каждое из отображений F_x линейно, мы называем F *морфизмом* одного векторного расслоения в другое. Если F есть морфизм и каждое F_x мономорфно, то F также называют *мономорфизмом*, а если каждое F_x эпиморфно, то F называют *эпиморфизмом*; наконец, если каждое F_x есть изоморфизм, то F называется *биморфизмом* или *отображением* одного векторного расслоения в другое. Если F есть биморфизм, накрывающий гомеоморфизм $f\colon B_0 \to B_1$, то F называется *эквивалентностью*. Если же $B_0 = B_1 = B$ и $f = 1_B$, то F называется *изоморфизмом*, и мы можем написать $\xi_0 \cong \xi_1$.

Тривиальным n-мерным векторным расслоением над B называется расслоение

$$\varepsilon_B^n = (p,\ B \times \mathbb{R}^n,\ B,\ \Phi),$$

где $p\colon B \times \mathbb{R}^n \to B$ — проекция на сомножитель и Φ — единственный максимальный атлас векторного расслоения, содержащий тождественное отображение произведения $B \times \mathbb{R}^n$. Векторное расслоение ξ называется тривиальным и в случае, если оно изоморфно ε_B^n. Такой изоморфизм называется *тривиализацией* расслоения ξ.

Зафиксируем теперь класс гладкости C^r с $1 \leqslant r \leqslant \omega$. Предыдущие определения сохраняют смысл, если потребовать, чтобы все участвующие в них пространства были C^r-многообразиями, а все отображения — отображениями класса C^r. Получится определение векторных расслоений, морфизмов и отображений класса C^r. Под векторным расслоением класса C^0 мы будем иногда понимать векторное расслоение в смысле исходного определения;

подобным же образом понимаются C^0-морфизмы и т. д. Для C^r-изоморфизма мы будем употреблять символ $\cong_r$.

Фундаментальным примером векторного расслоения класса C^r служит касательное расслоение $p\colon TM \to M$ C^{r+1}-многообразия M. Именно, для каждой карты $\psi\colon U \to \mathbb{R}^n$ многообразия мы определяем карту векторного расслоения

$$p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n,$$

отображая касательный вектор $X \in T_xM$ в $(x, D\varphi_x(X))$. Если $f\colon M \to N$ есть C^{r+1}-отображение, то $Tf\colon TM \to TN$ есть морфизм класса C^r между векторными расслоениями. Заметим, что требования, чтобы морфизм Tf был мономорфизмом, эпиморфизмом или эквивалентностью, соответствуют требованиям, чтобы f было погружением, субмерсией или диффеоморфизмом.

Если расслоение TM тривиально, то многообразие M называется *параллелизуемым*.

Очевидно, векторные расслоения и морфизмы класса C^r составляют категорию. Изоморфизмы в этой категории — это эквивалентности векторных расслоений. Каждому C^r-многообразию M отвечает подкатегория, составленная из расслоений над M и морфизмов, накрывающих 1_M (при $r = 0$ в качестве M можно взять любое пространство). Изоморфизм в этой подкатегории есть изоморфизм векторных расслоений. Касательный функтор T является ковариантным функтором из категории C^{r+1}-многообразий в категорию векторных расслоений класса C^r.

Следующая лемма представляет собой первый шаг в доказательстве теоремы о накрывающей гомотопии.

1.1. Лемма. *Пусть $\xi = (p,\ E,\ B \times I)$ — векторное расслоение класса C^r с $0 \leqslant r \leqslant \infty$. Тогда у каждой точки $b \in B$ имеется такая окрестность $V \subset B$, что сужение $\xi \,|\, V \times I$ тривиально.*

Доказательство. В силу компактности I и локальной тривиальности ξ мы можем найти окрестности $V_i \subset B$ точки b и разбиение интервала I на интервалы $I_i = [t_{i-1},\ t_i]$ с $0 = t_0 < \ldots < t_m = 1$, такие, что при $i = 1, \ldots, m$ расслоение ξ тривиально над окрестностью произведения $V_i \times [t_{i-1},\ t_i]$. Положим $V = \bigcap V_i$; тогда интервал I_i обладает такой окрестностью $U_i \subset I$, что сужение $\xi \,|\, V \times U_i$ тривиально.

Мы применяем индукцию по m. Если $m = 1$, доказывать нечего. Поэтому нам достаточно показать, что если $m > 1$, то существует такая окрестность $J \subset I$ интервала $[0,\ t_2]$, что сужение $\xi \,|\, V \times J$ тривиально: $(m - 1)$-кратное применение этого предложения доказывает тривиальность сужения $\xi \,|\, V \times I$. Итак, мы можем считать, что $m = 2$.

Пусть $U_1 = [0, b]$, $U_2 = [a, 1]$, $0 < a < b < 1$. Фиксируем C^r-тривиализации

$$\varphi_i \colon \xi|(V \times U_i) \to (V \times U_i) \times \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

и рассмотрим C^r-отображение

$$g \colon V \times [a, b] \to GL(n),$$
$$g(x) = \varphi_{1x} \varphi_{2x}^{-1}, \quad x \in V \times [a, b].$$

Далее мы построим C^r-отображение

$$h \colon V \times [a, 1] \to GL(n),$$

такое, что $h = g$ на $V \times [a, c]$ при некотором $c \in (a, b)$. Для этого мы возьмем произвольное C^r-отображение $\lambda \colon [a, 1] \to [a, b]$, тождественное на окрестности $[a, c]$ точки a, положим $\mu = 1_V \times \lambda \colon V \times [a, 1] \to V \times [a, b]$ и определим h как композицию $g\mu$.

Определим, наконец, для $x \in V \times I$ отображение

$$\psi_x \colon \xi_x \to \mathbb{R}^n$$

формулой

$$\psi_x = \begin{cases} \varphi_{1x} & \text{при } x \in V \times [0, c], \\ h(x)\,\varphi_{2x}^{-1} \ (\text{умножение в } GL(n)) & \text{при } x \in V \times [a, 1]. \end{cases}$$

Ясно, что при $x \in [a, c]$ эти определения согласованы. Таким образом, отображения ψ_x составляют C^r-тривиализацию сужения $\xi | V \times I$. ∎

1.2. Следствие. *Всякое векторное расслоение класса C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ над интервалом C^r-тривиально.*

Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии использует также следующий C^r-вариант свойства гомотопического продолжения.

1.3. Лемма. *Пусть $0 \leqslant r \leqslant \infty$, и пусть N, P — топологические пространства, являющиеся при $r > 0$ C^r-многообразиями. При $r = 0$ мы предполагаем, что N есть нормальное пространство. Пусть $Z \subset N$ — замкнутое множество и $V \subset U \subset N$ — открытые множества с $Z \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Предположим, что задана коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} N \times 0 \arrow[d, "f"'] & U \times 0 \arrow[l, phantom, "\supset"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & U \times I \arrow[dll, "g"] \\ P & & \end{tikzcd}$$

в которой f, g — отображения класса C^r. Тогда существует такое C^r-отображение h: $N \times I \to P$, что $h|N \times 0 = f$ и $h = g$ на $V \times I$.

Доказательство. Пусть λ: $N \to [0, 1]$ — произвольное C^r-отображение с носителем, содержащимся в U, и с $\lambda(V) = 1$. Очевидно, отображение

$$h\colon N \times I \to P,$$
$$h(x, t) = \begin{cases} g(x, \lambda(x) t) & \text{при } x \in U, \\ f(x) & \text{при } x \in N - U \end{cases}$$

принадлежит классу C^r и обладает требуемыми свойствами. ∎

Следующее извлечение из теоремы 1.3 называется *теоремой о продолжении гомотопии.*

1.4. Теорема. *Пусть Z — замкнутое подмножество нормального пространства N. Пусть, далее, f: $N \to P$ — непрерывное отображение и g: $Z \times I \to P$ — гомотопия сужения $f|Z$. Если для некоторой окрестности $U \subset N$ множества Z гомотопия g продолжается до гомотопии сужения $f|U$, то g продолжается до гомотопии $N \times I \to P$ отображения f. В частности, такое продолжение существует, если Z есть ретракт некоторого открытого подмножества пространства N.*

Мы переходим теперь к теореме, устанавливающей фундаментальную связь между векторными расслоениями и гомотопиями. По причинам, которые объясняются ниже, она называется *теоремой о накрывающей гомотопии.*

1.5. Теорема. *Пусть ξ — векторное расслоение класса C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ над $B \times I$. Если B паракомпактно, то ξ C^r-изоморфно $(\xi|B \times 0) \times I$.*

Доказательство. Положим $\xi|B \times 0 = \eta = (p, E, B)$. Тогда $\eta \times I = (p \times 1_I, E \times I, B \times I)$. Мы построим отображение (биморфизм) $\xi \to \eta \times I$, накрывающее тождественное отображение произведения $B \times I$. С этой целью мы применим глобализационную теорему 2.2.11 к надлежащему структурному функтору на B.

Пусть $\mathscr{X} = \{X_i\}$ — локально конечное покрытие пространства B множествами X_i, обладающими следующим свойством: у каждого X_i имеется окрестность $V_i \subset B$, такая, что сужение $\xi|V_i \times I$ тривиально (существование вытекает из теоремы 1.2 и паракомпактности пространства B). Сужения $\eta|V_i \times I$, очевидно, также тривиальны. Обозначим через $\mathfrak{Y}$ семейство всевозможных объединений элементов покрытия $\mathscr{X}$.

Пусть $Y \subset B$. Рассмотрим всевозможные пары (f, N), где $N \subset B$ есть окрестность множества Y и f: $\xi|N \times I \to (\eta|N) \times I$

есть C^r-изоморфизм. Мы скажем, что две пары (f_i, N_i), $i = 0, 1$, *имеют один и тот же Y-росток*, если Y обладает окрестностью $M \subset N_0 \cap N_1$, такой, что $f_0 = f_1$ на $\xi | M \times I$. Это — отношение эквивалентности; соответствующие классы эквивалентности называются *Y-ростками*. Для $Y \in \mathfrak{Y}$ мы обозначаем через $\mathcal{F}(Y)$ множество всех Y-ростков.

Если $Z \in \mathfrak{Y}$ и $Y \subset Z$, то сужение определяет отображение

$$\mathcal{F}_{YZ}: \mathcal{F}(Z) \to \mathcal{F}(Y).$$

Тем самым определен структурный функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{Y})$ на B.

Очевидно, что функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{Y})$ непрерывен. Из леммы 1.1 следует, что он нетривиален. В действительности из той же леммы 1.1 следует, что функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{Y})$ локально продолжаем. В самом деле, пусть $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathfrak{Y}$. Мы должны показать, что отображение

$$\mathcal{F}_{Y,\, Y \cup X}: \mathcal{F}(Y \cup X) \to \mathcal{F}(Y)$$

является отображением на. Это означает, что всякий $(X \cap Y)$-росток продолжается до X-ростка. Но $X \times I$ обладает окрестностью $N \times I$, над которой тривиально каждое из расслоений ξ, $\eta \times I$. Так как изоморфизмы тривиального расслоения не отличаются от отображений базы в $GL(n)$, локальная продолжаемость вытекает из следующего утверждения: если $U \subset N$ — окрестность пересечения $X \cap Y$ и

$$g: (U \times I,\ U \times 0) \to (GL(n),\ 1)$$

есть C^r-отображение (здесь $1 \in GL(n)$ — единичная матрица), то существуют окрестность $V \subset U$ пересечения $X \cap Y$ и C^r-отображение

$$(N \times I,\ N \times 0) \to (GL(n),\ 1),$$

совпадающее с g на $V \times I$. Но это — прямое следствие теоремы 1.3. Таким образом, функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{Y})$ локально продолжаем.

Остается применить теорему 2.2.11. Из этой теоремы следует, что множество $\mathcal{F}(B)$ непусто, последнее же эквивалентно утверждению теоремы 1.5. ∎

1.6. Следствие. *Два векторных расслоения ξ_0, ξ_1 класса C^r над паракомпактным пространством B C^r-изоморфны в том и только том случае, если существует векторное расслоение η класса C^r над $B \times I$, такое, что*

$$\xi_i \cong_r \eta | B \times i \quad (i = 0,\ 1).$$

Доказательство. Если η существует, то $\xi_0 \cong_r \xi_1$ в силу теоремы 1.5. Обратно, если $F: \xi_0 \to \xi_1$ есть C^r-изоморфизм, то мы можем положить $\eta = \xi_0 \times I$. ∎

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть ξ, η — векторные расслоения над паракомпактным пространством B, и пусть $A \subset B$ — замкнутое множество. Тогда всякий морфизм $f: \xi | A \to \eta | A$, накрывающий 1_A, продолжается до морфизма $g: \xi | W \to \eta | W$, накрывающего 1_W, где W есть некоторая окрестность множества A в B; если при этом f есть моно-, эпи- или биморфизм, то то же можно потребовать относительно g.

2. Пусть $\xi \to B$ — векторное расслоение над паракомпактным пространством, и пусть $A \subset B$ — стягиваемое замкнутое множество. Тогда A обладает такой окрестностью $W \subset B$, что сужение $\xi | W$ тривиально.

3. Утверждения упражнений 1 и 2 сохраняют силу в категории C^r-расслоений с $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

4. Всякая группа Ли параллелизуема. (*Группа Ли* есть многообразие G класса C^ω с групповой операцией $G \times G \to G$ класса C^ω, такой, что и отображение $g \longmapsto g^{-1}$ принадлежит классу C^ω.)

2. КОНСТРУКЦИИ В КАТЕГОРИИ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

В этом параграфе мы фиксируем класс гладкости C^r ($0 \leqslant r \leqslant \omega$) и систематически работаем в C^r-категории. При $r = 0$ это означает, что мы имеем дело с топологическими пространствами и непрерывными отображениями, в то время как при $r > 0$ мы ограничиваемся C^r-многообразиями, C^r-отображениями и векторными расслоениями класса C^r. За немногими указанными ниже исключениями класс гладкости произволен. Мы будем опускать указание на этот класс и для краткости говорить «расслоение» вместо «векторное расслоение».

Существует общая процедура, описанная, например, в книге Ленга [1], которая позволяет по каждой функториальной конструкции в категории векторных пространств (такой, как прямое суммирование, тензорное перемножение и т. д.) определить соответствующую конструкцию в категории векторных расслоений, применяя исходную конструкцию послойно. Однако этот уровень абстракции для нас слишком высок, и мы предпочтем явное описание всех нужных нам конструкций.

Подрасслоение расслоения $\xi = (p, E, B)$ есть расслоение $\xi_0 = (p_0, E_0, B)$ с той же базой, такое, что $E_0 \subset E$, $p_0 = p | E_0$ и существует атлас Φ расслоения ξ со следующим свойством. В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется такое линейное подпространство (мы можем считать, что это $\mathbb{R}^k$), что если $(\varphi, U) \in \Phi$, то φ отображает $p^{-1}(U) \cap E_0$ в $\mathbb{R}^k$ и пара

$$(\varphi | p^{-1}(U) \cap E_0, U)$$

принадлежит структуре расслоения ξ_0.

Понятие подрасслоения имеет много общего с понятием подмногообразия; так, если A есть C^{r+1}-подмногообразие многообразия M, то TA есть C^r-подрасслоение расслоения $T_A M$ $(= TM \mid A)$.

Если ξ_0 — подрасслоение расслоения ξ, то включение $E_0 \to E$ есть мономорфизм $\xi_0 \to \xi$, накрывающий 1_B. По аналогии с теоремой 1.3.1 имеет место обратное: *если η есть расслоение над B и F: $\eta \to \xi$ есть мономорфизм, накрывающий 1_B, то образ $F(\eta)$, наделенный структурой расслоения, индуцированной F, есть подрасслоение расслоения* ξ. Для доказательства достаточно установить соответствующий локальный факт; таким образом, мы можем считать, что ξ и η — тривиальные расслоения $B \times \mathbb{R}^n$ и $B \times \mathbb{R}^k$ с $k \leqslant n$. Мономорфизм F: $B \times \mathbb{R}^k \to B \times \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$F(x, y) = (x, F_x(y)),$$

где F_x: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ при каждом $x \in B$ есть линейный мономорфизм и $x \mapsto F_x$ есть C^r-отображение $B \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Фиксируем $x \in B$ и положим $F_x(\mathbb{R}^k) = E \subset \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можно считать, что $E = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ и что F_x есть стандартное включение $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Пусть π: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — ортогональная проекция. Точка x обладает открытой окрестностью $U \subset B$, такой, что при $z \in U$ композиция $\pi F_z : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ является изоморфизмом. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — ядро проекции π, так что $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times K$. Определим отображение

$$\varphi\colon U \times (\mathbb{R}^k \times K) \to U \times (\mathbb{R}^k \times K)$$

формулой

$$\varphi(z, (v, w)) = (z, \pi F_z(v), w).$$

Очевидно, φ есть C^r-карта векторного расслоения для ξ, переводящая образ отображения F в $U \times \mathbb{R}^k$. Следовательно, образ отображения F является подрасслоением.

Другой класс подрасслоений составляют *ядра* эпиморфизмов F: $\xi \to \xi'$, накрывающих 1_B. Именно, обозначим для $x \in B$ через η_x ядро отображения F_x: $\xi_x \to \xi'_x$; тогда у ξ имеется единственное подрасслоение η со слоями η_x. Доказательство этого мы оставляем читателю.

Полезно ввести понятие *точной последовательности* морфизмов векторных расслоений; под этим понимается конечная или бесконечная последовательность

$$\cdots \to \xi_{l-1} \xrightarrow{F_{l-1}} \xi_l \xrightarrow{F_l} \xi_{l+1} \to \cdots$$

морфизмов, накрывающих 1_B, такая, что при каждом $x \in B$ и при каждом i

$$\operatorname{Im}(F_{i-1})_x = \operatorname{Ker}(F_i)_x.$$

Особый интерес представляют *короткие* точные последовательности

$$0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{F} \eta \xrightarrow{G} \zeta \longrightarrow 0,$$

где 0 обозначает 0-мерное расслоение над B. Точность в этом случае означает просто, что F есть мономорфизм, G есть эпиморфизм и образ отображения F совпадает с ядром отображения G.

Существование ядер у эпиморфизмов может быть выражено на функториальном языке: для любой точной последовательности вида

$$\eta \xrightarrow{G} \xi \longrightarrow 0$$

существует точная последовательность

(1) $$0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{F} \eta \xrightarrow{G} \zeta \longrightarrow 0,$$

и эта последовательность единственна в том смысле, что для любой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \xi' \xrightarrow{F'} \eta \xrightarrow{G} \zeta \longrightarrow 0$$

существует единственный изоморфизм $\xi \longrightarrow \xi'$ с коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \xi \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \eta \arrow[r, "G"] \arrow[d, "="] & \zeta \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & \xi' \arrow[r, "F'"] & \eta \arrow[r, "G"] & \zeta \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

В точной последовательности (1) мы называем ζ *факторрасслоением* мономорфизма F. Легко видеть, что у всякого мономорфизма есть факторрасслоение и что оно единственно с точностью до изоморфизма. В частности, если ξ есть подрасслоение расслоения η, то слои факторрасслоения можно отождествить с факторпространствами η_x/ξ_x, и мы обозначаем в этом случае факторрасслоение через η/ξ.

Короткая точная последовательность (1) называется *расщепляющейся*, если существует мономорфизм $H: \zeta \longrightarrow \eta$ с $GH = 1_\zeta$. Очевидное послойное рассуждение показывает, что это эквивалентно существованию эпиморфизма $K: \eta \longrightarrow \xi$ с $KF = 1_\xi$.

Сумма Уитни (или *прямая сумма*) расслоений ξ, ζ над B есть расслоение $\xi \oplus \zeta$ над B, слой которого над x есть $\xi_x \oplus \zeta_x$. Если

φ, ψ — карты расслоений ξ, ζ над U, то карта θ расслоения $\xi \oplus \zeta$ над U определяется формулой

$$\theta_x = \varphi_x \oplus \psi_x \colon \xi_x \oplus \zeta_x \to \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n.$$

Естественные точные последовательности векторных пространств

$$0 \to \xi_x \xrightarrow{F_x} \xi_x \oplus \zeta_x \xrightarrow{G_x} \zeta_x \to 0$$

соединяются в расщепляющуюся точную последовательность

$$0 \to \xi \xrightarrow{F} \xi \oplus \zeta \xrightarrow{G} \zeta \to 0.$$

Пусть $\xi = (p, E, M)$ — векторное расслоение класса C^{r+1}. Каждый слой ξ_x есть векторное пространство с началом x, и мы можем отождествить ξ_x с $T_x(\xi_x)$. Это естественным образом превращает ξ в подрасслоение расслоения $T_M E$. (Заметим, что «естественный» класс гладкости расслоения $T_M E$ есть только C^r.) Так как M есть подмногообразие многообразия E (ввиду наличия нулевого сечения $Z\colon M \to E$), TM также является C^r-подрасслоением расслоения $T_M E$. Мы получаем, очевидно, короткую точную последовательность

(2) $$0 \to \xi \to T_M E \xrightarrow{Tp} TM \to 0,$$

расщепляющуюся мономорфизмом

(3) $$TZ\colon TM \to TE.$$

Этим доказано следующее предложение.

2.1. Теорема. *Пусть $\xi = (p, E, M)$ — векторное расслоение класса C^{r+1} $(0 \leqslant r \leqslant \omega)$. Точная последовательность* (2) *естественно расщепляется мономорфизмом* (3). *Таким образом, имеется естественный C^r-изоморфизм*

$$h_\xi\colon T_M E \xrightarrow{\approx} \xi \oplus TM.$$

В частности, ξ есть естественное подрасслоение расслоения TM.

Естественность здесь подразумевается по отношению к C^{r+1}-морфизмам: если

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \eta \arrow[d] \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

есть такой морфизм, то, как легко проверить, диаграмма

$$\begin{tikzcd} T_M E\xi \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h_\xi"'] & T_N E\eta \arrow[d, "h_\eta"] \\ \xi \oplus TM \arrow[r, "f \oplus Tg"'] & \eta \oplus TN \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Следующий простой результат есть один из наиболее полезных фактов теории векторных расслоений.

2.2. Теорема. *При $0 \leqslant r \leqslant \infty$ всякая короткая точная последовательность векторных расслоений класса C^r расщепляется, если база паракомпактна.*

Доказательство. Достаточно показать, что всякий мономорфизм $F\colon \xi \to \eta$, накрывающий 1_B, обладает левым обратным. Локально это верно, поскольку $F(\xi)$ есть подрасслоение расслоения η: выше мы показали, что у расслоения η имеется атлас, карты которого переводят $(\eta \mid U, \xi \mid U)$ в $(U \times \mathbb{R}^n, U \times \mathbb{R}^k)$, и локальные левые обращения мономорфизма F получаются из линейной ретракции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Для перехода к глобальной ситуации достаточно склеить эти локальные левые обращения с помощью разбиения единицы. ∎

Пусть $\xi = (p, E, B)$ — векторное расслоение. *Скалярное умножение,* или *ортогональная структура* (класса C^r), на ξ есть по определению семейство $\alpha = \{\alpha_x\}_{x \in B}$, где каждое α_x есть скалярное умножение (симметрическая билинейная положительно определенная 2-форма) на векторном пространстве E_x, такое, что отображение $(x, y, z) \mapsto \alpha_x(y, z)$, определенное на

$$\{(x, y, z) \in B \times E \times E \mid x = p(y) = p(z)\},$$

принадлежит классу C^r. Если B паракомпактно и $r \leqslant \infty$, такое α легко построить с помощью разбиения единицы. Более того, всякий K-росток ортогональной структуры, где K есть замкнутое подмножество пространства B, может быть продолжен до ортогональной структуры. Пара (ξ, α) называется *ортогональным векторным расслоением.* Если M есть C^{r+1}-многообразие, то ортогональная структура класса C^r на TM называется также *римановой метрикой класса C^r* на M.

Пусть (ξ, α) — ортогональное расслоение. Если y, z лежат в одном слое ξ_x, мы пишем $\langle y, z\rangle$ или $\langle y, z\rangle_x$ вместо $\alpha_x(y, z)$. Если η есть подрасслоение расслоения ξ, то *ортогональное дополнение* $\eta^\perp \subset \xi$ есть подрасслоение, послойно определяемое формулой

$$(\eta^\perp)_x = (\eta_x)^\perp = \{y \in \xi_x \mid \langle y, z\rangle = 0 \quad \text{при всех } z \in \xi_x\}.$$

Естественный эпиморфизм $\xi \to \xi/\eta$ изоморфно отображает $\eta^\perp$ на ξ/η. Это доставляет новый способ расщепления коротких точных последовательностей, который применим и для аналитических расслоений с аналитическим скалярным умножением.

Пусть M — подмногообразие класса C^{r+1} многообразия N; предположим, что N обладает римановой метрикой класса C^r. В этом случае $TM^\perp \subset T_M N$ называется *геометрическим нормальным расслоением* многообразия M в N. *Алгебраическое нормальное расслоение* многообразия M в N определяется как C^r-факторрасслоение $T_M N/TM$. Его определение не требует римановой метрики, а при наличии римановой метрики оно канонически C^r-изоморфно $TM^\perp$.

Пусть $\xi = (p, E, M)$ — ортогональное расслоение. Метод ортогонализации Грама — Шмидта позволяет превратить произвольный базис b_x любого слоя ξ_x в ортонормированный базис e_x этого слоя. Эта классическая процедура, представляющая собой деформационную ретракцию группы $GL(n)$ на $O(n)$, настолько канонична, что она позволяет построить C^r-семейство $\{e_x\}_{x \in U}$ ортонормированных базисов по C^r-семейству $\{b_x\}_{x \in U}$ произвольных базисов над любым $U \subset M$. Это показывает, что ξ обладает *ортогональным атласом* $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}$, т. е. таким атласом, что каждое отображение

$$\varphi_{ix}\colon \xi_x \to \mathbb{R}^n, \quad x \in U_i,$$

является изометрией. В этой ситуации функции перехода

$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to GL(n)$$

принимают значения в $O(n)$. Другими словами, всякое ортогональное расслоение обладает ортогональным атласом. Обратно, если на ξ задан ортогональный атлас, то ξ обладает единственной ортогональной структурой, по отношению к которой все φ_{ix} являются изометриями.

Два ортогональных векторных расслоения называются *изоморфными*, если между ними имеется изоморфизм, сохраняющий скалярные произведения.

Следующая лемма показывает, что ортогональная структура на векторном расслоении, по существу, единственна.

2.3. Лемма. *Пусть* $\xi_i = (p_i, E_i, M)$ — *векторные расслоения* $(i = 0, 1)$ *и* $f: \xi_0 \to \xi_1$ — *изоморфизм. Предположим, что* ξ_0 *и* ξ_1 *наделены ортогональными структурами. Тогда изоморфизм* f *гомотопен изоморфизму в ортогональном смысле в классе отображений между векторными расслоениями.*

Доказательство. Предположим, что ξ_0 и ξ_1 тривиальны как ортогональные расслоения. Тогда f есть отображение $M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n$, и в этом качестве оно определяется формулой $f(x, y) = (x, g(x) y)$, где g есть отображение $M \to GL(n)$. Поскольку $O(n)$ есть деформационный ретракт группы $GL(n)$, отображение g гомотопно некоторому отображению $h: M \to O(n)$. Более того, гомотопия может быть сделана неподвижной на множестве $g^{-1}O(n)$. Обозначая эту гомотопию через g_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ с $g_0 = g$, $g_1 = h$, мы вводим в рассмотрение отображения

$$f_t: M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$f_t(x, y) = (x, g_t(x) y).$$

Это — гомотопия, составленная из изоморфизмов, соединяющая f с ортогональным изоморфизмом и такая, что $f_t = f$ там, где изоморфизм f уже ортогонален.

Общий случай леммы 2.3 доказывается последовательным применением этого специального случая к сужениям на элементы локально конечного покрытия $\{U_j\}$ многообразия M, такого, что ξ_0 и ξ_1 над каждым U_j представляют собой тривиальные ортогональные расслоения. ∎

Совершенно другой характер носит конструкция *индуцированного расслоения.* Пусть $\xi = (p, E, M, \Phi)$ — векторное расслоение и $f: M_0 \to M$ — произвольное отображение. *Индуцированное расслоение* $f^*\xi = (p_0, E_0, M_0, \Phi_0)$ определяется следующим образом. Положим

$$E_0 = \{(x, y) \in M_0 \times E \mid f(x) = p(y)\}$$

и рассмотрим отображение

$$p_0: E_0 \to M_0,$$
$$p_0(x, y) = x.$$

За Φ_0 мы принимаем максимальный (C^r-) атлас, содержащий все карты вида $(\psi, f^{-1}(U))$, где $(\varphi, U) \in \Phi$ и $\psi_z = \varphi_{f(z)}$ при $z \in f^{-1}(U)$. *Естественное отображение* $\Psi: f^*\xi \to \xi$, накрывающее f, определяется формулой $(x, y) \longmapsto y$.

Пусть $q: \eta \to M_0$ — векторное расслоение и $F: \eta \to \xi$ — морфизм, накрывающий f. Тогда существует единственное отображение $H\colon \eta \to f^*\xi$ между тотальными пространствами, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\eta \arrow[dr, "H"] \arrow[drr, bend left, "F"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& f^*\xi \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "p_0"] & \xi \arrow[d, "p"] \\
& M_0 \arrow[r, "f_0"'] & M
\end{tikzcd}$$

и при этом H также есть морфизм между векторными расслоениями. Если F есть эпиморфизм, мономорфизм или биморфизм, то таковым является и H. Этим, в частности, устанавливается полезный факт, что *если $F\colon \eta \to \xi$ есть отображение между векторными расслоениями, накрывающее f, то расслоение η канонически изоморфно индуцированному расслоению $f^*\xi$.*

Главной теоремой об индуцированных расслоениях является приводимое ниже следствие из теоремы 1.5 о накрывающей гомотопии.

2.4. Теорема. *Предположим, что B есть паракомпактное пространство. Пусть $f, g\colon B \to M$ — гомотопные отображения и ξ — векторное расслоение над M. Тогда расслоение $f^*\xi$ изоморфно $g^*\xi$. В частности, если отображение f гомотопно постоянному отображению, то расслоение $f^*\xi$ тривиально.*

Доказательство. Пусть $H\colon B \times I \to M$ — гомотопия, соединяющая f с g. Согласно теореме 1.5, расслоение $H^*\xi$ изоморфно расслоению $(H_0^*\xi) \times I = (f^*\xi) \times I$ и в то же время изоморфно расслоению $(H_1^*\xi) \times I = (g^*\xi) \times I$. Глядя на эти расслоения над $B \times I$, мы видим, что расслоение $f^*\xi$ изоморфно $g^*\xi$. ∎

2.5. Следствие. *Всякое векторное расслоение над стягиваемым паракомпактным пространством тривиально.*

Следующее предложение объясняет название «теорема о накрывающей гомотопии».

2.6. Теорема. *Пусть B_0 — паракомпактное пространство, и пусть $F\colon \xi_0 \to \xi_1$ — морфизм, накрывающий некоторое отображение $f\colon B_0 \to B_1$. Пусть, далее, $h\colon B_0 \times I \to B_1$ — гомотопия отображения f. Тогда существует составленная из морфизмов гомотопия $H\colon \xi_0 \times I \to \xi_1$ морфизма F, накрывающая h. Если F*

есть эпиморфизм, мономорфизм или биморфизм, то то же можно потребовать относительно H.

Доказательство. Достаточно построить морфизм $\xi_0 \times I \to \xi_1 \times I$, накрывающий отображение g: $B_0 \times I \to B_1 \times I$, $g(x, t) = (h(x, t), t)$, и совпадающий с F над $B_0 \times I$. Соотношения между индуцированными расслоениями и отображениями расслоений позволяют нам заменить расслоение $\xi_1 \times I$ расслоением $g^*(\xi_1 \times I)$, отображение g тождественным отображением произведения $B_0 \times I$ и произведение $B_1 \times I$ произведением $B_0 \times I$. Наконец теорема 1.5 позволяет нам заменить расслоение $g^*(\xi_1 \times I)$ расслоением $\eta \times I$ над $B_0 \times I$. Таким образом, у нас имеется изоморфизм F: $\xi_0 \to \eta$, и мы должны продолжить его до изоморфизма H: $\xi_0 \times I \to \eta \times I$. Можно взять просто $H = F \times 1_I$. Последнее утверждение очевидно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\xi_i = (p_i, E_i, B_i)$ — векторные расслоения класса C^r $(i = 0, 1, 0 \leqslant r \leqslant \omega)$ и f: $B_0 \to B_1$ произвольное C^r-отображение. Существует векторное расслоение класса C^r над B_0, слой которого над точкой x есть $L(\xi_{0x}, \xi_{1x})$ и C^r-сечения которого естественно соответствуют C^r-морфизмам $\xi_0 \to \xi_1$, накрывающим f.

2. Пусть P^k есть k-мерное вещественное проективное пространство, ε — тривиальное одномерное векторное расслоение над P^k и ξ — нормальное расслоение многообразия P^k в P^{k+1}. Тогда $\varepsilon^1 \oplus TP^k \cong \xi \oplus \ldots \oplus \xi$. [Рассмотрите включение $S^k \subset S^{k+1}$ и антиподальное отображение.]

3. (a) Если n нечетно, то TS^n обладает не обращающимся в нуль сечением, и потому $TS^n = \varepsilon^1 \oplus \eta$ (ε^k обозначает k-мерное тривиальное расслоение). [Если $n = 2m - 1$, то $S^n \subset \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$; для любой точки $x \in S^n$ вектор ix, где $i = \sqrt{-1}$, касается сферы S^n в точке x.]

(b) Если $n = 4m - 1$, то $TS^n \cong \varepsilon^3 \oplus \zeta$. [Воспользуйтесь кватернионами.]

(c) Если $n = 8m - 1$, то $TS^n \cong \varepsilon^7 \oplus \lambda$. [Воспользуйтесь числами Кэли.]

4. Расслоение $TS^n \oplus \varepsilon^1$ тривиально. [Рассмотрите включение $T(S^n \times R) \subset T\mathbb{R}^{n+1}$. Сравните с упр. 12 к § 1.2.]

5. Если TM обладает не обращающимся в нуль сечением и расслоения $TM \oplus \varepsilon^1$ и $TN \oplus \varepsilon^1$ тривиальны, то произведение $M \times N$ параллелизуемо.

6. Произведение двух или более сфер параллелизуемо, если все они имеют положительные размерности и по крайней мере одна из них имеет нечетную размерность. [Воспользуйтесь упражнениями 3 (a), 4 и 5 и индукцией.]

*7. Найдите явные тривиализации касательных расслоений произведений $S^1 \times S^2$, $S^1 \times S^4$, $S^2 \times S^6$.

8. *Многообразие реперов* $F(M)$ n-мерного многообразия M есть многообразие размерности $n^2 + n$, точки которого представляют собой пары (x, λ), где $x \in M$ и λ: $\mathbb{R}^n \to M_x$ — линейный изоморфизм. Определим проекцию π: $F(M) \to M$ формулой $\pi(x, \lambda) = x$. Топология и дифференциальная структура на $F(M)$ определяются условием: карта (φ, U) многообразия M индуци-

рует диффеоморфизм $\pi^{-1}(U) \to U \times GL(n)$ по формуле $(x, \lambda) \longmapsto (x, D\varphi_x \circ \lambda)$.

(a) Имеется точная последовательность

$$\text{(S)} \qquad 0 \to \operatorname{Ker}(T\pi) \to TF(M) \to \pi^*(TM) \to 0.$$

(b) Расслоения $\operatorname{Ker}(T\pi)$ и $\pi^*(TM)$ тривиальны.

(c) Следовательно, многообразие $F(M)$ параллелизуемо.

9. (a) Части (a) и (b) упражнения 8 сохраняют силу и в случае непаракомпактного M. В этом случае, однако, последовательность (S) может не расщепляться. Всякое расщепление $j: \pi^*(TM) \to TF(M)$ последовательности (S) называется (возможно, нелинейной) *связностью* на M.

(b) Пусть M — связное многообразие, не предполагаемое паракомпактным или имеющим счетную базу. Если M обладает связностью, то M паракомпактно и имеет счетную базу. [Указание: с помощью части (a) и упражнения 8 (c) постройте на $F(M)$ риманову метрику.]

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Мы начнем с доказательства фундаментального факта, основанного в конечном счете на трансверсальности, который приводит непосредственно к классификационной теореме 3.4.

3.1. Теорема. *Пусть ξ есть k-мерное векторное расслоение класса C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ над многообразием M. Пусть $U \subset M$ — окрестность замкнутого множества $A \subset M$. Предположим, что*

$$F: \xi | U \to U \times \mathbb{R}^s$$

есть C^r-мономорфизм, накрывающий 1_U. Если $s \geqslant k + \dim M$, то существует C^r-мономорфизм $\xi \to M \times \mathbb{R}^s$, накрывающий 1_M и совпадающий с F над некоторой окрестностью множества A в U.

Доказательство. Рассмотрим сначала специальный случай, когда расслоение ξ тривиально. Тогда для каждой точки $x \in U$ сужение $F | \xi_x$ может рассматриваться как линейное отображение $g(x): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ ранга k. Мы получаем, таким образом, отображение $g: U \to V_{s,k}$, и легко видеть, что оно принадлежит классу C^r. Поскольку $\dim M \leqslant s - k$, мы можем применить теорему 3.2.6 (о продолжении непрерывных отображений в $V_{n,k}$), и эта теорема доставляет отображение $h: M \to V_{s,k}$, продолжающее A-росток отображения g. Если $r > 0$, то мы можем сделать отображение h C^r-отображением с помощью теоремы 2.2.5. После этого мы интерпретируем h как C^r-мономорфизм $M \times \mathbb{R}^k \to M \times \mathbb{R}^s$, накрывающий 1_M.

Переход к общему случаю осуществляется с помощью глобализационной теоремы 2.2.11.

(Для тех, кто интересуется деталями: структурный функтор $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})$ на M определяется следующим образом. Пусть $\mathcal{X} =$

$\{X_i\}$ — замкнутое локально конечное покрытие многообразия M, такое, что расслоение ξ тривиально над окрестностью каждого из множеств X_i. Пусть, далее, $\mathfrak{Y}$ — семейство всевозможных объединений элементов покрытия $\mathscr{X}$. Для $Y \in \mathfrak{Y}$ через $\mathscr{F}(Y)$ мы обозначаем множество классов («Y-ростков») $[\varphi]_Y$ эквивалентных отображений φ: $\xi \mid W \to W \times \mathbb{R}^s$; здесь $W \subset M$ — произвольная окрестность множества Y, отображение φ должно быть мономорфизмом, накрывающим 1_W и совпадающим с f над некоторой окрестностью пересечения $Y \cap A$, а отношение эквивалентности определяется так: $[\varphi]_Y = [\psi]_Y$, если φ и ψ совпадают над некоторой окрестностью множества Y. Сужения превращают $(\mathscr{F}, \mathfrak{Y})$ в структурный функтор, который, очевидно, непрерывен и нетривиален. Что он локально продолжаем, мы выше доказали. Таким образом, теорема 3.1 вытекает из теоремы 2.2.11.) ∎

Пусть $\gamma_{s,k} \to G_{s,k}$ — следующее векторное расслоение над грассмановым многообразием $G_{s,k}$: слой расслоения $\gamma_{s,k}$ над k-мерной плоскостью $P \subset \mathbb{R}^s$ есть множество пар (P, x), где $x \in P$. Расслоение $\gamma_{s,k}$ обладает естественной структурой аналитического k-мерного векторного расслоения над $G_{n,k}$. Мы называем его *грассмановым расслоением* или иногда *универсальным расслоением*.

Из теоремы 3.1 мы выводим

3.2. Следствие. *Пусть η — некоторое k-мерное векторное расслоение класса C^r над $V \times I$, где V — многообразие размерности n. Предположим, что F_i: $\eta \mid V \times i \to \mathbb{R}^s$ $(i = 0,\ 1)$ — мономорфизмы класса C^r. Если $s > k + n$, то F_0 и F_1 продолжаются до C^r-мономорфизма F: $\eta \to \mathbb{R}^s$.*

Доказательство. В силу теоремы о накрывающей гомотопии, отображения F_0 и F_1 продолжаются до мономорфизма $\eta \mid U \to \mathbb{R}^s$, где U — окрестность множества $V \times \{0, 1\}$ в $V \times I$. Остается применить 3.1 (с $M = V \times I$, $A = V \times \{0, 1\}$ и т. д.). ∎

Другим следствием теоремы 3.1 является существование «обратных» расслоений.

3.3. Теорема. *Пусть ξ — произвольное k-мерное векторное расслоение класса C^r над n-мерным многообразием M $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$. Тогда существует n-мерное векторное расслоение η класса C^r над M, такое, что $\xi \oplus \eta \cong_r M \times \mathbb{R}^s$.*

Доказательство. Пусть F: $\xi \to M \times \mathbb{R}^{n+k}$ — мономорфизм, накрывающий 1_M. Мы наделяем тривиальное расслоение $M \times \mathbb{R}^{n+k}$ стандартной ортогональной структурой и принимаем за η подрасслоение $F(\xi)^{\perp}$ расслоения $M \times \mathbb{R}^{n+k}$. ∎

Теперь C^r-мономорфизмы $F\colon \xi \to M \times \mathbb{R}^s$, накрывающие 1_M, приобретают у нас новое значение. Определим отображение

$$\text{(1)}\qquad \begin{tikzcd} \xi \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[d] & \gamma_{s,k} \arrow[d] \\ M \arrow[r, "g"'] & G_{s,k} \end{tikzcd}$$

между векторными расслоениями следующим образом. Отображение g относит точке $y \in M$ k-мерную плоскость $g(y) = F(\xi_y) \in G_{s,k}$. Если $z \in \xi_y$, то мы полагаем $\varphi(x) = (F(\xi_y), f(z))$. Легко проверить, что сопоставление $F \longmapsto (\varphi, g)$ определяет естественное взаимно однозначное соответствие между C^r-мономорфизмами $\xi \to M \times \mathbb{R}^s$, накрывающими 1_M, и отображениями $\xi \to \gamma_{s,k}$ класса C^r.

Отображение $g\colon M \to G_{s,k}$ из диаграммы (1) обладает тем свойством, что $g^*\gamma_{s,k} \cong \xi$. Такое отображение называется *классифицирующим* для ξ; мы говорим также, что g *классифицирует* ξ. Из теорем 3.1 и 3.2 и из наличия воротника у края ∂M (см. § 4.6) мы выводим следующую *классификационную теорему*.

3.4. Теорема. *Если $s \geqslant k + n$, то всякое k-мерное векторное расслоение ξ над n-мерным многообразием M обладает классифицирующим отображением $f_\xi\colon M \to G_{s,k}$. Более того, всякое классифицирующее отображение $\partial M \to G_{s,k}$ для расслоения $\xi \mid \partial M$ продолжается до классифицирующего отображения для ξ. Если $s > k + n$, то отображение f_ξ единственно с точностью до гомотопии, и другое k-мерное векторное расслоение над M, η, изоморфно ξ тогда и только тогда, когда отображения f_ξ, f_η гомотопны.*

Доказательство. После сказанного выше в обосновании нуждается только утверждение, что если $\xi \cong \eta$, то $f_\xi \simeq f_\eta$. Пусть $\psi\colon \eta \to \xi$ — изоморфизм и $\varphi\colon \xi \to \gamma_{s,k}$ — биморфизм, накрывающий f_ξ. Из диаграммы

$$\begin{tikzcd} \eta \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr] & \xi \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \gamma_{s,k} \arrow[d] \\ & M \arrow[r, "f_\xi"'] & G_{s,k} \end{tikzcd}$$

мы видим, что f_ξ классифицирует как расслоение ξ, так и расслоение η. Но классифицирующее отображение f_η при $s \geqslant k + n$ единственно с точностью до гомотопии, поэтому $f_\xi \simeq f_\eta$. ∎

Наряду с теоремой о накрывающей гомотопии этот результат имеет фундаментальное значение, поскольку он превращает теорию векторных расслоений в раздел теории гомотопий. Другими словами, мы можем теперь применить к изучению векторных расслоений все, что мы знаем об отображениях. Вот, например, результат применения нашей аппроксимационной теории.

3.5. Теорема. *Всякое векторное расслоение ξ класса C^r над C^∞-многообразием M обладает C^∞-структурой, согласованной с его C^r-структурой; такая структура единственна с точностью до C^∞-изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $g\colon M \to G_{s,k}$ — классифицирующее отображение класса C^r для ξ. Отображение g может быть аппроксимировано C^∞-отображением h и, следовательно, гомотопно такому отображению. Поэтому

$$\xi \cong_r g^*\gamma_{s,k} \cong_r h^*\gamma_{s,k}.$$

Но $h^*\gamma_{s,k}$ есть C^∞-расслоение. Значит, и ξ обладает C^∞-структурой.

Если η_0 и η_1 — расслоения класса C^∞, которые C^r-изоморфны, то они обладают классифицирующими отображениями класса C^∞, и эти классифицирующие отображения гомотопны. Тогда они и C^∞-гомотопны. Расслоение, индуцированное над $M \times I$ расслоением $\gamma_{s,k}$ посредством такой гомотопии, есть некоторое C^∞-расслоение ζ, такое, что

$$\zeta \mid M \times i \cong_\infty \eta_i, \quad i = 0, \quad 1.$$

Таким образом, $\eta_0 \cong_\infty \eta_1$ в силу теоремы 1.6. ∎

Подобный результат справедлив и в случае, когда класс C^∞ заменен классом C^ω. Доказательство основывается на аналитической аппроксимационной теореме 2.5.1. Теорема этого типа, которая может быть доказана без ссылки на теорему 2.5.1, приведена в упр. 3 к § 4.7.

С этого места мы можем не указывать класс гладкости векторного расслоения.

Хотя все теоремы этого параграфа формулировались для многообразий, они сохраняют силу (если выбросить все, касающееся гладкости) для векторных расслоений над симплициальными (или клеточными) пространствами конечной размерности. Доказательства при этом почти не изменяются. Главное отличие заключается в том, что теорема 3.1 доказывается индукцией по размерности; индуктивный шаг состоит в продолжении отображения $\partial\Delta^m \to V_{s,k}$ $(m \leqslant s-k)$ на Δ^m, где Δ^m есть m-симплекс; в клеточном случае рассуждение аналогично.

Классификация векторных расслоений над пространствами более общего вида может быть описана следующим образом. Пусть $K^k(X)$ обозначает множество классов изоморфных k-мерных векторных расслоений над пространством X. Пусть, далее, $[X, G_{s,k}]$ — множество гомотопических классов отображений пространства X в $G_{s,k}$. Естественное отображение

$$\Theta_X\colon K^k(X) \to [X, G_{s,k}]$$

индуцируется сопоставлением $f \longmapsto f^*\gamma_{s,k}$. Что Θ_X определено корректно, легко проверяется с помощью теоремы о накрывающей гомотопии, если предположить, что пространство X паракомпактно. После этого можно доказать, что *если X имеет гомотопический тип симплициального или клеточного пространства размерности, меньшей $s-k$, то отображение Θ_X взаимно однозначно.*

УПРАЖНЕНИЯ

[X обозначает либо многообразие, либо конечномерное симплициальное или клеточное пространство; ε^k обозначает тривиальное k-мерное векторное расслоение.]

1. (a) Пусть $i\colon G_{s,k} \to G_{s+1,k+1}$ — естественное вложение. Тогда

$$i^*\gamma_{s+1,k+1} \cong \gamma_{s,k} \oplus \varepsilon^1.$$

(b) Если $\dim X \lessdot s-k$, то при классификации векторных расслоений отображение

$$i_{\#}\colon [X, G_{s,k}] \to [X, G_{s+1,k+1}]$$

соответствует отображению

$$\sigma\colon K^k(X) \to K^{k+1}(X), \qquad [\xi] \longmapsto [\xi \oplus \varepsilon].$$

2. Предположим, что $\dim X \lessdot \min(s-k, r-j)$. Естественное вложение

$$G_{s,k} \times G_{r,j} \to G_{s+r,k+j}$$

индуцирует отображение

$$K^k(X) \times K^j(X) \to K^{k+j}(X),$$

соответствующее суммированию Уитни.

3. Отображение $\sigma\colon K^k(X) \to K^{k+1}(X)$ (см. упр. 1) является отображением на при $\dim X \leqslant k$ и взаимно однозначно при $\dim X \lessdot k$. [Воспользуйтесь упражнениями 7 (a) и 9 к § 3.2.]

4. Пусть ξ, η, ζ — такие расслоения над X, что $\xi \oplus \eta \cong \xi \oplus \zeta$. Если $\dim \xi > \dim X$, то $\eta \cong \zeta$. [Возьмите такое α, что сумма $\eta \oplus \alpha$ тривиальна, и примените упр. 3.]

5. Пусть $G_{s,k} \to G_{s+1,k}$ — естественное вложение; положим $G_{\infty,k} = \bigcup\limits_{s=k}^{\infty} G_{s,k}$.

Тогда $K^k(X)$ естественно изоморфно $[X, G_{\infty, k}]$. (Обычно $G_{\infty, k}$ обозначается через $BO(k)$ и называется классифицирующим пространством для функтора K^k или для группы $O(k)$.)

6. Векторные расслоения ξ, η над X называются *стабильно изоморфными*, если $\xi \oplus \varepsilon^j \cong \eta \oplus \varepsilon^k$ при некоторых j, k. Обозначим через $K(X)$ множество классов стабильно изоморфных расслоений над X. Операция суммирования Уитни наделяет $K(X)$ естественной структурой абелевой группы.

*7. Существуют отображения $G_{\infty, k} \to G_{\infty, k+1}$, прямой предел $G_{\infty, \infty}$ которых есть классифицирующее пространство для функтора K из упр. 6. Другими словами, имеет место естественный изоморфизм (между множествами) $K(X) \approx \approx [X, G_{\infty, \infty}]$. Более того, существует отображение $G_{\infty, \infty} \times G_{\infty, \infty} \to G_{\infty, \infty}$, такое, что возникающая бинарная операция на множестве $[X, G_{\infty, \infty}]$ соответствует операции суммирования Уитни на $K(X)$. (Обычно $G_{\infty, \infty}$ обозначается через BO.)

8. Расслоение размерности k над S^n имеет атлас, состоящий из двух карт, области определения которых содержат соответственно верхнюю и нижнюю полусферу. Функция перехода для такой пары карт может быть сужена до отображения экватора S^{n-1} в $GL(k)$. Этим способом устанавливается изоморфизм $K^k(S^n) \approx \pi_{k-1}(GL(k)) \approx \pi_{k-1}(O(k))$ (без каких-либо ограничений на k, n).

9. Пусть $\xi \to S^n$ — расслоение размерности k, отвечающее $\alpha \in \pi_{n-1}(GL(k))$ (см. упр. 8). Если $\eta \to S^n$ отвечает элементу, обратному α (в абелевой группе $\pi_{n-1}(GL(k))$), то расслоение $\xi \oplus \eta$ тривиально. Можно интерпретировать расслоение η как «отражение» расслоения ξ в экваторе.

*10. Всякое векторное расслоение над S^3 тривиально. [Указание: можно ограничиться рассмотрением расслоений размерности $\leqslant 3$.]

4. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Пусть V — (вещественное) конечномерное векторное пространство размерности $n > 0$. Два базиса $(e_1, \ldots, e_n)$, $(f_1, \ldots, f_n)$ пространства V называются *эквивалентными*, если автоморфизм $A\colon V \to V$, такой, что $Ae_i = f_i$, имеет положительный определитель. *Ориентация* пространства V есть по определению класс $[e_1, \ldots, e_n]$ эквивалентных базисов. Если $\dim V > 0$, то существуют в точности две ориентации. Если одна из них обозначена через ω, то $-\omega$ обозначает другую.

Если $L\colon V \to W$ — изоморфизм между векторными пространствами и $\omega = [e_1, \ldots, e_n]$ — ориентация пространства V, то $L(\omega) = [Le_1, \ldots, Le_n]$ есть по определению *индуцированная ориентация* пространства W.

В случае $\dim V = 0$ ориентация определяется просто как одно из чисел ± 1. Многие специальные, но тривиальные рассуждения, относящиеся к этому случаю, ниже будут опускаться.

Ориентированное векторное пространство по определению представляет собой пару (V, ω), где V есть векторное пространство, а ω есть ориентация пространства V. Если (V, ω), (V', ω') — ориентированные векторные пространства, то изоморфизм $L\colon V \to$

V' называется *сохраняющим ориентацию*, когда $L(\omega) = \omega'$; в противном случае говорят, что L *обращает ориентацию*.

Стандартная ориентация ω^n пространства $\mathbb{R}^n$ с $n > 0$ определяется как $[e_1, \ldots, e_n]$, где e_i — стандартный i-й единичный вектор. Стандартная ориентация пространства $\mathbb{R}^0$ есть $+1$.

Пусть $0 \to E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E'' \to 0$ — точная последовательность векторных пространств. Если даны ориентации $\omega' = [e_1, \ldots, e_m]$ пространства E' и $\omega'' = [f_1, \ldots, f_n]$ пространства E'', то канонически определяется ориентация ω пространства E:

$$\omega = [\varphi e_1, \ \ldots, \ \varphi e_m, \ g_1, \ \ldots, \ g_n], \quad \text{где} \quad \psi g_i = f_i.$$

Эта ориентация не зависит от выбора g_i; действительно, если также $\psi h_i = f_i$, то автоморфизм A: $E \to E$, такой, что $A\varphi e_j = \varphi e_j$ и $Ag_i = h_i$, включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "="'] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "A"] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & E'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

из которой видно, что $\det A = 1$. Следовательно,

$$[\varphi e_1, \ \ldots, \ \varphi e_m, \ g_1, \ \ldots, \ g_n] = [\varphi e_1, \ \ldots, \ \varphi e_m, \ h_1, \ \ldots, \ h_n].$$

Легко видеть, что любые две из ориентаций ω', ω, ω'' однозначно определяют третью. Мы пишем $\omega = \omega' \oplus \omega''$, $\omega' = \omega/\omega''$, $\omega'' = \omega/\omega'$.

Пусть теперь $\xi = (p, E, B)$ — векторное расслоение. *Ориентацией* расслоения ξ называется семейство $\omega = \{\omega_x\}_{x \in B}$, где ω_x есть ориентация слоя E_x, такое, что у расслоения ξ есть атлас со следующим свойством: если отображение φ: $\xi | U \to \mathbb{R}^n$ принадлежит Φ, то изоморфизм

$$\varphi_x \colon (E_x, \ \omega_x) \to (\mathbb{R}^n, \ \omega^n)$$

сохраняет ориентацию. Мы называем ω *когерентным* семейством ориентаций слоев. Атлас Φ называется *ориентирующим атласом, принадлежащим* ω.

Если ξ обладает ориентацией ω, то ξ называется *ориентируемым*, а пара (ξ, ω) называется *ориентированным векторным расслоением*. Легко видеть, что если ξ есть векторное расслоение класса C^r с любым $r \geqslant 1$ и ω есть ориентация, то ξ обладает C^r-атласом, принадлежащим ω. Ориентированное векторное расслоение класса C^r можно определить как векторное расслоение класса C^r вместе с максимальным ориентирующим C^r-атласом.

Пусть F: $\eta \to \xi$ — биморфизм. Если ξ обладает ориентацией ω, то η обладает единственной ориентацией θ, такой, что F отображает слои в слои посредством изоморфизмов, сохраняющих ориентацию. Таким образом, расслоение $f^*\xi$, индуцированное ориентированным расслоением (ξ, ω), обладает естественной ориентацией $f^*\omega$.

Пусть теперь $\xi = (p, E, B)$ — произвольное векторное расслоение. Пусть, далее, λ: $I \to B$ — путь и ω — ориентация слоя $\xi \mid \lambda(0)$. Мы следующим образом переносим ω вдоль λ. Так как индуцированное расслоение $\lambda^*\xi \to I$ тривиально и отрезок I связен, то $\lambda^*\xi$ обладает единственной ориентацией θ, совпадающей с $\lambda^*\omega$ над $0 \in I$. Мы обозначаем через $\lambda_\#\omega$ ориентацию слоя $\xi \mid \lambda(1)$, такую, что θ совпадает с $\lambda^*(\lambda_\#\omega)$ над $1 \in I$.

Пусть μ: $I \to B$ — другой путь с $\lambda(0) = \mu(0)$ и $\lambda(1) = \mu(1)$. *Если* $\lambda \simeq \mu \operatorname{rel} \{0, 1\}$, *то* $\mu_\#\omega = \lambda_\#\omega$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим такое отображение f: $D^2 \to B$, что $f = \lambda$ на верхней полуокружности $I_+ \subset \partial D^2$ и $f = \mu$ на нижней полуокружности $I_- \subset \partial D^2$. Поскольку диск D^2 стягиваем, расслоение $f^*\xi$ тривиально и потому ориентируемо. Так как диск D^2 связен, $f^*\xi$ обладает единственной ориентацией θ, содержащей $f^*\omega = \lambda^*\omega = \mu^*\omega$. Поэтому над $1 \in I$ ориентации θ, $f^*\lambda_\#\omega$ и $f^*\mu_\#\omega$ совпадают. Это доказывает, что $\lambda_\#\omega = \mu_\#\omega$.

Из сказанного следует, что *всякое векторное расслоение над односвязным многообразием M ориентируемо*. Чтобы убедиться в этом, возьмем точку $x_0 \in M$ и для всякой точки $y \in M$ выберем путь λ_y: $I \to M$, соединяющий x_0 с y (мы можем предположить, конечно, что M линейно связно). Фиксируем произвольную ориентацию ω слоя $\xi \mid x_0$ и положим $\omega_y = \lambda_{y\#}\omega$. Так как M односвязно, ω_y не зависит от выбора пути λ_y. Если φ: $U \to \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{R}^n_+$ [1])) есть карта многообразия M и y есть точка множества U, то при всяком $z \in U$ мы можем выбрать путь λ_z как путь λ_y, дополненный прямолинейным (по отношению к φ) путем, соединяющим y с z. При таком выборе путей λ_z видно, что семейство $\{\omega_z\}_{z \in U}$ есть ориентация сужения $\xi \mid U$. Следовательно, $\omega = \{\omega_y\}_{y \in M}$ есть ориентация расслоения ξ.

Справедливо и более общее утверждение, что векторное расслоение $\xi \to M$ ориентируемо в том и только в том случае, если всякая петля λ: $I \to M$ $(\lambda(0) = \lambda(1))$ *сохраняет ориентацию* слоя $\xi \mid \lambda(0)$; другими словами, $\lambda_\#\omega = \omega$ для ориентации ω слоя

[1]) Подразумевается стандартное полупространство пространства $\mathbb{R}^n$, выделяемое условием неотрицательности первой координаты.— *Прим. перев.*

$\xi|\lambda(0)$. Если это условие выполнено и M связно, то ориентация произвольно взятого одного слоя ξ_x продолжается до единственной ориентации расслоения ξ; продолжение осуществляется перенесением вдоль путей. Так как каждый слой имеет в точности две ориентации, мы видим, что *ориентируемое векторное расслоение над связным многообразием имеет в точности две ориентации.* Если одна из этих ориентаций обозначена через ω, то другая обозначается через $-\omega$.

В общем случае векторное расслоение $\xi = (p, E, B)$ имеет ориентированное двулистное накрытие $\tilde{\xi} = (\tilde{p}, \tilde{E}, \tilde{B})$. Чтобы описать его, положим

$$\tilde{B} = \{(x,\omega) \mid x \in B, \omega \text{ есть ориентация слоя } \xi_x\}.$$

Топология пространства $\tilde{B}$ порождается множествами $\{x, \theta_x\}_{x \in U}$, где $U \subset B$ — открытое множество и θ — ориентация сужения $\xi|U$. Имеется естественное отображение $p: \tilde{B} \to B$, $p(x, \omega) = x$. Положим $\tilde{\xi} = p^*\xi$. *Естественная ориентация* расслоения $\tilde{\xi}$ определяется следующим образом: если $(x, \omega) \in \tilde{B}$, то мы относим слою $\tilde{\xi}|(x, \omega)$ ориентацию $p^*\omega$. Сечение $B \to \tilde{B}$ есть не что иное, как ориентация расслоения ξ. Мы снова получаем, в частности, что если база B односвязна, то расслоение ξ ориентируемо.

Пусть $0 \to \xi' \to \xi \to \xi'' \to 0$ — короткая точная последовательность векторных расслоений. По данным ориентациям ω', ω'' расслоений ξ', ξ'' определяется семейство $\omega = \{\omega_x\}_{x \in B}$ ориентаций слоев расслоения ξ. Локальные тривиализации позволяют немедленно убедиться в том, что семейство ω когерентно; таким образом, ω есть ориентация расслоения ξ. Из трех ориентаций ω, ω', ω'' любые две определяют третью. Мы полагаем $\omega = \omega' \oplus \omega''$ и т. д. В частности, справедливо следующее предложение.

4.1. Лемма. *Если два из расслоений ξ, ξ', ξ'' ориентируемы, то ориентируемо и третье.*

Пусть M — многообразие. Говорят, что M *ориентируемо*, если ориентируемо векторное расслоение TM. Под *ориентацией многообразия* M понимают ориентацию расслоения TM. *Ориентированное многообразие* — это пара (M, ω), где M есть многообразие, а ω — ориентация этого многообразия. Через $-\omega$ обозначается ориентация многообразия M, такая что $(-\omega)_x = -\omega_x$ (равенство связывает ориентации пространства M_x) для каждой точки $x \in M$. Если многообразие M связно и ориентируемо, оно имеет в точности две ориентации, ω и $-\omega$. Всякое односвязное многообразие ориентируемо.

Вот другое определение «ориентируемого многообразия»: многообразие M ориентируемо, если оно обладает атласом, в котором переходы от одних координат к другим имеют положительные якобианы. Максимальный атлас, обладающий этим свойством, называется *ориентированной дифференциальной структурой*. Рассматривая естественные карты векторного расслоения, мы видим, что эти два определения эквивалентны.

Пусть (M, ω) и (N, θ) — ориентированные многообразия. Диффеоморфизм f: $M \to N$ называется *сохраняющим ориентацию*, если Tf: $(TM, \omega) \to (TN, \theta)$ сохраняет ориентацию; в этом случае мы можем написать $f(\omega) = \theta$. Если же Tf обращает ориентацию, то и f называется *обращающим ориентацию*. Заметим, что если M связно, то f должно обладать одним из этих свойств; чтобы узнать, каким именно, достаточно посмотреть, сохраняет ли ориентацию одно какое-нибудь отображение T_xf.

Пусть теперь M — связное ориентированное многообразие, и пусть g: $M \to M$ — диффеоморфизм. Пусть ω, $-\omega$ — две ориентации многообразия M. Тогда либо $g(\omega) = \omega$ и $g(-\omega) = -\omega$, либо $g(\omega) = -\omega$ и $g(-\omega) = \omega$. Другими словами, g либо сохраняет обе имеющиеся у M ориентации, либо обе их обращает. Соответственно мы называем диффеоморфизм M сохраняющим или обращающим ориентацию, и это его свойство никак не связано с выбором ориентации на M. Если Φ есть ориентированная дифференциальная структура на M, то f сохраняет ориентацию, когда $f^*\Phi = \Phi$, т. е. когда в любой точке дифференциал отображения f, выраженного в картах атласа Φ, имеет положительный якобиан.

В качестве примера рассмотрим диффеоморфизм сферы S^n, определяемый линейным ортогональным оператором $L \in O(n+1)$. Так как L отображает шар D^{n+1} на D^{n+1}, сужение $L|S^n$ в том и только том случае сохраняет ориентацию, если ее сохраняет сужение $L|D^{n+1}$, или, что эквивалентно, если само L сохраняет ориентацию пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, *$L|S^n$ сохраняет ориентацию в том и только том случае, если* $\det L > 0$. В частности, *отражение в гиперплоскости всегда обращает ориентацию*; *антиподальное отображение сферы S^n сохраняет ориентацию, если n нечетно, и обращает ориентацию, если n четно.*

Пусть M — многообразие и $\tilde{\xi} = (\tilde{p}, \tilde{E}, \tilde{M})$ — ориентированное двулистное накрытие векторного расслоения TM. Легко видеть, что $\tilde{\xi}$ естественно изоморфно $T\tilde{M}$. Следовательно, многообразие $\tilde{M}$ ориентируемо. Это показывает, что *всякое многообразие M обладает ориентированным двулистным накрытием* $\tilde{M}$. Легко видеть, что естественное отображение p: $\tilde{M} \to M$ является субмерсией. Если M ориентируемо, то каждая ориентация ω многообразия M определяет сечение s_ω: $\tilde{M} \to M$ по формуле $s_\omega(x) = (x, \omega_x)$. Обратно, всякое сечение определяет ориентацию многсобразия M.

Рассмотрим теперь алгебраическое нормальное расслоение ν края ∂M в M.

4.2. Теорема. *Расслоение ν тривиально и потому ориентируемо.*

Доказательство. Пусть $n = \dim M$. Положим

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant 0\}$$

и определим проекцию π: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ формулой $\pi(x) = x_1$.

Пусть, далее, $\{\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^n_+\}$ — семейство карт многообразия M, покрывающее ∂M. Рассмотрим морфизмы

$$F_i: TM \mid \partial U_i \to \mathbb{R},$$
$$F_{ix} = D(\pi\varphi_i)_x.$$

Так как отображение F_i переводит $T(\partial U_i)$ в 0, оно индуцирует морфизм

$$G_i: \nu \mid \partial U_i \to \mathbb{R},$$

который, очевидно, является биморфизмом. Заметим, в частности, что если $x \in \partial U_i \cap \partial U_j$, то линейное отображение

$$G_{jx}G_{ix}^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

положительно. Это эквивалентно тому факту, что каждое φ_i отображает U_i на полупространство, лежащее по ту же сторону от $\partial\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n$. Этим уже доказано, что расслоение ν ориентируемо. Тривиализация же его получается склеиванием всех G_i с помощью разбиения единицы. ∎

В последней части предыдущего доказательства неявно содержится доказательство следующего факта.

4.3. Теорема. *Ориентируемое одномерное векторное расслоение над паракомпактным пространством тривиально.*

Это верно во всех C^r-категориях, хотя, как обычно, аналитический случай требует отдельного доказательства. Теорема 4.3, однако, неверна без предположения о паракомпактности: касательное расслоение длинной прямой ориентируемо, но если бы оно было тривиально, длинная прямая обладала бы римановой метрикой и была бы, следовательно, метризуемой!

Обратимся теперь к классическим геометрическим применениям ориентаций.

4.4. Лемма. *Пусть N — связное многообразие, и пусть M — его связное замкнутое подмногообразие коразмерности 1, причем $\partial M = \partial N = \varnothing$. Если M разделяет N, то нормальное расслоение ν многообразия M в N тривиально и $N - M$ имеет в точности* *две компоненты; при этом (топологическая) граница каждой из компонент есть M.*

Доказательство. Пусть $A \subset N$ — компонента разности $N - M$. Тогда M есть граница множества A. Действительно, поскольку M замкнуто, $\operatorname{Bd} A$ есть непустое замкнутое подмножество множества M. Рассматривая нормальные карты пары (N, M), мы видим, что $\operatorname{Bd} A$ также и открыто в M. Так как M связно, то $\operatorname{Bd} A = M$. Нормальные карты пары (N, M) показывают также, что A есть подмногообразие многообразия N с $\partial \bar{A} = M$. Очевидно, ν есть нормальное расслоение многообразия M также и в $\bar{A}$; ввиду этого теорема 4.2 показывает, что это расслоение тривиально. Пусть B — другая компонента разности $N - M$; тогда $\bar{B}$ также есть подмногообразие многообразия N с краем M. Объединение $\bar{A} \cup \bar{B}$ замкнуто в N. Теорема об инвариантности области (или теорема об обратной функции) показывает, что это объединение также и открыто. Следовательно, $\bar{A} \cup \bar{B} = N$. ∎

Следующее предложение вытекает из лемм 4.1 и 4.4.

4.5. Теорема. *Пусть N — связное многообразие и M — его компактное связное подмногообразие коразмерности* 1, *и пусть $\partial M = \partial N = \varnothing$. Если M разделяет N, то M ориентируемо вместе с N.*

А вот фундаментальный топологический результат.

4.6. Теорема. *Пусть N — односвязное многообразие и M — его компактное связное подмногообразие коразмерности* 1, *и пусть $\partial M = \partial N = \varnothing$. Тогда M разделяет N.*

Доказательство. Мы можем считать N связным. Пусть $x_0, x_1 \in N - M$, и пусть $f\colon I \to N$ — путь класса C^∞, соединяющий x_0 с x_1. Предположим, что путь f трансверсален M. Тогда $f^{-1}(M)$ есть конечное подмножество отрезка I. Пусть $L(x_0, x_1, f) \in \mathbb{Z}_2$ — вычет по модулю 2 числа точек множества $f^{-1}(M)$. Покажем, что $L(x_0, x_1, f)$ *не зависит от* f. Действительно, пусть $g\colon I \to N$ — другой такой путь. Поскольку N односвязно, пути f, g гомотопны, т. е. существует отображение $H\colon I \times I \to N$, такое, что $H(t, 0) = f(t)$, $H(t, 1) = g(t)$, $H(0, t) = x_0$ и $H(1, t) = x_1$. Применяя, если нужно, аппроксимацию, мы можем считать, что отображение H принадлежит классу C^∞ и трансверсально M. Тогда $H^{-1}(M)$ есть компактное одномерное подмногообразие квадрата $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ с краем $(f^{-1}(0) \times 0) \cup (g^{-1}(0) \times 1)$. Остается заметить, что $H^{-1}(M)$ имеет четное число граничных точек.

Ясно, что существуют x_0, x_1, f с $L(x_0, x_1, f) = 1$; например, можно взять за x_0, x_1 две точки маленькой дуги, трансверсально пересекающей M, лежащие по разные стороны от M. Тогда x_0 и x_1 лежат в разных компонентах разности $N - M$, так как в противном случае существовал бы путь g, соединяющий их в $N - M$. Такой путь можно сделать C^∞-путем, и он будет автоматически трансверсален к M; для этого пути $L(x_0, x_1, g) = 0$, что противоречит доказанному выше. ∎

Следствием из теоремы 4.6 является простейшая «теорема невложимости».

4.7. Теорема. *Компактное неориентируемое n-многообразие без края не может быть вложено в односвязное $(n+1)$-многообразие. В частности, при $n \geqslant 1$ $2n$-мерное вещественное проективное пространство P^{2n} не вкладывается в $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Доказательство. Односвязное многообразие ориентируемо; ввиду теорем 4.5 и 4.6 это доказывает первое утверждение. Чтобы доказать второе, мы должны показать, что P^{2n} неориентируемо. Интерпретируем P^{2n} как факторпространство сферы S^{2n} по антиподальному отображению A; пусть $p\colon S^{2n} \to P^{2n}$ — проекция. Мы уже знаем, что A обращает ориентацию. Поэтому P^{2n} не может быть ориентируемо: если ω — ориентация многообразия P^{2n}, то у сферы S^{2n} существовала бы (единственная) ориентация θ, такая, что $T_x p(\theta_x) = \omega_{p(x)}$ для всех точек $x \in S^{2n}$. Но такая ориентация θ была бы инвариантна относительно антиподального отображения, что невозможно. ∎

Теорема 4.7 станет неверной, если заменить в ней требование односвязности требованием ориентируемости; например, P^{2n} вкладывается в ориентируемое многообразие P^{2n+1}.

В то же время можно показать, что P^{2n+1} не вкладывается в $\mathbb{R}^{2n+2}$, но это требует более тонких методов.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для любого векторного расслоения ξ расслоение $\xi \oplus \xi$ ориентируемо. Из этого следует, что TM всегда есть ориентируемое многообразие.

2. Для любого $n \geqslant 1$ существует в точности два класса изоморфных n-мерных векторных расслоений над S^1. Два таких расслоения изоморфны в том и только том случае, если они оба ориентируемы или оба неориентируемы.

3. Произведение $M \times N$ ориентируемо в том и только том случае, если ориентируемы оба сомножителя M, N.

4. Всякая группа Ли есть ориентируемое многообразие.

(В упр. 5—9 M есть замкнутое подмногообразие коразмерности 1 многообразия N.)

5. Если $\partial M \neq \varnothing$, а $\partial N = \varnothing$ и многообразия M, N связны, то разность $N - M$ также связна.

6. Предположим, что $N = \mathbb{R}^{n+1}$, многообразие M компактно и $\partial M = \varnothing$. Тогда M ограничивает единственное компактное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

7. Предположим, что M — правильное подмногообразие. Тогда нормальное расслоение многообразия M в N тривиально в том и только том случае, если M разделяет свою сколь угодно малую окрестность в N.

8. Предположим, что M компактно и $\partial M = \varnothing$. Если M стягивается в точку в N, то M разделяет N.

9. Если $M = \partial W$, где W — компактное подмногообразие многообразия N, отличное от N, то M разделяет N.

10. Классы изоморфных ориентированных k-мерных расслоений над n-многообразием M естественно соответствуют гомотопическим классам отображений многообразия M в грассманово многообразие $\tilde{G}_{s,k}$ ориентированных k-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^s$ при условии, что $s \geqslant k + n$.

*11. Пусть $\xi \to B$ — неориентируемое векторное расслоение над связным многообразием M. Множество гомотопических классов петель многообразия M с началом x_0, сохраняющих ориентацию, является подгруппой индекса 2 группы $\pi_1(M, x_0)$.

12. Пусть M — связное ориентируемое многообразие. Подгруппа $\mathrm{Diff}^r_+(M)$ группы $\mathrm{Diff}^r(M)$, составленная из сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов, нормальна и имеет индекс 1 или 2 ($1 \leqslant r \leqslant \omega$). Более того, при $r \leqslant \infty$ подгруппа $\mathrm{Diff}^r_+(M)$ открыта и замкнута как в сильной, так и в слабой топологии.

5. ТРУБЧАТЫЕ ОКРЕСТНОСТИ

Пусть M — подмногообразие многообразия V. *Трубчатой окрестностью подмногообразия M в V* (или *трубчатой окрестностью, отвечающей паре* (V, M)) называется пара (f, ξ), в которой $\xi = (p, E, M)$ есть векторное расслоение над M, а $f\colon E \to V$ есть вложение, такое, что

1. $f \mid M = 1_M$, где M отождествляется с нулевым сечением в E;
2. $f(E)$ есть открытая окрестность множества M в V.

Допуская вольность речи, мы будем часто называть трубчатой окрестностью само множество $W = f(E)$. При этом подразумевается, что наряду с W задана некоторая ретракция $q\colon W \to M$, делающая (q, W, M) векторным расслоением, нулевое сечение которого есть включение $M \to W$.

Легко понять, что трубчатые окрестности могут быть только у правильных подмногообразий.

Чуть более общим является понятие *частичной трубчатой окрестности* подмногообразия M. Это — тройка (f, ξ, U), в которой $\xi = (p, E, M)$ — векторное расслоение над M, U — окрестность нулевого сечения в E и $f\colon U \to V$ — такое вложение, что $f|M = 1_M$ и множество $f(U)$ открыто в V.

Частичная трубчатая окрестность (f, ξ, U) содержит трубчатую окрестность в следующем смысле: существует трубчатая окрестность (g, ξ) многообразия M в V, такая, что $g = f$ в окрестности многообразия M. Чтобы построить g, фиксируем на ξ ортогональную структуру и выберем отображение $\rho\colon M \to \mathbb{R}_+$, такое, что если $y \in E_x$ и $|y| \leqslant \rho(x)$, то $y \in f(U)$. Пусть $\lambda\colon [0, \infty) \to [0, 1)$ — диффеоморфизм, совпадающий с тождественным вблизи 0. Определим вложение $h\colon E \to E$ формулой

$$h(y) = \rho(p(y))\,\lambda(|y|)\,y/|y|.$$

Очевидно, $h(E) \subset U$ и $h = 1_E$ вблизи M, и нам остается положить $g = fh$.

Наша цель — доказать, что всякое правильное подмногообразие обладает трубчатой окрестностью (теорема 6.3). В качестве первого шага мы установим следующий факт.

5.1. Теорема. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — подмногообразие без края. Тогда M обладает в $\mathbb{R}^n$ трубчатой окрестностью.*

Доказательство. Достаточно построить частичную трубчатую окрестность.

Положим $k = n - \dim M$ и рассмотрим грассманово расслоение $\gamma_{n,k} \to G_{n,k}$ (см. § 4.3). Пусть $\nu\colon M \to G_{n,k}$ есть *поле* (класса C^∞) *трансверсальных k-мерных плоскостей*; это означает, что для каждой точки $x \in M$ касательная плоскость $M_x \subset \mathbb{R}^n$ трансверсальна плоскости $\nu(x)$. Можно положить, например, $\nu(x) = M_x^\perp$.

Положим

$$\xi = (p, E, M) = \nu^*\gamma_{n,k};$$

таким образом, ξ есть векторное расслоение и

$$E = \{(x, y) \in M \times \mathbb{R}^n \,|\, y \in \nu(x)\}.$$

Рассмотрим отображение

$$f\colon E \to \mathbb{R}^n,$$
$$f(x, y) = x + y \quad (y \in \nu(x)).$$

Касательное пространство к многообразию E в точке $(x, 0)$ нулевого сечения имеет естественное разложение $M_x \oplus \nu(x)$. Ясно, что дифференциал $T_{(x,0)}f$ является тождественным отображением как на M_x, так и на $\nu(x)$. Следовательно, Tf имеет ранг n во всех точках нулевого сечения, и, значит, отображение f является погружением в некоторой окрестности нулевого сечения. Поскольку $f|M = 1_M$, из упр. 7 к § 2.1 вытекает, что сужение отображения f на некоторую открытую окрестность U многообразия

M в E является вложением. Таким образом, (f, ξ, U) есть частичная трубчатая окрестность подмногообразия M в $\mathbb{R}^n$. ∎

Трубчатая окрестность, доставляемая предыдущей конструкцией, если взять $\nu(x) = M_x^{\perp}$, называется *нормальной трубчатой окрестностью многообразия* M в $\mathbb{R}^n$. Нетрудно показать, что в этом случае окрестность U можно сделать столь малой, что $f(U \cap \nu_x)$ будет множеством точек из $f(U)$, для которых x есть ближайшая точка многообразия M. См. рис. 4—1.

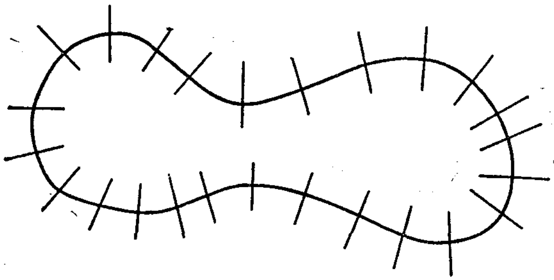


Рис. 4—1. Нормальная трубчатая окрестность.

5.2. Теорема. *Пусть M — подмногообразие многообразия V и $\partial M = \partial V = \varnothing$. Тогда M обладает в V трубчатой окрестностью.*

Доказательство. Мы можем считать, что $V \subset \mathbb{R}^n$. Пусть W — окрестность многообразия V в $\mathbb{R}^n$ и $r\colon W \to V$ — ретракция класса C^∞. (Такие W и r существуют, поскольку V имеет в $\mathbb{R}^n$ трубчатую окрестность.) Пусть $\nu = (p, E, M)$ — (геометрическое) нормальное расслоение многообразия M в V по отношению к римановой метрике, индуцированной вложением многообразия V в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\nu \subset T_M V \subset T_M \mathbb{R}^n = M \times \mathbb{R}^n;$$

при этом каждый слой ν_x содержится в $x \times \mathbb{R}^n$.

Положим для $x \in M$

$$U_x = \{(x, y) \in \nu_x \mid x + y \in W\}$$

и обозначим через U объединение $\bigcup_{x \in M} U_x$. Множество U открыто в E, поскольку оно является прообразом множества W при отображении

$$E \to \mathbb{R}^n,$$
$$(x, y) \mapsto x + y \quad (y \in \nu_x).$$

Легко проверить, что отображение

$$f\colon U \to V,$$
$$f(x, y) = r(x+y)$$

доставляет для пары (V, M) частичную трубчатую окрестность. ∎

Имеется полезная конструкция, позволяющая «вдвигать» одну трубчатую окрестность подмногообразия в другую, так что при этом слои линейно отображаются на слои. Это «вдвижение» является специальным случаем изотопии. В большей общности изотопии рассматриваются в одной из последующих глав; для наших теперешних целей достаточно следующих замечаний.

Изотопия многообразия P в многообразие Q есть гомотопия

$$F\colon P \times I \to Q,$$
$$F(x, t) = F_t(x),$$

такая, что соответствующее отображение

$$\hat{F}\colon P \times I \to Q \times I,$$
$$\hat{F}(x, t) = (F_t(x), t),$$

является вложением. Это отображение $\hat{F}$ мы называем *следом* изотопии F. Мы говорим также, что F есть изотопия, *соединяющая* F_0 *с* F_1. Если подмножество A многообразия P таково, что $F_t(x) = F_0(x)$ при $(x, t) \in A \times I$, то говорят, что изотопия F *связана на* A.

Отношение «f изотопно g» транзитивно. Действительно, пусть F, G — изотопии многообразия P в Q, такие, что $F_1 = G_0$. Мы можем *почти* определить изотопию H, соединяющую F_0 с G_1, положив

$$H_t = \begin{cases} F_{2t} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ G_{2t-1} & \text{при } 1/2 \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

однако отображение H не обязано быть гладким в точках множества $P \times (1/2)$. Выход из положения заключается в том, чтобы написать

$$H_t = \begin{cases} F_{2\tau(t)} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ G_{2\tau(t)-1} & \text{при } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $\tau\colon I \to I$ — произвольное C^∞-отображение, сжимающее при $i = 0, 1$ окрестность точки i в i. Теперь H действительно является изотопией, соединяющей F_0 с G_1.

Аналогичным образом доказывается, что отношением эквивалентности является изотопность, связанная на множестве.

Пусть теперь $(f_i, \xi_i = (p_i, E_i, M))$ — трубчатые окрестности многообразия M в V $(i = 0, 1)$. *Изотопия между трубчатыми* *окрестностями* (f_0, ξ_0), (f_1, ξ_1) есть по определению связанная на M изотопия F многообразия E_0 в V, такая, что

$F_0 = f_0$;

$F_0(E_0) = f_1(E_1)$;

$f_1^{-1}F_0\colon E_0 \to E_1$ есть изоморфизм $\xi_0 \to \xi_1$ между векторными расслоениями;

и множество $\widehat{F}(E_0 \times I)$ открыто в $V \times I$.

Последнее условие выполняется автоматически, если $\partial M = \varnothing$.

Можно представлять себе $\{F_t(E_0)\}_{t \in I}$ как однопараметрическое семейство трубчатых окрестностей многообразия M. Заметим также, что $\widehat{F}$ определяет трубчатую окрестность многообразия $M \times I$ в $V \times I$.

Легко видеть, что изотопия есть отношение эквивалентности для трубчатых окрестностей, отвечающих паре (V, M).

5.3. Теорема. *Пусть M — подмногообразие многообразия V, и пусть $\partial M = \partial V = \varnothing$. Тогда любые две трубчатые окрестности подмногообразия M в V изотопны.*

Доказательство. Пусть $(f_i, \xi_i = (p_i, E_i, M))$, $i = 0, 1$, — заданные трубчатые окрестности. Предположим сначала, что $f_0(E_0) \subset f_1(E_1)$.

Пусть $\Phi\colon \xi_0 \to \xi_1$ — *послойный дифференциал* отображения $g = f_1^{-1}f_0\colon E_0 \to E_1$. Другими словами, Φ есть отвечающее слоям слагаемое морфизма

$$T_M g\colon T_M E_0 = TM \oplus \xi_0 \to TM \oplus \xi_1 = T_M E_1,$$

и из этого описания видно, что Φ есть изоморфизм.

Определим *каноническую гомотопию, соединяющую* Φ *с* g:

$$H\colon E_0 \times I \to E_1,$$

$$H(x, t) = \begin{cases} t^{-1}g(tx) & \text{при } 1 \geqslant t > 0, \\ \Phi(x) & \text{при } t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(Здесь tx понимается в смысле умножения на скаляр в слое, содержащем x, и т. д.)

Покажем, что H принадлежит классу C^∞. Это — локальное утверждение; его можно доказывать, ограничиваясь картами многообразия M и расслоений ξ_0 и ξ_1. Такие карты локально превращают g в C^∞-вложение

$$g\colon U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k,$$

$$g(x, y) = (g_1(x, y),\ g_2(x, y)),$$

$$g(x, 0) = (x, 0),$$

где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. В этой локальной ситуации

$$\Phi\colon U\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,$$
$$\Phi(x, y)=\left(x, \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, 0)\,y\right).$$

Здесь $\partial g_2/\partial y$ относит каждой точке произведения $U\times\mathbb{R}^k$ линейное отображение $\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$. Локальным представлением отображения H служит отображение $(U\times\mathbb{R}^k)\times I\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$, задаваемое прежней формулой (1).

В силу формулы Тейлора, мы можем написать

$$(2)\qquad g_2(x, y)=\frac{\partial g_2}{\partial y}(x, 0)\,y+\langle s(x, y), y\rangle,$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$ и $s\colon U\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ есть C^∞-отображение с $s(x, 0)=0$.

Тривиальная проверка показывает, что первая координатная функция (локального представления) отображения H, заданного формулой (1), определяет C^∞-отображение $U\times\mathbb{R}^m\times I\to\mathbb{R}^m$. В силу (2), его вторая координатная функция действует по формуле

$$H_2(x, y, t)=\frac{\partial g_2}{\partial y}(x, 0)\,y+\langle s(x, ty), y\rangle.$$

Ясно, что эта функция принадлежит классу C^∞ в точке (x, y, t). Таким образом, H тоже принадлежит классу C^∞, и совсем легко проверить, что H есть изотопия.

Изотопия между трубчатыми окрестностями (f_0, ξ_0), (f_1, ξ_1) теперь может быть определена формулой

$$F(x, t)=f_1^{-1}H(x, 1-t).$$

Все это делалось в предположении, что $f_0(E_0)\subset f_1(E_1)$. Чтобы перейти к общему случаю, мы втянем сначала E_0 в открытое множество $f_0^{-1}f_1(E_1)\subset F_0$ с помощью предварительной изотопии вида

$$G\colon E_0\times I\to E_0,$$
$$G(y, t)=(1-t)\,y+th(y),$$

где

$$h\colon E_0\to E_0,$$
$$h(y)=\left[\frac{\delta(p(y))}{1+y^2}\right]y,$$

и $\delta\colon M\to\mathbb{R}_+$ — надлежащее малое C^∞-отображение.

Таким образом, (f_0, ξ_0) и (f_0G_1, ξ_0) — изотопные трубчатые окрестности. Так как f_0G_1 отображает E_0 в F_1, то же верно для (f_0G_1, ξ_0) и (f_1, ξ_1). Теорема 5.3 вытекает теперь из транзитивности отношения изотопности. ∎

6. ВОРОТНИКИ И ТРУБЧАТЫЕ ОКРЕСТНОСТИ ПРАВИЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Край многообразия не может иметь трубчатую окрестность. Однако он имеет своего рода «полутрубчатую» окрестность, называемую *воротником*. Воротник многообразия M — это вложение

$$f\colon \partial M \times [0, \infty) \to M,$$

такое, что $f(x, 0) = x$. Имеет место следующая *теорема о воротнике*.

6.1. Теорема. *У ∂M есть воротник.*

Доказательство, использующее дифференциальные уравнения, будет приведено в § 5.2. Ниже дается набросок другого доказательства.

Прежде всего построим C^∞-ретракцию $r\colon W \to \partial M$ окрестности края ∂M на ∂M. Локально это, очевидно, возможно, а две локальные ретракции в координатных окрестностях могут быть склеены при помощи буферной функции. Глобальная ретракция строится после этого с помощью стандартной глобализационной техники (например, с помощью теоремы 2.2.11).

Затем мы находим окрестность $U \subset M$ края ∂M и отображение

$$g\colon U \to [0, \infty),$$
$$g(\partial M) = 0,$$

для которого 0 есть регулярное значение. Это легко делается с помощью разбиения единицы.

После этого мы замечаем, что отображение

$$h = (r, g)\colon W \to \partial M \times [0, \infty)$$

диффеоморфно отображает окрестность края ∂M на окрестность множества ∂M в $\partial M \times [0, \infty)$ и что $h(x) = (x, 0)$ при $x \in \partial M$.

Наконец, мы определяем $\varphi\colon \partial M \times [0, \infty) \to h(W)$ как вложение, неподвижное на $\partial M \times 0$. Композиция $h^{-1}\varphi$ и будет воротником. ∎

Верно также, что C^0-многообразия имеют воротники, но это далеко не очевидно. Элегантное и неожиданное доказательство этого факта принадлежит М. Брауну [2].

Доказательство следующего уточнения теоремы 6.1 мы оставляем читателю в качестве упражнения.

... **Теорема.** *Пусть M — правильное подмногообразие многообразия V. Тогда у ∂V есть воротник, который суживается до воротника многообразия M.*

Воротники позволяют нам доказать следующее предложение.

6.3. Теорема. *Пусть M — правильное подмногообразие многообразия V. Тогда M обладает в V трубчатой окрестностью.*

Доказательство. В силу теоремы 6.2 существует окрестность $N \subset V$ края ∂V и диффеоморфизм

$$\varphi\colon (N, \partial V) \to (\partial V \times I, \partial V \times 0),$$

такой, что

$$\varphi(N \cap \partial M) = \partial M \times I.$$

Пусть $q > 2\dim V$. Вложим ∂V в $\mathbb{R}^{q-1}$ и продолжим это вложение до вложения

$$\partial V \times I \to \mathbb{R}^{q-1} \times [0, \infty) = \mathbb{R}^q_+.$$

Мы можем считать, таким образом, что N вложено в $\mathbb{R}^q_+$ и что это вложение таково, что *всякий вектор пространства $\mathbb{R}^q$, нормальный к N в точке края ∂V или нормальный к $N \cap M$ в точке края ∂V, содержится в $\mathbb{R}^{q-1}$*. См. рис. 4—2.

Это вложение множества N можно продолжить до вложения многообразия V в $\mathbb{R}^q_+$. Таким образом, теперь V есть правильное подмногообразие полупространства $\mathbb{R}^q_+$, причем как V, так и M подходят к $\mathbb{R}^{q-1}$ ортогонально вдоль края.

Мы можем построить теперь нормальную трубчатую окрестность многообразия V в $\mathbb{R}^q_+$ (рис. 4—3), и остающаяся часть доказательства повторяет доказательство теоремы 5.2. ∎

Оказывается полезной следующая *теорема продолжения трубчатых окрестностей.*

6.4. Теорема. *Пусть M — правильное подмногообразие многообразия V. Тогда всякая трубчатая окрестность края ∂M в ∂V является пересечением с ∂V некоторой трубчатой окрестности многообразия M в V.*

Доказательство. Рассмотрим сначала специальный случай, когда $V = W \times I$, $M = N \times I$, где N есть подмногообразие многообразия W и $\partial N = \partial W = \varnothing$. Тогда

$$\partial V = (W \times 0) \cup (W \times 1),$$
$$\partial M = (N \times 0) \cup (N \times 1).$$

В этом случае трубчатая окрестность, отвечающая паре $(\partial V, \partial M)$, есть просто пара трубчатых окрестностей, отвечающих (W, N).

Обозначим последние через E_0, E_1. Согласно теореме 5.3, существует изотопия трубчатых окрестностей, связывающая E_0 с E_1, скажем F: $E_0 \times I \to W$. Тогда соответствующее вложение

$$\hat{F}: E_0 \times I \to W \times I = W,$$
$$\hat{F}(x, t) = (F(x, t), t)$$

есть трубчатая окрестность для $N \times I = M$ в V, суживающаяся до E_0 и E_1 в ∂V.

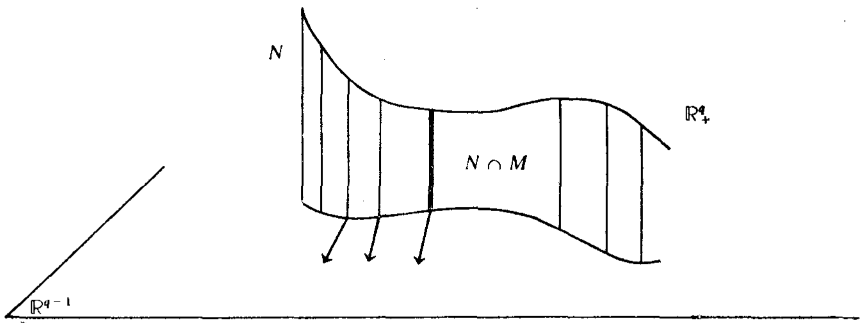


Рис. 4—2. Вложение многообразия N в $\mathbb{R}^q_+$.

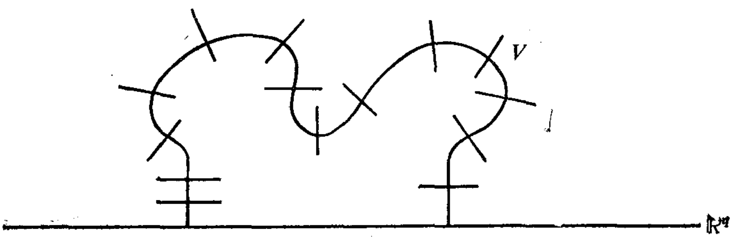


Рис. 4—3. Нормальная трубчатая окрестность многообразия V в $\mathbb{R}^q_+$.

Рассмотрим теперь общий случай. Построим для ∂V воротник в V, содержащий воротник края ∂M в M; в соответствии с этими воротниками мы будем отождествлять произведение $\partial V \times [0, \infty)$ с окрестностью края ∂V в V, так что $\partial M \times [0,\infty)$ соответствует окрестности края ∂M в M. Положим

$$V' = \partial V \times [0, 1], \qquad M' = \partial M \times [0, 1],$$
$$V'' = \partial V \times [1, \infty), \qquad M'' = \partial M \times [1, \infty).$$

Тогда $V = V' \cup V''$, $V' \cap V'' = \partial V \times 1$, и аналогично для M.

Пусть E_0 — трубчатая окрестность многообразия ∂M в ∂V. В силу 6.3 многообразие M'' обладает в V'' трубчатой окрестностью

E''. Пусть $E_1 = E'' \cap \partial V \subset \partial V \times 1$. Таким образом, E_0 и E_1 составляют трубчатую окрестность многообразия $M \times \{0, 1\}$ в $V \times \{0, 1\}$. В силу уже доказанной части теоремы $E_0 \cup E_1$ продолжается до некоторой трубчатой окрестности E' многообразия V' в M'. Тогда $E' \cup E''$ есть трубчатая окрестность многообразия M в V, продолжающая E_0. (В действительности следует еще убедиться в том, что E' и E'' соединяются на $\partial V''$ гладким образом; проверку мы оставляем читателю.) ∎

Замкнутая трубчатая окрестность радиуса $\varepsilon > 0$ подмногообразия M многообразия V есть по определению вложение $D_\varepsilon(\xi) \to M$, являющееся сужением некоторой трубчатой окрестности $(f, \xi = (p, E, M))$ многообразия M. Здесь

$$D_\varepsilon(\xi) = \{x \in E \mid |x| \leqslant \varepsilon\}$$

есть *шаровое подрасслоение* расслоения ξ радиуса ε по отношению к некоторой фиксированной ортогональной структуре на ξ.

Для замкнутых трубчатых окрестностей теорема об изотопии принимает следующий вид.

6.5. Теорема. *Пусть M — подмногообразие многообразия V. Пусть, далее, $\xi_i = (p_i, E_i, M)$ — ортогональные векторные расслоения над M $(i = 0, 1)$ и (f_i, ξ_i) — трубчатые окрестности многообразия M. Пусть, наконец, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Тогда (f_0, ξ_0) и (f_1, ξ_1) могут быть связаны составленной из трубчатых окрестностей изотопией $F_t\colon E \to V$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, такой, что $F_0 = f_0$ и*

$$F_1(D_\varepsilon(\xi_0)) = D_\delta(\xi_1).$$

Доказательство. В силу теоремы 5.3 мы можем считать, что (f_0, ξ_0) и (f_1, ξ_1) совпадают как трубчатые окрестности; но при этом $D_\varepsilon(\xi_0)$ и $D_\delta(\xi_1)$ могут определяться разными ортогональными структурами. Лемма 2.3 позволяет считать, однако, что эти ортогональные структуры одинаковы. Тогда теорема делается очевидной: в любом ортогональном векторном расслоении имеется линейная изотопия, переводящая $D_\varepsilon(\xi)$ в $D_\delta(\xi)$. ∎

Рассмотрим очень специальный, но полезный случай, когда M есть точка $x_0 \in V$. Открытая трубчатая окрестность точки x_0 есть вложение $(\mathbb{R}^n, 0) \to (V, x_0)$, а замкнутая трубчатая окрестность радиуса 1 есть вложение $(D^n, 0) \to (V, x_0)$ (здесь $n = \dim V$). (Мы предполагаем, что $\partial V = \varnothing$.)

6.6. Теорема. *Пусть $E^n = D^n$ или $\mathbb{R}^n$, и пусть $f_i\colon (E^n, 0) \to (V, x_0)$ — вложения $(i = 0, 1;\ n = \dim V)$. Если*

$$\det(D(f_1^{-1}f_0)(0)) > 0,$$

то f_0 и f_1 могут быть соединены изотопией, связанной в 0.

Доказательство. Заметим предварительно, что отображение $f_1^{-1}f_0$ корректно определено в окрестности точки 0 в E^n, так что определен и его дифференциал в 0. В силу теорем об изотопии трубчатых окрестностей, мы можем считать, что $f_1^{-1}f_0$ есть линейный автоморфизм $L \in GL(n)$. Если $\det L > 0$, то L соединяется в $GL(n)$ с тождественным автоморфизмом путем L_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$:

$$L_0 = f_1^{-1}f_0, \quad L_1 = 1_{R^n}.$$

Требуемая гомотопия между f_0 и f_1 определяется теперь как

$$f_1 L_t^{-1} f_1^{-1} f_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \ \blacksquare$$

Одно из полезных свойств трубчатых окрестностей заключается в том, что они позволяют сделать (посредством гомотопии) произвольное отображение между многообразиями локально похожим на отображение между векторными расслоениями. Пусть V, N — многообразия, A — компактное правильное подмногообразие многообразия N и $f\colon V \to N$ — такое отображение, что как f, так и $f\,|\,\partial V$ трансверсальны к A. Положим $M = f^{-1}(A)$; это правильное подмногообразие многообразия V. Предположим, что заданы трубчатая окрестность U многообразия M в V и трубчатая окрестность E многообразия A в N. Пусть $D \subset U$ — шаровое подрасслоение, такое, что $f(D) \subset E$.

6.7. Теорема. *Существует гомотопия h_t, соединяющая отображение $f = h_1$ с отображением $h_0 = h\colon V \to N$, такая, что*

(a) *$h\,|\,D$ есть сужение отображения $U \to E$ между векторными расслоениями, накрывающего $f\colon M \to A$;*

(b) $h_t = f$ *на* $M \cup (N - U)$ $\quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$;

(c) $h_t^{-1}(N - A) = V - M$ $\quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Доказательство. Пусть $\Phi\colon U \to E$ — отображение между векторными расслоениями, накрывающее $f\colon M \to A$, которое является послойным дифференциалом отображения $f\colon D \to E$. Пусть, далее, $f_t\colon D \to E$ $(1 \geqslant t \geqslant 0)$ — каноническая гомотопия, соединяющая $f_1 = f\,|\,D$ с $f_0 = \Phi\,|\,D$:

$$f_t(x) = \begin{cases} t^{-1}f(tx) & \text{при } 1 \geqslant t > 0, \\ \Phi(x) & \text{при } \quad t = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $f_t(\partial D) \subset N - A$.

Пусть $D' \subset U$ — такое шаровое подрасслоение, что $D \subset \operatorname{Int} D'$. Положим $D' - \operatorname{Int} D = L$; очевидно, $\partial L = \partial D' \cup \partial D$. Рассмотрим гомотопию

$$g_t\colon \partial L \to N - A,$$

$$g_t = \begin{cases} f_t & \text{на } \partial D, \\ t & \text{на } \partial D'. \end{cases}$$

В силу теоремы о продолжении гомотопии (теорема 1.4), g_t продолжается до гомотопии g_t: $L \to N - A$. Рассмотрим гомотопию

$$h_t\colon V \to N,$$

$$h_t = \begin{cases} f & \text{на } V - D', \\ g_t & \text{на } L, \\ f_t & \text{на } D. \end{cases}$$

Отображение $h = h_0$ обладает требуемыми свойствами. ∎

УПРАЖНЕНИЯ

1. Очевидным образом определяются трубчатые окрестности класса C^r и C^r-изотопии между ними ($1 \leqslant r \leqslant \infty$). Правильное C^r-подмногообразие обладает трубчатой окрестностью класса C^r, единственной с точностью до C^r-изотопии.

*2. Пусть M_0, M_1 — правильные подмногообразия многообразия V, находящиеся в общем положении. Пусть, далее, (f_0, ξ_0), (f_1, ξ_1) — трубчатые окрестности пересечения $M_0 \cap M_1$ в M_0, M_1. Тогда существует трубчатая окрестность $(f, \xi_0 \oplus \xi_1)$ пересечения $M_0 \cap M_1$ в V, такая, что $f \mid \xi_i = f_i$, $i = 0{,}1$.

*3. *Продолжаемость ростков трубчатых окрестностей.* Пусть M — правильное подмногообразие многообразия V и $U \subset M$ — окрестность замкнутого множества $A \subset M$. Для всякой трубчатой окрестности E_0 многообразия U в V найдутся трубчатая окрестность E многообразия M в V и окрестность $W \subset U$ множества A, такие, что $E \mid W = E_0 \mid W$.

4. Пусть $D \subset M$ — правильно вложенный p-шар коразмерности k. Тогда у D имеется такая окрестность $E \subset M$, что

$$(E, D) \approx (D^p \times \mathbb{R}^k, D^p \times 0).$$

5. Пусть M — замкнутое правильное подмногообразие многообразия V коразмерности k. Отображение f: $(V, M) \to (S^k, p)$, такое, что p есть его регулярное значение и $f^{-1}(p) = M$, существует в том и только том случае, если M имеет тривиальное нормальное расслоение.

6. Пусть M — подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$ коразмерности k с $\partial M = \varnothing$. Пусть ν: $M \to G_{n,k}$ — трансверсальное поле k-плоскостей. Предположим, что ν локально удовлетворяет условию Липшица по отношению к некоторым римановым метрикам на M и $G_{n,k}$. Тогда M обладает трубчатой окрестностью $U \subset \mathbb{R}^n$, слоем которой над точкой $x \in M$ служит пересечение множества U с k-плоскостью, проведенной через x параллельно $\nu(x)$. В случае когда ν только непрерывно, это может быть неверно уже для $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

7. Край непаракомпактного многообразия не обязан иметь воротник. Существует, например, 2-многообразие M, у которого $M - \partial M \approx \mathbb{R}^2$, но ∂M имеет несчетное число компонент (каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{R}$).

***8. Пусть L — длинная прямая с естественным порядком (см. упр. 2 к § 1.1), и пусть

$$M = \{(x, y) \in L \times L \mid x < y\}.$$

Тогда M есть ∂-многообразие с $\partial M \approx L$. Кажется маловероятным, чтобы у ∂M был воротник.

***9.** *Пополненная изотопия между замкнутыми трубчатыми окрестностями.* В теореме 6.5 изотопия $F_t \mid D_\varepsilon(\xi_0)$ может быть сделана частью изотопии всего многообразия V. Подробнее: существует изотопия G_t: $V \to V$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, такая, что $G_0 = 1_V$ и $F_t(x) = G_t f_0(x)$ при $x \in D_\varepsilon(\xi_0)$.

7. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

Трубчатые окрестности и трансверсальность позволяют нам доказать следующее предложение.

7.1. Теорема (Уитни). *Пусть M — компактное многообразие без края. Тогда M диффеоморфно аналитическому подмногообразию евклидова пространства.*

Доказательство. Мы можем считать, что M вложено в $\mathbb{R}^q$ и имеет там коразмерность k. Пусть $E \subset \mathbb{R}^q$ — нормальная трубчатая окрестность многообразия M. Мы отождествляем E с окрестностью нулевого сечения в нормальном расслоении многообразия M. Пусть p: $E \to M$ — сужение проекции этого расслоения.

Пусть, далее, h: $M \to G_{q,k}$ — отображение, относящее точке $x \in M$ k-плоскость, нормальную к M в точке x, и пусть $E_{q,k} \to G_{q,k}$ — грассманово k-мерное векторное расслоение, а f: $E \to E_{q,k}$ — естественное отображение, накрывающее h; другими словами,

$$f(y) = (h(y),\ y) \in E_{q,k} \subset G_{q,k} \times \mathbb{R}^q.$$

Заметим, что f трансверсально к нулевому сечению $G_{q,k} \subset E_{q,k}$ и что

$$f^{-1}(G_{q,k}) = M.$$

Центральным местом доказательства является C^1-аппроксимация отображения f аналитическим отображением. Это делается с помощью теоремы 2.5.2. Последняя утверждает, что вещественнозначная C^r-функция $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ на открытом подмножестве евклидова пространства может быть C^r-аппроксимирована (вблизи компактного множества) аналитической функцией. То же верно, очевидно, для отображений в $\mathbb{R}^s$. Более того, это верно для отображений открытого подмножества E пространства $\mathbb{R}^q$ в C^ω-подмногообразие N пространства $\mathbb{R}^s$. Последнее верно, поскольку трубчатая окрестность многообразия N доставляет C^ω-ретракцию ρ: $W \to N$, где $W \subset \mathbb{R}^q$ есть открытое множество. Если f: $E \to N$ — заданное отображение, то требуемая C^ω-аппроксимация доставляется композицией $\rho \circ f'$, где f': $E \to W$ есть C^ω-аппроксимация отображения f.

Многообразие $E_{q,k}$ аналитически вкладывается в $\mathbb{R}^s$ с $s = q^2 + q$. Для построения такого вложения достаточно вложить

$G_{q,k}$ в $\mathbb{R}^{q^2}$, а это можно сделать, отнеся k-плоскости $P \in G_{q,k}$ линейное отображение $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, ортогонально проектирующее $\mathbb{R}^q$ на P.

Следовательно, отображение f: $E \to E_{q,k}$ может быть аппроксимировано вблизи M аналитическим отображением φ: $E \to E_{q,k}$. Положим $M' = \varphi^{-1}(G_{q,k})$. Если φ достаточно C^1-близко к f, то $\varphi \pitchfork G_{q,k}$, и сужение отображения p: $E \to M$ на M' есть C^∞-диффеоморфизм $M' \to M$. ∎

Конечно, с помощью мощной аппроксимационной теоремы Грауэрта (теорема 2.5.1) можно получить более сильные результаты. Привлекательная особенность приведенного доказательства состоит в том, что оно опирается только на элементарную теорему 2.5.2.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть f: $M \to \mathbb{R}^q$, где M есть компактное многообразие без края, — вложение. Тогда f может быть аппроксимировано вложениями g, такими, что $g(M)$ есть аналитическое подмногообразие.

2. Пусть $M \subset \mathbb{R}^s$ и $N \subset \mathbb{R}^t$ — аналитические подмногообразия без края, причем M компактно. Тогда аналитические отображения составляют плотное подмножество пространства $C^r_W(M, N)$ $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$.

3. Пусть ξ — векторное расслоение класса C^r над M, где M есть компактное аналитическое подмногообразие евклидова пространства с $0 \leqslant r \leqslant \infty$ и $\partial M = \varnothing$. Тогда ξ обладает C^ω-структурой, согласованной с его C^r-структурой, и такая структура единственна с точностью до C^ω-изоморфизма.

Глава 5

СТЕПЕНИ, ИНДЕКСЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

> Топология обладает той особенностью, что при некоторых обстоятельствах относящиеся к ней вопросы допускают решение, даже когда объекты, о которых идет речь, заданы не точно, а лишь приблизительно, как это всегда и бывает в жизни.
>
> Г. Вейль, Философия математики и естествознания, 1949

> Геометрия — маг, творящий чудеса...
>
> Р. Том, Структурная устойчивость и морфогенез, 1972

В нашем распоряжении имеется теперь аппарат, позволяющий построить один из важнейших инструментов топологии: степень отображения $f\colon M \to N$, где M и N — компактные n-многообразия, причем N связно и $\partial M = \partial N = \varnothing$. Эта степень является целым числом, если M и N ориентированы, и вычетом mod 2 в общем случае.

Образно выражаясь, степень отображения показывает, сколько раз f оборачивает M вокруг N. Однако точное определение использует теории аппроксимаций, регулярных значений и ориентаций. Если f принадлежит классу C^1 и $y \in N$ есть регулярное значение, то степень f есть число точек прообраза $f^{-1}(y)$, в которых Tf сохраняет ориентацию, минус число точек этого прообраза, в которых Tf обращает ориентацию.

Оказывается, что гомотопные отображения имеют одну и ту же степень. Отсюда вытекают два важных следствия: во-первых, благодаря этому степень заданного отображения бывает нетрудно вычислить; во-вторых, это доставляет удобный способ различения гомотопических классов. Более того, для отображений n-мерного многообразия в S^n степень является *единственным* гомотопическим инвариантом; это главный результат § 5.1.

С появлением степени мы оказываемся во владениях алгебраической топологии. Многие геометрические вопросы сводятся к вычислению степени отображений. Таким образом, топология переводится в алгебру, непрерывное сводится к дискретному.

Степень является в действительности специальным случаем более общего геометрического понятия, называемого *индексом пересечения*; этому понятию посвящен § 5.2. Если M и N — подмногообразия многообразия W дополнительных размерностей, находящиеся в общем положении, то их индекс пересечения есть алгебраическое число точек пересечения $M \cap N$, каждая из которых учитывается со знаком, надлежащим образом вычисляемым с помощью ориентаций. Теория трансверсальности позволяет определить также индекс пересечения отображений M, $N \to W$; при этом мы снова получаем гомотопический инвариант. Если W есть n-мерное ориентированное векторное расслоение ξ над n-мерным многообразием M, то индекс самопересечения нулевого сечения называется *числом Эйлера* и обозначается через $X(\xi)$. Это — важный изоморфический инвариант расслоений. Число Эйлера расслоения TM есть по определению *эйлерова характеристика* $\chi(M)$.

Число $X(\xi)$ вычисляется при помощи сечений расслоения ξ. Это позволяет представить $\chi(M)$ как сумму индексов нулей векторного поля на M. В гл. 6 с помощью неравенств Морса мы вновь вычислим $\chi(M)$, на этот раз как знакопеременную сумму чисел Бетти многообразия M.

1. СТЕПЕНИ ОТОБРАЖЕНИЙ

В этом параграфе мы применим ориентации и трубчатые окрестности к доказательству некоторых классических теорем о гомотопии и продолжении отображений.

Напомним, что n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с $n \geqslant 1$ обладает *стандартной ориентацией* ω^n, задаваемой произвольным базисом, координатная матрица которого имеет положительный определитель ($\mathbb{R}^0$ также имеет стандартную ориентацию — число $+1$). Этой же ориентацией мы наделяем всякое n-мерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$.

Если (M, ω), (N, θ) — ориентированные многообразия, то *каноническая ориентация* $\omega \times \theta$ *произведения* $M \times N$ относит точке $(x, y) \in M \times N$ ориентацию $\omega_x \oplus \theta_y$ пространства $(M \times N)_{(x, y)} = M_x \oplus N_y$.

Пусть (M, ω) — ориентированное ∂-многообразие и $f\colon \partial M \times [0, \infty) \to M$ — воротник. Тогда $T_{\partial M} f$ индуцирует изоморфизм между тривиальным расслоением $M \times \mathbb{R}$ и нормальным расслоением ν края ∂M в M. Стандартная ориентация прямой $\mathbb{R}$ ориентирует каждый слой расслоения $M \times \mathbb{R}$; через посредство $T_{\partial M} f$ это определяет ориентацию ι расслоения ν, не зависящую, очевидно, от воротника. Другими словами, ν ориентируется касательными векторами к M в точках края ∂M, направленными *внутрь* M.

Итак, мы имеем ориентации ω и ι многообразия M и расслоения ν. Точная последовательность векторных расслоений

$$0 \to T(\partial M) \to T_{\partial M} M \to \nu \to 0$$

определяет *индуцированную ориентацию* $\omega/\iota = \partial\omega$ многообразия ∂M. Таким образом, $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ есть ориентирующий базис для $(\partial\omega)_x$, если $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$, где вектор e_n направлен *внутрь* M, есть ориентирующий базис для ω_x.

Пусть теперь θ — ориентация многообразия M. Мы обычно наделяем $M \times I$ ориентацией $\omega = \theta \times \omega^1$, где ω^1 — стандартная ориентация интервала I. В частности,

$$\partial\omega \mid (M \times 0) = \theta \quad \text{и} \quad \partial\omega \mid (M \times 1) = -\theta.$$

Мы часто будем говорить об «ориентированном многообразии M», не указывая явно ориентацию. В этом случае ориентированными многообразиями являются также край ∂M и цилиндр $M \times I$, а равно и подмногообразия многообразия M, имеющие ту же размерность, что M. Если $-M$ обозначает многообразие M с противоположной ориентацией, то

$$\partial(M \times I) = (M \times 0) \cup (-M \times 1)$$

(равенство связывает ориентированные многообразия).

Замкнутый шар $D^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ имеет стандартную ориентацию. Следовательно, ориентацию получает и его край S^n, и эта ориентация также называется стандартной. Легко проверить, что стереографическая проекция из северного полюса $P = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ есть сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $S^n - P \to \mathbb{R}^n$. Таким образом, если $(e_1, \ldots, e_n)$ есть ориентирующий базис для $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то $(e_1, \ldots, e_n)$ есть также ориентирующий базис для S^n в южном полюсе $-P$, в то время как в северном полюсе ориентирующим является базис $(e_1, \ldots, e_{n-1}, -e_n)$.

Пусть $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ —антиподальное отображение, $A(x) = -x$. Поскольку $\det A = (-1)^m$, отображение A сохраняет ориентацию пространства $\mathbb{R}^m$ в том и только том случае, если m четно. Антиподальное отображение пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ может быть сужено до диффеоморфизма шара D^{n+1}. Поскольку последний, очевидно, сохраняет ориентацию нормального расслоения края ∂D^{n+1} [1]), отображение $A: S^n \to S^n$ сохраняет ориентацию в том и только том случае, если n нечетно [2]).

---

[1]) Диффеоморфизм всегда сохраняет ориентацию нормального расслоения края. — *Прим. перев.*

[2]) Это нам уже известно: см. § 4.1. — *Прим. перев.*

1.1. Лемма. *Пусть (W, ω) — ориентированное ∂-многообразие. Предположим, что $K \subset W$ — вложенная дуга, трансверсальная к ∂W и имеющая концы в точках $u, v \in \partial W$. Выберем ориентацию $\varkappa$ дуги K и рассмотрим факторориентацию $\omega/\varkappa$ алгебраического нормального расслоения дуги K. Тогда*

$$\omega_u/\varkappa_u = (\partial\omega)_u \Longleftrightarrow \omega_v/\varkappa_v = -(\partial\omega)_v.$$

Доказательство. Пусть X_u, X_v — касательные векторы к K в точках u, v, определяющие в этих точках ориентации $\varkappa_u$, $\varkappa_v$ соответственно. Тогда вектор X_u направлен внутрь W в том и только том случае, если вектор X_v направлен вовне; это эквивалентно утверждению леммы. ∎

Пусть (M, ω), (N, θ) — компактные ориентированные многообразия одной размерности без края. Предположим, что многообразие N связно. Пусть, далее, $f\colon M \to N$ — отображение класса C^1 и $x \in M$ — регулярная точка отображения f. Положим $y = f(x)$. Мы будем говорить, что точка x *имеет положительный тип*, если изоморфизм $T_x f\colon M_x \to N_y$ сохраняет ориентацию, т. е. переводит ω_x в θ_y. В этом случае пишут $\deg_x f = 1$. Если $T_x f$ обращает ориентацию, то говорят, что x есть точка *отрицательного типа*, и пишут $\deg_x f = -1$. Число $\deg_x f$ называется *степенью отображения f в точке x*.

Предположим, что $y \in N$ — регулярное значение отображения f. *Степень отображения f над y* определяется формулой

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x f;$$

если $f^{-1}(y)$ пусто, то $\deg(f, y) = 0$. Если требуется явно указать ориентации, то пишут также

$$\deg(f, y) = \deg(f, y; \ \omega, \theta).$$

Обращение любой из ориентаций ω, θ изменяет знак числа $\deg(f, y)$.

Чтобы интерпретировать $\deg(f, y)$ геометрически, предположим, что $f^{-1}(y)$ содержит n точек положительного типа и m точек отрицательного типа, так что $\deg(f, y) = n - m$. Как это видно из теоремы об обратной функции, у точки y имеется такая открытая окрестность $U \subset N$, а у точек $x \in f^{-1}(y)$ имеются такие открытые окрестности $U(x) \subset M$, что f диффеоморфно отображает каждое из множеств $U(x)$ на U, сохраняя или обращая ориентацию в соответствии с типом точки x. Таким образом, $\deg(f, y)$ есть алгебраическое число раз, которые f покрывает U.

Пусть, например, S^1 — единичная окружность на комплексной плоскости. Пусть $M = N = S^1$ и $\theta = \omega$. Если $f\colon S^1 \to S^1$ есть отображение $f(z) = z^n$, то $\deg(f, z) = n$, исключая случай $n = 0$, $z = 1$.

Если M не связно и состоит из компонент $M_1, \ldots, M_m$, то

$$\deg f = \sum_i \deg (f \mid M_i).$$

Разумеется, каждое из M_j наделяется ориентацией $\omega \mid M_j$, индуцируемой включением $M_j \to M$.

1.2. Лемма. *Пусть W — компактное ориентированное многообразие размерности $n+1$, N — компактное ориентированное n-мерное многообразие без края и $h\colon W \to N$ — отображение класса C^∞. Пусть, далее, $y \in N$ — регулярное значение каждого из отображений h, $h \mid W$. Тогда* $\deg (h \mid \partial W, y) = 0$.

Доказательство. Пусть ω, θ — ориентации многообразий W, N соответственно. Пусть, далее, $M_1, \ldots, M_m$ — компоненты края ∂W.

Так как y есть регулярное значение, $h^{-1}(y)$ есть компактное одномерное подмногообразие многообразия W, край которого есть $(h \mid \partial W)^{-1}(y)$. Пусть $u \in h^{-1}(y)$. Тогда существует единственная точка $v \in h^{-1}(y)$, отличная от u и соединяемая с v дугой $K \subset h^{-1}(y)$, так что $\partial K = \{u, v\}$. Достаточно показать, что u и v имеют по отношению к $h \mid \partial W$ противоположный тип.

Пусть $\nu = TW/TK$ — алгебраическое нормальное расслоение дуги K в W. Так как y — регулярное значение, Tf индуцирует биморфизм $\Phi\colon \nu \to N_y$. Имеются естественные отождествления $\nu_u = (\partial W)_u$, $\nu_v = (\partial W)_v$.

Поскольку K есть дуга, существует единственная ориентация $\varkappa$ расслоения ν, такая, что $\varkappa_u = (\partial\omega)_u$. В силу леммы 1.1, $\varkappa_v = -(\partial\omega)_v$.

Предположим, что u есть точка положительного типа (по отношению к $h \mid \partial W$). Тогда $\Phi_x(\varkappa_x) = \theta_y$ для всех $x \in K$. Следовательно,

$$T(h \mid \partial W)(\partial\omega)_u = \Phi_u(\varkappa_u) = \theta_y$$

и

$$T(h \mid \partial W)(-\partial\omega)_v = \Phi_v(\varkappa_v) = \theta_y.$$

Таким образом, v есть точка отрицательного типа. Это показывает, что у $h \mid \partial W$ одинаковое количество точек положительного и отрицательного типа в $h^{-1}(y)$.∎

1.3. Следствие. *Пусть (M, ω) и (N, θ) — компактные ориентированные n-многообразия с $\partial M = \partial N = \varnothing$. Предположим, что N связно, и пусть $f, g\colon M \to N$ — гомотопные C^∞-отображения, имеющие общее регулярное значение $y \in N$. Тогда* $\deg (f, y) = \deg (g, y)$.

Доказательство. Существует гомотопия $h\colon M \times I \to N$, соединяющая f с g; при этом можно считать, что отображение h

принадлежит классу C^∞ и трансверсально к y. Как нам известно,

$$\partial(M\times I)=(M\times 0,\ \omega)\cup(M\times 1,\ -\omega)$$

(равенство связывает ориентированные многообразия). В силу леммы 1.2

$$\begin{aligned}0&=\deg(h\,|\,\partial(M\times I))\\&=\deg(f,\ y;\ \omega,\ \theta)+\deg(g,\ y;\ -\omega,\ \theta)\\&=\deg(f,\ y;\ \omega,\ \theta)-\deg(g,\ y;\ \omega,\ \theta).\ \blacksquare\end{aligned}$$

1.4. Лемма. *Пусть M, N — компактные ориентированные n-многообразия без края, причем $n\geqslant 1$ и N связно. Пусть, далее, y, $z\in N$ — регулярные значения C^∞-отображения f: $M\to N$. Тогда* $\deg(f,\ y)=\deg(f,\ z)$.

Доказательство. Предположим, что существует диффеоморфизм h: $N\to N$, гомотопный тождественному и такой, что $h(y)=z$. Тогда $\deg(h,\ z)=\deg(h,y)=1$ в силу теоремы 1.3. Из этого, как легко видеть, следует, что

$$\deg(f,\ y)=\deg\ (hf,\ z).$$

Но hf гомотопно f; следовательно,

$$\deg(hf,\ z)=\deg(f,\ z).$$

Остается построить h. Если y и z достаточно близки, скажем находятся в общем координатном шаре, то конструкция совсем проста, и мы оставляем ее читателю в качестве упражнения. Существование такого h есть отношение между y и z, которое, очевидно, является отношением эквивалентности. Классы, на которые эта эквивалентность разбивает N, — непересекающиеся открытые множества. Поскольку N связно, любые две точки эквивалентны. $\blacksquare$

1.5. Лемма. *Пусть M, N — многообразия и f: $M\to N$ — непрерывное отображение. Тогда f может быть аппроксимировано C^∞-отображениями, гомотопными f.*

Доказательство. Теорема 4.6.3 позволяет считать, что N есть C^∞-ретракт открытого подмножества $W\subset\mathbb{R}^n_+$; пусть r: $W\to N$ — ретракция. Пусть, далее, g: $M\to N$ — отображение класса C^∞, аппроксимирующее f столь точно, что отображение

$$h\colon M\times I\to\mathbb{R}^n_+,$$
$$h(x,\ t)=(1-t)f(x)+tg(x)$$

принимает значения в W. Тогда rh: $M\times I\to N$ есть гомотопия, соединяющая f с g. $\blacksquare$

Теперь у нас все готово для определения степени отображения. Пусть M, N — ориентированные компактные n-многообразия, причем $n \geqslant 1$, N связно и $\partial M = \partial N = \varnothing$. *Степень* $\deg f$ непрерывного отображения $f\colon M \to N$ определяется как $\deg(g, z)$, где $g\colon M \to N$ есть C^∞-отображение, гомотопное f, и $z \in N$ — регулярное значение для g. Такое отображение g существует в силу леммы 1.5, независимость же числа $\deg(g, z)$ от g и z обеспечивается теоремами 1.3 и 1.4.

Если многообразия M и N не ориентированы, возможно, даже не ориентируемы, то следующим образом определяется степень отображения $f\colon M \to N$ mod 2. Пусть снова $z \in N$ — регулярное значение C^∞-отображения $g\colon M \to N$, гомотопного f. Пусть $\deg_2(g, z)$ обозначает вычет mod 2 числа точек в $g^{-1}(z)$. Тогда $\deg_2(g, z)$ не зависит от g и z. Это следует из аналога mod 2 леммы 1.2, непосредственно вытекающего из того факта, что число точек края компактного одномерного многообразия четно. Ввиду этого мы можем положить $\deg_2 f = \deg_2(g, z)$.

Доказанные выше факты позволяют сделать следующие заключения о степенях непрерывных отображений.

1.6. Теорема. *Пусть M, N — компактные n-многообразия без края, причем N связно.*

(a) *Гомотопные отображения $M \to N$ имеют одинаковые степени, если M, N ориентированы, и имеют одинаковые степени* mod 2 *в общем случае.*

(b) *Предположим, что $M = \partial W$, где W компактно, и что отображение $f\colon M \to N$ продолжается на W. Тогда* $\deg f = 0$, *если W и N ориентируемы, и* $\deg_2 f = 0$ *в общем случае.*

Степень оказывается мощным средством при изучении отображений. Например, *если* $\deg f$ (*или* $\deg_2 f$) *не равняется нулю, то f должно быть отображением на.* Действительно, в противном случае f аппроксимировалось бы гомотопным ему C^∞-отображением g, которое также не было бы отображением на. Но если $y \in N - g(M)$, то, очевидно, $\deg(g, y) = 0$.

Вот применение теории степеней к комплексному анализу; его следствием является основная теорема алгебры. Пусть $p(z)$, $q(z)$ — комплексные многочлены. Рациональная функция $p(z)/q(z)$ продолжается до C^ω-отображения $f\colon S^2 \to S^2$, где S^2 обозначает сферу Римана (компактификацию комплексной плоскости $\mathbb{C}$ точкой ∞). Тогда *f есть либо константа, либо отображение на.*

Ключом к доказательству служит замечание, что $z \in S^2$ в том и только том случае является регулярной точкой отображения f, если отлична от нуля комплексная производная $f'(z)$, а в этом случае вещественная производная Df_z: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет положительный определитель.

Если f не есть константа, то производная f' не обращается в нуль тождественно; следовательно, для f найдется регулярная точка z. Согласно теореме об обратной функции, у z имеется открытая окрестность $U \subset S^2$, сплошь состоящая из регулярных точек и такая, что множество $f(U)$ открыто. Пусть $w \in f(U)$ — регулярное значение. Тогда множество $f^{-1}(w)$ непусто, а так как каждая точка из $f^{-1}(w)$ имеет положительный тип, то $\deg(f, w) = \deg f > 0$. Следовательно, f есть отображение на.

Известным применением теории степеней является так называемая «теорема о волосатом шаре»: *всякое векторное поле на S^{2n} где-нибудь обращается в нуль*, или, говоря более образно, волосатый шар нельзя причесать. Для доказательства предположим, что σ есть векторное поле на S^k, нигде не обращающееся в нуль. Тогда можно определить гомотопию, соединяющую тождественное отображение сферы S^k с антиподальным отображением, равномерно перемещая каждую точку $x \in S^k$ в $-x$ вдоль большой полуокружности в направлении $\sigma(x)$. Существование такой гомотопии показывает, что антиподальное отображение имеет степень $+1$ и, таким образом, сохраняет ориентацию; следовательно, k нечетно [1].

Нули векторных полей или вообще сечений векторных расслоений будут изучаться более систематически в § 5.2 в связи с числами Эйлера.

Следующая лемма нужна для теоремы продолжения 1.8.

1.7. Лемма. *Пусть W — ориентированное $(n+1)$-многообразие и $K \subset W$ — правильная дуга. Пусть, далее, $V \subset \partial W$ — окрестность края ∂K и f: $V \to N$ — отображение в ориентированное многообразие N с $\partial N = \varnothing$. Предположим, наконец, что $\partial K = f^{-1}(y)$, где y — некоторое регулярное значение отображения f, и что f имеет в концах дуги K противоположные степени. Тогда существуют окрестность $W_0 \subset W$ дуги K и отображение g: $W_0 \to N$, такие, что*

(a) $g = f$ *на* $W_0 \cap V$;

(b) y *есть регулярное значение отображения* g;

(c) $g^{-1}(y) = K$.

Доказательство. Можно считать, что $(N, y) = (\mathbb{R}^n, 0)$. Пусть x_0, x_1 — концы дуги K. Так как 0 есть регулярное значение, то точки x_i $(i = 0, 1)$ имеют такие окрестности $U_i \subset V$, что f суживается до вложения f_i: $(U_i, x_i) \to (\mathbb{R}^n, 0)$.

---

[1] Очевидно, что диффеоморфизм между ориентированными многообразиями или диффеоморфизм ориентируемого многообразия на себя имеет степень 1, если он сохраняет ориентацию, и степень -1, если он обращает ориентацию. См. также упр. 2 (b). — *Прим. перев.*

Достаточно доказать лемму для любого отображения, совпадающего с f вблизи K. Поэтому мы можем считать, что каждое f_i есть диффеоморфизм. Тогда f_i^{-1} может рассматриваться как трубчатая окрестность точки x_i в W; вместе отображения f_0^{-1} и f_1^{-1} составляют трубчатую окрестность края ∂K в ∂W.

Согласно теореме 4.6.4, эта трубчатая окрестность продолжается до некоторой трубчатой окрестности E многообразия K в V. Мы можем считать, что $W = E$. Поскольку K есть дуга, E есть тривиальное векторное расслоение над K, и мы можем считать, что

$$(W,\ K) = (I \times \mathbb{R}^n,\ I \times 0)$$

и $(N,\ y) = (\mathbb{R}^n,\ 0)$. В этих обозначениях

$$V = (0 \times \mathbb{R}^n) \cup (1 \times \mathbb{R}^n)$$

и отображение f_i: $i \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(i = 0,\ 1)$ задается линейным изоморфизмом $L_i \in GL\,(n)$. Предположения, сделанные относительно степени, вместе с определением ориентации многообразия $\partial\,(I \times \mathbb{R}^n)$ показывают, что L_0 и L_1 имеют определитель *одного и того же* знака. Следовательно, L_0 и L_1 могут быть соединены в $GL\,(n)$ путем L_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Требуемое продолжение отображения f доставляет отображение

$$I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$(t,\ y) \longmapsto L_t(y). \ \blacksquare$$

Мы переходим теперь к доказательству основной теоремы о продолжении.

1.8. Теорема. *Пусть W — связное ориентированное компактное ∂-многообразие размерности $n+1$. Пусть f: $\partial W \to S^n$ — непрерывное отображение. Отображение f в том и только том случае продолжается до отображения $W \to S^n$, если* $\deg f = 0$.

Доказательство. Мы знаем уже, что если отображение f продолжается до отображения $W \to S^n$, то его степень равна нулю. Теперь предположим, что $\deg f = 0$.

В силу теоремы о продолжении гомотопии достаточно продолжить какое-нибудь отображение, гомотопное f. Поскольку f гомотопно C^∞-отображению (теорема 1.5), мы можем считать, что само f принадлежит классу C^∞. Пусть $y \in S^n$ — регулярное значение отображения f.

Поскольку $\deg\,(f,\ y) = 0$, множество $f^{-1}\,(y)$ содержит одинаковое количество точек положительного и отрицательного типа. Можно построить семейство непересекающихся вложенных дуг $K_1, \ldots, K_m \subset W$, каждая из которых соединяет положительную точку из $f^{-1}(y)$ с отрицательной точкой из $f^{-1}(y)$, такое, что объединение $K = K_1 \cup \ldots \cup K_m$ будет правильным подмногообразием многообразия W и что $\partial K = f^{-1}(y)$. Если $\dim W \geqslant 3$, то такое построение возможно благодаря плотности множества правильных вложений $I \to W$ в $C^\infty(I, \partial I; W, \partial W)$. Если $\dim W = 2$, то мы можем найти погруженные дуги $K_1, \ldots, K_m$ (которые могут пересекать друг друга). Новое семейство $K'_1, \ldots, K'_m$, не имеющее пересечений, можно построить следующим образом. Предположим, что все пересечения являются пересечениями общего положения.

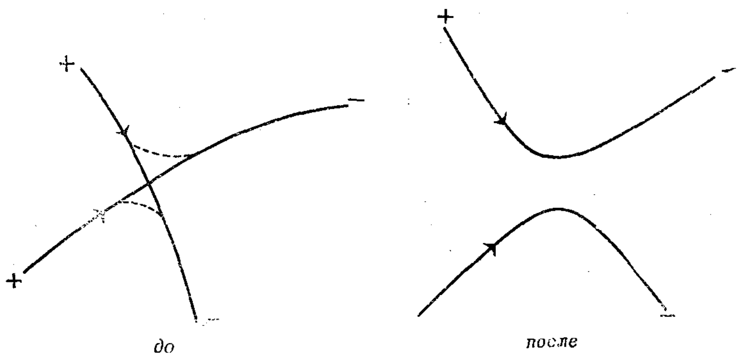


Рис. 5—1. Устранение пересечений.

Около каждого пересечения мы проделаем перестройку, как показано на рис. 5—1. Стрелки указывают ориентацию дуг от положительной точки к отрицательной. В результате получается компактное правильное подмногообразие K' многообразия W с краем $f^{-1}(y)$. Каждая компонента многообразия K' есть либо дуга, либо окружность; каждая дуга при этом соединяет точки противоположного типа (см. стрелки на рис. 5—1). Таким образом, мы получаем непересекающиеся вложенные дуги.

Применим теперь лемму 1.7 к каждой из дуг K_i с $N = S^n$. Мы получим открытую окрестность $W_0 \subset W$ объединения $\bigcup K_i$ и отображение $g\colon W_0 \to S^n$, совпадающее с f на ∂W_0 и такое, что y есть его регулярное значение и что $g^{-1}(y) = \bigcup K_i$.

Пусть $U \subset W_0$ — открытая окрестность объединения $\bigcup K_i$, замыкание которой содержится в W_0. Тогда $\operatorname{Bd} U \subset W_0 - \bigcup K_i$. Отображения g и f составляют непрерывное отображение

$$H\colon X = \operatorname{Bd} U \cup (\partial W - U) \to S^n - y.$$

Заметим, что X есть замкнутое подмножество разности $W - U$. Так как $S^n - y \approx \mathbb{R}^n$, теорема Титце о продолжении позволяет продолжить отображение h до некоторого отображения $H\colon W - U$

$\to S^n - y$. Требуемое продолжение отображения f на W доставляет отображение, совпадающее с H на $W - U$ и с g на W_0. ∎

Вот аналог теоремы 1.8 для неориентируемых многообразий.

1.9. Теорема. *Пусть W — связное компактное неориентируемое ∂-многообразие размерности $n + 1 \geqslant 2$. Отображение $f\colon \partial W \to S^n$ в том и только том случае продолжается до отображения $W \to S^n$, если* $\deg_2 f = 0$.

Доказательство. Если отображение f продолжается до отображения $W \to S^n$, то $\deg_2 f = 0$ в силу теоремы 1.6.

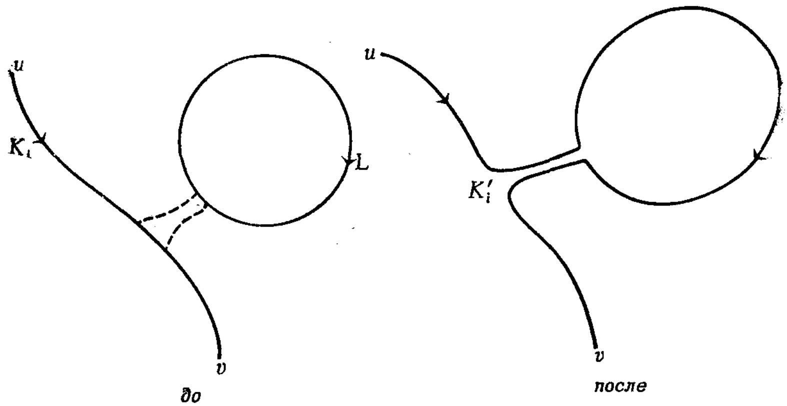


Рис. 5—2.

Предположим, что $\deg_2 f = 0$. Мы можем считать, что f есть C^∞-отображение. Рассмотрим сначала случай, когда $\dim W \geqslant 3$.

Пусть $y \in S^n$ — регулярное значение. Тогда множество $f^{-1}(y)$ состоит из четного числа точек. Поэтому $f^{-1}(y) = \partial K$, где $K \subset W$ — объединение непересекающихся правильно вложенных дуг.

Пусть K_i — одна из этих дуг и $u, v \in f^{-1}(y)$ — концы дуги K_i. Хотя TW не является ориентируемым расслоением, сужение $TW \mid K_i$ таковым является. Придадим $TW \mid K_i$ произвольную ориентацию; в результате окажутся ориентированными пространства $T_u \partial W$ и $T_v \partial W$, и позволительно будет спросить, являются ли u и v точками противоположного типа относительно отображения f. Если нет, то мы переделаем дугу K_i в новую дугу K_i', присоединив к ней петлю L, обращающую ориентацию многообразия W (см. рис. 5—2).

Поскольку $\dim W \geqslant 3$, мы можем сделать дугу K_i' вложенной и непересекающейся с остальными дугами K_j. Если теперь придать расслоению $TW \mid K_i'$ ориентацию и наделить пространства $T_u \partial W$ и $T_v \partial W$ индуцированными ориентациями, то точки u и v будут иметь по отношению к f противоположный тип; в противном случае сохраняла бы ориентацию петля L.

Таким образом, мы можем считать, что расслоение $T_K W$ так ориентировано, что по отношению к индуцированной ориентации $T(\partial W) \mid f^{-1}(y)$ концевые точки каждой дуги имеют противоположный тип. Оставшаяся часть доказательства в случае $\dim W \geqslant 3$ повторяет соответствующую часть доказательства для ориентированного случая.

Пусть теперь $\dim W = 2$, и пусть $y \in S^1$ — регулярное значение отображения f. Проделав при необходимости гомотопию, мы можем считать, что найдутся непересекающиеся открытые интервалы $I_1, \ldots, I_\nu \subset \partial W$ со следующими свойствами:

(a) каждый из интервалов I_j содержит в точности одну точку множества $f^{-1}(y)$;

(b) f диффеоморфно отображает I_j на $S^1 - (-y)$;

(c) $f(\partial W - \bigcup I_j) = -y$.

В этом случае мы будем говорить, что отображение f *имеет стандартную форму*.

Придадим краю ∂W произвольную ориентацию, так что будет определено число $\deg f$. Заметим, что это число четно. Каждый из интервалов I_j делает в $\deg f$ вклад ± 1; значит, и число ν четно.

Применим индукцию по $\nu = \nu(f)$; если $\nu = 0$, то f гомотопно постоянному, а постоянное отображение продолжается до постоянного отображения многообразия W. Предположим, что $\nu \geqslant 2$.

Пусть $K \subset W$ — правильная дуга, соединяющая x_1 с x_2; придадим расслоению $T_K W$ ориентацию ω. Как выше, мы добиваемся того, чтобы точки x_1 и x_2 имели для f противоположный тип по отношению к ориентациям пространств $T_{x_i} \partial W$, индуцированным ω.

Пусть $N \subset W$ — трубчатая окрестность дуги K, такая, что $N \cap \partial W = I_1 \cup I_2$. Топологически N есть четырехугольник, край ∂N которого есть окружность, состоящая из четырех дуг I_1, J_1, I_2, J_2.

Мы заменяем f новым отображением $g: \partial W \to S^1$, полагая $g = f$ на $\partial W - (I_1 \cup I_2)$ и $g(I_1 \cup I_2) = -y$. Заметим, что g имеет стандартную форму и что $\nu(g) = \nu(f) - 2$. В силу индуктивного предположения, g продолжается до некоторого отображения $G: W \to S^1$.

Заметим, что $\deg (G \mid \partial N) = 0$: это следует из теоремы 1.6 (b), поскольку G продолжается на N. Так как сужение $G \mid I_1 \cup I_2$ постоянно, это показывает, что $\deg G \mid J_1 + \deg G \mid J_2 = 0$, где J_1 и J_2 ориентированы в соответствии с ориентацией края ∂N.

Определим новое отображение $h: \partial N \to S^1$, совпадающее с G на $J_1 \cup J_2$ и с f на $I_1 \cup I_2$. Мы выбрали ориентацию дуги K таким образом, что $\deg f | I_1 + \deg f | I_2 = 0$. Вследствие этого, $\deg h = 0$, и теорема 1.8 (примененная к N) показывает, что отображение h продолжается до некоторого отображения H: $N \to S^1$. Требуемое продолжение отображения f определяется как совпадающее с H на N и с G на $W - N$. ∎

Теперь мы можем расклассифицировать отображения произвольного компактного n-многообразия в S^n. (Символ $\simeq$ обозначает, как и выше, отношение гомотопии.)

1.10. Теорема. *Пусть M — компактное связное n-многообразие с $n \geqslant 1$, и пусть f, g: $M \to S^n$ — непрерывные отображения.*

(a) *Если M ориентировано и $\partial M = \varnothing$, то $f \simeq g$ тогда и только тогда, когда $\deg f = \deg g$, и существуют отображения какой угодно степени $m \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Если M не ориентируемо и $\partial M = \varnothing$, то $f \simeq g$ тогда и только тогда, когда $\deg_2 f = \deg_2 g$, и существуют отображения какой угодно степени $m \in \mathbb{Z}_2$.*

(c) *Если $\partial M \neq \varnothing$, то $f \simeq g$.*

Доказательство. Покажем сначала, что существуют отображения какой угодно степени. В случае (a) степень 0 имеет постоянное отображение. Если $m \in \mathbb{Z}_+$, то мы фиксируем неперекрывающиеся карты φ_i: $U_i \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, m)$ с $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$, каждая из которых сохраняет ориентацию. Пусть s: $\mathbb{R}^n \to S^n - P$ — отображение, обратное стереографической проекции из северного полюса P; s также сохраняет ориентацию. Рассмотрим отображение

$$f: M \to S^n,$$

$$f = \begin{cases} s\varphi_i \text{ на } U_i, \\ \text{постоянное отображение со значением } P \text{ на } M - \bigcup U_i. \end{cases}$$

Это отображение непрерывно и имеет степень m. Если бы отображения φ_i обращали ориентацию, то f имело бы степень $-m$. Полагая $m = 1$ и забывая об ориентациях, мы доказываем вторую часть утверждения (b).

Первые части утверждений (a) и (b) являются следствиями теорем 1.8 и 1.9 с $W = M \times I$. Чтобы доказать (c), рассмотрим удвоение M' многообразия M, т. е. результат склеивания двух экземпляров многообразия M вдоль ∂M, отображение $p: M' \to M$, совмещающее эти два экземпляра, и включение $i: M \to M'$ одного из этих экземпляров. Легко видеть, что степень отображения $fp: M' \to S^n$ равна 0, если M ориентируемо, и что $\deg_2 (fp) = 0$ в общем случае. Следовательно, fp гомотопно постоянному отображению c (которое также имеет степень 0). Поскольку $fpi = f$, из этого вытекает, что $f \simeq c$. Аналогично $g \simeq c$, так что $f \simeq g$. ∎

УПРАЖНЕНИЯ

1. Комплексный многочлен степени n определяет отображение степени n сферы Римана в сферу Римана. Какова степень отображения, определяемого рациональной функцией $p(z)/q(z)$?

2. (а) Пусть M, N, P — компактные связные ориентированные n-многообразия без края и $M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} P$ — непрерывные отображения. Тогда $\deg(fg) = (\deg g)(\deg f)$. Подобное верно mod 2, если M, N, P не ориентированы.

(b) Степень гомеоморфизма или гомотопической эквивалентности равна ± 1.

*3. Пусть $\mathfrak{M}_n$ — категория, объекты которой — компактные связные n-многообразия и морфизмы которой — гомотопические классы $[f]$ отображений $f\colon M \to N$. Обозначим для объекта M через $\pi^n(M)$ множество гомотопических классов отображений $M \to S^n$. Для морфизма $[f]\colon M \to N$ определим $[f]^*\colon \pi^n(N) \to \pi^n(M)$ формулой $[f]^*[g] = [gf]$. Таким образом, π^n — контравариантный функтор из категории $\mathfrak{M}_n$ в категорию множеств.

(а) Существует единственный способ поднять этот функтор в категорию групп, при котором $\pi^n(S^n) = Z$ и тождественное отображение $S^n \to S^n$ соответствует $1 \in Z$ [1].

(b) По отношению к групповой структуре из (а) для каждого M имеет место изоморфизм

$$\pi^n(M) \approx \begin{cases} Z, & \text{если } M \text{ ориентируемо и } \partial M = \varnothing; \\ Z_2, & \text{если } M \text{ не ориентируемо и } \partial M = \varnothing; \\ 0, & \text{если } \partial M \neq \varnothing. \end{cases}$$

Однако не существует естественного семейства таких изоморфизмов.

4. Непрерывное отображение $f\colon S^n \to S^n$ с $f(x) = f(-x)$ имеет четную степень.

*5. Пусть M, N — компактные связные ориентированные n-многообразия, причем $\partial M = \varnothing$.

(а) Предположим, что $n \geqslant 2$. Если существует отображение $S^n \to M$ степени 1, то M односвязно [2]. Более того:

(b) Если $f\colon M \to N$ имеет степень 1, то индуцированный гомоморфизм между фундаментальными группами, $f_{\#}\colon \pi_1(M) \to \pi_1(N)$, является эпиморфизмом.

(с) Если $f\colon M \to N$ имеет степень $k \neq 0$, то образ гомоморфизма $f_{\#}$ есть подгруппа группы $\pi_1(N)$, индекс которой делит k.

6. Пусть M — компактное n-мерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с $\partial M = \varnothing$. Для $x \in \mathbb{R}^{n+1} - M$ рассмотрим отображение

$$\sigma_x\colon M \to S^n, \qquad y \longmapsto (y - x)/|y - x|.$$

Тогда точки x, y в том и только том случае лежат в одной компоненте разности $\mathbb{R}^{n+1} - M$, если $\sigma_x \simeq \sigma_y$, и точка x в том и только том случае принадлежит неограниченной компоненте, если $\sigma_x \simeq \mathrm{const}$. Если M связно, то x в том и только том случае принадлежит ограниченной компоненте, если $\deg(\sigma_x) = \pm 1$.

---

[1] В алгебраической топологии эта групповая структура хорошо известна; группа $\pi^n(M)$ называется *n-й целочисленной когомологической группой многообразия M*. — *Прим. перев.*

[2] В действительности в этой ситуации M гомотопически эквивалентно S^n, *но это вряд ли можно доказать в рамках излагаемой здесь теории.* — *Прим. перев.*

7. Пусть M, N — компактные ориентированные подмногообразия пространства $\mathbb{R}^q$, не имеющие края, размерностей m, n соответственно. Предположим, что M и N не пересекаются и что $m+n=q-1$. *Индекс зацепления* $\mathrm{Lk}(M, N)$ есть по определению степень отображения

$$M \times N \to S^{q-1},$$
$$(x, y) \longmapsto (x-y)/|x-y|.$$

(a) $\mathrm{Lk}(M, N) = (-1)^{(m-1)(n-1)} \mathrm{Lk}(N, M)$.

(b) Если M стягивается в точку в $\mathbb{R}^q - N$ или ограничивает в $\mathbb{R}^q - N$ ориентированное компактное многообразие, то $\mathrm{Lk}(M, N) = 0$.

(c) Пусть S, S' — граничные окружности k-кратно перекрученного в $\mathbb{R}^3$ цилиндра. Тогда, при надлежащем выборе ориентаций, $\mathrm{Lk}(S, S') = k$.

(d) Пусть $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ — цилиндры, перекрученные k_1 и k_2 раз. Если $|k_1| \neq |k_2|$, то не существует диффеоморфизма пространства $\mathbb{R}^3$, переводящего C_1 в C_2.

8. Пусть M — компактное n-мерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, не имеющее края. Две точки $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - M$ в том и только том случае разделяются многообразием M, если $\mathrm{Lk}(\{x, y\}, M) \neq 0$. (См. упр. 7.)

9. *Инвариант Хопфа* $H(f)$ отображения $f\colon S^3 \to S^2$ определяется как индекс зацепления $\mathrm{Lk}(g^{-1}(a), g^{-1}(b))$ (см.упр. 7), где g есть C^∞-отображение, гомотопное f, и a, b — различные регулярные значения отображения g. Индекс зацепления вычисляется в

$$\mathbb{R}^3 = S^3 - c, \quad f(c) \neq a, b.$$

(a) $H(f)$ есть корректно определенный гомотопический инвариант отображения f, обращающийся в нуль, когда отображение f гомотопно постоянному отображению.

(b) Если $g\colon S^3 \to S^3$ имеет степень p, то $H(fg) = pH(f)$.

(c) Если $h\colon S^2 \to S^2$ имеет степень q, то $H(hf) = q^2 H(f)$.

(d) Пусть $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ — единичная сфера и $S^2 = \mathbb{C}P^1$. *Отображение Хопфа*

$$\varphi\colon S^3 \to S^2,$$
$$\varphi(z, w) = [z, w],$$

имеет инвариант Хопфа, равный 1. Следовательно, оно не гомотопно постоянному.

10. Пусть U, V — некомпактные ориентированные n-многообразия без края и $h\colon U \to V$ — *собственное* C^∞-отображение. Степень отображения h определяется, как обычно,

$$\deg h = \sum_x \deg_x h \quad (x \in h^{-1}(y)),$$

где y — регулярное значение.

(a) Степень $\deg h$ не зависит от y, и если g есть C^∞-отображение, соединяемое с h *собственной* гомотопией $U \times I \to V$, то $\deg g = \deg h$. Таким образом, можно определить степень произвольного непрерывного собственного отображения $f\colon U \to V$, взяв отображение h достаточно близким к f.

(b) В частности, определена степень гомеоморфизма $U \to V$; она всегда равна ± 1. (Ср. упр. 2.)

(c) Топологическое n-многообразие называется *топологически ориентируемым*, если оно обладает атласом, функции перехода которого имеют степень $+1$ на каждой компоненте. Гладкое многообразие ориентируемо в том и только том случае, если оно топологически ориентируемо.

(d) Ориентируемость гладкого многообразия топологически инвариантна.

11. Основная теорема алгебры может быть следующим образом обобщена. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество и $f: U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^1. Предположим, что (a) f собственно; (b) вне некоторого компактного множества $\det [Df_x]$ не меняет знака и не равен тождественно 0. Тогда f есть отображение на; в частности, уравнение $f(x) = 0$ имеет решение.

12. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — вещественные [или комплексные] многочлены от $n \geqslant 2$ переменных. Положим $f_k = h_k + r_k$, где h_k — однородный многочлен степени $d_k > 0$ и r_k имеет меньшую степень. Предположим, что $x = (0, \ldots, 0)$ есть единственное решение системы $h_1(x) = \ldots = h_n(x) = 0$. Предположим также, что $\det [\partial h_i / \partial x_j] \neq 0$ во всех точках пространства $\mathbb{R}^n$ [или $\mathbb{C}^n$], кроме 0. Тогда система $f_k(x) = 0$ ($k = 1, \ldots, n$) имеет решение в $\mathbb{R}^n$ [или $\mathbb{C}^n$]. [Указание: воспользуйтесь упражнением 11.]

2. ИНДЕКСЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

Пусть W — ориентированное многообразие размерности $m + n$ и N — его замкнутое ориентированное подмногообразие размерности n. Пусть, далее, M — компактное ориентированное m-многообразие. Предположим, наконец, что $\partial M = \partial N = \varnothing$.

Пусть $f: M \to W$ — отображение класса C^∞, трансверсальное к N.

Точка $x \in f^{-1}(N)$ называется точкой *положительного* или *отрицательного типа* в зависимости от того, сохраняет или обращает ориентацию композиция

$$M_x \xrightarrow{Tf} W_y \to W_y/N_y, \quad y = f(x);$$

в соответствии с этим мы пишем $\#_x(f, N) = 1$ или -1. *Индекс пересечения пары* (f, N) есть по определению число

$$\#(f, N) = \sum \#_x(f, N),$$

где суммирование производится по всем $x \in f^{-1}(N)$.

2.1. Теорема. *Если $f, g: M \to W$ — гомотопные C^∞-отображения, трансверсальные к N, то $\#(f, N) = \#(g, N)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.3 и предоставляется читателю. ∎

Для произвольного непрерывного отображения $g: M \to W$ мы полагаем $\#(g, N) = \#(f, N)$, где f есть C^∞-отображение, трансверсальное к N и гомотопное g. В силу теоремы 2.1, число $\#(g, N)$ определено корректно.

Заметим, что на самом деле ориентируемость многообразий N, W не нужна; все, что действительно используется, — ориентация нормального расслоения многообразия N.

Если M — тоже подмногообразие многообразия W и $i: M \to W$ — включение, то *индекс пересечения пары* (M, N) есть по опре делению число $\# (M, N) = \# (i, N)$. Если требуется явно указать W, пишут $\# (M, N) = \# (M, N; W)$. Если M и N компактны, то, как легко доказывается, $\# (N, M) = (-1)^{mn} \# (M, N)$.

Очевидно, $\# (f, N) = 0$, если f гомотопно в W отображению $g\colon M \to W - N$. В частности, *если M и N — замкнутые подмногообразия пространства* $\mathbb{R}^{m+n}$, *причем M компактно и* $\partial M = \partial N = \varnothing$, *то* $\# (M, N; \mathbb{R}^{m+n}) = 0$.

Вообще говоря, неверно, что если $\# (M, N) = 0$, то M может быть продеформировано в $W - N$; на рис. 5—3 показан контрпример: две окружности на поверхности S рода 2.

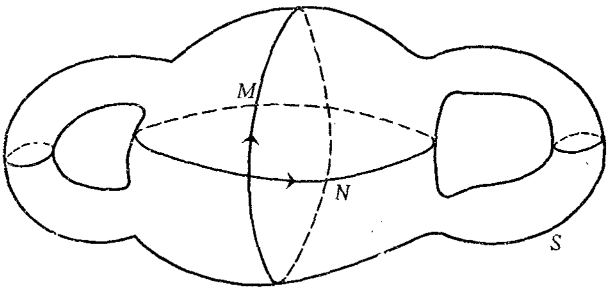


Рис. 5—3. $\# (M, N) = 0$, но M не деформируется в $S-N$.

Если многообразиям M, N и W разрешается иметь край, то определения чисел $\# (f, N)$ и $\# (M, N)$ сохраняют смысл при условии, что N — правильное подмногообразие, а $f (\partial M) \subset W - \partial N$. В этом случае C^∞-отображение $g\colon M \to W$, гомотопное f, должно аппроксимировать f столь точно, что гомотопию между f и g можно осуществить в $W - \partial N$. Число $\# (f, N)$ будет при этом инвариантно только относительно гомотопий такого рода.

Если M, N или W не ориентированы, то аналогичным образом определяются индексы пересечения mod 2: $\#_2 (f, N)$ и $\#_2 (M, N)$.

Пусть $\xi = (p, E, M)$ — ориентированное n-мерное векторное расслоение над M; как обычно, мы отождествляем M с нулевым сечением. Предположим, что M связно, компактно, n-мерно и не имеет края. *Число Эйлера* расслоения ξ определяется как число

$$X(\xi) = \# (M, M) = \# (M, M; E).$$

Чтобы вычислить $X(\xi)$, нужно аппроксимировать нулевое сечение $Z\colon M \to E$ C^∞-отображением h, трансверсальным $Z(M)$. Если аппроксимация выбрана столь точной, что $ph\colon M \to N$ есть диффеоморфизм, то можно построить C^∞-*сечение* g, трансверсальное нулевому сечению, полагая $g = h (ph)^{-1}$: тогда будет $fg = 1_M$.

Пусть $x_1, \ldots, x_m \in M$ — нули сечения g. Пусть, далее, φ_i: $\xi | U_i \to U_i \times \mathbb{R}^n$ — локальные тривиализации расслоения ξ над такими открытыми множествами $U_i \subset M$, что $x_i \in U_i$. Очевидно, точка $0 \in \mathbb{R}^n$ является регулярным значением композиции

$$F_i\colon U_i \xrightarrow{g} E\,|\,U_i \to U_i \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

и $x_i \in F_i^{-1}(0)$. Ясно также, что

$$\deg_{x_i} F_i = \#_{x_i}(g, M).$$

Следовательно,

$$\mathrm{X}(\xi) = \sum_i \deg_{x_i} F_i.$$

Число $\#_{x_i}(g, M)$ называется *индексом сечения* g *в точке* x_i.

Если $\xi = TM$, то $\mathrm{X}(\xi)$ называется *эйлеровой характеристикой многообразия* M и обозначается через $\chi(M)$. Ниже мы определим эйлерову характеристику для неориентируемых многообразий и для многообразий с краем.

2.2. Теорема. *Если расслоение* ξ *обладает сечением* f, *которое нигде не обращается в нуль, то* $\mathrm{X}(\xi) = 0$.

Доказательство. Сечение f гомотопно нулевому сечению, поскольку оно может быть связано с ним линейной гомотопией $(x, t) \longmapsto tf(x)$. Следовательно, если $i\colon M \to E$ есть нулевое сечение, то

$$\mathrm{X}(\xi) = \#(i, M) = \#(f, M) = 0. \blacksquare$$

Чтобы вычислить $\chi(M)$, начинают с векторного поля[1] f: $M \to TM$ класса C^∞, трансверсального нулевому сечению. Для каждого нуля x_i поля f выберем карту $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ с $x_i \in U_i$ (сохраняющую ориентацию). Тогда $T\varphi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ есть векторное поле класса C^∞ на $\varphi_i(U_i)$, т. е. C^∞-отображение $g_i\colon \varphi_i(U_i) \to \mathbb{R}^n$ с регулярным значением 0. Обозначим через d_i степень отображения g_i в точке $\varphi_i(x_i)$; тогда $\chi(M) = \sum d_i$. Число d_i называется *индексом векторного поля* f *в точке* x_i; этот индекс не зависит от выбора карты (φ_i, U_i) и от ориентации многообразия M. Мы обозначаем его через $\operatorname{ind}_{x_i} f$.

В качестве примера вычислим $\chi(S^n)$. Пусть P — северный полюс и $Q = -P$ — южный полюс. Пусть, далее,

$$\sigma\colon S^n - P \to \mathbb{R}^n,$$

$$\tau\colon S^n - Q \to \mathbb{R}^n$$

[1]) *Векторное поле* — сечение касательного расслоения.

— стереографические проекции. Замена координат

$$\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau^{-1}\colon \mathbb{R}^n - 0 \to \mathbb{R}^n - 0$$

определяется формулой $x \mapsto x/|x|^2$.

Пусть f — векторное поле на $S^n - P$, представление которого в координатах σ есть радиальное векторное поле на $\mathbb{R}^n$ (вектор в точке x равен x). Тогда $f(x) \to 0$ при $x \to P$, и мы полагаем $f(P) = 0$. Таким образом, поле $f\colon S^n \to TS^n$ имеет в точности два нуля: Q и P.

В системе координат τ поле f представляется как поле $x \mapsto -x$. Кстати, из этого видно, что f принадлежит классу C^∞.

Тождественное отображение пространства $\mathbb{R}^n$ имеет в 0 степень 1, антиподальное отображение — степень $(-1)^n$. Поэтому

$$\mathrm{ind}_P f = 1, \quad \mathrm{ind}_Q f = (-1)^n.$$

Мы приходим к следующему предложению.

2.3. Теорема.

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ четно}, \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

2.4. Следствие. *Всякое векторное поле на S^{2n} где-нибудь обращается в* 0 [1]).

Вот некоторые другие вычисления.

2.5. Теорема. (a) *Пусть M, N — компактные ориентированные многообразия без края. Тогда $\chi(M \times N) = \chi(M)\,\chi(N)$.*

(b) *Пусть ξ — ориентированное n-мерное векторное расслоение над компактным ориентированным n-мерным многообразием M без края. Если n нечетно, то $X(\xi) = 0$.*

(c) *Если M — нечетномерное компактное ориентированное многообразие без края, то $\chi(M) = 0$.*

Доказательство. Для доказательства части (a) нужно взять векторные поля f, g на M, N и вычислять $\chi(M \times N)$ с помощью поля $f \times g\colon M \times N \to TM \times TN$. Детали оставляются читателю в качестве упражнения.

Для доказательства части (b) мы вычисляем $X(\xi)$ двумя способами, с помощью сечений f и $-f$. Получаем

$$\mathrm{ind}_x f = (-1)^n \,\mathrm{ind}_x(-f), \text{ где } n = \dim M.$$

Значит, если n нечетно, то $X(\xi) = -X(\xi)$.

Наконец, (c) следует из (b). ∎

---

[1]) Напомним, что другим способом это уже было доказано в предыдущем параграфе. — *Прим. перев.*

Определим теперь $\chi(M)$ для неориентируемого многообразия M с $\partial M = \varnothing$. Пусть $f\colon M \to TM$ — сечение, трансверсальное M. При каждом $x \in M$ произведем каноническое отождествление

$$(TM)_x/M_x = M_x$$

(см. теорему 4.2.1). Отображение Tf индуцирует автоморфизм Φ_x, определяемый как композиция

$$\Phi_x\colon M_x \xrightarrow{Tf} (TM)_x \to (TM)_x/M_x = M_x.$$

Положим

$$\operatorname{ind}_x f = \det \Phi_x / |\det \Phi_x|,$$

$$\chi_f(M) = \sum \operatorname{ind}_x f, \quad x \in f^{-1}(M).$$

Это определение, разумеется, имеет смысл и для ориентированного M и в этом случае, как легко проверить, приводит к прежнему $\chi(M)$. В частности, оно не зависит от f и от ориентации.

Если M не ориентируемо, рассмотрим ориентирующее двулистное накрытие $p\colon \tilde{M} \to M$. Существует единственное сечение $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to T\tilde{M}$, накрывающее f. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{M})$; положим $p(\tilde{x}) = x$. Тогда ясно, что

$$\operatorname{ind}_{\tilde{x}} \tilde{f} = \operatorname{ind}_x f.$$

Следовательно,

$$\chi_{\tilde{f}}(\tilde{M}) = 2\chi_f(M),$$

т. е.

$$\chi_f(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}).$$

Таким образом, $\chi_f(M)$ не зависит от f и в общем случае.

Части (a) и (c) теоремы 2.5 сохраняют силу для неориентируемого M.

Эйлерова характеристика $\chi(M)$ компактного ∂-многообразия M определяется следующим образом. Пусть $f\colon M \to T(M)$ — сечение, которое трансверсально нулевому сечению M и направлено *вовне* в точках края ∂M. Такое сечение всегда существует; например, можно сначала построить направленное вовне сечение на ∂M с помощью воротника, затем распространить его на M с помощью разбиения единицы и после этого сделать его трансверсальным нулевому сечению с помощью аппроксимации. Более того, любые два таких направленных вовне векторных поля могут быть связаны гомотопией, составленной из направленных вовне векторных полей. Мы полагаем

$$\chi(M) = \chi_f(M) = \sum_x \operatorname{ind}_x f \quad (x \in f^{-1}(M)).$$

Чтобы показать, что $\chi_f(M)$ не зависит от f, рассмотрим ориентирующее двулистное накрытие $\tilde{M} \to M$ многообразия M и векторное поле $\tilde{f}$ на $\tilde{M}$, накрывающее f. Тогда поле $\tilde{f}$ направлено вовне, и локальные вычисления показывают, что $\chi_{\tilde{f}}(\tilde{M}) = 2\chi_f(M)$. Таким образом, достаточно показать, что $\chi_f(M)$ не зависит от f в случае ориентированного M; доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 1.2.

Эйлерова характеристика $\chi(M)$ определена, таким образом, для всякого компактного многообразия M. Заметим, что теорема 2.5 (a) справедлива в случае, когда пуст только один из краев ∂M, ∂N.

Доказательство следующей леммы предоставляется читателю (аналогичное утверждение доказывалось в процессе доказательства леммы 1.4).

2.6. Лемма. *Пусть M — связное многообразие, $U \subset M$ — открытое множество и $F \subset M$ — конечное множество. Тогда существует диффеоморфизм многообразия M, загоняющий F в U.*

С помощью этой леммы мы доказываем следующее предложение.

2.7. Теорема. *Пусть M — компактное связное ∂-многообразие. Тогда на M имеется не обращающееся в нуль векторное поле.*

Доказательство. Пусть M' — удвоение M, содержащее M в качестве подмногообразия. Тогда на M' имеется векторное поле f с конечным множеством F нулей. Пусть $\varphi\colon M' \to M'$ — диффеоморфизм, загоняющий F в $M' - M$. Тогда $T\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} | M$ есть векторное поле, не обращающееся в нуль. ∎

Следующая лемма связывает индекс нуля векторного поля со степенью отображения в сферу.

2.8. Лемма. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — шар с центром x. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, содержащее D, и $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^∞, рассматриваемое как векторное поле на U. Предположим, что 0 есть регулярное значение этого отображения что $x = D \cap f^{-1}(0)$. Рассмотрим отображение*

$$g\colon \partial D \to S^{n-1},$$
$$y \mapsto f(y)/|f(y)|.$$

Тогда $\deg g = \operatorname{ind}_x f$.

Доказательство. Для простоты мы можем предположить, что $x = 0$. Определим отображение $f_t\colon U \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$f_t(y) = \begin{cases} t^{-1} f(t_y) & \text{при } 1 \geqslant t > 0, \\ D_0 f(y) & \text{при } \quad t = 0. \end{cases}$$

Определим, далее, отображение $g_t\colon \partial D \to S^{n-1}$ подобно g, с f_t вместо f. Так как отображение g_0 гомотопно $g_1 = g$, то $\deg g_0 = \deg g$.

Мы утверждаем, что $\operatorname{ind}_0 f_0 = \operatorname{ind}_0 f$. Действительно, отображение

$$\Phi\colon D \times I \to \mathbb{R}^n \times I,$$
$$(y,\ t) \mapsto (f_t(y),\ t)$$

принадлежит классу C^∞ (см. доказательство теоремы 4.5.3) и $T\Phi$ индуцирует, вследствие этого, гомотопию между $Df_0(0)$ и $Df_1(0)$.

Остается доказать, что $\operatorname{ind}_0 f_0 = \deg g_0$. Но f_0 линейно и, следовательно, может быть связано гомотопией, составленной из линейных отображений, с элементом группы $O(n)$. Таким образом, лемму достаточно доказать в специальном случае, когда отображение f ортогонально. А в этом случае $g = f$, и утверждение леммы очевидно: каждое из чисел $\operatorname{ind}_0 f_0$, $\deg g$ равно ± 1 в зависимости от того, сохраняет или обращает ориентацию f. ∎

Степень отображения $g\colon \partial D \to S^{n-1}$ в теореме 2.8 определена, если x есть *изолированный* нуль отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, а само f при этом может быть только непрерывным. Более того, в силу теоремы 1.6 (b), $\deg g$ не зависит от D. Это позволяет нам значительно расширить определение индекса $\operatorname{ind}_x f$. Именно, пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ — векторное поле на U и $x \in U$ — изолированный нуль отображения f. *Индекс отображения f в точке x* определяется равенством $\operatorname{ind}_x f = \deg g$, где

$$g\colon \partial D \to S^{n-1},$$
$$g(y) = f(y)/|f(y)|$$

для некоторого n-диска $D \subset U$ с центром x. Если 0 есть регулярное значение отображения f, то это согласуется с прежним определением. Заметим, что $\deg g$ *может принимать любые целые значения* (при $n \geqslant 2$).

2.9. Лемма. *Пусть W — связное компактное n-мерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$ и $f\colon W \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^∞. Предположим, что $f^{-1}(0)$ есть конечное подмножество разности $W - \partial W$. Если*

$$\sum \operatorname{ind}_x f = 0 \qquad (x \in f^{-1}(0)),$$

то существует отображение $g\colon W \to \mathbb{R}^n - 0$, совпадающее с f на ∂W; наоборот, если такое g существует, то выполняется предыдущее равенство.

Доказательство. Пусть $f^{-1}(0) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Пусть $D_1, \ldots, D_k$ — маленькие непересекающиеся n-диски в $W - \partial W$ с центрами $x_1, \ldots, x_k$ соответственно.

Положим $W_0 = W - \bigcup \operatorname{Int} D_i$. Тогда $\partial W_0 = \partial W \cup \bigcup_{i=1}^{n} \partial D_i$ и $f(W_0) \subset \mathbb{R}^n - 0$. Рассмотрим отображение

$$g\colon W_0 \to S^{n-1},$$
$$y \mapsto f(y)/|f(y)|.$$

В силу 1.8, $\deg(g|\partial W_0) = 0$, а в силу предыдущей леммы

$$\sum_{i=1}^{k} \deg(g|\partial D_i) = 0.$$

Следовательно, $\deg(g|\partial W) = 0$; в силу теоремы 1.8, существует отображение $W \to S^{n-1}$, продолжающее $g|\partial W$. Композиция

$$\partial W \xrightarrow{g} S^{n-1} \to \mathbb{R}^n - 0$$

гомотопна $f|\partial W$. Так как g продолжается на W, то продолжается и $f|\partial W$. Доказательство заключительной части леммы 2.9 предоставляется читателю. ∎

Теперь мы можем обратить теорему 2.2.

2.10. Теорема. *Пусть M — компактное связное ориентированное n-многообразие без края и ξ — ориентированное n-мерное векторное расслоение над M. Если* $\mathrm{X}(\xi) = 0$, *то ξ обладает сечением, не обращающимся в нуль.*

Доказательство. Пусть $f\colon M \to TM$ — сечение класса C^∞, трансверсальное к M. В силу леммы 2.6 мы можем считать, что конечное множество $f^{-1}(M)$ лежит в области определения карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$; можно считать также, что φ есть диффеоморфизм. Отображение

$$T\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

есть векторное поле на $\mathbb{R}^n$, трансверсальное к нулевому сечению, или, что равносильно, отображение $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, трансверсальное к 0. Предположение $\mathrm{X}(\xi) = 0$ влечет за собой равенство

$$\sum_x \operatorname{ind}_x g = 0 \qquad (x \in g^{-1}(0)).$$

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — шар, содержащий $g^{-1}(0)$ в своей внутренности. В силу теоремы 2.9 существует отображение $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n - 0$, совпадающее с g на $\mathbb{R}^n - \operatorname{Int} B$. Это отображение h определяет не обращающееся в нуль векторное поле g_1 на $\mathbb{R}^n$, равное g на $\mathbb{R}^n - \operatorname{Int} B$. Отображение

$$f_1\colon M \to TM,$$
$$f_1 = \begin{cases} f & \text{на } M - \varphi^{-1}(\operatorname{Int} B), \\ T_U\varphi^{-1} \circ g_1 \circ \varphi & \text{на } \varphi^{-1}(B), \end{cases}$$

есть сечение расслоения ξ, нигде не обращающееся в нуль. ∎

Полученные результаты позволяют доказать одну классическую теорему Уитни [3]. Наше доказательство, по существу, не отличается от доказательства Уитни.

2.11. Теорема. *Пусть M — компактное ориентированное n-мерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{2n}$, не имеющее края. Тогда M обладает нормальным векторным полем, не обращающимся в нуль.*

Доказательство. Можно считать, что M связно. Пусть ν — нормальное расслоение многообразия M. В силу теоремы 2.10 нам достаточно доказать, что $\mathrm{X}(\nu) = 0$. Мы отождествляем окрестность W нулевого сечения расслоения ν с окрестностью многообразия M в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда

$$\mathrm{X}(\nu) = \#(M,\ M;\ W) = \#(M,\ M;\ \mathbb{R}^{2n}) = 0. \ \blacksquare$$

Если в теореме 2.11 не предполагать M ориентируемым, заключение теоремы перестает быть верным; это показал Уитни на примере $P^2 \subset \mathbb{R}^4$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Представим m-мерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^m$ как подмногообразие многообразия $\mathbb{C}P^n$ (естественным образом). Тогда по отношению к естественным ориентациям

$$\#(\mathbb{C}P^m,\ \mathbb{C}P^{n-m};\ \mathbb{C}P^n) = 1.$$

Аналогичный результат $\operatorname{mod} 2$ справедлив для вещественных проективных пространств.

2. Индекс $\#(f,\ N;\ W)$ равен 0 в любом из следующих случаев: отображение $f\colon M \to W$ продолжается на компактное ориентированное многообразие с краем M; N является краем замкнутого ориентированного подмногообразия многообразия W; отображение f гомотопно постоянному; N стягивается в W в точку. Подобное верно для $\#_2(f,\ N)$.

3. Пусть M — компактное ориентированное многообразие без края. Пусть, далее,

$$M_\Delta = \{(x,\ x) \in M \times M\}$$

— диагональное подмногообразие.

(a) $\chi(M) = \#(M_\Delta,\ M_\Delta)$.

(b) $\chi(M) = 0$ в том и только том случае, если существует отображение $f\colon M \to M$ без неподвижных точек, гомотопное тождественному. Это верно и для неориентируемых многообразий.

4. Пусть M, N, W — ориентированные многообразия без края, причем $\dim M + \dim N = \dim W$. *Индекс пересечения отображений* $f\colon M \to W$, $g\colon N \to W$ определяется формулой

$$\# (f, g) = \# (f \times g, W_\Delta;\ W \times W).$$

Это число зависит только от гомотопических классов отображений f и g. Если g есть вложение, то

$$\# (f, g) = \# (f, g(N)).$$

В общем случае

$$\# (g, f) = (-1)^{\dim M \dim N} \# (f, g).$$

Для неориентированных многообразий аналогичным образом определяется индекс пересечения mod 2.

5. Пусть $\xi_i = (p_i, E_i, M_i)$ $(i = 0, 1)$ — ориентированные n-мерные векторные расслоения над компактными ориентированными n-многообразиями без края. Положим

$$\xi_0 \times \xi_1 = (p_0 \times p_1, E_0 \times E_1, M_0 \times M_1).$$

Тогда

$$X(\xi_0 \times \xi_1) = X(\xi_0)\, X(\xi_1).$$

6. Пусть ξ есть n-мерное векторное расслоение над связным k-мерным многообразием M.

(a) Если $k < n$, то ξ обладает не обращающимся в нуль сечением.

(b) Если $k = n$, то для любой точки $x \in M$ у ξ найдется сечение, которое обращается в нуль только в x.

(c) Если $k = n$ и $\partial M \neq \varnothing$ или M некомпактно, то ξ обладает не обращающимся в нуль сечением.

7. (a) Предположим, что некоторое компактное n-многообразие может быть представлено как $A \cup B$, где A, B — компактные n-мерные подмногообразия и $A \cap B$ есть $(n-1)$-мерное подмногообразие. Тогда $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

(b) Число $\chi(\partial A)$ всегда четно. [Указание: возьмите $B \approx A$.]

8. Эйлерова характеристика (ориентируемой) поверхности рода g равна $2 - 2g$. [Воспользуйтесь упр. 7.]

9. Пусть M — возможно, неориентируемое компактное многообразие без края, и пусть $G\colon M \to M \times M$ — отображение класса C^∞. Тогда можно корректно определить число $L(G) = \# (G, M_\Delta; M \times M)$, взяв произвольные ориентации многообразия M в точках x с $G(x) \in M_\Delta$ и соответствующие локальные ориентации многообразий $M \times M$ и M_Δ в точке (x, x). Более того, число $L(G)$ является гомотопическим инвариантом и определено благодаря этому для любого непрерывного отображения G. Если $g\colon M \to M$ — непрерывное отображение, то *число Лефшеца отображения* g есть по определению число $\operatorname{Lef}(g) = L(G)$, где $G(x) = (x, g(x))$. Число $\operatorname{Lef}(g)$ является гомотопическим инвариантом отображения g. Число Лефшеца отображения 1_M равно $\chi(M)$. Если $\operatorname{Lef}(g) \neq 0$, то g обязательно имеет неподвижную точку.

10. Пусть $x \in M$ есть изолированная неподвижная точка непрерывного отображения $g: M \to M$. Пусть, далее, $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ есть карта, покрывающая точку x; положим $\varphi(x) = y$. Векторное поле $f(z) = \varphi g \varphi^{-1}(z) - z$ определено в окрестности точки y в $\mathbb{R}^n$ и y есть его изолированный нуль. Положим

$$\operatorname{Lef}_x(g) = \operatorname{ind}_y f.$$

Это число не зависит от карты (φ, U). Если g принадлежит классу C^1, то

$$\operatorname{Lef}_x(g) = \det(T_x g - I), \text{ где } I = 1_{M_x}.$$

Если множество $\operatorname{Fix}(g)$ неподвижных точек отображения g конечно, то (см. упр. 9)

$$\operatorname{Lef}(g) = \sum_x \operatorname{Lef}_x(g) \qquad (x \in \operatorname{Fix}(g)).$$

11. Всякое непрерывное отображение $P^{2n} \to P^{2n}$ имеет неподвижную точку. [Рассмотрите отображения сферы S^{2n} в S^{2n}, коммутирующие с антиподальным отображением. См. упр. 9, 10.]

12. Лемма 2.9 справедлива и в случае, когда отображение f только непрерывно.

13. (a) Существует непрерывное отображение $f: S^2 \to S^2$ степени 2, имеющее в точности две периодические точки. (Точка x называется *периодической*, если $f^n(x) = x$ при некотором $n > 0$.)

**(b) Если отображение $f: S^2 \to S^2$ принадлежит классу C^1 и имеет степень d с $|d| > 1$, то f имеет бесконечно много периодических точек. (Шуб — Сулливан [1].)

***(c) Представим двумерный тор T^2 как факторпространство $\mathbb{R}^2/Z^2$ и рассмотрим диффеоморфизм $f: T^2 \to T^2$, индуцированный линейным оператором на $\mathbb{R}^2$, матрица которого есть $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Шуб и Сулливан ставят вопрос: если $g: T^2 \to T^2$ — непрерывное отображение, гомотопное f, обязательно ли g имеет бесконечно много периодических точек?

14. Пусть M, N — компактные ориентированные n-многообразия без края, и пусть N связно. Тогда степень отображения $f: M \to N$ равна индексу пересечения в $M \times N$ графика отображения f с $M \times y$, где $y \in N$ — любая точка.

*15. С помощью индексов пересечения и некоторых элементарных гомотопических фактов можно доказать, что всякий диффеоморфизм комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ сохраняет ориентацию. План доказательства таков. Тот факт, что $\pi_2(\mathbb{C}P^2)$ есть бесконечная циклическая группа, порожденная классом включения $i: S^2 = \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$, показывает, что если $h: \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ — диффеоморфизм, то $h_\#[i] = \pm [i]$ в $\pi_2(\mathbb{C}P^2)$. Поэтому

$$\#(hi, hi) = \#(i, i) = 1$$

(см. упр. 4). С другой стороны, легко показать, что для любых отображений $f, g: S^2 \to \mathbb{C}P^2$

$$\#(hf, hg) = (\deg h)[\#(f, g)].$$

Следовательно, $\deg h = 1$.

16. Теорема 2.11 может быть следующим образом обобщена. Пусть M есть n-мерное компактное подмногообразие $2n$-мерного многообразия N. Предпо-

ложим, что M и N ориентируемы и что M стягивается в точку в N. Тогда M обладает не обращающимся в нуль нормальным векторным полем в N (по отношению к произвольной римановой метрике в N).

17. Чему равна степень отображения $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, определяемого формулой

$$[z_0, \ldots, z_n] \longmapsto [w_0, \ldots, w_n],$$

где $w_j = \left(\sum_k A_{jk} z_k\right)^p$, p — произвольное целое число и $[A_{jk}] \in GL(n, \mathbb{C})$?

18. Чему равно число Эйлера нормального расслоения $\mathbb{C}P^n$ в $\mathbb{C}P^{2n}$?

19. Пусть $\xi \to S^n$ — ортогональное ориентированное n-мерное векторное расслоение.

(a) ξ соответствует некоторому элементу α группы $\pi_{n-1}(SO(n))$ (ср. упр. 8 к § 4.3).

(b) $\mathrm{X}(\xi)$ есть образ элемента α в $\pi_{n-1}(S^{n-1}) = Z$ при гомоморфизме

$$f_{\#}\colon \pi_{n-1}(SO(n)) \to \pi_{n-1}(S^{n-1}),$$

индуцированном отображением $f\colon SO(n) \to S^{n-1}$, где f относит ортогональному преобразованию из $SO(n)$ его значение на северном полюсе P.

20. Проверьте справедливость высказывания Хегора, процитированного в начале гл. 4.

3. ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие степени происходит от кронекеровской «характеристики системы функций», определенной в 1869 г. Кронекер [1] рассматривал задачу следующего типа (в современной терминологии). Пусть $F_0, \ldots, F_n$ — отображения класса C^1 пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Предположим, что 0 есть регулярное значение каждого из этих отображений и что каждое из многообразий $M_i = F_i^{-1}(-\infty, 0]$ компактно. Предполагается также, что функции $F_0, \ldots, F_n$ не имеют общих нулей, и спрашивается, сколько общих нулей будут иметь n функций $F_j\colon M_i \to \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Кронекер получил интегральную формулу для числа, которое есть в действительности степень составного отображения

$$\partial M_i \xrightarrow{G_i} \mathbb{R}^n - 0 \xrightarrow{\pi} S^{n-1},$$

где $G_i = (F_0, \ldots, \hat{F}_i, \ldots, F_n)$ и $\pi(x) = x/|x|$. Он доказал, что эта степень не зависит от i и равна алгебраическому числу нулей отображения G_i в M_i. Он показал также, что полная кривизна компактной поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ равна степени гауссова отображения $M \to S^2$, умноженной на 2π. Позднее Вальтер ван Дейк [1] доказал, что степень гауссова отображения равна эйлеровой характеристике поверхности M, завершив этим доказательство предложения, ныне неправильно называемого теоремой Гаусса—Бонне.

Большое влияние на дальнейшее развитие событий оказала статья Адамара [1], написанная в 1910 г. и не утратившая своего значения и поныне. В ней идеи Кронекера получили геометрическое истолкование. Современное изложение работы Кронекера имеется в книгах Лефшеца [1] и Александрова—Хопфа [1].

Топологический подход к понятию степени отображения является заслугой Брауэра [1]. Брауэр сделал фундаментальный вклад в топологию многообразий (обширная библиография имеется в книге Лефшеца [1]). Однако в свои последние годы он сделался поборником интуиционистского взгляда на математику и отрекся от некоторых своих ранних результатов.

Наш способ введения степени весьма близок к принятому в книге Понтрягина [1].

Глава 6

ТЕОРИЯ МОРСА

> Топология есть в точности та математическая дисциплина, с помощью которой производится переход от локального к глобальному.
>
> Р. Том, Структурная устойчивость и морфогенез, 1972

До сих пор мы получали результаты очень общей природы: всякое n-многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^{2n+1}$, всякое отображение аппроксимируется C^∞-отображениями и т. д. Все это — полезные математические средства, но они мало пригодны к изучению конкретных многообразий или классов многообразий. Например, мы все еще не умеем классифицировать компактные двумерные многообразия.

В этой главе мы изучим множества уровня $f^{-1}(y)$ функции $f: M \to \mathbb{R}$, имеющей лишь простейшие возможные критические точки. Такие функции называются «функциями Морса». Разбиение многообразия M на эти множества уровня несет поразительно много информации о топологии многообразия M. Например, в § 6.4 мы покажем, как с помощью произвольной функции Морса можно построить клеточное пространство, гомотопически эквивалентное M. В § 6.3 доказываются неравенства Морса. Они связывают критические точки функции f с гомологическими группами многообразия M; в частности, они позволяют вычислить эйлерову характеристику многообразия M с помощью произвольной функции Морса на M.

Как доказывается в § 6.1, функции Морса составляют открытое и плотное множество с $C^r_S(M, \mathbb{R})$ при $2 \leqslant r \leqslant \infty$. Каждая критическая точка такой функции покрывается картой специального вида, в которой функция представляется как невырожденная квадратичная форма. Индекс этой формы называется индексом критической точки. Эти карты позволяют провести полный локальный анализ функции.

В § 6.2, который начинается с некоторых фактов из теории дифференциальных уравнений, исследуются множества $f^{-1}[a, b]$, не содержащие критических точек. При незначительных ограничениях оказывается, что $f^{-1}[a, b] \approx f^{-1}(a) \times [a, b]$.

Изложению ядра теории Морса посвящен § 6.3. Предположим, что множество $f^{-1}[a, b]$ содержит в точности одну критическую точку и что индекс этой точки равен k. Оказывается, что с точностью до гомотопической эквивалентности множество $f^{-1}[a, b]$ получается из $f^{-1}(a)$ присоединением k-клетки. Это приводит уже автоматически к неравенствам Морса и к построению клеточного пространства, гомотопически эквивалентного многообразию M и имеющего по одной k-клетке для каждой критической точки индекса k.

Мы излагаем здесь только самые начала теории Морса. С важными применениями этого предмета к таким областям, как дифференциальная геометрия и вариационное исчисление, читатель может познакомиться по книгам М. Морса [1], Милнора [3], Пале [1] и Смейла [3] [1]).

1. ФУНКЦИИ МОРСА

Пусть M — многообразие размерности n. *Кокасательное расслоение* T^*M определяется наподобие касательного расслоения TM, только вместо пространства $\mathbb{R}^n$ используется двойственное пространство $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Более точно, T^*M как множество есть $\bigcup_{x \in M} (M_x^*)$, где $M_x^* = L(M_x, \mathbb{R})$. Если (φ, U) — карта многообразия M, то *естественная карта* на T^*M определяется как отображение

$$T^*U \to \varphi(U) \times (\mathbb{R}^n)^*,$$

относящее точке $\lambda \in M_x^*$ пару $(\varphi(x), \lambda\varphi_x^{-1})$. Проекция $p\colon T^* \to M$ отображает M_x^* в x.

Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — отображение класса C^{r+1} с $1 \leqslant r \leqslant \omega$. Для каждой точки $x \in M$ линейное отображение $T_xf\colon M_x \to \mathbb{R}$ принадлежит M_x^*. Положим

$$T_xf = Df_x \in M_x^*.$$

Тогда отображение

$$Df\colon M \to T^*M,$$
$$x \mapsto Df_x = Df(x),$$

есть C^r-сечение расслоения T^*M. Локальное представление сечения Df в картах многообразия M и соответствующих естественных картах многообразия T^*M есть отображение открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ в $(\mathbb{R}^n)^*$ вида $x \mapsto Dg(x)$, где g — локальное представление отображения f. Таким образом, Df обобщает обычный дифференциал функций на $\mathbb{R}^n$.

Критическая точка x функции f является нулем сечения Df, т. е. $Df(x)$ есть нуль векторного пространства M_x^*. Таким образом, множество критических точек функции f есть прообраз подмного-

---

[1]) Странно не видеть в этом списке знаменитой книги Г. Зейферта и В. Трелльфаля «Вариационное исчисление в целом». — М.: ИЛ., 1947. — *Прим. перев.*

образия $Z^* \subset T^*M$ нулей. Заметим, что $Z^* \approx M$ и что коразмерность многообразия Z^* в T^*M равна $n = \dim M$.

Критическая точка x функции f называется *невырожденной*, если сечение Df трансверсально в точке x к Z^*. Если все критические точки функции f невырожденны, то f называется *функцией Морса*. В этом случае множество критических точек есть замкнутое дискретное подмножество многообразия M.

Мотивировкой определения невырожденной критической точки служит следующее наблюдение. Посредством введения локальных координат мы приходим к ситуации, когда $M = \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$ есть критическая точка функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Легко видеть, что точка x в том и только том случае является невырожденной, если x есть регулярная точка отображения $Df\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Таким образом, если y изменяется в малой окрестности точки x, то Df_y принимает каждое значение, лежащее в достаточно малой окрестности точки 0 в $(\mathbb{R}^n)^*$, точно один раз. Более того, если y удаляется от x с ненулевой скоростью, то Df_y с ненулевой скоростью удаляется от 0.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $g\colon U \to \mathbb{R}$ — отображение класса C^2. Легко видеть, что критическая точка $p \in U$ в том и только том случае является невырожденной, если линейное отображение

$$D(Dg)\,p\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$$

является изоморфизмом. Естественным образом отождествляя $L(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*)$ с пространством $L^2(\mathbb{R}^n)$ билинейных отображений $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, мы видим, что это эквивалентно условию невырожденности симметрического билинейного отображения $D^2g(p)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В координатах это означает, что *гессиан*, т. е. $n \times n$-матрица

$$\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,\partial x_j}(p)\right],$$

имеет ранг n. Это доставляет удобный критерий для распознавания невырожденных критических точек функции $M \to \mathbb{R}$ с помощью локальных координат.

Пусть $p \in U$ — критическая точка отображения $g\colon U \to \mathbb{R}$. *Гессианом* функции g в точке p мы будем называть также квадратичную форму $H_p g$, ассоциированную с билинейной формой $D^2g(p)$; таким образом,

$$H_p g(y) = D^2 g(p)(y, y) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,\partial x_j}(p)\, y_i y_j.$$

Эта форма инвариантна относительно диффеоморфизмов в следующем смысле. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $h\colon V \to U$ —

диффеоморфизм класса C^2. Пусть, далее, $q = h^{-1}(p)$, так что q есть критическая точка функции $gh\colon V \to \mathbb{R}$. Тогда, как показывают вычисления, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "H_q(gh)"] \arrow[d, "Dh(q)"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "H_p g"'] & \end{tikzcd}$$

Пусть теперь $f\colon M \to \mathbb{R}$ — функция класса C^2. Для каждой критической точки x функции f мы определяем гессиан $H_x f\colon M_x \to \mathbb{R}$ как композицию

$$H_x f\colon M_x \xrightarrow{D\varphi_x} \mathbb{R}^n \xrightarrow{H_{\varphi(x)}(f\varphi^{-1})} \mathbb{R},$$

где φ есть произвольная карта, покрывающая x. Инвариантность гессианов функций на $\mathbb{R}^n$ показывает, что форма $H_x f$ определена корректно, т. е. не зависит от φ. Заметим, что x в том и только том случае является невырожденной критической точкой, если $H_x f$ есть невырожденная квадратичная форма. Мы получаем другое определение: критическая точка вещественнозначной C^2-функции невырожденна, если является невырожденным соответствующий гессиан.

Пусть теперь Q — невырожденная квадратичная форма на векторном пространстве E. Мы скажем, что форма Q *отрицательно определена на подпространстве* $F \subset E$, если $Q(x) < 0$ для всякого отличного от нуля $x \subset F$. Наибольшая возможная размерность подпространства, на котором форма Q отрицательно определена, называется *индексом* формы Q и обозначается через $\operatorname{ind} Q$. Если $A = [a_{ij}]$ есть симметрическая $n \times n$-матрица, представляющая $Q(x)$ как $\sum a_{ij}x_i x_j$ в некоторых линейных координатах в E, то индекс формы Q равен числу отрицательных собственных значений матрицы A (с учетом кратностей).

Пусть $p \in M$ — невырожденная критическая точка функции $f\colon M \to \mathbb{R}$. Индекс точки p определяется как индекс гессиана функции f в точке p; он обозначается через $\operatorname{ind}(p)$ или $\operatorname{ind}_f(p)$.

Это число дает нам ценную информацию о локальном поведении функции f вблизи x. Предположим, что $M = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$. Разложение Тейлора порядка 2 функции f в 0 имеет форму

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2} H_0 f(x) + R(x),$$

где $R(x)/|x|^2 \to 0$ при $x \to 0$. Таким образом, функция f приблизительно равна константе плюс половина гессиана в 0. Пусть $E_- \oplus E_+$ — разложение пространства $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму, такое, что форма $H_0 f$ отрицательно определена на E_- и положительно определена на E_+; при этом автоматически

$$\dim E_- = k = \operatorname{ind} H_0 f,$$

$$\dim E_+ = n - k.$$

Тогда если $x \in \mathbb{R}^n$ и если $t \in \mathbb{R} - 0$ достаточно мало, то $f(tx)/t$ есть убывающая функция от t при $x \in E_-$ и возрастающая функция от t при $x \in E_+$.

Следовательно, для функции Морса $f\colon M \to \mathbb{R}$ критическая точка p является локальным минимумом в том и только том случае, если $\operatorname{ind}(p) = 0$, и локальным максимумом в том и только том случае, если $\operatorname{ind}(p) = \dim M$.

Следующая теорема Марстона Морса является уточнением этого соотношения между функцией f и ее гессианом в невырожденной критической точке p. Она утверждает, что f имеет в точке p локальное представление $f(p) + \frac{1}{2} H_p f$.

1.1. Лемма Морса. *Пусть $p \in M$ — невырожденная критическая точка индекса k C^{r+2}-функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant r \leqslant \omega)$. Тогда существует покрывающая p C^r-карта (φ, U), такая, что*

$$f\varphi^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} u_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} u_i^2.$$

Доказательство основано на следующей параметрической форме теоремы о диагонализации симметрических матриц. Пусть ${}^tQ$ обозначает матрицу, полученную из Q транспонированием.

Лемма. *Пусть $A = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}$ — диагональная $n \times n$-матрица с диагональными элементами ± 1. Тогда существуют такая окрестность N матрицы A в пространстве симметрических $n \times n$-матриц и такое C^ω-отображение*

$$P\colon N \to GL(n, \mathbb{R}),$$

что $P(A) = 1$ (единичная матрица) и что если $P(B) = Q$, то ${}^tQBQ = A$.

Доказательство леммы. Пусть $B = [b_{ij}]$ — симметрическая матрица, столь близкая к A, что b_{11} отлично от нуля и имеет тот же знак, что a_1. Рассмотрим линейную замену координат в $\mathbb{R}^n$:

$$x_1 = \left[y_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}} y_2 - \ldots - \frac{b_{1n}}{b_{11}} y_n\right] \Big/ \sqrt{|b_{11}|},$$
$$x_k = y_k \text{ при } k = 2, \ldots, n;$$

матрицу этой замены мы обозначим через T (т. е. $x = Ty$). Легко проверить, что матрица ${}^tTBT$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Если B достаточно близко к A, то симметрическая $(n-1) \times (n-1)$-матрица B_1 будет столь близкой к $A_1 = \operatorname{diag}\{a_2, \ldots, a_n\}$, как мы этого пожелаем; в частности, можно считать ее обратимой. Заметим, что матрицы T и B_1 зависят от B C^∞-образом. Применяя индукцию по n, мы можем предположить, что существует матрица $Q_1 = P_1(B_1) \in GL(n-1)$, аналитическим образом зависящая от B_1 и такая, что ${}^tQ_1B_1Q_1 = A_1$. Определим матрицу $Q = P(B)$ формулой $Q = TS$, где

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix};$$

тогда ${}^tQBQ = A$. ∎

Доказательство леммы Морса. Можно считать, что M есть выпуклое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $p = 0 \in \mathbb{R}^n$ и $f(0) = 0 \in \mathbb{R}$. После надлежащей линейной замены координат мы можем считать, что матрица

$$A = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right]$$

диагональна, причем первые k ее диагональных элементов равны -1, а остальные равны 1. По предположению $Df(0) = 0$.

Существует C^r-отображение $x \mapsto B_x$ многообразия M в пространство симметрических $n \times n$-матриц, такое, что если $x \in M$ и $B_x = [b_{ij}(x)]$, то

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) x_i x_j$$

и $B_0 = A$. Это доказывается, например, двукратным применением теоремы об интеграле производной:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 Df(tx)\,x\,dt \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\,dt \right] x_j \\ &= \sum_{i,\,j=1}^{n} \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(stx)\,ds\,dt \right] x_i x_j \\ &= \sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}(x)\,x_i x_j. \end{aligned}$$

Пусть $P(B)$ — матричнозначная функция из леммы; положим $P(B_x) = Q_x \in GL(n)$. Определим C^r-отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset M$ есть достаточно малая окрестность нуля, формулой

$$\varphi(x) = Q_x^{-1}(x).$$

Вычисление показывает, что $D\varphi(0) = 1$; следовательно, теорема об обратной функции позволяет нам считать, что (φ, U) есть C^r-карта.

Положим $y = \varphi(x)$; тогда в матричных обозначениях

$$f(x) = {}^t x B_x x = {}^t y\left({}^t Q_x B_x Q_x\right) y = {}^t y A y = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} y_i^2. \blacksquare$$

Итак, у нас есть *полное локальное описание* функции Морса $f\colon M \to \mathbb{R}$. Если точка $a \in M$ регулярна, то в силу теоремы о неявной функции вблизи a имеются локальные координаты, в которых

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1.$$

Если a есть критическая точка, то вблизи a имеются локальные координаты, в которых

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(a) - x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2.$$

Индекс k однозначно определяется критической точкой.

Мы видим, что множества уровня $f^{-1}(y)$ функции Морса локально устроены довольно хорошо. Вблизи регулярной точки множество $f^{-1}(y)$ выглядит как гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Вблизи критической точки имеется карта (φ, U), превращающая $U \cap f^{-1}(y)$ в окрестность нуля на особой квадратичной гиперповерхности

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 = 0;$$

прилегающие поверхности уровня в U превращаются при этом в открытые подмножества невырожденных квадрик

$$-x_1^2-\ldots-x_k^2+x_{k+1}^2+\ldots+x_n^2=\mathrm{const}\neq 0.$$

Некоторые примеры показаны на рис. 6—1.

При переходе через критическое значение топология поверхности уровня функции Морса изменяется скачком. Этот переход

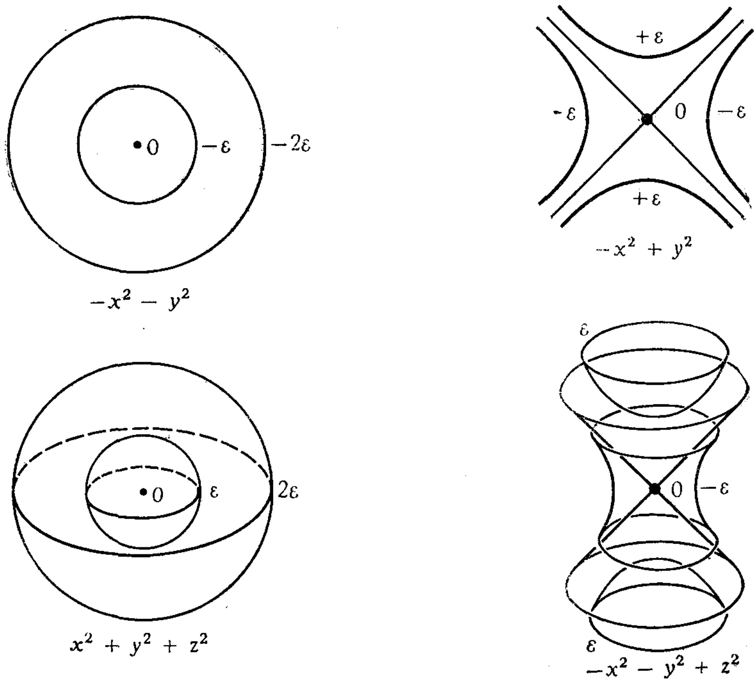


Рис. 6—1.

детально изучается в следующем параграфе. А этот параграф мы завершаем следующим предложением.

1.2. Теорема. *Для любого многообразия M функции Морса составляют плотное открытое подмножество множества C_S^s $(M, \mathbb{R})$ $(2 \leqslant s \leqslant \infty)$.*

Доказательство. Многообразие T^*M диффеоморфно $J^1(M, \mathbb{R})$, многообразию 1-струй отображений $M \to \mathbb{R}$; естественный диффеоморфизм переводит $j_x^1 f \in J_x^1(M, \mathbb{R})$ в $Df_x \in T_x^*M$. Таким образом, C^s-функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ в том и только том случае является функцией Морса, если ее 1-продолжение

$$j^1 f\colon M \to J^1(M, \mathbb{R})$$

трансверсально нулевому сечению. Ввиду этого наша теорема является следствием струйной теоремы трансверсальности (теоремы 3.2.8). ∎

УПРАЖНЕНИЯ

**1. В лемме Морса можно заменить класс C^{r+2} классом C^{r+1}. (Можно считать, что $M=\mathbb{R}^n$, $p=0$, $f(p)=0$. Положим $\frac{1}{2}D^2f(0)(x,x)=Q(x)$. Пусть $t\longmapsto\xi(x,t)$ — решение дифференциального уравнения $dx/dt=\operatorname{grad}Q(x)$, такое, что $\xi(0,x)=0$. Для x, достаточно близких к нулю, существует единственное $t(x)$, такое, что $Q\xi(t(x),x)=f(x)$. Достаточно положить $\varphi(x)=\xi(t(x),x)$. См. Кэйпер [1], Такенс [1].)

2. Пусть M — компактное C^2-подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{q+1}$. Для $v\in S^q$ определим отображение $f_v\colon M\to\mathbb{R}$ формулой $f_v(x)=\langle v,x\rangle$. (По существу, это ортогональное проектирование вдоль v.) Тогда множество таких $v\in S^q$, что f_v есть функция Морса, открыто и плотно в S^q.

3. Пусть M есть C^2-подмногообразие пространства $\mathbb{R}^q$ и $f\colon M\to\mathbb{R}$ — функция класса C^2. Множество линейных отображений $L\in L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R})$, таких, что отображение $M\to\mathbb{R}$, задаваемое формулой $x\longmapsto f(x)+L(x)$, является функцией Морса, есть множество Бэра и, таким образом, плотно. Если M компактно, то оно открыто и плотно.

4. Пусть M — замкнутое компактное C^2-подмногообразие пространства $\mathbb{R}^q$. Множество таких точек $u\in\mathbb{R}^q$, что отображение $x\longmapsto|x-u|^2$ является функцией Морса, открыто и плотно в $\mathbb{R}^q$.

*5. Пусть $f_0, f_1\colon M\to\mathbb{R}$ — функции Морса. Не всегда существует C^2-гомотопия $f\colon M\times[0,1]\to\mathbb{R}$, такая, что $f(x,0)=f_0(x)$, $f(x,1)=f_1(x)$ и что каждое из отображений $f_t(x)=f(x,t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ является функцией Морса. Однако можно найти такую C^2-гомотопию между f_0 и f_1, что f_t является функцией Морса для всех t, кроме конечного множества $t_1,\ldots,t_m$, и что при этом каждая из функций f_{t_j} имеет единственную вырожденную критическую точку, скажем z_j, и в надлежащих локальных координатах вблизи z_j функция f_{t_j} имеет вид

$$-x_1^2-\ldots-x_k^2+x_{k+1}^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^3+R(x)+\text{const}\ ^{1)},$$

где $R(x)/|x|^3\to0$ при $|x|\to0$. (Нужно предположить, что f принадлежит классу C^3, и сделать отображение $(x,t)\longmapsto j_x^2f_t$ трансверсальным надлежащему подмногообразию многообразия $J^2(M,\mathbb{R})$.)

6. На проективной плоскости существует функция Морса, имеющая ровно три критические точки.

*7. *Обобщенная лемма Морса.* Пусть $f\colon M\to\mathbb{R}$ — функция класса C^{r+3}. Правильное подмногообразие V многообразия M называется *критическим*, если каждая его точка является критической. Критическое подмногообразие V называется *невырожденным индекса* k, если каждая точка $x\in V$ обладает следующим свойством: для некоторого (и, значит, для любого) подмногообразия W многообразия M, трансверсального к V в точке x, x есть невырожденная критическая точка индекса k функции $f|W$. Если при этом $V\subset M-\partial M$ и V свя-

---

1) Слагаемое $R(x)$ является, в действительности, лишним, но это — более трудная теорема. — *Прим. перев.*

зно, то у V есть трубчатая окрестность класса C^r вида $(g, \xi \oplus \eta)$, такая, что по отношению к некоторым ортогональным структурам на ξ и η композиция

$$E(\xi \oplus \eta) \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

задается формулой

$$(x, y) \longmapsto -|x|^2 + |y|^2 + C,$$

где $(x, y) \in \xi_p \oplus \eta_p$, $p \in V$ и C есть константа, равная $f(V)$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РЕГУЛЯРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

Напомним некоторые факты, касающиеся дифференциальных уравнений. Пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $g\colon W \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r с $1 \leqslant r \leqslant \omega$, рассматриваемое как векторное поле на W. Тогда g локально удовлетворяет условию Липшица, и фундаментальная теорема существования, единственности и гладкости решения обыкновенного дифференциального уравнения применима к задаче Коши

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \varphi'(t) &= g(\varphi(t)), \\ \varphi(0) &= x, \end{aligned}$$

где $x \in W$. Следовательно, существуют связная открытая окрестность нуля $J \subset \mathbb{R}$ и C^{r+1}-отображение

$$\varphi\colon J \to W,$$

удовлетворяющее условиям (1). Если $\varphi_1\colon J_1 \to W$ — другое решение задачи (1), то $\varphi = \varphi_1$ на $J \cap J_1$. Таким образом, φ и φ_1 составляют решение задачи (1) на $J \cup J_1$. Следовательно, J и φ единственны, если J предполагается максимальным. Мы обозначаем этот максимальный интервал через $J(x)$, а для соответствующего решения используем одну из записей

$$\varphi^x\colon J(x) \to W,$$

$$\varphi^x(t) = \varphi_t(x) = \varphi(t, x).$$

Отображения φ^x, а иногда множества $\varphi^x(J(x))$, называются *интегральными кривыми*, или *траекториями*, или *линиями тока* векторного поля g.

Интервалозначная функция $x \longmapsto J(x)$ полунепрерывна снизу в том смысле, что если $\alpha \in J(x)$, то $\alpha \in J(y)$ для всех y из некоторой окрестности точки x. Из этого следует, что множество

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W \mid t \in J(x)\}$$

открыто в $\mathbb{R} \times W$.

Поток, порожденный полем g, есть по определению C^r-отображение

$$\varphi\colon \Omega \to W,$$
$$(t, x) \mapsto \varphi_t(x).$$

Положим для $t \in \mathbb{R}$

$$W_t = \{x \in W \mid t \in J(x)\}.$$

Множество W_t открыто в W, и имеется естественное C^r-отображение

$$\varphi_t : W_t \to W,$$
$$x \mapsto \varphi_t(x).$$

Очевидно, $\varphi_t(W_t) = W_{-t}$ и $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$. Таким образом, φ_t *есть C^r-вложение*. Более того, имеет место соотношение

$$\varphi_s\varphi_t(x) = \varphi_{s+t}(x),$$

точный смысл которого заключается в том, что если определена одна из частей этого равенства, то определена и другая и они равны. Нетрудно доказать, что если $K \subset \mathbb{R}$ — произвольный интервал и $U \subset W$ — такое открытое множество, что $U \subset \bigcap_{t \in K} W_t$, то возникающее отображение $K \to \operatorname{Emb}^r(K, W)$ непрерывно по отношению к слабой топологии.

Пусть, далее, $P \subset W$ — компактное множество. Для каждой точки $x \in W$ множество таких $t \in J(x)$, что $\varphi_t(x) \in P$, замкнуто не только в $J(x)$, но и в $\mathbb{R}$. Это имеет важное следствие: если точка $x \in P$ такова, что $\varphi_t(x) \in P$ для всех $t \in J(x) \cap \mathbb{R}_+$, то $J(x) \supset \mathbb{R}_+$, и аналогично для $\mathbb{R}_-$. В частности, *если траектория точки x имеет компактное замыкание в W, то $J(x) = \mathbb{R}$.*

Пусть теперь X — векторное поле класса C^r на n-многообразии M; другими словами, X есть C^r-сечение расслоения TM. Предположим для начала, что $\partial M = \varnothing$.

Интегральная кривая поля X есть по определению гладкое отображение $\eta\colon J \to M$, где $J \subset \mathbb{R}$ — интервал, такое, что $\eta'(t) = X(\eta(t))$ при любом $t \in J$. Если (ψ, U) — карта многообразия M (класса C^∞ или C^ω при $r = \omega$), содержащая $\eta(J)$, и $W = \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$, то сквозное отображение

$$f\colon W \xrightarrow{\psi^{-1}} U \xrightarrow{X} TU \xrightarrow{D\psi} \mathbb{R}^n$$

есть векторное поле класса C^r на W. Отображение $\varphi = \psi \circ \eta\colon J \to W$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)), \tag{2}$$

поскольку

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= D\psi(\eta'(t)) = D\psi(X_\eta(t)) \\ &= (D\psi \circ X \circ \psi^{-1})(\psi\eta(t)) \\ &= f(\varphi(t)).\end{aligned}$$

Таким образом, ψ переводит интегральную кривую поля X в решение уравнения (2), т. е. в интегральную кривую в предыдущем координатном смысле.

Все результаты о векторных полях в открытых множествах пространства $\mathbb{R}^n$ переносятся на векторные поля в M. Так, для каждой точки $x \in M$ имеется максимальный открытый интервал $J(x)$, содержащий 0, и *интегральная кривая* (или *траектория*, или *линия тока*) класса C^{r+1} на X

$$\eta^x\colon (J(x),\ 0) \to (M,\ x),$$

$$\eta^x(t) = \eta(t,\ x) = \eta_t(x).$$

Множество

$$\Omega = \{(t,\ x) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in J(x)\}$$

открыто в $\mathbb{R} \times M$; *поток* поля X представляет собой C^r-отображение

$$\eta\colon \Omega \to M,$$

$$(t,\ x) \mapsto \eta_t(x).$$

Остаются также в силе результаты, касающиеся концевых точек интервалов $J(x)$ и компактных подмножеств области определения поля. Особенно важен случай, когда M компактно и не имеет края. В этом случае $\Omega = M \times \mathbb{R}$ и каждое η_t есть C^r-диффеоморфизм многообразия M. Таким образом, семейство $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ является в этом случае *однопараметрической подгруппой* группы C^r-диффеоморфизмов многообразия M: отображение

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}^r(M), \quad t \mapsto \eta_t,$$

есть непрерывный гомоморфизм.

К сожалению, нам не удастся избежать рассмотрения векторных полей на ∂-многообразиях. Предположим, что $\partial M \neq \varnothing$. Чтобы воспользоваться в этом случае предыдущими результатами, можно вложить M в качестве замкнутого подмногообразия в n-многообразие N без края, скажем в удвоение многообразия M, а затем продолжить поле X до C^r-поля на N. (Если $1 \leqslant r \leqslant \infty$, это можно сделать с помощью разбиения единицы, поскольку локальные C^r-продолжения существуют по определению. Если $r = \omega$, локальные продолжения единственны и так между собой согласованы, что составляют аналитическое векторное поле на окрестности многообразия M в N, а этого нам уже достаточно.)

Если поле X является касательным к краю ∂M, т. е. если $X(\partial M) \subset T(\partial M)$, то все сказанное выше сохраняет силу. Если же X не касается ∂M, то интервалы $J(x)$ не обязаны быть открытыми. Если $x \in \partial M$ и вектор $X(x)$ отличен от нуля и направлен внутрь многообразия M (соответственно вовне), то точка 0 будет левым (соответственно правым) концом интервала $J(x)$. Возможно также, что вектор $X(x)$ касается края ∂M и все же 0 является концом интервала $J(x)$; в этом случае $J(x)$ может быть даже вырожденным интервалом, сводящимся к точке 0. В то же время, какова бы ни была точка $y \in M$, если интервал $J(y)$ содержит свой конец b, то $\eta(b, y) \in \partial M$.

Множество Ω, определяемое как выше, теперь не обязательно открыто в $\mathbb{R} \times M$, но его внутренность плотна в нем. Более того, поток $\eta\colon \Omega \to M$ принадлежит классу C^r в том смысле, что он может быть продолжен до C^r-отображения $\Omega' \to N$, где Ω' есть открытое подмножество произведения $\mathbb{R} \times N$.

Если траектория точки $x \in M$ имеет компактное замыкание, то $J(x)$ есть замкнутый интервал; если при этом траектория содержится в $M - \partial M$, то $J(x) = \mathbb{R}$.

Если $J(x) = \mathbb{R}$ для всех $x \in M$, то векторное поле называется *вполне интегрируемым*. Для полной интегрируемости поля X необходимо, чтобы поле X касалось ∂M, и достаточно, чтобы поле X касалось ∂M и каждая его траектория имела компактное замыкание. Менее ограничительное достаточное условие приводится ниже в упр. 1.

С помощью дифференциальных уравнений можно дать новое доказательство теоремы о воротнике.

2.1. Теорема. *Пусть M есть ∂-многообразие. Тогда существует C^∞-вложение*

$$F\colon \partial M \times [0, \infty) \to M,$$

такое, что $F(x, 0) = x$ при $x \in \partial M$.

Доказательство. С помощью координатного покрытия многообразия ∂M и разбиения единицы можно построить векторное поле X класса C^∞ на окрестности U края ∂M в M, которое нигде не касается ∂M и всюду направлено внутрь M. Пусть $W \subset \partial M \times [0, \infty)$ — окрестность множества $\partial M \times 0$, на которой определен поток η этого векторного поля. Очевидно, существует C^∞- вложение $h\colon \partial M \times [0, \infty) \to W$, неподвижное на $\partial M \times 0$. В качестве F можно взять композицию

$$\partial M \times [0, \infty) \xrightarrow{h} W \xrightarrow{\eta} M. \blacksquare$$

Обратимся теперь к построению векторного поля, трансверсального к регулярной поверхности уровня C^{r+1}-отображения $f: M \to \mathbb{R}$ ($r \geqslant 1$). Мы предполагаем, что на M задана риманова метрика класса C^∞; скалярные произведения в пространствах M_x записываются как $\langle X, Y\rangle$, а для соответствующей нормы используется запись $|X| = \langle X, X\rangle^{1/2}$.

Для всякого линейного отображения $\lambda: M_x \to \mathbb{R}$ существует единственный касательный вектор $X_\lambda \in M_x$, такой, что $\lambda(Y) = \langle X_\lambda, Y\rangle$ при любом $Y \in M_x$. Вектор X_λ мы называем *двойственным* к λ. Сопоставление $\lambda \longmapsto X_\lambda$ определяет линейный изоморфизм пространства M_x^* на M_x. Обратный изоморфизм переводит вектор $X \in M_x$ в линейное отображение

$$\lambda_X: M_x \to \mathbb{R}, \qquad Y \longmapsto \langle X, Y\rangle.$$

Если $f: M \to \mathbb{R}$ есть C^{r+1}-функция, то мы определяем для $x \in M$ вектор $\operatorname{grad} f(x) \in M_x$ как двойственный к Df_x. Получается *градиентное векторное поле* $\operatorname{grad} f$ класса C^r. Оно зависит, конечно, от римановой метрики.

Если M есть открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и метрика индуцируется стандартной метрикой этого пространства, то

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Ясно, что $\operatorname{grad} f(x) = 0$ в том и только том случае, если x есть критическая точка функции f. В регулярной точке вектор $\operatorname{grad} f(x)$ трансверсален, и даже ортогонален, поверхности уровня $f^{-1}(f(x))$.

Заметим, что вдоль градиентных линий, т. е. вдоль интегральных кривых дифференциального уравнения $\eta' = \operatorname{grad} f(\eta)$, функция f является неубывающей. Действительно, если $\eta(t)$ — интегральная кривая, то

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(\eta(t)) &= \langle \operatorname{grad} f(\eta(t)), \ \operatorname{grad} f(\eta(t))\rangle \\ &= |\operatorname{grad} f(\eta(t))|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Более того, вдоль градиентной линии, не сводящейся к критической точке, функция f строго возрастает.

Удобный способ построения диффеоморфизмов доставляет следующая *теорема о регулярном интервале.*

2.2. Теорема. *Пусть $f: M \to [a, b]$ есть C^{r+1}-функция, определенная на компактном ∂-многообразии* ($1 \leqslant r \leqslant \omega$). *Предположим, что f не имеет критических точек и что $f(\partial M) = \{a, b\}$.*

Тогда существует C^r-диффеоморфизм $F: f^{-1}(a) \times [a, b] \to M$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(a) \times [a,b] \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & M \arrow[dl, "f"] \\
& {[a,b]} &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. В частности, все поверхности уровня функции f диффеоморфны.

Доказательство. Зафиксируем на M риманову метрику и определим векторное поле X класса C^r на M формулой

$$X(x) = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|^2}.$$

Заметим, что траектории поля X отличаются от траекторий поля $\operatorname{grad} f$ только параметризацией.

Пусть $\eta: [t_0, t_1] \to M$ — интегральная кривая поля X. Как показывает вычисление, производная функции

$$[t_0, t_1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(\eta(t)),$$

тождественно равна единице. Следовательно,

$$f(\eta(t_1)) - f(\eta(t_0)) = t_1 - t_0. \tag{1}$$

Пусть теперь $x \in f^{-1}(s)$. Так как M компактно, то множество $J(x)$ замкнуто, и из (1) следует, что

$$J(x) = [a - s, \ b - s]. \tag{2}$$

Из наших ограничений на f вытекает, что $f^{-1}(a)$ есть объединение компонент края многообразия M. Рассмотрим отображение

$$F: f^{-1}(a) \times [a, b] \to M,$$
$$F(x, t) = \eta(t - a, x).$$

Поскольку f возрастает вдоль градиентных линий и, значит, вдоль траекторий поля X, отображение F взаимно однозначно. Далее, F есть погружение, поскольку градиентные линии трансверсальны поверхностям уровня. Таким образом, F есть вложение. Наконец, в силу (2), F есть отображение на. ∎

2.3. Следствие. *Пусть M — компактное многообразие с $\partial M = A \cup B$, где A и B — непересекающиеся замкнутые множества. Предположим, что существует C^2-отображение $f: M \to \mathbb{R}$ без* *критических точек, такое, что $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Тогда M диффеоморфно как $A \times I$, так и $B \times I$.*

Следующее топологическое применение теории критических точек принадлежит Ж. Ребу.

2.4. Теорема. *Пусть M — компактное n-мерное многообразие без края, допускающее функцию Морса $f\colon M \to \mathbb{R}$ с ровно двумя критическими точками. Тогда M гомеоморфно n-сфере S^n.*

Доказательство. Пусть P_+, P_- — критические точки нашей функции. Можно считать, что P_+ — максимум и P_- — минимум. Положим $f(P_+) = z_+$, $f(P_-) = z_-$. Согласно лемме Морса, в некоторой окрестности U_+ точки P_+ существует система координат $(x_1, \ldots, x_n)$, по отношению к которой сужение $f \mid U_+$ имеет вид

$$-x_1^2 - \cdots - x_n^2 + z_+.$$

Следовательно, существует такое $b < z_+$, что множество

$$D_+ = f^{-1}[b,\ z_+]$$

есть окрестность точки P_+, диффеоморфная n-диску D^n.

Аналогично, существует такое $a > z_-$, что множество

$$D_- = f^{-1}[z_-,\ a]$$

есть окрестность точки P_-, диффеоморфная D^n. Мы предполагаем, что $z_- < a < b < z_+$. Заметим, что

$$\partial D_+ \approx \partial D_- \approx S^{n-1}.$$

В силу теоремы 2.2, множество $f^{-1}[a,\ b]$ диффеоморфно $S^{n-1} \times I$. См. рис. 6 — 2.

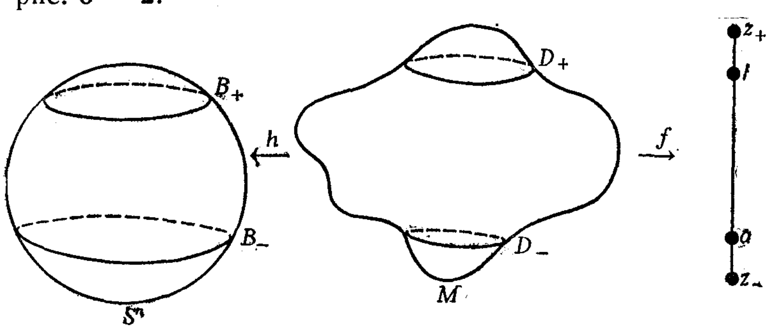


Рис. 6—2.

Пусть $Q_+, Q_- \in S^n$ — северный полюс и южный полюс. Пусть, далее, B_+, B_- — непересекающиеся окрестности точек Q_+, Q_-, диффеоморфные диску D^n (две «полярные шапки»), так что если

$C = S^n - \operatorname{Int}(B_+ \cap B_-)$, то $C \approx S^{n-1} \times I$ и $\partial C = \partial B_+ \cup \partial B_-$.

Фиксируем диффеоморфизм $h_0: D_+ \to B_+$ и продолжим сужение

$$h | \partial D_+ : \partial D_+ \to \partial B_+$$

до диффеоморфизма $(\partial D_+) \times I \to (\partial B_+) \times I$. Это доставляет продолжение диффеоморфизма h_0 до гомеоморфизма

$$h_1: D_+ \cup f^{-1}[a, b] \to B_+ \cup C.$$

Сужение

$$h_1 | \partial D_- : \partial D_- \to \partial B_-$$

может быть продолжено до гомеоморфизма $D_- \to B_-$. Действительно, это то же, что продолжить гомеоморфизм g_0: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ до гомеоморфизма $g: D^n \to D^n$, а это можно сделать *радиально:*

$$g(x) = \begin{cases} |x| \, g_0(x/|x|) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Другими словами, g линейно отображает радиальный отрезок $[0, y]$ $(y \in S^{n-1})$ на отрезок $[0, g_0(y)]$.

Этим способом h_1 продолжается до гомеоморфизма $h: M \to S^n$. ∎

Однако не всегда можно найти *диффеоморфизм* между M и S^n! В 1956 г. Джон Милнор [1] построил пример многообразия, гомеоморфного, но не диффеоморфного сфере S^7 [1]). Этот поразительный результат стимулировал интенсивное исследование таких «экзотических сфер» и вообще проблемы построения и классификации дифференциальных структур на многообразии. Об этом известно теперь довольно много, но все же проблема еще не решена [2]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Говорят, что векторное поле X на многообразии M *имеет ограниченную скорость*, если по отношению к некоторой полной римановой метрике на M величина $|X(x)|$ ограничена. В этом случае всякая максимальная интегральная кривая определена на замкнутом интервале. Если такое поле X касается ∂M, то оно вполне интегрируемо.

***2. Обязано ли вполне интегрируемое векторное поле класса C^1 иметь ограниченную скорость (см. упр. 1)?

---

[1]) Более того, на этом многообразии существует функция Морса, имеющая только две критические точки. Как показал впоследствии Смейл, такая функция существует на всяком замкнутом n-мерном многообразии с $n \geqslant 5$, гомотопически эквивалентном S^n. — *Прим. перев.*

[2]) Хотя проблема не сформулирована здесь точно, я рискну сказать, что в размерностях, отличных от 4, она решена полностью. — *Прим. перев.*

3. Пусть X — векторное поле класса C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ на многообразии M. Тогда на M существует вполне интегрируемое векторное поле Y класса C^r, траектории которого (рассматриваемые как подмножества) совпадают с траекториями поля X.

4. Пусть X — векторное поле класса C^1 на ∂-многообразии M. Если $x \in \partial M$ и $J(x) = [0, a]$ или $[0, a)$, то всякая окрестность точки x содержит такую точку $y \in \partial M$, что $X(y) \pitchfork \partial M$ и $X(y)$ направлено внутрь M.

5. Пусть (x, y) — локальные координаты на торе $T = S^1 \times S^1$, соответствующие угловым переменным на S^1, взятым $\operatorname{mod} 2\pi$. Для пары α, β вещественных чисел, не равных 0 одновременно, обозначим через $X_{\alpha, \beta}$ векторное поле, которое в координатах (x, y) записывается как постоянное поле (α, β).

(a) Если α и β линейно зависимы над полем рациональных чисел, то всякая траектория поля $X_{\alpha, \beta}$ представляет собой окружность.

(b) Если α и β линейно независимы над полем рациональных чисел, то всякая траектория поля $X_{\alpha, \beta}$ плотна в T. Более того:

(c) Пусть φ — поток поля $X_{\alpha, \beta}$ в случае (b), и пусть τ — любое ненулевое вещественное число. Тогда для любой точки $x \in T$ множество $\{\varphi_{n\tau}(x) \mid n \in Z_+\}$ плотно в T.

*6. На всякой поверхности рода $\geqslant 1$ существует векторное поле, имеющее плотную траекторию.

***7. Верно ли, что всякое векторное поле класса C^2 на S^3 обязательно имеет либо нуль, либо периодическую траекторию? (Как недавно показал Поль Швейцер [1], утверждение делается неверным, если понизить класс гладкости до C^1.)

*8. Пусть X — вполне интегрируемое векторное поле класса C^1 на многообразии M. Предположим, что всякая *положительная полуорбита* $\{\varphi_t(x) \mid t \geqslant 0\}$ плотна в M и что всякая *отрицательная полуорбита* $\{\varphi_t(x) \mid t \leqslant 0\}$ плотна в M (здесь φ — поток, порожденный полем X). Тогда M компактно.

9. Пусть $f: M \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1 на римановом многообразии, и пусть V — подмногообразие многообразия M. Тогда для любой точки $x \in V$ вектор $\operatorname{grad}(f \mid V)(x)$ есть образ вектора $\operatorname{grad} f(x)$ при ортогональном проектировании $M_x \to V_x$.

10. Теорема 2.2 останется верной и для некомпактного M, если дополнительно потребовать, чтобы на M существовала полная риманова метрика, по отношению к которой величина $|\operatorname{grad} f(x)|$ ограничена. (См. упр. 1.) При отсутствии такого предположения легко построить контрпример.

11. Использованный в доказательстве теоремы 2.2 прием, который состоит в движении вдоль траекторий поля, часто применяется для построения диффеоморфизмов. Пусть, например, X есть векторное поле класса C^r $(1 \leqslant r \leqslant \omega)$ на многообразии M, и пусть V_0, V_1 — трансверсальные к X C^r-подмногообразия многообразия M. Предположим, что $\partial V_0 = \partial V_1 = \partial M = \varnothing$. Предположим также, что всякая интегральная кривая, пересекающая одно из этих подмногообразий, пересекает другое в единственной точке. Тогда V_0 и V_1 C^r-диффеоморфны. Более того, при $r \leqslant \omega$ существует C^r-диффеоморфизм многообразия M, C^r-изотопный тождественному и переводящий V_0 в V_1.

12. Следствие 2.3 справедливо также для C^1-отображений.

13. Теорема 2.4 может быть усилена: при ее условиях M есть объединение двух n-мерных шаров, пересекающихся вдоль своей общей границы.

*14. Теорема 2.4 может быть следующим образом обобщена: если M допускает функцию, имеющую только две критические точки (возможно, вырожденные), то дополнение к каждой из этих точек диффеоморфно $\mathbb{R}^n$, а само M гомеоморфно S^n. (С помощью градиентного потока и диска вокруг критической точки P_- можно представить $M - P_+$ как объединение возрастающей последовательности открытых дисков; после этого можно воспользоваться упражнением 15 к § 1.2.)

***15. Упражнения 13 и 14 естественно приводят к следующей трудной проблеме: если $M - P \approx \mathbb{R}^n$, верно ли, что M есть объединение двух n-мерных шаров, пересекающихся вдоль своей общей границы? Известно, что это верно при $n \neq 4$.

3. ПРОХОЖДЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО УРОВНЯ И ПРИСОЕДИНЕНИЕ КЛЕТОК

Чтобы обеспечить благоприятное взаимное расположение края и поверхностей уровня, мы будем рассматривать функции Морса $f\colon M \to [a, b]$, удовлетворяющие следующему дополнительному условию: $\partial M = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$ и a, b — регулярные значения; такие функции мы будем называть *допустимыми*. Следующие свойства допустимых функций Морса очевидны: каждое из множеств $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(b)$ есть объединение компонент края ∂M; если множество $f^{-1}(a)$ или множество $f^{-1}(b)$ пусто, то соответственно наименьшее или наибольшее значение функции f может достигаться только в критических точках функции, лежащих в $M - \partial M$.

Из теоремы 1.2 вытекает, что компактное многообразие обладает допустимой функцией Морса, принимающей предписанные значения на компонентах края.

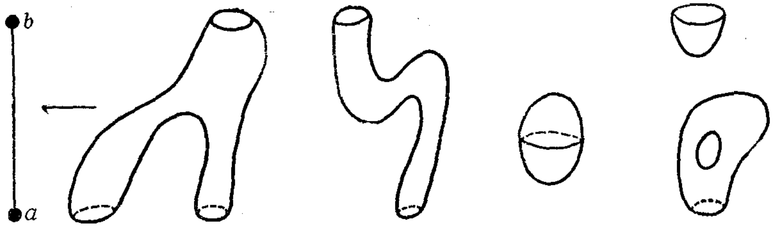


Рис. 6—3. Допустимые функции Морса.

На рис. 6—3 показаны некоторые примеры допустимых функций Морса на 2-многообразиях; функция представляет собой ортогональное проектирование на вертикальный интервал $[a, b]$. Заметим, что если $p, q \in [a, b]$ — регулярные значения и $p < q$, то сужение функции f на $f^{-1}[p, q]$ также есть допустимая функция (с областью значений $[p, q]$).

В предыдущем параграфе мы доказали, что если f не имеет критических точек, то $M \approx f^{-1}(a) \times I$. В нижеследующей теореме мы рассмотрим случай, когда функция f имеет в точности одну критическую точку.

Под *k-клеткой* в M понимается образ вложения $D^k \to M$.

3.1. Теорема. *Пусть M — компактное многообразие и $f\colon M \to [a, b]$ — допустимая функция Морса. Предположим, что f имеет единственную критическую точку z и что эта точка имеет индекс k. Тогда найдется k-клетка $e^k \subset M - f^{-1}(b)$, такая, что $e^k \cap f^{-1}(a) = \partial e^k$ и существует деформационная ретракция многообразия M на $f^{-1}(a) \cup e^k$.*

Доказательство. Пусть $f(z) = c$ $(a < c < b)$. Чтобы доказать теорему, достаточно доказать ее для сужения функции f на $f^{-1}[a', b']$, где a', b' — любые числа с $a < a' < c < b' < b$: это показывает теорема 2.2 о регулярном интервале, примененная к $f^{-1}[a, a']$ и $f^{-1}[b', b]$. Более того, мы можем считать, что $c = 0$, взяв в случае надобности $f - c$ вместо f.

Пусть (φ, U) — карта в окрестности точки z, доставляемая леммой Морса. Представим $\mathbb{R}^n$ в виде $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$; тогда φ диффеоморфно отображает U на открытое множество $V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ и

$$f(\varphi^{-1}(x, y)) = -|x|^2 + |y|^2$$

для $(x, y) \in V$. Заметим, что $\varphi(z) = (0, 0)$, и положим $g(x, y) = -|x|^2 + |y|^2$.

Фиксируем такое δ с $0 < \delta < 1$, что V содержит $\Gamma = B^k(\delta) \times B^{n-k}(\delta)$, где $B^i(\delta) \subset \mathbb{R}^i$ — замкнутый шар радиуса δ с центром 0. Фиксируем на M риманову метрику, совпадающую в $\varphi^{-1}(\Gamma)$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой пространства $\mathbb{R}^n$ посредством φ. Если $\varphi(u) = v \in \Gamma$, то

$$D\varphi(u)(\operatorname{grad} f(u)) = \operatorname{grad} g(v).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ намного меньше δ, скажем $\varepsilon < \delta^2/100$. Положим

$$\begin{aligned} B^k &= B^k(\sqrt{\varepsilon}) \times 0 \\ &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid |x|^2 \leqslant \varepsilon\} \end{aligned}$$

и $e^k = \varphi^{-1}(B^k)$.

Деформацию множества $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ на $f^{-1}(-\varepsilon) \cup e^k$ мы составим из двух деформаций. Сначала рассмотрим множество

$$\Gamma_1 = B^k(\sqrt{2\varepsilon}) \times B^{n-k}(\sqrt{2\varepsilon}).$$

Случай $k = 1$, $n = 2$ показан на рис. 6—4. Деформация в пересечении $\Gamma_1 \cap g^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ состоит в перемещении точки (x, y) с постоянной скоростью вдоль интервала, соединяющего (x, y) с точкой $(x, sy) \in g^{-1}(-\varepsilon) \cup B^k$, где

$$s = s(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x|^2 < \varepsilon, \\ \sqrt{|x|^2 - \varepsilon}/|y| & \text{при } |x|^2 \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Заметим, что эти интервалы являются замыканиями интегральных кривых векторного поля $X(x, y) = (0, -2y)$. Деформация переносится в $\varphi^{-1}(\Gamma_1)$ посредством φ.

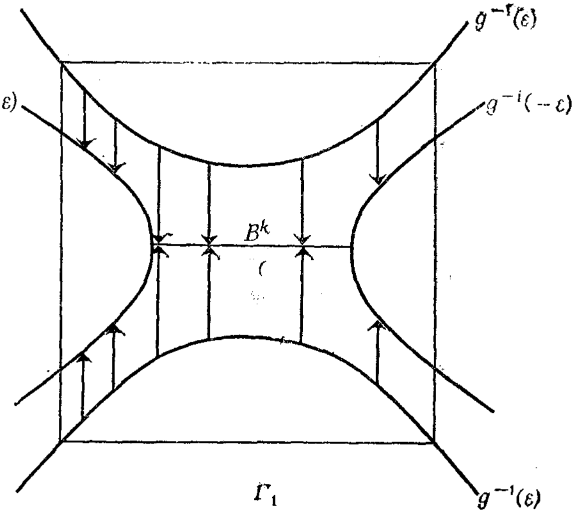


Рис. 6—4.

Вне множества

$$\Gamma_2 = B^k(\sqrt{3\varepsilon}) \times B^{n-k}(\sqrt{3\varepsilon})$$

деформация перемещает каждую точку с постоянной скоростью вдоль линии тока векторного поля $-\operatorname{grad} g$, так что эта точка за единицу времени достигает множества $g^{-1}(-\varepsilon) \cup B^k$. (Скорость каждой точки совпадает с длиной проходимого ею при деформации пути.) См. рис. 6—5. Эта деформация переносится в $U - \varphi^{-1}(\Gamma_2)$ посредством φ; она продолжается на $M - \varphi^{-1}(\Gamma_2)$ с помощью линий тока поля $-\operatorname{grad} f$. Каждая такая линия тока достигает в надлежащий момент поверхности $f^{-1}(-\varepsilon)$, но она не может зайти в Γ_2, поскольку вдоль линий $|x|$ возрастает и $|y|$ убывает, а $|\operatorname{grad} f|$ имеет в компактном множестве

$$f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] - \operatorname{Int} \varphi^{-1}(\Gamma_2)$$

положительную нижнюю грань.

Чтобы распространить деформацию на оставшееся множество $\Gamma_2 - \Gamma_1$, достаточно построить на Γ векторное поле, которое совпадает с X на Γ_1 и с $-\operatorname{grad} g$ на $\Gamma - \Gamma_2$. Таково поле

$$Y(x, y) = 2(\mu(x, y)x, -y),$$

где C^∞-функция $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to [0, 1]$ обращается в 0 на Γ_1 и равна 1 вне Γ_2. Легко видеть, что линии тока поля Y, начинающиеся в точках множества

$$(\Gamma_2 - \Gamma_1) \cap g^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon],$$

достигают $g^{-1}(-\varepsilon)$: вдоль этих линий $|x|$ не убывает.

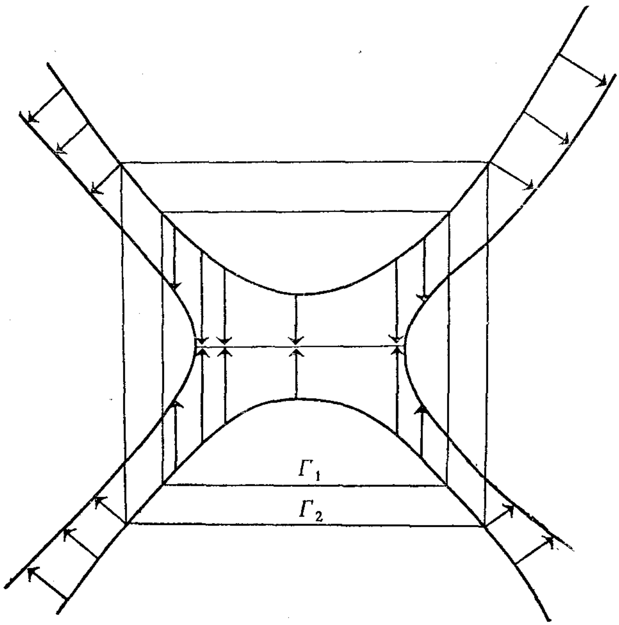


Рис. 6—5.

Глобальная деформация множества $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ в $f^{-1}(-\varepsilon) \cup e^k$ состоит в перемещении каждой точки множества Γ с постоянной скоростью вдоль линий тока поля Y так, чтобы эта точка достигла множества $g^{-1}(-\varepsilon) \cup B^k$ за единицу времени; эта деформация переносится в M посредством φ, а точки множества $M - \varphi^{-1}(\Gamma)$ двигаются с постоянной скоростью вдоль линий тока поля $-\operatorname{grad} f$ и достигают за единицу времени множества $f^{-1}(-\varepsilon)$. Точки множества $f^{-1}(-\varepsilon) \cup e^k$, разумеется, остаются при этом неподвижными. ∎

Заменяя f функцией $-f\colon M \to [-b, -a]$, мы получаем следующий результат, двойственный теореме 3.1:

3.2. Теорема. *Пусть $f\colon M \to [a, b]$ — допустимая функция Морса с единственной критической точкой z и эта точка имеет индекс k. Тогда существует $(n-k)$-клетка $e_*^{n-k} \subset M - f^{-1}(a)$, такая, что $e_*^{n-k} \cap f^{-1}(b) = \partial e_*^{n-k}$ и существует деформационная ретракция многообразия M на $f^{-1}(b) \cup e_*^{n-k}$. Более того, клетку*

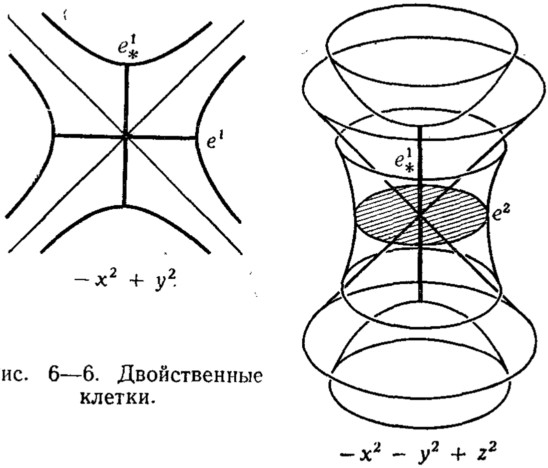


Рис. 6—6. Двойственные клетки.

e_*^{n-k} можно выбрать таким образом, что клетка e^k из теоремы 3.1 пересекается с ней только в точке z и пересечение трансверсально.

Мы будем говорить о клетках e^k и e_*^{n-k} как о *двойственных* друг другу. Пары двойственных клеток показаны на рис. 6—6.

Под *k-м типовым числом* функции Морса $f\colon M \to \mathbb{R}$ мы понимаем число $\nu_k = \nu_k(f)$ ее критических точек индекса k, где $0 \leqslant k \leqslant n = \dim M$. *Типом* функции f называется последовательность $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$.

3.3. Теорема. *Пусть $f\colon M \to [a, b]$ — допустимая функция Морса типа $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ на компактном многообразии. Предположим, что f имеет в точности одно критическое значение c $(a < c < b)$. Тогда существуют непересекающиеся клетки $e_i^k \subset M - f^{-1}(b)$ $(1 \leqslant i \leqslant \nu_k,\ k = 0, \ldots, n)$, такие, что $e_i^k \cap f^{-1}(a) = \partial e_i^k$ и существует деформационная ретракция многообразия M на $f^{-1}(a) \cup [\bigcup_{i,k} e_i^k]$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1, необходимо только карты Морса для различных критических точек сделать неперекрывающимися.

Теперь мы можем доказать знаменитые *неравенства Морса*. При этом потребуется знакомство с сингулярной теорией гомологий или с любой другой теорией гомологий, удовлетворяющей аксиомам Стинрода—Эйленберга.

Мы обозначаем k-ю сингулярную гомологическую группу пары (X, A) с коэффициентами в поле F через $H_k(X, A; F)$; это векторное пространство над F, и его размерность мы обозначаем через $\lambda_k(X, A; F)$. В случае, если F есть поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, последнее число называется *k-м числом Бетти* пары (X, A). Если эти числа конечны и лишь конечное число их отлично от нуля, то определена *гомологическая эйлерова характеристика*

$$\chi'(X, A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda_k(X, A; F)$$

пары (X, A). Если X есть компактное многообразие и A — его компактное подмногообразие, то характеристика $\chi'(X, A)$ определена и не зависит от поля F.

3.4. Теорема. *Пусть $f\colon M \to [a, b]$ — допустимая функция Морса на компактном многообразии, имеющая тип $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$. Пусть, далее, F — произвольное поле и β_k — размерность относительной гомологической группы $H_k(M, f^{-1}(a); F)$. Тогда*

(a) $$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} \nu_k \geqslant \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} \beta_k$$

при $0 \leqslant m \leqslant n$ и

(b) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \nu_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k = \chi'(M, f^{-1}(a)).$$

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько следствий из нее.

3.5. Теорема. *Пусть $f\colon M \to [a, b]$ — допустимая функция Морса на компактном многообразии, имеющая тип $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$. Предположим, что $f^{-1}(a) = \varnothing$. Если β_k — размерность пространства $H_k(M; F)$, где F — произвольное поле, то выполняются соотношения* (a) *и* (b) *из теоремы* 3.4. *В частности, знакопеременная сумма типовых чисел равна гомологической эйлеровой характеристике $\chi'(M) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \beta_k$.*

Заметим, что $\nu_k(f) = \nu_{n-k}(-f)$. Из этого следует

3.6. Теорема. *Гомологическая эйлерова характеристика компактного нечетномерного многообразия без края равна* 0.

Доказательство. Пусть $f: M \to \mathbb{R}$ — функция Морса типа $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$. Предположим, что $a < f(x) < b$ при всех $x \in M$; тогда $f: M \to [a, b]$ есть допустимая функция Морса. Применяя теорему 3.5 к функциям f и $-f$, мы получаем

$$\begin{aligned}\chi'(M) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \nu_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \nu_{n-k}(-f) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \nu_{n-k}(-f) \\ &= -\chi'(M). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Неравенства (a) из теоремы 3.4 удобно записывать следующим образом. Положим $\nu_k - \beta_k = \delta_k$. Тогда

$$\delta_0 \geqslant 0,$$

$$\delta_1 \geqslant \delta_0 \geqslant 0,$$

$$\delta_2 \geqslant \delta_1 - \delta_0 \geqslant 0,$$

и вообще

$$\delta_{m+1} \geqslant \delta_m - \delta_{m-1} + \cdots + (-1)^m \delta_0 \geqslant 0.$$

В частности, $\delta_k \geqslant 0$ при $k = 0, \ldots, n$. Таким образом:

3.7. Теорема. *В теоремах* 3.4 *и* 3.5 $\nu_k \geqslant \beta_k$ *при* $k = 0, \ldots, n$.

Переходим теперь к доказательству теоремы 3.4. Удобно считать, что функция f разделяет критические точки, т. е. принимает в разных критических точках разные значения. Этого можно достичь малым возмущением функции f в непересекающихся окрестностях $U_i \subset M - \partial M$ критических точек z_i. Именно, вне объединения множеств U_i новая функция $g: M \to \mathbb{R}$ совпадает с f. В U_i мы полагаем

$$g(x) = f(x) + \varepsilon_i \lambda_i(x),$$

где $\lambda_i: M \to [0, 1]$ есть C^∞-функция, носитель которой содержится в U_i, равная 1 в окрестности точки z_i, а ε_i — положительное число. Когда $\max \varepsilon_i$ стремится к 0, функция g стремится к f в $C^2_S(M, \mathbb{R})$. Поэтому если ε_i достаточно малы, то g — функция Морса, критические точки которой расположены там же, где критические точки функции f, и имеют те же индексы. Ясно, далее, что при надлежащем выборе чисел ε_i значения функции в этих точках будут попарно различны. Итак, мы считаем, что f разделяет свои критические точки $z_1, \ldots, z_\rho$.

Положим $f(z_i) = c_i$ и упорядочим точки z_i таким образом, чтобы выполнялось неравенство $a < c_1 < \ldots < c_\rho < b$. Обозначим через $k(i)$ индекс точки z_i. Выберем, далее, такие регулярные значения $a_0, \ldots, a_\rho$ функции f, что

$$a = a_0, \quad a_{i-1} < c_i < a_i, \quad a_\rho = b.$$

Положим $A = f^{-1}(a_0)$, $X_i = f^{-1}[a_0, a_i]$. Тогда, с точностью до гомотопической эквивалентности, X_i получается из X_{i-1} присоединением одной $k(i)$-клетки. Мы можем написать

$$X_i = X_{i-1} \cup e^{k(i)}.$$

Положим

$$\alpha(i, j) = \dim H_i(X_j, X_{j-1}),$$

где подразумевается, что областью коэффициентов для гомологических групп служит F. В силу гомологической аксиомы вырезания

$$H_i(X_j, X_{j-1}) \approx H_i(D^{k(j)}, S^{k(j)-1}).$$

Поэтому

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k(j), \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k(j). \end{cases} \tag{1}$$

Положим

$$\beta(i, j) = \dim H_i(X_j, A).$$

Поскольку X_j получается из A присоединением клеток размерности $\leqslant n$, $\beta(i, j) = 0$ при $i > n$.

Рассмотрим гомологическую последовательность тройки (X_j, X_{j-1}, A):

$$0 \to H_n(X_{j-1}, A) \to H_n(X_j, A) \to H_n(X_j, X_{j-1}) \to$$
$$H_{n-1}(X_{j-1}, A) \to \cdots \to H_0(X_j, X_{j-1}) \to 0.$$

Из ее точности следует, что знакопеременная сумма размерностей составляющих ее векторных пространств равна нулю. Группируя члены этой суммы по три, мы получаем

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\beta(i, j-1) - \beta(i, j) + \alpha(i, j)].$$

Суммируя по j и учитывая, что $\beta(i, n) = \beta_i$ и $\beta(i, 0) = 0$, мы видим, что

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha(i, j) \right] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\beta(i, n) - \beta(i, 0)]$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i.$$

Далее,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha(i, j)$$

есть не что иное, как число таких индексов $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $k(j) = i$, а это число есть ν_i. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \nu_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i.$$

Этим доказана часть (b) теоремы 3.4.

Доказательство части (a) аналогично. Оно начинается с рассмотрения точной последовательности

$$0 \to K_{m,j} \to H_m(X_{j-1}, A) \to H_m(X_j, A) \to H_m(X_j, X_{j-1}) \to \ldots,$$

в которой первый член есть ядро гомоморфизма $H_m(X_{j-1}, A) \to H_m(X_j, A)$, а остальное — часть предыдущей последовательности. Положим $\varkappa_{m,j} = \dim K_{m,j}$. Из точности следует, что

$$\varkappa_{m,j} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+m} [\beta(i, j-1) - \beta(i, j) + \alpha(i, j)].$$

Суммируя по j, мы видим, что

$$\sum_{j=1}^{n} \varkappa_{m,j} + \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+m} \beta_i = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+m} \sum_{j=1}^{n} \alpha(i, j) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+m} \nu_i,$$

а из этого вытекает (a), поскольку $\varkappa_{m,j} \geqslant 0$. Доказательство теоремы 3.4 закончено. ∎

В заключение приведем важное применение теоремы 3.5. Пусть M — компактное многообразие без края. Напомним, что в гл. 4 мы определили эйлерову характеристику многообразия M как сумму индексов нулей произвольного векторного поля на M. Теперь мы определили еще гомологическую эйлерову характеристику многообразия M как знакопеременную сумму его чисел Бетти. Знаменитая *теорема Хопфа* уравнивает эти две характеристики.

3.8. Теорема. *У компактного многообразия без края гомологическая эйлерова характеристика равна эйлеровой характеристике.*

Доказательство. Эйлерову характеристику можно вычислить с помощью любого векторного поля X, имеющего конечное число нулей. Мы полагаем $X = \frac{1}{2} \operatorname{grad} f$, где $f\colon M \to \mathbb{R}$ — функция Морса, а градиент берется по отношению к произвольной римановой метрике на M, которая вблизи каждой критической точки индуцируется некоторой морсовской системой координат.

Пусть p — критическая точка индекса k, и пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — индуцирующая метрику морсовская система координат, по отношению к которой $p = (0, \ldots, 0)$. Тогда

$$f(x) = -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 + f(p)$$

и

$$X(x) = (-x_1, \ldots, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Таким образом, X есть декартово произведение векторного поля Y на $\mathbb{R}^k$ и векторного поля Z на $\mathbb{R}^{n-k}$, определяемых формулами $Y(y) = -y$, $Z(z) = z$. Несложное вычисление показывает, что

$$\operatorname{ind}_p X = (\operatorname{ind}_0 Y)(\operatorname{ind}_0 Z)$$

и

$$\operatorname{ind}_0 Y = (-1)^k, \quad \operatorname{ind}_0 Z = 1.$$

Поэтому

$$\operatorname{ind}_p X = (-1)^k.$$

Таким образом, сумма индексов нулей векторного поля X равна $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \nu_k$, где ν_k — число критических точек функции f, имеющих индекс k. В силу теоремы 3.5 это гомологическая эйлерова характеристика.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Под *ω-предельным множеством* $L_\omega(x)$ точки $x \in M$ по отношению к векторному полю X на M понимается множество точек вида $\lim_{n\to\infty} \eta(t_n, x)$, где η — поток поля X и $t_n \to \infty$. Аналогично, но с $t_n \to -\infty$ вместо $t_n \to \infty$, определяется *α-предельное множество* $L_\alpha(x)$.

(a) Если M компактно, то $L_\omega(x)$ и $L_\alpha(x)$ — непустые связные компактные множества, инвариантные относительно потока.

(b) Если $X = \operatorname{grad} f$, где $f: M \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая только изолированные критические точки, то каждое из множеств $L_\omega(x)$ и $L_\alpha(x)$ состоит из единственной критической точки.

2. Пусть $f: M \to \mathbb{R}$ — функция Морса класса C^{r+1} на компактном многообразии. Предположим, что на M задана риманова метрика, индуцируемая вблизи критических точек морсовскими картами. Рассмотрим поток поля $\operatorname{grad} f$, построенного с помощью этой метрики. Если z есть критическая точка, то соответствующее *устойчивое многообразие* определяется формулой

$$W_s(z) = \{x \in M \mid L_\omega(x) = z\},$$

а *неустойчивое многообразие* — формулой

$$W_u(z) = \{x \in M \mid L_\alpha(x) = z\}.$$

(a) $W_s(z)$ и $W_u(z)$ — связные C^r-подмногообразия многообразия M размерности соответственно k и $n-k$, где $k = \operatorname{ind}(z)$.

(b) *$W_s(z)$ и $W_u(z)$ трансверсально пересекаются в точке z и* н е *имеют больше* общих точек.

*(c) Если $\partial M = \varnothing$, то $W_s(z) \approx \mathbb{R}^{n-k}$ и $W_u(z) \approx \mathbb{R}^k$.

**(d) Утверждения (a), (b) и (c) справедливы при любом выборе римановой метрики класса C^∞ на M.

3. Компактное n-многообразие является объединением замыканий конечного числа непересекающихся открытых n-клеток. [Рассмотрите устойчивые многообразия локальных минимумов функции Морса.]

4. Пусть $f: M \to [a, b]$ — допустимая функция Морса на компактном многообразии, имеющая единственное критическое значение c $(a \lhd c \lhd b)$. Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — критические точки функции f; положим

$$W_s = \bigcup_i W_s(z_i), \qquad W_u = \bigcup_i W_u(z_i).$$

(Определения множеств $W_s(z_i)$ и $W_u(z_i)$ см. в упр. 2.) Тогда

$$M - (W_s \cup W_u) \approx [f^{-1}(a) - W_s] \times I \approx [f^{-1}(b) - W_u] \times I.$$

*5. Пусть S — компактная поверхность рода p.

(a) Всякая функция Морса на S имеет по меньшей мере $2p+2$ критических точек.

(b) Некоторая функция Морса на S имеет в точности столько критических точек.

6. Вещественное n-мерное проективное пространство P^n может быть представлено как факторпространство разности $\mathbb{R}^{n+1} - 0$ по отношению: $(x_0, \ldots, x_n) = (cx_0, \ldots, cx_n)$ при $c \neq 0$. Класс точки $(x_0, \ldots, x_n)$ обозначается при этом через $[x_0, \ldots, x_n]$. Пусть $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ — различные ненулевые вещественные числа; определим функцию $f: P^n \to \mathbb{R}$ формулой

$$[x_0, \ldots, x_n] \longmapsto \sum_j \lambda_j x_j^2 / \sum_j x_j^2.$$

(a) f есть функция Морса типа $(1, 1, \ldots, 1)$. (См. также упр. 1 к § 6.4.)

(b) При $n = 1, 2, 3$ нарисуйте критические точки и поверхности уровня композиции $S^n \xrightarrow{p} P^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, где p — каноническое двулистное накрытие.

*7. Пусть $f: S^n \to \mathbb{R}$ — функция Морса, инвариантная относительно антиподального отображения $x \longmapsto -x$. Тогда f имеет по крайней мере 2 критические точки каждого индекса $0, 1, \ldots, n$. [Рассмотрите индуцированную функцию на P^n. Числа Бетти пространства P^n по отношению к полю Z_2 равны $1, 1, \ldots, 1$.]

8. Пусть M — компактное n-многообразие без края и $f: M \to \mathbb{R}$ функция класса C^2. Предположим, что каждая критическая точка этой функции принадлежит невырожденному критическому подмногообразию (см. упр. 7 к § 6.1). Обозначим через μ_k сумму эйлеровых характеристик невырожденных критических подмногообразий индекса k. Тогда имеет место обобщенное равенство Морса:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mu_k.$$

[Пусть $g: M \to \mathbb{R}$ — функция, равная нулю за пределами трубчатых окрестностей критических многообразий и такая, что ее сужение на каждое критическое многообразие есть функция Морса. Функцию g можно выбрать таким образом, что сумма $f+g$ будет функцией Морса, критические точки которой — это в точности критические точки сужений функции g на критические многообразия. При этом если V есть критическое многообразие индекса k и $x \in V$ — критическая точка сужения функции g индекса k, то x имеет индекс $k+i$ как критическая точка функции $f+g$. Поэтому знакопеременная сумма типовых чисел сужения функции $f+g$ на окрестность многообразия V равна $(-1)^k \chi(V)$. Результат принадлежит Р. Ботту.]

9. Пусть $\varphi: M \to N$ — субмерсия с $\varphi(M) = N$, где M и N — компактные многообразия без края. Пусть, далее, $V = \varphi^{-1}(y)$ для некоторого $y \in N$. Тогда $\chi(M) = \chi(V)\chi(N)$. [Возьмите функцию Морса $g: N \to \mathbb{R}$ и примените упр. 8 к функции $f = \varphi g: M \to \mathbb{R}$.]

10. Пусть $\partial_+ M$ — объединение нескольких компонент края компактного n-многообразия M; положим $\partial_- M = \partial M - \partial_+ M$. Тогда

$$\chi'(M, \partial_+ M) = \chi'(M, \partial_- M).$$

4. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе мы предполагаем знакомство с понятием клеточного пространства. Говоря коротко, клеточное пространство есть топологическое пространство X, представленное в виде объединения $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ с $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$, причем X_0 есть дискретное множество, а X_n получается из X_{n-1} присоединением n-клеток по непрерывным отображениям их границ в X_{n-1}. Требуется также, чтобы для замкнутости подмножества пространства X было достаточно, чтобы было замкнуто пересечение этого множества с каждой (замкнутой) клеткой. Если число клеток конечно, то говорят, что X есть *конечное* клеточное пространство.

Подпространством клеточного пространства называют его замкнутое подмножество, которое является объединением целых клеток. *Клеточная пара* есть по определению пара, составленная из клеточного пространства и его подпространства.

4.1. Теорема. *Пусть M есть компактное n-многообразие и $f: M \to [a, b]$ — допустимая функция Морса типа $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ с $\partial M = f^{-1}(b)$. Тогда M гомотопически эквивалентно конечному клеточному пространству, имеющему в точности ν_k клеток размерности $k = 0, \ldots, n$ и не имеющему других клеток.*

Доказательство проводится индукцией по числу критических значений. Если c_1 — наименьшее критическое значение, то c_1 есть абсолютный минимум функции f, поскольку множество $f^{-1}(a)$ пусто. Выберем такое a_1, что $a < c_1 < a_1$ и что c_1 есть единственное критическое значение на интервале $[a, a_1]$. Тогда $f^{-1}[a, a_1]$ имеет гомотопический тип конечного дискретного множества в силу теоремы 3.3; в действительности $f^{-1}[a, a_1]$ есть объединение непересекающихся n-дисков. Это начало индукции. Индуктивный шаг доставляется теоремой 3.3. ∎

Доказательство следующей теоремы основано на тех же соображениях, и мы оставляем его читателю.

4.2. Теорема. *Пусть M — компактное n-мерное многообразие. Тогда $(M, \partial M)$ имеет гомотопический тип клеточной пары размерности $\leqslant n$.*

Требование компактности M не является в действительности необходимым для последней формулировки, но в некомпактном случае доказательство использует триангуляции. Мы приведем схему доказательства несколько более слабого результата.

4.3. Теорема. *Всякое n-мерное многообразие имеет гомотопический тип клеточного пространства размерности $\leqslant n$.*

Доказательство. Легко показать, что M и $M - \partial M$ гомотопически эквивалентны (например, с помощью теоремы 2.1 о воротнике). Поэтому мы можем считать, что $\partial M = \varnothing$.

Выберем собственную функцию Морса $f: M \to \mathbb{R}_+$ (ее можно построить, например, как аппроксимацию квадрата произвольной собственной функции $M \to \mathbb{R}$). Можно считать, что f разделяет критические точки $z_1, z_2, \ldots$ и что последние упорядочены таким образом, что $f(z_{i+1}) > f(z_i)$. Выберем числа a_i с

$$0 = a_0 < f(z_1) < a_1 < f(z_2) < \ldots .$$

Заметим, что, поскольку функция f собственна и точки z_i изолированы, $f(z_i) \to \infty$; значит, и $a_i \to \infty$.

В силу теоремы 4.2, для каждого $k \geqslant 1$ существуют клеточное пространство X_k размерности n, его непересекающиеся подпространства Y_k, Z_k и гомотопическая эквивалентность

$$u_k: f^{-1}[a_{k-1}, a_k] \to X_k,$$

переводящая $f^{-1}(a_{k-1})$ в Y_k и $f^{-1}(a_k)$ в Z_k также посредством гомотопических эквивалентностей. Пусть $v_k: Z_k \to f^{-1}(a_k)$ — отображение, гомотопически обратное $f: f^{-1}(a_k) \to Z_k$. Композиция

$$Z_k \xrightarrow{v_k} f^{-1}(a_k) \xrightarrow{u_{k+1}} Y_{k+1}$$

может быть аппроксимирована клеточным отображением $w_k: Z_k \to Y_{k+1}$. Клеточное пространство, гомотопически эквивалентное M, получается из несвязного объединения пространств X_k путем отождествления каждой точки $x \in Z_k$ с $w_k(x) \in Y_{k+1} \subset X_{k+1}$. ∎

Вот другое обобщение теоремы 4.2.

4.4. Теорема. *Пусть M — компактное многообразие и A — его компактное подмногообразие, причем $\partial A = \partial M = \varnothing$. Тогда (M, A) имеет гомотопический тип клеточной пары.*

Доказательство. Пусть $N \subset M$ — замкнутая трубчатая окрестность многообразия A. Тогда N есть замкнутое подмногообразие многообразия M (с краем), для которого A является деформационным ретрактом. Поэтому пара (M, A) гомотопически эквивалентна паре (M, N). Положим $P = \overline{M - N}$; тогда $\partial P = \partial N = P \cap N$ и $P \cup N = M$. В силу теоремы 4.2, пары $(P, \partial P)$ и $(N, \partial N)$ гомотопически эквивалентны клеточным парам; значит, и пара (M, N) гомотопически эквивалентна клеточной паре. ∎

И здесь компактность не является необходимым ограничением. Кроме того, имеются различные обобщения теоремы 4.4 на ∂-случай. Достаточно потребовать, например, чтобы A было правильным подмногообразием.

УПРАЖНЕНИЯ

*1. Пусть $\mathbb{C}P^n$ — комплексное n-мерное проективное пространство. Определим функцию $g\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}$ формулой

$$g[z_0, \ldots, z_n] = \sum \lambda_j |z_j|^2 / \sum |z_j|^2,$$

где $z_0, \ldots, z_n$ — комплексные однородные координаты на $\mathbb{C}P^n$ и $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ — различные положительные числа. Тогда g есть функция Морса типа $(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 1)$. Поэтому $\mathbb{C}P^n$ имеет гомотопический тип клеточного пространства, составленного из $n+1$ клеток по одной в размерностях $0, 2, \ldots, 2n$. Следовательно,

$$H_k(\mathbb{C}P^n;\ G) = \begin{cases} G, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant 2n \text{ и } k \text{ четно,} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для любой группы коэффициентов G.

2. *Относительное клеточное пространство* (X, A) есть по определению пара, составленная из топологического пространства X и его замкнутого подмножества A, такая, что $X = \bigcup_{n=-1}^{\infty} X_n$, где $A = X_{-1} \subset X_0 \subset \ldots$ и X_n получается из X_{n-1} присоединением n-клеток. Если $f\colon M \to [a, b]$ есть допустимая функция Морса типа $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ на компактном многообразии M, то пара $(M, f^{-1}(a))$ гомотопически эквивалентна относительному клеточному пространству, имеющему точно ν_k клеток размерности $k = 0, \ldots, n = \dim M$ и не имеющему других клеток.

Глава 7

КОБОРДИЗМЫ

... теория «кобордизмов», которая за немногие годы своего существования привела к самому глубокому пониманию топологии гладких многообразий.

Х. Хопф, Международный конгресс математиков, 1958.

Математики подобны французам: что бы вы ни сказали им, они переведут это на свой язык, и получится нечто совершенно иное.

Гёте, Максимы и размышления

В этой короткой главе мы изложим элементарную часть одной из наиболее элегантных теорий, входящих в дифференциальную топологию: принадлежащую Рене Тому теорию кобордизмов. В 1958 г., главным образом за эту работу, Том был награжден филдсовской медалью.

Можно разбить все компактные n-многообразия без края на классы, объявив два многообразия эквивалентными, если их несвязное объединение является краем компактного $(n+1)$-многообразия. Множество $\mathfrak{N}^n$ классов эквивалентности по отношению к той же операции несвязного объединения является абелевой группой. Аналогичным образом из ориентированных многообразий строится группа Ω^n. Том [1] поставил (и в значительной степени решил) проблему вычисления этих *групп кобордизмов* [1]). Хотя их определение очень просто, с первого взгляда не видно, как их вычислять или даже как находить их порядок.

Работа Тома распадается на две части: первую, в которой доказывается, что группы кобордизмов изоморфны некоторым гомотопическим группам, и вторую, в которой эти гомотопические группы вычисляются. Вторая часть требует привлечения серьезной алгебраической топологии, и мы не станем в нее вникать; речь пойдет дальше только о первой части. Несмотря на то что доказательства в этой части не содержат явных вычислений, она вскрывает новые связи между многообразиями, векторными расслоениями, гомотопией и трансверсальностью.

---

[1]) Постановка задачи и ряд важных результатов, относящихся к случаю малых размерностей, содержатся в работах В. А. Рохлина [1], [2] начала 50-х годов. — *Прим. перев.*

1. КОБОРДИЗМЫ И ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

Говорят, что два компактных многообразия M_0, M_1 *кобордантны*, и пишут $M_0 \sim M_1$, если существует компактное многообразие W с $\partial W \approx (M_0 \times 0) \cup (M_1 \times 1)$. Попросту говоря, это означает, что несвязное объединение многообразий M_0, M_1 служит краем некоторого многообразия W. Многообразие W называется при этом *кобордизмом* между M_0 и M_1. Легко видеть, что отношение кобордантности является при любом n отношением эквивалентности на классе компактных n-многообразий без края. Множество всех n-мерных кобордических классов обозначается через $\mathfrak{N}^n$, кобордический класс многообразия M — через $[M]$.

Аналогичное отношение эквивалентности, *ориентированный кобордизм*, определяется для ориентированных многообразий. Именно, пусть ω_i — ориентация компактного многообразия M_i ($i = 0, 1$); говорят, что (M_0, ω_0) и (M_1, ω_1) кобордантны, если существует компактное ориентированное многообразие (W, θ) и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм

$$(\partial W, \partial\theta) \approx (M_0 \times 0, -\omega_0) \cup (M_1 \times 1, \omega_1).$$

Множество классов эквивалентности, отвечающих этому отношению, обозначается через Ω^n.

1.1. Теорема. *Операция несвязного объединения делает $\mathfrak{N}^n$ и Ω^n абелевыми группами.*

Доказательство. Прежде всего диффеоморфные многообразия кобордантны: если $M_0 \approx M_1$, то

$$(M_0 \times 0) \cup (M_1 \times 1) \approx \partial (M_0 \times I)$$

(подобное верно и в ориентированном случае). Ассоциативность и коммутативность из этого сразу следуют. Нулевым элементом группы служит класс $[V]$, где V — край произвольного компактного многообразия W. Действительно, взяв несвязное объединение многообразий $M \times I$ и W, мы получаем

$$((M \times 0) \cup V) \cup (M \times 1) = \partial ((M \times I) \cup W).$$

Таким образом, $M \cup V \sim M$. (Можно было бы взять $V = \varnothing$.) Обратным к $[M]$ служит $[M]$, обратным к $[M, \omega]$ служит $[M, -\omega]$; и то и другое делается очевидным, если рассмотреть край цилиндра $M \times I$. ∎

Итак, мы определили две последовательности абелевых групп, *группы ориентированных* и *неориентированных кобордизмов*. Как вычислять их? Поскольку нам известны все многообразия размерностей 0 и 1, в этих случаях вычисление не представляет труда (упр. 3). Оно не трудно и в размерности 2, поскольку, как мы увидим в гл. 9, замкнутые поверхности также могут быть расклассифицированы. Однако с помощью такой лобовой атаки не удается продвинуться особенно далеко.

При рассмотрении любой топологической проблемы стоит попытаться пустить в ход отображения. В нашем случае это мотивируется еще и тем, что мы уже знаем о существовании полезной связи между отображениями и многообразиями: если отображение $f\colon V \to N$ трансверсально к подмногообразию A многообразия N, то $f^{-1}(A)$ есть подмногообразие многообразия V. Если мы фиксируем V, N и A и будем изменять f, то мы получим целый набор подмногообразий многообразия V.

Рассматривая отображения, мы должны помнить о гомотопиях. Естественный вопрос: каким образом связаны $f^{-1}(A)$ и $g^{-1}(A)$, если отображения $f, g\colon V \to N$ гомотопны? Следующий простой результат является ключом к кобордизмам.

1.2. Лемма. *Пусть V, N — многообразия без края и A — замкнутое подмногообразие многообразия N, также не имеющее края. Предположим, что V компактно. Если $f, g\colon V \to N$ — гомотопные отображения, каждое из которых трансверсально A, то многообразия $f^{-1}(A)$, $g^{-1}(A)$ кобордантны.*

Доказательство. Гомотопию $H\colon V \times I \to N$, соединяющую f с g, также можно сделать трансверсальной A. Тогда $H^{-1}(A)$ будет кобордизмом между $f^{-1}(A)$ и $g^{-1}(A)$. ∎

Итак, мы построили отображение гомотопического множества $[V, N]$ в $\mathfrak{N}^n$, где $n = \dim V - \dim N + \dim A$. Если мы хотим охватить этим отображением все множество $\mathfrak{N}^n$, мы во всяком случае должны взять в качестве V многообразие, в которое может быть вложено всякое компактное n-многообразие. Это наводит на мысль, что стоит положить $V = S^{n+k}$ с большим $k = \dim N - \dim A$. Мы приходим к отображению $[S^{n+k}, N] \to \mathfrak{N}^n$.

Предположим, что отображение $f\colon S^{n+k} \to N$ трансверсально A. Что можно сказать о подмногообразии $f^{-1}(A) = M \subset S^{n+k}$? Наиболее важный факт заключается в том, что *нормальное расслоение многообразия M в S^{n+k} индуцируется посредством f нормальным расслоением многообразия A в N.* Действительно, по определению трансверсальности, Tf индуцирует отображение между алгебраическими нормальными расслоениями:

$$\begin{tikzcd}
T_M S^{n+k}/TM \arrow[r] \arrow[d] & T_A N/TA \arrow[d] \\
M \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Следовательно, подмногообразие A многообразия N должно обладать тем свойством, что нормальное расслоение всякого n-мерного подмногообразия M сферы S^{n+k} должно индуцироваться нормальным расслоением многообразия A посредством некоторого отображения $M \to A$. Счастливым образом, мы уже построили пару (N, A) с этим свойством, именно пару $(E_{s,k}, G_{s,k})$ с $s > n+k$. Здесь $G_{s,k}$ есть грассманово многообразие k-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^s$ и $E_{s,k}$ — тотальное пространство универсального расслоения $\gamma_{s,k} \to G_{s,k}$ (см. § 4.3). Как обычно, база отождествляется с нулевым сечением, так что $G_{s,k} \subset E_{s,k}$.

Для краткости положим $E = E_{s,k}$, $G = G_{s,k}$. Для данного компактного n-мерного многообразия $M \subset S^{n+k}$ без края обозначим через U трубчатую окрестность M в S^{n+k}. Тогда, согласно теореме 4.3.4, существует отображение

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

между векторными расслоениями.

В этот момент возникает новая проблема: мы хотим, чтобы g было определено на всей сфере S^{n+k}, а не только на U. Более того, продолженное отображение не должно отображать в G никаких новых точек, так как для нас существенно, что $g^{-1}(G) = M$.

Простые примеры показывают, однако, что такое продолжение не всегда возможно. И тогда Том вводит deus ex machina: он добавляет к E «точку на бесконечности» и отображает дополнение $S^{n+k} - U$ в эту новую точку! Этот гениальный ход полностью решает задачу: остается лишь проработать технические детали. Этим мы займемся в следующем параграфе.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Операция декартова перемножения многообразий определяет билинейные отображения

$$\Omega^i \times \Omega^j \to \Omega^{i+j}.$$

Эти спаривания ассоциативны. Кроме того, они коммутативны в градуированном смысле: если $\alpha \in \Omega^i$, $\beta \in \Omega^j$, то $\alpha\beta = (-1)^{i+j}\beta\alpha$. Имеются также аналогичные билинейные спаривания

$$\mathfrak{N}^i \times \mathfrak{N}^j \to \mathfrak{N}^{i+j},$$

коммутативные в обычном смысле.

2. Всякий элемент группы $\mathfrak{N}^i$ имеет порядок 2.

3. $\Omega^0 = Z$, $\mathfrak{N}^0 = Z_2$ и $\Omega^1 = \mathfrak{N}^1 = 0$.

4. Пусть n — неотрицательное четное число. «Эйлерова характеристика mod 2» определяет эпиморфизм $\mathfrak{N}^n \to Z_2$.

5. Ориентированная поверхность рода $p \geqslant 0$ (определенная в упр. 12 к § 1.3) является краем компактного ориентированного 3-многообразия.

2. ГОМОМОРФИЗМ ТОМА

Пусть $\xi = (E, p, B)$ — векторное расслоение над компактным многообразием B без края. *Одноточечная компактификация* E^* пространства E есть, по определению, пространство $E^* = E \cup \infty$, где ∞ — точка, не содержащаяся в E. Открытыми окрестностями точки ∞ служат дополнения компактных подмножеств пространства E. Мы называем пространство E^* *пространством Тома* векторного расслоения ξ.

Фундаментальное свойство пространства E^* заключается в том, что *разность* $E^* - B$ *стягиваема*. Стягивание этой разности в точку ∞ определяется гомотопией

$$(E^* - B) \times I \to E^* - B,$$

$$(x, t) \longmapsto \begin{cases} \left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)x & \text{при } 0 \leqslant t < 1,\ x \neq \infty, \\ \infty & \text{при } t = 1 \text{ или } x = \infty. \end{cases}$$

Из этого факта и теоремы о продолжении гомотопии вытекает

2.1. Лемма. *Пусть Y — замкнутое подмножество многообразия Q. Два отображения $Q \to E^* - B$, совпадающие на Y, соединяются гомотопией, связанной на Y.*

Пусть теперь Q — многообразие и h: $Q \to E^*$ — отображение. Будем говорить, что h *имеет стандартный вид*, если в Q существуют подмногообразие M и его трубчатая окрестность U, такие, что $U = g^{-1}(E)$, $M = g^{-1}(B)$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g|U"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ M \arrow[r, "g|M"'] & B \end{tikzcd}$$

представляет собой отображение между векторными расслоениями. В частности, в этом случае $g \pitchfork B$ и $g(Q - U) = \infty$.

2.2. Лемма. *Пусть Q — компактное многообразие и B — компактное многообразие без края. Тогда всякое отображение $f: Q \to E^*$ гомотопно отображению стандартного вида.*

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $f \pitchfork B$. Положим $M = f^{-1}(B)$; пусть $U \subset f^{-1}(E)$ — трубчатая окрестность многообразия M и $D \subset U$ — шаровое подрасслоение. В силу теоремы 4.6.5 мы можем считать также, что отображение f совпадает в D с некоторым отображением $\Phi: U \to E$ между векторными расслоениями. Рассмотрим отображение

$$h: Q \to E^*,$$

$$h = \begin{cases} \Phi \text{ на } U, \\ \infty \text{ на } Q - U. \end{cases}$$

Это отображение совпадает с f на D и имеет стандартный вид. Так как h и f совпадают на ∂D и оба отображают $Q - \operatorname{Int} D$ в $E^* - B$, из леммы 2.1 следует, что $f \simeq h$. ∎

Пусть $E_{s,k} \to G_{s,k}$ — грассманово расслоение; положим $E = E_{s,k}$, $G = G_{s,k}$.

Пусть $\pi_{n+k}(E^*)$ обозначает, как обычно, $(n+k)$-ю гомотопическую группу пространства $E^* = E^*_{s,k}$. Начальная точка значения не имеет, но удобно принять за нее ∞. Гомотопический класс сфероида $f: S^{n+k} \to E^*$ мы обозначаем через $[f]$.

Гомоморфизм Тома $\tau(n; k, s) = \tau: \pi_{n+k}(E^*) \to \mathfrak{N}^n$ определяется следующим образом. Пусть $\alpha \in \pi_{n+k}(E^*)$. Согласно теореме трансверсальности, существует такое $f \in \alpha$, что $f: S^{n+k} \to E^*$ трансверсально G (или, точнее, $f \mid (S^{n+k} - f^{-1}(\infty))$ трансверсально G). В силу леммы 1.2, кобордический класс многообразия $f^{-1}(G)$ не зависит от выбора f. Мы полагаем $\tau(\alpha) = [f^{-1}(G)]$. Таким образом, $\tau(\alpha) = [f^{-1}(G)]$, где $f \in \alpha$, $f \pitchfork G$.

Чтобы показать, что τ аддитивно, возьмем $\alpha, \beta \in \pi_{n+k}(E^*)$. Из большого числа эквивалентных описаний операции в гомотопической группе для нас наиболее удобно следующее. Выберем такие $f \in \alpha$, $g \in \beta$, что f отображает нижнюю полусферу сферы S^{n+k} в ∞, а g отображает верхнюю полусферу сферы S^{n+k} в ∞. Тогда $\alpha + \beta$ есть класс сфероида h, совпадающего с f на верхней полусфере и совпадающего с g на нижней полусфере. Можно считать, что f, g и h трансверсальны G. Ясно, что $h^{-1}(G)$ есть несвязное объединение прообразов $f^{-1}(G)$ и $g^{-1}(G)$, поскольку последние лежат в непересекающихся открытых полусферах. Поэтому

$$\begin{aligned} \tau(\alpha + \beta) &= [h^{-1}(G)] \\ &= [f^{-1}(G) \cup g^{-1}(G)] \\ &= [f^{-1}(G)] + [g^{-1}(G)] \\ &= \tau(\alpha) + \tau(\beta). \end{aligned}$$

Для ориентированных многообразий определяется аналогичный гомоморфизм Тома

$$\tilde{\tau}\colon \pi_{n+k}(\tilde{E}^*) \to \Omega^n.$$

Здесь $\tilde{E} = \tilde{E}_{s,k}$ — тотальное пространство векторного расслоения $\tilde{\gamma}_{s,k}$, определяемого следующим образом. База есть многообразие $\tilde{G} = \tilde{G}_{s,k}$ ориентированных k-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^s$; таким образом, элементы множества $\tilde{G}$ — пары (P, ω), где $P \in G$ и ω — ориентация пространства P. В очевидном смысле $\tilde{G}$ есть двулистное накрытие над G. Расслоение $\tilde{\gamma}_{s,k}$ по определению индуцируется расслоением $\gamma_{s,k}$ посредством накрывающего отображения $\tilde{G} \to G(—(P, \omega) \mapsto P)$. Другими словами, элементы множества $\tilde{E}$ — тройки (P, ω, x), составленные из k-мерного пространства $P \subset \mathbb{R}^s$, ориентации ω пространства P и вектора $x \in P$. Проекцией расслоения $\tilde{\gamma}_{s,k}$ служит отображение

$$\tilde{E} \to \tilde{G}, \qquad (P, \omega, x) \mapsto (P, \omega).$$

Заметим, что расслоение $\tilde{\gamma}_{s,k}$ обладает канонической ориентацией: слой над точкой (P, ω) наделяется ориентацией ω.

Ориентированный гомоморфизм Тома $\tilde{\tau}$ определяется следующим образом. Пусть $\alpha \in \pi_{n+k}(\tilde{E}^*)$. Тогда $\tilde{\tau}(\alpha) = [f^{-1}(\tilde{G}), \theta]$, где

$$f\colon S^{n+k} \to \tilde{E}^*, \qquad f \pitchfork G,\ f \in \alpha$$

и ориентация θ многообразия $M = f^{-1}(\tilde{G}) \subset S^{n+k}$ определяется следующим образом. Нормальное расслоение ν многообразия M в S^{n+k} индуцируется нормальным расслоением $\tilde{G}$ в $\tilde{E}$, т. е. расслоением $\tilde{\gamma}_{s,k}$. Мы наделяем ν ориентацией, индуцируемой канонической ориентацией расслоения $\tilde{\gamma}_{s,k}$. Затем мы ориентируем сферу S^{n+k} посредством стандартной ориентации σ и наделяем M единственной ориентацией θ, для которой $\theta \oplus \nu = \sigma$ на $T_M S^{n+k}$.

Следующее предложение является *основной теоремой теории кобордизмов.*

2.3. Теорема (Том). *Гомоморфизмы Тома $\tau(n; k, s)$ и $\tilde{\tau}(n; k, s)$ являются*

(a) *эпиморфизмами, если $k > n$ и $s \geqslant k + n$;*

(b) *мономорфизмами (и, значит, изоморфизмами), если $k > n + 1$ и $s \geqslant k + n + 1$.*

Доказательство. Для простоты мы ограничимся неориентированным случаем. Чтобы доказать (a), возьмем $[M] \in \mathfrak{N}^n$. В силу теоремы Уитни о вложении, мы можем считать, что $M \subset S^{n+k}$.

Пусть $U \subset S^{n+k}$ — трубчатая окрестность многообразия M. Согласно теореме 4.3.4, неравенство $s \geqslant k + n$ обеспечивает существование отображения векторного расслоения U в векторное расслоение $E_{s,k}$. Продолжим это отображение до отображения g: $S^{n+k} \to E^*_{s,k}$, переводящего $S^{n+k} - U$ в ∞. Очевидно, $g \pitchfork G_{s,k}$ и $g^{-1}(G_{s,k}) = M$. Следовательно, $\tau([g]) = [M]$.

Чтобы доказать (b), предположим, что g: $S^{n+k} \to E^*_{s,k}$ — такое отображение, что $\tau([g]) = 0 \in \mathfrak{N}^n$. Теорема 2.2 позволяет нам считать, что отображение g имеет стандартный вид. Положим $g^{-1}(G_{s,k}) = M$. Тогда $\tau([g]) = [M] = 0$, так что M ограничивает компактное многообразие W. Предположение $k > n + 1$ обеспечивает продолжимость включения $M \to S^{n+k}$ до правильного вложения $W \to D^{n+k+1}$. Трубчатая окрестность $U \subset S^{n+k}$ многообразия M (по отношению к которой g имеет стандартный вид) продолжается до трубчатой окрестности $V \subset D^{n+k+1}$ многообразия W (см. теорему 4.6.4). В силу теоремы 4.3.4, отображение g: $U \to E_{s,k}$ продолжается до отображения h векторного расслоения V в $E_{s,k}$ ввиду неравенства $s \geqslant k + (n + 1)$. Мы продолжаем h на весь шар D^{n+k+1}, переводя дополнение $D^{n+k+1} - V$ в ∞. Так как $h \mid S^{n+k} = g$, то $[g] = 0$. ∎

Как уже говорилось, фактическое вычисление групп кобордизмов нам непосильно; тем более недоступны для нас важные применения этого вычисления. Все же мы сделаем несколько замечаний, иллюстрирующих мощь теории Тома.

Нетрудно показать, что E^* и $\tilde{E}^*$ — конечные симплициальные пространства. Ввиду этого из теоремы о симплициальной аппроксимации следует, что они имеют счетные гомотопические группы. Таким образом, группы $\mathfrak{N}^n$ и Ω^n счетны — это нельзя усмотреть прямо из определения этих групп. С помощью алгебраической топологии можно показать, что эти группы являются даже конечнопорожденными. Таким образом, имеется конечное множество $\mathscr{S}$ n-мерных многообразий со следующим свойством: всякое компактное n-мерное многообразие без края кобордантно несвязному объединению конечного числа экземпляров многообразий из $\mathscr{S}$.

В действительности известны гораздо более точные утверждения о группах кобордизмов. В качестве примера мы приведем без доказательства воистину замечательную теорему Тома.

2.4. Теорема. *Пусть n — положительное число.*

(a) *Если n не делится на* 4, *то группа Ω^n ориентированных кобордизмов конечна.*

(b) *Если n делится на* 4, *скажем $n = 4k$, то Ω^n есть конечнопорожденная абелева группа, ранг которой равен $\pi(k)$ — числу* *представлений числа k в виде суммы натуральных слагаемых. Более того:*

(c) *Базис свободной части группы Ω^{4k} составляют произведения вида $\mathbb{C}P^{2j_1} \times \ldots \times \mathbb{C}P^{2j_r}$ с $j_1 + \ldots + j_r = k$ и $1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_r \leqslant k$.*

Таким образом, «дифференциальная» проблема вычисления групп кобордизмов в основном сводится к комбинаторной задаче вычисления $\pi(k)$. Это классическая задача; к сожалению, она пока не решена.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (a) Пространство $E^*_{n,1}$ гомеоморфно P^n.

(b) Пространство $\tilde{E}^*_{n,1}$ гомеоморфно пространству, получающемуся из сферы S^n склеиванием двух точек.

(c) Пространство $E^*_{n,n}$ гомеоморфно S^n.

2. Пусть E — тотальное пространство k-мерного векторного расслоения над компактным многообразием.

(a) Если размерность многообразия M меньше k, то всякое отображение $M \to E^*$ гомотопно постоянному.

(b) Включение $\mathbb{R}^k \to E$ слоя в тотальное пространство продолжается до отображения $S^k \to E^*$, которое не гомотопно постоянному.

3. Два n-мерных подмногообразия M_0, M_1 компактного многообразия V называются *V-кобордантными*, если существует компактное подмногообразие W цилиндра $V \times I$, такое, что

$$\partial W = (M_0 \times 0) \cup (M_1 \times 1).$$

Это — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается через $\mathfrak{N}^n(V)$ [1]).

*(a) Пусть $\dim V = n + k$. Естественное отображение $\tau_V: [V, E^*_{s,k}] \to \mathfrak{N}^n(V)$ является отображением на при $k \geqslant n$, $s \geqslant k + n$ и взаимно однозначно при $k \geqslant n + 1$, $s \geqslant k + n + 1$.

(b) При каких предположениях операция несвязного объединения делает множество $\mathfrak{N}^n(V)$ полугруппой? группой?

(c) $\mathfrak{N}^n(S^{n+k})$ есть группа при всех n, k.

4. Пусть V — риманово многообразие размерности $n + k$. *Оснащенное подмногообразие* многообразия V — это пара (M, F), составленная из компактного (n-мерного) подмногообразия M многообразия V и семейства $F = (F_1, \ldots, F_k)$ сечений расслоения $\tau_M V$, такое, что $(F_1(x), \ldots, F_k(x))$ — линейно независимые векторы, порождающие подпространство пространства V_x, трансверсальное M_x (при любом $x \in M$). Два оснащенных подмногообразия (M_0, F), (M_1, F') называются *оснащенно кобордантными*, если существует оснащенное подмногообразие (W, G) цилиндра $V \times I$, такое, что $\partial W = (M_0 \times 0) \cup (M_1 \times 1)$ и $G|\partial W = F \cup F'$. Возникающее множество классов эквивалентности обозначается через $F^n(V)$.

---

[1]) Это обозначение не является общепринятым; чаще этим символом обозначают неориентированный аналог группы $\Omega^n(V)$ из упр. 6. — *Прим. перев.*

(a) Имеется естественное отображение

$$\pi\colon [V, S^k] \to F^n(V).$$

[Следует представлять себе S^k как $(\mathbb{R}^k)^* = E^*_{k,k}$.]

(b) π есть изоморфизм при любых k, n.

(c) Если $\dim V = n$ и V связно и ориентировано, то имеется «изоморфизм степени» $F^n(V) \approx \mathbb{Z}$. Таким образом, мы вновь приходим к изоморфизму $\deg\colon [V, S^n] \to \mathbb{Z}$ [1]).

5. Пусть $\eta = (p, E, B)$ — фиксированное векторное расслоение над компактным многообразием B без края. Под *η-подмногообразием* многообразия V понимается пара (M, f), составленная из компактного подмногообразия M многообразия V и отображения f нормального расслоения многообразия M в расслоение η (так что $\dim \eta = \dim V - \dim M$). Два η-подмногообразия (M_i, f_i) $(i = 0, 1)$ многообразия V называются *η-кобордантными*, если существует η-подмногообразие (W, f) цилиндра $V \times I$, такое, что $\partial(W, f) = ((M_0, f_0) \times 0) \cup ((M_1, f_1) \times 1)$ (смысл обозначений очевиден). Множество η-кобордических классов находится во взаимно однозначном соответствии с гомотопическим множеством $[V, E^*]$.

6. *Группа $\Omega^n(X)$ бордизмов пространства X* определяется следующим образом. Элемент группы $\Omega^n(X)$ есть класс отображений $M \to X$, где M — компактное ориентированное n-мерное многообразие без края. Два отображения эквивалентны, если они продолжаются до отображения ориентированного кобордизма между областями их определения. Если X есть точка, то эта группа есть Ω^n. Гомотопический класс отображений $g\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $g_{\#}\colon \Omega^n(X) \to \Omega^n(Y)$ посредством компонирования с отображениями $M \to X$.

*7. Имеются естественные гомоморфизмы $\Omega^n(X) \to H_n(X)$. При $n = 1$ это изоморфизмы.

8. Имеется билинейное спаривание

$$\Omega^n(X) \times \Omega^m(X) \to \Omega^{n+m-p}(X),$$

индуцированное пересечением; здесь X — произвольное ориентированное p-мерное многообразие.

---

[1]) Теория оснащенных кобордизмов старше теории кобордизмов. Равенство $\pi_{n+k}(S^k) = F^n(S^{n+k})$, вытекающее из части (b) этого упражнения, было доказано Л. С. Понтрягиным в 30-е годы; оно служило на протяжении многих лет главным средством изучения гомотопических групп сфер. — *Прим. перев.*

Глава 8

ИЗОТОПИЯ

> Представим себе, скажем, тело, сделанное из резины, на котором нарисованы фигуры. Что останется в этих фигурах неизменным, если начать произвольным образом растягивать резину, не разрывая ее?
>
> Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, 1925

В этой главе мы предпримем более полное изучение понятия изотопии, введенное выше для нужд теоремы о трубчатых окрестностях.

Интуитивно изотопность двух вложений $f, g: V \to M$ означает, что одно из них может быть продеформировано в другое, все время оставаясь вложением; деформация эта называется изотопией. Само по себе это отношение не очень полезно. Однако обычно изотопию можно произвести посредством диффеотопии объемлющего многообразия M, т. е. такого однопараметрического семейства h_t диффеоморфизмов многообразия M, что $h_0 = 1_M$ и $h_1 f = g$. В этом случае f и g вкладывают V в M «одинаковым образом». Например, если f продолжается до вложения F: $W \to M$, где $W \supset V$, то и g продолжается до вложения W в M, именно до $h_1 F$. Таким образом, чтобы доказать продолжаемость какого-нибудь вложения, достаточно доказать, что оно изотопно продолжаемому вложению. Эта техника продолжений — одно из главных употреблений изотопий.

В § 8.1 мы докажем фундаментальную теорему 1.3 о продолжении изотопий вместе с некоторыми ее вариантами и применениями. В § 8.2 эти результаты применяются к проблеме введения дифференциальной структуры на объединении двух гладких многообразий, склеенных вдоль компонент края. В § 8.3 строятся специальные изотопии вложений дисков; оказывается, что с точностью до ориентации и изотопии существует только один способ вложения диска в связное многообразие. Рассматриваются также диффеотопии окружности.

В гл. 9 эти результаты будут использованы для классификации компактных поверхностей. Вообще же они оказываются необходимым инструментом при любой попытке проанализировать многообразия или вложения. Некоторые другие их применения приводятся в упражнениях.

1. ИЗОТОПИЯ

Пусть V и M — многообразия. Напомним, что *изотопия* многообразия V в M есть отображение $F\colon V \times I \to M$, такое, что при любом $t \in I$ отображение

$$F_t\colon V \to M, \qquad x \mapsto F(x, t)$$

является вложением. Можно интуитивно понимать изотопию как однопараметрическое семейство вложений.

След изотопии F есть вложение

$$\hat{F}\colon V \times I \to M \times I,$$
$$(x, t) \mapsto (F(x, t), t).$$

Заметим, что F *сохраняет уровни* — сохраняет координату t. Всякое вложение, сохраняющее уровни, есть след некоторой изотопии.

Если имеется изотопия $F\colon V \times I \to M$, мы называем отображения F_0 и F_1 *изотопными*; мы говорим также, что F есть *изотопия отображения* F_0. Если V есть подмногообразие многоообразия M и F_0 есть включение, то мы говорим также, что F есть *изотопия* V *в* M. Если $V = M$ и каждое отображение F_t является диффеоморфизмом, а $F_0 = 1_M$, то F называется *диффеотопией* или *охватывающей изотопией*.

Имеется важная связь между диффеотопиями многообразия M и векторными полями на $M \times I$. Пусть $\hat{F}\colon V \times I \to M \times I$ — след диффеотопии F, так что $\hat{F}$ есть диффеоморфизм, сохраняющий уровни. Каждая точка цилиндра $M \times I$ принадлежит единственной дуге $\hat{F}(x \times I)$ с $x \in M$. Касательные векторы к этим дугам образуют не обращающееся в нуль векторное поле X_F на $M \times I$, которое переводится проекцией $M \times I \to I$ в постоянное поле положительных единичных векторов на I. Таким образом, имеется отображение $H\colon M \times I \to TM$ с

$$X_F(y, t) = (H(y, t), 1) \in M_y \times \mathbb{R} = T_{(y, t)}(M \times I).$$

Изотопия F есть не что иное, как поток Φ поля X_F, примененный к $M \times 0$:

$$\begin{array}{ccc} M & = & M \times 0 \\ \downarrow{\scriptstyle F_t} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_t} \\ M & = & M \times t \end{array}$$

Горизонтальная часть H поля X_F есть специальный случай *векторного поля на* M, *зависящего от времени*. Последнее есть произвольное отображение $G\colon M \times I \to TM$, такое, что $G(x, t) \in M_x$; требуется также, чтобы G отображало $\partial M \times I$ в $T(\partial M)$.

Не всякое зависящее от времени векторное поле G происходит из диффеотопии, поскольку нет гарантии, что поток соответствующего поля X на $M \times I$ будет определен для всех $t \in I$. Рис. 8—1 показывает, что на $\mathbb{R} \times I$ существует векторное поле, вертикальная компонента которого может быть сделана равной 1, у которого *никакая* интегральная кривая не доходит от $\mathbb{R} \times 0$ до $\mathbb{R} \times 1$!

Поскольку зависящие от времени векторные поля легко строить, полезно иметь критерий, который бы гарантировал, что они порождают изотопии. Вот пример такого условия. Говорят, что

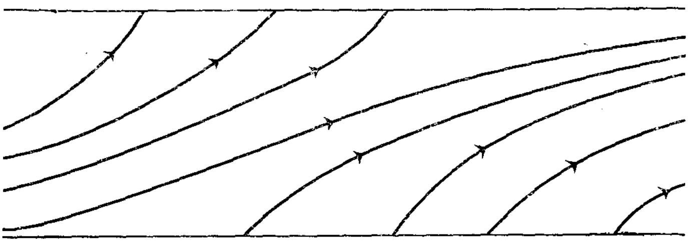


Рис. 8—1. Векторное поле на $\mathbb{R} \times I$.

зависящее от времени векторное поле *имеет ограниченную скорость*, если M обладает полной римановой метрикой, по отношению к которой $|G(x, t)| < K$, где K — константа. (Ср. упр. 1 к § 6.2.)

1.1. Теорема. *Пусть G — зависящее от времени векторное поле на M, имеющее ограниченную скорость. Тогда G порождает диффеотопию многообразия M. Другими словами, существует единственная диффеотопия F: $M \times I \to M$, такая, что*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = G(F(x, t), t).$$

Доказательство. Пусть X: $M \times I \to T(M \times I)$ — векторное поле, определяемое формулой $X(x, t) = (G(x, t), 1)$. Интегральные кривые поля X переходят при проекции на I в кривую вида $y \mapsto y + t$. Поэтому все эти кривые определены на интервалах длины $\leqslant 1$. Из условия ограниченности скорости вытекает, что M обладает полной римановой метрикой, по отношению к которой все интегральные кривые имеют конечную длину. Но тогда из полноты метрики следует, что каждая интегральная кривая содержится в компактном множестве. Это показывает, что интегральные кривые определены на конечных замкнутых интервалах, концы которых отображаются в $M \times 0$ и $M \times 1$. Таким образом, для каждого $x \in M$ существует интегральная кривая поля X вида

$$t \mapsto (F(x, t), t) \qquad [0 \leqslant t \leqslant 1].$$

Это определяет диффеотопию F. Ее единственность вытекает из единственности решения липшицева дифференциального уравнения. ▌

Носитель $\operatorname{Supp} G$ зависящего от времени векторного поля $G\colon M \times I \to TM$ определяется как замыкание множества

$$\{x \in M \mid G(x, t) \neq 0 \text{ для некоторого } t \in I\}.$$

Если множество $\operatorname{Supp} G$ компактно, то поле G имеет ограниченную скорость. Поэтому из теоремы 1.1 вытекает такое следствие:

1.2. Теорема. *Зависящее от времени векторное поле, имеющее компактный носитель, порождает диффеотопию. В частности, всякое зависящее от времени векторное поле на компактном многообразии порождает изотопию.*

Носитель $\operatorname{Supp} F$ изотопии $F\colon V \times I \to M$ определяется как замыкание множества

$$\{x \in V \mid F(x, t) \neq F(x, 0) \text{ при некотором } t \in I\}.$$

Мы можем доказать теперь следующие *теоремы о продолжении изотопии.*

1.3. Теорема. *Пусть V — компактное подмногообразие многообразия M и $F\colon V \times I \to M$ — изотопия. Если $F(V \times I) \subset \partial M$ или $F(V \times I) \subset M - \partial M$, то F продолжается до диффеотопии многообразия M, имеющей компактный носитель.*

1.4. Теорема. *Пусть U — открытое подмножество многообразия M и $A \subset U$ — компактное множество. Пусть, далее, $F\colon U \times I \to M$ — изотопия, такая, что множество $\hat{F}(U \times I) \subset M \times I$ открыто. Тогда существует диффеотопия многообразия M, имеющая компактный носитель и совпадающая с F в окрестности множества $A \times I$.*

Доказательство теорем 1.3 и 1.4. Докажем сначала теорему 1.4. Касательные векторы к кривым

$$\hat{F}\colon x \times I \to M \times I \quad (x \in U)$$

определяют на $\hat{F}(U \times I)$ векторное поле X вида $X(y, t) = (H(y, t), 1)$. Здесь H — отображение $\hat{F}(U \times I) \to TM$ с $H(y, t) \in M_y$. С помощью разбиений единицы можно построить зависящее от времени векторное поле $G\colon M \times I \to TM$, совпадающее с H в окрестности множества $A \times I$. (Здесь используется открытость множества $\hat{F}(U \times I)$.) Так как множество $A \times I$ компактно, мы можем добиться того, чтобы у G был компактный носитель. Нужная диффеотопия многообразия M определяется полем G.

Чтобы доказать теорему 1.3, мы начинаем с векторного поля X

на $\hat{F}(V \times I)$, касающегося кривых $\hat{F}(x \times I)$. С помощью трубчатой окрестности многообразия $\hat{F}(V \times I)$ и разбиения единицы можно продолжить горизонтальную часть поля X до векторного поля Y в окрестности множества $\hat{F}(V \times I)$ в $M \times I$. Наложенные на F ограничения позволяют нам считать, что при $x \in \partial M$ вектор $Y(x, t)$ касается $(\partial M) \times I$. После сужения на меньшую окрестность горизонтальная часть поля Y продолжается до зависящего от времени поля G на M, имеющего компактный носитель. Для завершения доказательства теоремы 1.3 достаточно взять диффеотопию, порожденную полем G. ∎

Приведем теперь часто используемое следствие из теоремы о продолжении изотопии.

1.5. Теорема. *Пусть V — компактное подмногообразие многообразия N, и пусть f_0, f_1: $V \to M - \partial M$ — изотопные вложения. Если f_0 продолжается до вложения $N \to M$, то подобное верно для f_1.*

Доказательство. Существует изотопия, связывающая включение $f_0(V) \subset M - \partial M$ с вложением $f_1 f_0^{-1}$: $f_0(V) \to M - \partial M$. Согласно теореме 1.3, эта изотопия продолжается до диффеотопии H многообразия M. Таким образом, H_1: $M \to M$ есть диффеоморфизм, такой, что $H_1 | f_0(V) = f_1^{-1} f_0$, или, что эквивалентно, $H_1 f_0 = f_1$. Поэтому если g: $N \to M$ есть вложение, продолжающее f_0, то $H_1 g$: $N \to M$ есть вложение, продолжающее f_1. ∎

Условие компактности в теоремах 1.3 и 1.4 может быть заменено более слабым требованием ограниченности скорости изотопии. Говорят, что изотопия F: $V \times I \to M$, где V — подмногообразие многообразия M, *имеет ограниченную скорость*, если у M есть полная риманова метрика с тем свойством, что длины касательных векторов к кривым $t \mapsto F(x, t)$ ограничены. Имеют место следующие факты.

1.6. Теорема. *Пусть V — замкнутое подмнооoбразие многообразия M и F: $V \times I \to M$ — изотопия, имеющая ограниченную скорость. Если $F(V \times I) \subset \partial M$ или $F(V \times I) \subset M - \partial M$, то F продолжается до диффеотопии многообразия M, имеющей ограниченную скорость.*

1.7. Теорема. *Пусть A — замкнутое подмножество многообразия M и $U \subset M$ — открытая окрестность множества A. Пусть, далее, F: $U \times I \to M$ — изотопия, имеющая ограниченную скорость и такая, что множество $\hat{F}(U \times I)$ открыто в $M \times I$. Тогда существует диффеотопия G многообразия M, имеющая ограниченную скорость и совпадающая с $\hat{F}$ в окрестности множества $A \times I$; более того, можно дополнительно потребовать, чтобы носитель* Supp *G содержался в $F(U \times I)$.*

Доказательства предоставляются читателю.

В качестве следствия из теоремы 1.7 мы получаем *теорему об объемлющей трубчатой окрестности*:

1.8. Теорема. *Пусть A — правильное замкнутое подмногообразие многообразия M, и пусть $U \subset M$ — окрестность множества A. Тогда всякий A-росток изотопии трубчатой окрестности многообразия A продолжается до диффеотопии многообразия M, носитель которой содержится в U.*

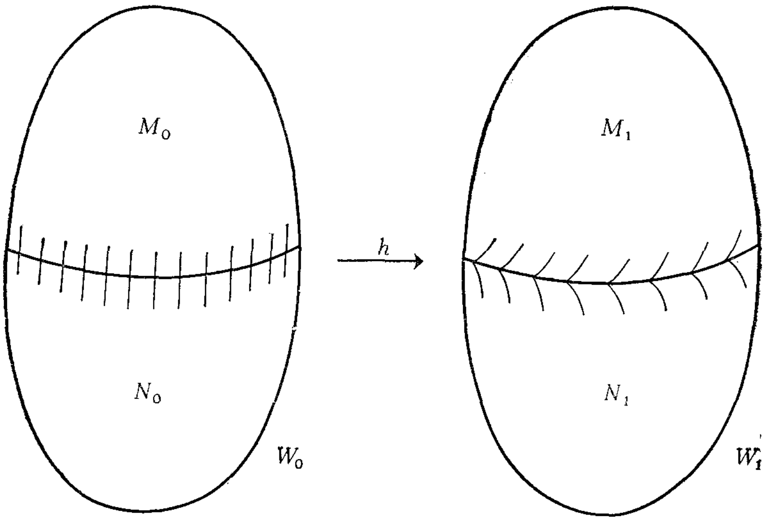


Рис. 8—2. Сглаживание гомеоморфизма h.

Доказательство. Поскольку при изотопии трубчатых окрестностей A остается неподвижным, эта изотопия имеет ограниченную скорость в некоторой окрестности множества A, и мы можем применить теорему 1.7. ∎

Теорема, аналогичная теореме 1.8, имеет место для воротников края ∂M. Следствием является *теорема сглаживания*, которая позволяет нам превращать гомеоморфизмы некоторого типа в диффеоморфизмы (см. рис. 8—2):

1.9. Теорема. *Пусть W_i $(i = 0, 1)$ есть n-многообразие без края, являющееся объединением двух замкнутых n-мерных подмногообразий M_i, N_i, таких, что*

$$M_i \cap N_i = \partial M_i = \partial N_i = V_i.$$

Пусть, далее, h: $W_0 \to W_1$ — гомеоморфизм, диффеоморфно отображающий M_0 и N_0 на M_1 и N_1 соответственно. Тогда существует диффеоморфизм f: $W_0 \to W_1$, такой, что $f(M_0) = M_1$, $f(N_0) = N_1$

и $f|V_0 = h|V_0$. *Более того, диффеоморфизм* f *может быть сделан совпадающим с* h *вне произвольно заданной окрестности* Q *многообразия* V_0.

Доказательство. Выберем трубчатые окрестности τ_i многообразий V_i в W_i. Это определяет воротники $\tau_i \cap M_i$, $\tau_i \cap N_i$ многообразий V_i в M_i, N_i. Многообразие V_1 имеет в M_1 другой воротник, $h(\tau_0 \cap M_0)$; этот воротник получается перенесением воротника $\tau_0 \cap M_0$ посредством $h|M_0$. В силу теоремы 1.8 об объемлющей трубчатой окрестности, мы можем произотопировать диффеоморфизм $h|M_0$: $M_0 \to M_1$ в новый диффеоморфизм f': $M_0 \to M_1$, такой, что $f' = h$ на V_0 и на $M_0 - Q$ и что $f'(\tau_0 \cap M_0)$ имеет тот же V_1-росток, что и $\tau_1 \cap M_1$. Аналогичным образом мы можем произотопировать диффеоморфизм $h|N_0$: $N_0 \to N_1$ в диффеоморфизм f'': $N_0 \to N_1$, такой, что $f'' = h$ на V_0 и на $N_0 - Q$ и что воротник $f''(\tau_0 \cap N_0)$ имеет тот же V_1-росток, что $\tau_1 \cap N_1$. Отображение $f' \cup f''$: $W_0 \to W_1$ и есть требуемый диффеоморфизм f. ∎

Выбирая воротники более аккуратно, мы можем добиться даже того, чтобы диффеоморфизм f совпадал с h на M_0 (или на M_1).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Отношение «f изотопно g» является отношением эквивалентности на $\mathrm{Emb}^\infty(M, N)$.

2. Если вложения f_0, f_1: $M \to N$ изотопны и вложения g_0, g_1: $N \to W$ изотопны, то и вложения $g_0 f_0$, $g_1 f_1$: $M \to W$ изотопны.

3. (a) Если F: $M \times I \to N$ есть изотопия, то отображение $I \to \mathrm{Emb}^\infty_W(M, N)$, $t \longmapsto F_t$, непрерывно.

(b) Наоборот, всякое непрерывное отображение λ: $I \to \mathrm{Emb}^\infty_W(M, N)$ может быть аппроксимировано таким отображением μ, что $\mu(i) = \lambda(i)$ при $i = 0, 1$ и отображение $M \times I \to N$, $(x, t) \longmapsto \mu(t)(x)$, является изотопией.

(c) Часть (b), но не часть (a), верна и для $\mathrm{Emb}^\infty_S(M, N)$.

4. Теоремы из § 8.1 справедливы для C^r-изотопий (сформулируйте определение) и C^r-векторных полей с $1 \leqslant r < \infty$. Но некоторые из них теряют силу для C^ω-изотопий.

*5. Классы эквивалентности, отвечающие отношению «f изотопно g» на $\mathrm{Emb}^\infty(M, V)$, открыты по отношению к сильной топологии.

6. Пусть V — подмногообразие многообразия M. Под *k-изотопией подмногообразия* V ($k = 2, 3, \ldots$) понимается (C^∞-) отображение F: $V \times I^k \to M$, такое, что при каждом $t \in I^k$ отображение $F|V \times t$ является вложением. Аналогично определяется *k-диффеотопия* многообразия M. Если V компактно и содержится в $M - \partial M$, то всякая k-изотопия подмногообразия V продолжается до k-диффеотопии многообразия M с «компактным носителем».

7. (a) Пусть M — компактное n-мерное многообразие без края и f: $M \to \mathbb{R}^{n+1}$ — вложение. Если $L \in GL(n+1)$ имеет отрицательный определитель, то f не изотопно $L \circ f$. [Указание: рассмотрите степень *гауссова отоб-*

ражения $\gamma: M \to S^n$, где $\gamma(x)$ есть внешний единичный нормальный вектор в точке $x \in M$.]

(b) Включение $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в том и только том случае изотопно антиподальному вложению $x \longmapsto -x$, если n нечетно.

8. Предположим, что край ∂M n-мерного многообразия M компактен. Если M вкладывается в $\mathbb{R}^q$ с $q \geqslant 2n$, то всякое вложение $\partial M \to \mathbb{R}^q$ продолжается до вложения $M \to \mathbb{R}^q$.

*9. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ получается из прямой линии завязыванием на ней маленького узла:

(a) Существует изотопия F_t линии L в $\mathbb{R}^3$, такая, что $F_1(L)$ есть прямая линия R. [«Откатите» узел на бесконечность.]

(b) Такая изотопия не продолжается до диффеотопии пространства $\mathbb{R}^3$, поскольку $\mathbb{R}^3 - L$ и $\mathbb{R}^3 - R$ имеют разные фундаментальные группы.

10. Пусть $f, g: M \to V$ — гомотопные вложения. Если $1 + \dim V \geqslant 2(1 + \dim M)$, то f и g изотопны. [Пусть $F: M \times I \to V$ — гомотопия, связывающая f с g. Аппроксимируйте отображение $M \times I \to V \times I$, $(x, t) \longmapsto (F(x, t), t)$, вложением H. Можно написать $H(x, t) = (G(x, t), K(x, t)) \in V \times I$. Если при этом $H(x, i) = F(x, i)$ для $i = 0, 1$, то отображение $G: M \times I \to V$ есть изотопия, связывающая f с g.]

*11. Пусть M, V — некомпактные многообразия с $\partial M = \partial V = \varnothing$. Пусть, далее, $f, g: M \to V$ — вложения, соединяемые собственной гомотопией $M \times I \to V$. Если $1 + \dim V \geqslant 2(1 + \dim M)$, то f может быть переведено в g собственной диффеотопией.

***12. Можно ли ослабить размерностные ограничения в упр. 11?

13. Пусть M — компактное подмногообразие многообразия Q. Предположим, что $\partial Q = \varnothing$ и $\dim Q \geqslant 2 \dim M + 2$. Если M стягивается в Q в точку, то

(a) M может быть проинзотопировано в любое открытое подмножество многообразия Q;

(b) M содержится в координатной области.

14. Пусть M, N — непересекающиеся компактные подмногообразия сферы S^d. Предположим, что $\dim M + \dim N \leqslant d - 1$. Тогда M и N могут быть *геометрически разделены* изотопией. Это означает, что существует диффеотопия сферы S^d, переносящая M в верхнюю полусферу E^d_+, а N — в нижнюю полусферу E^d_-. [Предположите, что $d \geqslant 2 \dim M + 2$. Тогда упр. 13 позволяет произотопировать M в E^d_+. Соображения общего положения позволяют сделать эту изотопию не задевающей N. Постройте объемлющую диффеотопию разности $S^d - N$, имеющую компактный носитель, и т. д.]

*15. В этом упражнении приводится план геометрического доказательства так называемой «легкой части» одной из основных теорем гомотопической топологии — знаменитой *теоремы Фрейденталя о надстройке*: надстроечный гомоморфизм $\Sigma: \pi_m(S^q) \to \pi_{m+1}(S^{q+1})$ является эпиморфизмом при $m \leqslant 2q$ и мономорфизмом при $m \leqslant 2q - 1$. Здесь $\pi_m(S^q)$ есть множество гомотопических классов отображений $S^m \to S^q$ (групповая структура для нас несущественна). Отображение Σ определяется следующим образом.

Если задано $f\colon S^m \to S^q$, то $\Sigma f\colon S^{m+1} \to S^{q+1}$ по определению совпадает с f на экваторе, отображает северный и южный полюсы сферы S^{m+1} в соответствующие полюсы сферы S^{q+1} и каждую четверть большой окружности сферы S^{m+1}, соединяющую полюс с экватором, изометрически отображает на четверть большой окружности сферы S^{q+1}.

(a) Отображение $g\colon S^{m+1} \to S^{q+1}$ гомотопно надстройке, если

$$g\left(E_+^{m+1}\right) \subset E_+^{q+1} \text{ и } g\left(E_-^{m+1}\right) \subset E_-^{q+1}.$$

(b) Отображение $g\colon S^{m+1} \to S^{q+1}$ гомотопно надстройке, если

$$g^{-1}\text{ (северный полюс)} \subset \operatorname{Int} E_+^{m+1} \text{ и } g^{-1}\text{ (южный полюс)} \subset \operatorname{Int} E_-^{m+1}.$$

[Действительно, тогда $g\left(E_+^{m+1}\right) \subset S^{q+1}$ — (южный полюс), а последнее множество деформируется в E_+^{q+1}, и т. д.]

(c) Если $m \leqslant 2q$, то $\Sigma\colon \pi_m(S^q) \to \pi_{m+1}(S^{q+1})$ есть эпиморфизм. [Предположите, что полюсы сферы S^{q+1} являются регулярными значениями; воспользуйтесь частью (b) и упр. 14.]

(d) Если $m \leqslant 2q-1$, то $\Sigma\colon \pi_m(S^q) \to \pi_{m+1}(S^{q+1})$ есть мономорфизм. [Взяв за образец доказательство утверждения (c), покажите, что всякая гомотопия, соединяющая $\Sigma(f)$ с $\Sigma(g)$, гомотопна надстройке над гомотопией, соединяющей f с g.]

16. Заключение теоремы 1.5 верно и для изотопных вложений $V \to M$.

17. На рис. 1—5 изображены три поверхности в $\mathbb{R}^3$. Любая из них может быть переведена в любую другую диффеотопией пространства $\mathbb{R}^3$!

2. СКЛЕИВАНИЕ МНОГООБРАЗИЙ

Предположим, что заданы два n-мерных ∂-многообразия P и Q и диффеоморфизм $f\colon \partial P \to \partial Q$. Составное пространство $W = P \cup_f Q$ есть топологическое многообразие, содержащее копии многообразий P и Q. Многообразие W обладает дифференциальной структурой, продолжающей дифференциальные структуры многообразий P и Q. В этом параграфе мы покажем, что все такие дифференциальные структуры диффеоморфны.

Для удобства записи мы отождествляем P и Q с их копиями, лежащими в W. Положим $\partial P = \partial Q = V$. С помощью воротников многообразия V в P и Q мы можем построить гомеоморфизм окрестности $U \subset W$ многообразия V на $V \times \mathbb{R}$, переводящий $x \in V$ в $(x, 0)$ и диффеоморфно отображающий $U \cap P$ и $U \cap Q$ на $V \times [0, \infty)$ и $V \times (-\infty, 0]$ соответственно. Мы наделяем U дифференциальной структурой, индуцируемой этим гомеоморфизмом. Дифференциальная структура на W составляется из дифференциальных структур на $P - \partial P$, $Q - \partial Q$ и U.

Это построение дифференциальной структуры на W содержит в себе некоторый произвол. Следующий результат, называемый *теоремой о единственности склеивания*, показывает, что дифференциальный тип многообразия W от этого произвола не зависит. Эта теорема, в сущности, есть переформулировка теоремы 1.9.

2.1. Теорема. *Пусть* f: $\partial Q \to \partial P$ — *диффеоморфизм. Пусть, далее,* α, β — *две дифференциальные структуры на* $W = P \cup_f Q$, *каждая из которых индуцирует исходные структуры на* P *и* Q. *Тогда существует диффеоморфизм* h: $W_\alpha \to W_\beta$, *такой, что* $h | P = 1_P$.

Эта теорема отчасти неудовлетворительна в том отношении, что на $P \cup_f Q$ нет *канонической* дифференциальной структуры: есть только *класс диффеоморфных структур*. Дифференциальные топологи обычно игнорируют это обстоятельство и рассматривают $P \cup_f Q$ как корректно определенное гладкое многообразие. Поскольку это не приводит ни к каким неприятностям и позволяет избежать длинной писанины, мы будем следовать этому обыкновению.

Вот полезный критерий диффеоморфности двух склеенных многообразий.

2.2. Теорема. *Пусть* f_0: $\partial Q_0 \to \partial P$ *и* f_1: $\partial Q_1 \to \partial P$ — *диффеоморфизмы. Предположим, что диффеоморфизм* $f_1^{-1} f_0$: $\partial Q_0 \to \partial Q_1$ *продолжается до диффеоморфизма* h: $Q_0 \to Q_1$. *Тогда* $P \cup_{f_0} Q_0 \approx P \cup_{f_1} Q_1$.

Доказательство. Отображение

$$\psi: P \cup_{f_0} Q_0 \to P \cup_{f_1} Q_1$$

можно корректно определить формулами $\psi | P = 1_P$, $\psi | Q_0 = h$. После этого нужно применить теорему 1.9 и следующее за ней замечание. ∎

Выделим важный специальный случай:

2.3. Теорема. *Пусть* f, g: $\partial Q \to \partial P$ — *изотопные диффеоморфизмы. Тогда* $P \cup_f Q \approx P \cup_g Q$.

Доказательство. Композиция $g^{-1} f$ изотопна тождественному отображению многообразия ∂Q. Изотопия может быть распространена на воротник многообразия ∂Q и затем продолжена до диффеоморфизма многообразия Q, тождественного за пределами воротника. После этого остается применить теорему 2.2. ∎

3. ИЗОТОПИИ ДИСКОВ

Следующее полезное предложение утверждает, что, возможно, с точностью до ориентации имеется, по существу, только один способ вложения диска в связное многообразие.

3.1. Теорема. *Пусть* M — *связное* n*-многообразие и* f, g: $D^k \to M$ — *вложения* k*-диска в* $0 \leqslant k \leqslant n$. *Если* $k = n$ *и* M *ори-*

ентируемо, то мы дополнительно предполагаем, что или оба вложения f, g сохраняют ориентацию, или оба эти вложения обращают ориентацию. Тогда f и g изотопны. Более того, если $f(D^k) \cup g(D^k) \subset M - \partial M$, то изотопия осуществляется диффеотопией, имеющей компактный носитель.

Доказательство. Мы будем постоянно пользоваться тем фактом, что изотопность есть отношение эквивалентности на множестве вложений (см. упр. 1 к § 8.1).

Предположим сначала, что $\partial M = \varnothing$.

Поскольку многообразие M связно, вложения $f|0$, $g|0$: $0 \to M$ изотопны; в силу теоремы 1.3 изотопия между ними продолжается до диффеотопии. Поэтому мы можем считать, что $f(0) = g(0)$.

Пусть (φ, U) — карта многообразия M, покрывающая точку $f(0)$ и такая, что $\varphi(U, f(0)) = (\mathbb{R}^n, 0)$. Мы можем радиально произотопировать f и g во вложения в U; годится, например, изотопия

$$(x, t) \mapsto f((1 - t + t\varepsilon)x), \qquad x \in D^k, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Поэтому мы можем считать, что

$$f(D^k) \cup g(D^k) \subset U.$$

В случае $k = n$ мы можем дополнительно считать, что f и g оба сохраняют ориентации или оба обращают ориентации как вложения в ориентируемое многообразие U. В самом деле, если M ориентируемо, то это так по предположению; если же M неориентируемо, мы можем заменить в случае необходимости вложение f изотопным вложением, получающимся при изотопии f вдоль обращающей ориентацию петли с началом $f(0)$.

Достаточно показать, что изотопны вложения φf, φg: $D^k \to \mathbb{R}^n$. В случае $k = n$ мы можем добиться, надлежащим образом выбирая φ, чтобы оба эти вложения сохраняли ориентацию. Более того, при любом k мы можем считать также, что φf и φg *линейны*: всякое вложение h: $D^k \to \mathbb{R}^n$ с $h(0) = 0$ приводится к линейному стандартной изотопией (см. доказательство теоремы 4.5.3):

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} t^{-1}ht(x) & \text{при } 1 \geqslant t > 0, \\ Dh(0)x & \text{при } \quad t = 0. \end{cases}$$

Если φf и φg линейны, то при $k = n$ в силу наших предположений об ориентациях их определители положительны. Поэтому они являются сужениями отображений из одной компоненты группы $GL(n)$. Гладкий путь в $GL(n)$ и доставляет требуемую изотопию. Если $k < n$, то мы можем сначала продолжить φf и φg до линейных автоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$, имеющих положительные определители, а затем снова воспользоваться путем в $GL(n)$. Это завершает доказательство в случае $\partial M = \varnothing$.

Если $\partial M \neq \varnothing$, то мы сначала изотопируем f и g в $M - \partial M$.

переводя в $M - \partial M$ все многообразие M; последнее делается очевидным образом с помощью воротника. После этого мы применяем предыдущее построение к вложениям $f, g: D^k \to M - \partial M$. ∎

Рассуждения, сходные с доказательством теоремы 3.1, применимы к вложениям несвязных объединений дисков. Следующий результат, касающийся пар дисков, без труда обобщается на любое их количество.

3.2. Теорема. *Пусть M — связное n-многообразие без края. Предположим, что $f_i, g_i: D^n \to M$ $(i = 1, 2)$ — такие вложения, что*

$$f_1(D^n) \cap f_2(D^n) = \varnothing = g_1(D^n) \cap g_2(D^n).$$

Если M ориентируемо, то дополнительно предположим, что (при каждом i) f_i и g_i оба сохраняют ориентацию или оба ее обращают. Тогда существует диффеотопный тождественному диффеоморфизм $H: M \to M$, такой, что $Hf_i = g_i$ $(i = 1, 2)$.

Доказательство. В силу теоремы 3.1, вложения f_1 и g_1 переводятся одно в другое диффеотопией многообразия M. Таким образом, существует диффеотопный тождественному диффеоморфизм H_1 многообразия M, такой, что $H_1 f_1 = g_1$. Применим теорему 3.1 к вложениям

$$H_1 f_2,\ g_2: D^n \to M - g_1(D^n).$$

В силу этой теоремы существует диффеоморфизм H_2 многообразия $M - g_1(D^n)$, такой, что $H_2 H_1 f_2 = g_2$ и что H_2 соединяется с тождественным диффеоморфизмом изотопией с компактным носителем. Такую диффеотопию можно продолжить на все многообразие M, сделав ее неподвижной на $g_1(D^n)$. Поэтому H_2 продолжается до диффеоморфизма многообразия M, диффеотопного 1_M и такого, что $H_1 g_1 = g_1$. Для доказательства теоремы остается положить $H = H_2 H_1$. ∎

В заключение мы рассмотрим диффеотопии окружности.

3.3. Теорема. *Всякий диффеоморфизм окружности S^1 изотопен либо тождественному диффеоморфизму, либо комплексному сопряжению. В частности, всякий диффеоморфизм окружности S^1 продолжается до диффеоморфизма диска D^2.*

Доказательство. Пусть $f: S^1 \to S^1$ — диффеоморфизм. Предположим сначала, что f имеет степень 1. Совершив предварительную изотопию, мы можем добиться того, чтобы отображение f было тождественным на некотором открытом интервале $J \subset S^1$. Пусть $J' \subset S^1$ — такой открытый интервал, что $J \cup J' = S^1$. Отождествим J' с интервалом на вещественной оси. Изотопия, связывающая f с тождественным диффеоморфизмом, определяется тогда формулой

$$f_t(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in J, \\ tx + (1-t) f(x) & \text{при } x \in J'. \end{cases}$$

Теперь предположим, что $\deg f = -1$. Пусть δ: $S^1 \to S^1$ — комплексное сопряжение. Тогда $\deg (f\delta) = 1$, так что $f\delta$ изотопно тождественному диффеоморфизму. Если g_t — соответствующая изотопия, то $g_t\delta$ есть изотопия, соединяющая f с δ. ∎

3.4. Следствие. *Пусть M — компактное двумерное многообразие без края, допускающее функцию Морса только с двумя критическими точками. Тогда $M \approx S^2$.*

Доказательство. В силу теоремы 6.2.4 (и ее доказательства), M есть объединение двух двумерных дисков, склеенных по диффеоморфизму между их границами. В силу теоремы 3.3, можно считать, что этот диффеоморфизм изотопен тождественному. Нужный результат получается тогда из теоремы 2.3.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вложение f: $S^{k-1} \to M$ называется *незаузленным*, если f продолжается до вложения шара D^k.

(a) Вложение f в том и только том случае является незаузленным, если существуют карта φ: $U \to \mathbb{R}^n$ многообразия M и изотопия F вложения f, такие, что φF_1: $S^{k-1} \to \mathbb{R}^n$ есть стандартное вложение.

(b) Вложение f: $S^1 \to \mathbb{R}^3$ в том и только том случае является незаузленным, если существует диффеотопия пространства $\mathbb{R}^3$, имеющая компактный носитель и переводящая f в стандартное вложение.

(c) Пусть M — односвязное четырехмерное многообразие. Всякое вложение $S^1 \to M$ является незаузленным.

2. Ортогональная группа $O(n)$ является деформационным ретрактом пространства $\mathrm{Diff}^r_W(\mathbb{R}^n)$ $[1 \leqslant r \leqslant \infty]$.

3. Обозначим для ориентируемого многообразия M через $\mathrm{Diff}_+(M)$ группу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Пусть $G \subset \mathrm{Diff}_+(S^n)$ — образ группы $\mathrm{Diff}_+(D^{n+1})$ при гомоморфизме сужения.

(a) Если диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}_+(S^n)$ изотопен тождественному, то $f \in G$.

(b) Пусть $g, h \in \mathrm{Diff}_+(S^n)$. Тогда g, h изотопны диффеоморфизмам u, v, таким, что диффеоморфизм u является тождественным на верхней полусфере, а v — на нижней; из этого условия следует, что $uv = vu$.

(c) Факторгруппа $\Gamma_{n+1} = \mathrm{Diff}_+(S^n)/G$ абелева.

(d) $\Gamma_2 = 0$.

**(e) $\Gamma_3 = 0$. (Смейл [2], Манкрес [2].) [Указание. Пусть $f \in \mathrm{Diff}_+(S^2)$. Применив изотопию, можно сделать диффеоморфизм f тождественным на полусфере. Теперь достаточно показать, что диффеоморфизм g плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющий компактный носитель $K \subset \mathbb{R}^2$, связывается с тождественным диффеоморфизмом изотопией, составленной из диффеоморфизмов с тем же носителем. Единичные касательные векторы к образам горизонтальных прямых составляют векторное поле X на $\mathbb{R}^2$, постоянное вне K, и поле X гомотопно постоянному полю rel $(\mathbb{R}^2 - K)$. В силу теоремы Пуанкаре—Бендиксона, такая гомотопия порождает изотопию диффеоморфизма g.]

Замечание. Эти группы Γ_i важны для классификации дифференциальных структур. Множество классов диффеоморфных ориентированных дифференциальных структур на S^i образует группу по отношению к связному суммированию. Эта группа изоморфна Γ_i при всех i, кроме, может быть, 4. Известно, что при всех i группы Γ_i конечны. Первая нетривиальная из этих групп — группа $\Gamma_7 \approx \mathbb{Z}_{28}$. Интересное (и трудное!) доказательство равенства $\Gamma_4 = 0$, основанное на теории Морса, см. в статье Серфа [1].

Глава 9

ПОВЕРХНОСТИ

> Одной из центральных проблем, поставленных человеческим разумом, является проблема наследования формы.
>
> Р. Том, Структурная устойчивость и морфогенез, 1972

> Имея дело с формами, мы приобретаем здоровое неуважение к их авторитету ...
>
> М. Шуб, Ральфу, 1969

Поверхность есть двумерное многообразие. Классификация компактных поверхностей была «известна», в каком-то смысле, к концу девятнадцатого века. Мёбиус [1] и Жордан [1] предложили доказательства классификационной теоремы (для ориентируемых поверхностей в $\mathbb{R}^3$) в 1860-х годах. Статья Мёбиуса вполне интересна; его подход близок к используемому в этой главе подходу, основанному на теории Морса. Попытка Жордана интересна главным образом тем, что она показывает, как работа выдающегося математика может столетие спустя представляться совершенно бессмысленной.

Конечно, в то время были известны лишь очень немногие из топологических понятий. Как Жордан, так и Мёбиус считали две поверхности эквивалентными, если они могут быть «разбиты на бесконечно малые куски таким образом, что смежные куски одной соответствуют смежным кускам другой». Трудность доказать что-либо, исходя из такого определения, очевидна.

Главная идея классификации поверхностей восходит к Риману: резать поверхность вдоль замкнутых кривых и дуг, соединяющих граничные точки, до тех пор, пока всякий следующий разрез не будет разделять поверхность на два куска. Максимальное число разрезов, которые можно сделать так, чтобы поверхность не распалась, плюс 1 есть, согласно определению Римана, *связность*. Таким образом, сфера и диск имеют связность 1, или *односвязны*; кольцо имеет связность 2, тор связность 3 и т. д. Утверждение, которое пытались доказать Мёбиус и Жордан, заключалось в том, что две компактные связные поверхности в том и только том случае гомеоморфны, если они имеют одинаковую связность [1]).

[1]) Следует добавить: поверхности не имеют края или имеют диффеоморфные края. — *Прим. перев.*

Риман доказал, более или менее, тот весьма тонкий факт, что все максимальные множества неразделяющих разрезов имеют одинаковую мощность. Странно, что ни Риман и никто другой в девятнадцатом веке, за исключением, возможно, Мёбиуса, не осознал, по-видимому, необходимости доказывать, что связность компактной поверхности действительно *конечна*.

Если считать конечность связности установленной, классификация сводится к классификации односвязных поверхностей. Последняя представляет собой другой глубокий результат, на пути к доказательству которого девятнадцатому веку не удалось продвинуться особенно далеко.

Понятие связности хорошо согласуется с геометрической интуицией, но, быть может, по этой самой причине с ним трудно иметь дело. Наилучший подход к нему доставляет теория гомологий (см. упр. 17 к § 9.3).

Оказывается, что всякая компактная связная поверхность M диффеоморфна поверхности, которая строится следующим образом. Удалим ν 2-дисков из S^2; вклеим g цилиндров (если M ориентируема) или g лент Мёбиуса (если M неориентируема). Число g, называемое родом поверхности M, однозначно ею определяется. Класс поверхности M по отношению к диффеоморфизму определяется ее родом, ориентируемостью и числом компонент края.

Доказательство этой классификации организуется следующим образом. В § 9.1 строятся и анализируются модельные поверхности. Самая трудоемкая часть работы делается в § 9.2: здесь доказывается, что поверхность, на которой имеется допустимая функция Морса с двумя минимумами и одним седлом и без других критических точек, является диском. Доказательство допускает обобщение на высшие размерности. Классификация завершается в § 9.3 посредством индукции по числу седел у функции Морса на поверхности.

1. МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Вот способ построения поверхностей. Начнем с поверхности M и вложения

$$f\colon S^0 \times D^2 \to M - \partial M.$$

Образ вложения f есть пара непересекающихся дисков в M. Вырежем теперь внутренности этих дисков и вклеим цилиндр $D^1 \times S^1$ посредством сужения $f \mid S^0 \times S^1$. Это дает новую поверхность M':

$$M' = [M - \operatorname{Int} f(S^0 \times D^2)] \cup_f D^1 \times S^1.$$

Мы наделяем M' дифференциальной структурой, индуцирующей исходную структуру на $M - \operatorname{Int} f(S^0 \times D^2)$ и $D^1 \times S^1$. В силу теоремы 8.2.1 эта структура единственна с точностью до диффеоморфизма. Мы будем считать, что M' есть корректно определенное гладкое многообразие (мы договорились выше о праве на такую вольность), и будем писать $M' = M\ [f]$. Мы будем также говорить, что M' получается из M в результате *приклеивания ручки* или *перестройки по* f.

1.1. Теорема. *Пусть M — поверхность, и пусть f_0, f_1: $S^0 \times D^2 \to M - \partial M$ — изотопные вложения. Тогда $M\ [f_0] \approx M\ [f_1]$.*

Доказательство. В силу теоремы 8.1.3 о продолжении изотопии существует диффеоморфизм φ: $M \to M$, такой, что $\varphi f_0 = f_1$. Положим $M - \operatorname{Int} f_i\ (S^0 \times D^2) = Q_i\ \ (i = 0, 1)$ и

$$g_i = f_i^{-1} \,|\, \partial Q_i\colon\ \partial Q_i \to S^0 \times S^1.$$

Тогда

$$M\,[f_0] = (D^1 \times S^1) \cup_{g_0} Q_0,$$
$$M\,[f_1] = (D^1 \times S^1) \cup_{g_1} Q_1.$$

Диффеоморфизм $g_1^{-1}g_0$: $\partial Q_0 \to \partial Q_1$ продолжается до диффеоморфизма $\varphi: Q_0 \to Q_1$, и теорема следует из теоремы 8.2.2. ∎

1.2. Следствие. *Пусть M — связная поверхность. Если поверхность M неориентируема, то все поверхности, получающиеся из M в результате приклеивания ручки, диффеоморфны между собой.*

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 8.3.2. ∎

Ориентируем произведение $S^0 \times D^2$ в соответствии с ориентациями сомножителей. Это означает, что $1 \times D^2$ наделяется стандартной ориентацией диска D^2, а $(-1) \times D^2$ наделяется противоположной ориентацией. Эта ориентация произведения $S^0 \times D^2$ индуцирует ориентацию $S^0 \times S^1$ — ту же самую, которую $S^0 \times S^1$ получает как $\partial\ (D^1 \times S^1)$, где D^1 и S^1 ориентированы стандартным образом.

Пусть M — поверхность и f: $S^0 \times D^2 \to M$ — вложение. Если M может быть таким образом ориентировано, что f обращает ориентацию, то мы называем f *ориентируемым вложением*. В противном случае f называется *неориентируемым*. Следующее предложение очевидно.

1.3. Теорема. *$M\ [f]$ ориентируемо в том и только том случае, если ориентируемо f.*

Связное многообразие называется *обращаемым*, если оно ориентируемо и допускает диффеоморфизм, обращающий ориентацию.

1.4. Теорема. *Пусть M — связная поверхность и f, g: $S^0 \times D^2 \to M - \partial M$ — вложения. В любом из следующих случаев $M\,[f] \approx M\,[g]$:*

(a) *M неориентируемо;*

(b) *M ориентируемо и вложения f, g оба сохраняют ориентацию или оба ее обращают;*

(c) *M обращаемо и f, g ориентируемы.*

Доказательство. Часть (a) уже доказана (следствие 1.2). Часть (b) следует из теоремы 8.3.2. Для доказательства части (c) достаточно рассмотреть случай, когда M ориентировано таким образом, что f сохраняет ориентацию, а g ее обращает [остальные случаи покрываются частью (b)]. Пусть h: $M \to M$ — диффеоморфизм, обращающий ориентацию. Тогда $M\,[hg] \approx M\,[f]$ в силу (b). Покажем, что $M\,[hg] \approx M\,[g]$. Пусть ρ: $S^0 \times D^2 \to S^0 \times D^2$ — (обращающий ориентацию) диффеоморфизм $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Тогда $M\,[hg] \approx M\,[g\rho]$. Но, так как $\rho | S^0 \times S^1$ продолжается до диффеоморфизма $D^1 \times S^1 \to D^1 \times S^1$, из теоремы 8.2.2 следует, что $M\,[g\rho] \approx M\,[g]$. ∎

1.5. Лемма. *Пусть M — обращаемая поверхность и f: $S^0 \times D^2 \to M - \partial M$ — ориентируемое вложение. Тогда поверхность $M\,[f]$ обращаема.*

Доказательство. Пусть h: $M \to M$ — обращающий ориентацию диффеоморфизм, и пусть ρ: $S^0 \times D^2 \to S^0 \times D^2$ — обращающий ориентацию диффеоморфизм, такой, что сужение $\rho | S^0 \times S^1$ продолжается до диффеоморфизма $\bar{\rho}$ произведения $D^1 \times S^1$ (ср. доказательство теоремы 1.4).

В силу теоремы 8.3.2 существует диффеотопия многообразия M, связывающая диффеоморфизм h с таким диффеоморфизмом g: $M \to M$, что $gf = f\rho$. Заметим, что g, как и h, обращает ориентацию.

Рассмотрим отображение φ: $M\,[f] \to M\,[f]$, совпадающее с $\bar{\rho}$ на $D^1 \times S^1$ и с g на $M - \operatorname{Int} f\,(S^0 \times D^2)$. Очевидно, φ есть обращающий ориентацию гомеоморфизм. В силу единственности склеивания (теорема 8.2.1), φ может быть сделано диффеоморфизмом. ∎

Теперь мы введем важный класс поверхностей. Пусть $p \geqslant 0$ — целое число. Говорят, что ориентируемая поверхность M есть *поверхность рода p*, если M получается из S^2 в результате последовательного приклеивания p ручек. Это означает, что существует последовательность ориентируемых поверхностей $M_0, \ldots, M_p$ и ориентируемых вложений f_i: $S^0 \times D^2 \to M_{i-1}$, $i = 1, \ldots, p$ (при $p > 0$), такая, что

$$M_0 \approx S^2, \qquad M_i \approx M_{i-1}\,[f_i], \qquad M_p = M.$$

Очевидно, каждая поверхность M_i имеет при этом род i. Позже мы определим также неориентируемые поверхности рода p.

Индукция по p показывает, что *ориентируемая поверхность рода p компактна, связна и обращаема* (см. теоремы 1.3 и 1.5). *Она имеет эйлерову характеристику* $2-2p$ (см. упр. 8 к § 5.2).

Поэтому *ориентируемые поверхности различного рода не диффеоморфны между собой*. С другой стороны, индукция по p, основанная на теореме 1.4 (с), показывает, что *две ориентируемые поверхности одного и того же рода диффеоморфны*.

В § 9.3 мы докажем главную теорему теории поверхностей: всякая компактная связная ориентируемая поверхность без края имеет род.

Пусть нам даны теперь две связные поверхности M, N без края; их *связная сумма* W определяется следующим образом.

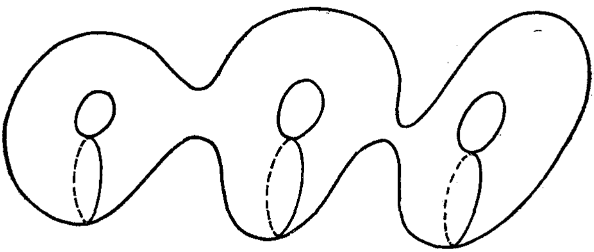


Рис. 9—1. Связная сумма 3 торов.

Возьмем объединение $M \cup N$ непересекающихся копий поверхностей M, N и фиксируем вложение f: $S^0 \times D^2 \to M \cup N$ с $f(1 \times D^2) \subset M$, $f(-1 \times D^2) \subset N$. После этого положим $W = (M \cup N)$ $[f]$.

С точностью до диффеоморфизма, W не зависит от f при условии, что одно из многообразий M, N неориентируемо или обращаемо. Следуя нашему уговору, мы считаем в этом случае W корректно определенным многоообразием и пишем $W = M \# N$.

Можно считать также, что $M \# N$ получается при склеивании разностей $M - \operatorname{Int} B$ и $N - \operatorname{Int} D$ по диффеоморфизму $\partial B \approx \partial D$, где $B \subset M$ и $D \subset N$ — диски.

Связная сумма многообразий высших размерностей может быть определена аналогично.

Очевидно, связная сумма $M_0 \# M_1$ ориентируема в том и только том случае, если ориентируемы обе поверхности M_0, M_1. Легко показать, что если M_i есть ориентируемая поверхность рода p_i, то $M_0 \# M_1$ есть ориентируемая поверхность рода $p_0 + p_1$. В частности, ориентируемая поверхность рода $p \geqslant 2$ есть связная сумма p торов (рис. 9—1).

Обратимся к моделям неориентируемых поверхностей. Пусть P — проективная плоскость. *Неориентируемая поверхность рода* $p \geqslant 1$ есть по определению поверхность, диффеоморфная связной сумме p экземпляров многообразия P. Такая поверхность неориентируема.

Лента Мёбиуса B есть поверхность, определяемая как фактор-пространство цилиндра $S^1 \times [-1, 1]$ по отношению $(x, y) \sim (-x, -y)$. Это простейшая неориентируемая поверхность. Заметим, что $\partial B \approx S^1$. Всякая поверхность, диффеоморфная B, также называется лентой Мёбиуса.

Если M есть произвольная поверхность без края, то

$$M \# P \approx (M - \operatorname{Int} D) \cup_f B,$$

где $D \subset M$ — диск и f: $\partial B \to \partial M$ — произвольный диффеоморфизм. Это следует из того факта, что проективная плоскость может быть получена в результате склеивания ленты Мёбиуса B и диска D по их краю.

Образ ленты B в $M \# P$ называется также *скрещенным колпаком*; это название делается ясным, если представить себе процесс приклеивания. Неориентируемая поверхность рода p называется также сферой с p приклеенными скрещенными колпаками.

Несложное вычисление показывает, что эйлерова характеристика неориентируемой поверхности рода p равна $2 - p$.

1.6. Теорема. *Пусть M, N — неориентируемые поверхности родов p, q соответственно. Тогда $M \approx N$ в том и только том случае, если $p = q$.*

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

Неориентируемая поверхность рода 2 называется *бутылкой Клейна*. Она может быть получена из сферы в результате приклеивания ручки по любому неориентируемому вложению $S^0 \times D^2 \to S^2$.

Пусть M — связная неориентируемая поверхность без края. Пусть, далее, f: $S^0 \times D^2 \to S^2$ — вложение; рассмотрим поверхность $M\ [f]$. Можно считать, что образ вложения f содержится во внутренности малого диска $D \subset M$. Таким образом, $M\ [f]$ получается в результате склеивания по краю поверхностей $M - \operatorname{Int} D$ и $D\ [f]$. Если мы отождествим D с полусферой сферы S^2 и в соответствии с этим интерпретируем f как вложение g: $S^0 \times D^2 \to S^2$, мы увидим, что $M\ [f] \approx M \# S^2\ [g]$. Но $S^2\ [g]$ есть тор, если g ориентируемо, и бутылка Клейна в противном случае; ориентируемость же вложения g равносильна ориентируемости вложения f: $S^0 \times D^2 \to D$. Но так как поверхность M неориентируема, мы можем произотопировать $f\ (1 \times D^2)$ вдоль обращающей ориентацию петли. В результате мы получим новое вложение f_1: $S^0 \times D^2 \to D$, которое изотопно f в M и которое ориентируемо в том и только том случае, если f неориентируемо. Таким образом,

$$M\,[f] \approx M \# S^2\,[f] \approx M \# S^2\,[f_1],$$

где $S^2[f]$ есть тор, а $S^2[f_1]$ есть бутылка Клейна. Так как бутылка Клейна есть сфера с двумя скрещенными колпаками, этим доказана

1.7. Теорема. *Приклеивание ручки к связной неориентируемой поверхности равносильно приклеиванию двух скрещенных колпаков. Следовательно, приклеивание ручки к неориентируемой поверхности рода p превращает ее в неориентируемую поверхность рода $p + 2$.*

Вот двойственный результат:

1.8. Теорема. *Пусть M есть ориентируемая поверхность рода p. Приклеивание к M скрещенного колпака превращает M в неориентируемую поверхность рода $2p + 1$.*

Доказательство. При $p = 0$ это очевидно. Если $p > 0$, представим M как связную сумму p торов. Тогда $M \# P$ есть то же самое, что P с p ручками, и мы можем применить предыдущую теорему. ▮

Наконец, модели ∂-поверхностей мы строим, просто вырезая из ориентируемой или неориентируемой поверхности рода g объединение b непересекающихся дисков. Получающаяся поверхность называется ориентируемой или неориентируемой ∂-поверхностью рода g с b краевыми компонентами. В силу теорем об изотопии дисков (см. § 8.3), такая поверхность определяется с точностью до диффеоморфизма исходной поверхностью и числом дисков.

Под *модельной поверхностью* мы понимаем поверхность или ∂-поверхность рода g, ориентируемую или неориентируемую. В § 9.3 мы покажем, что всякая компактная связная поверхность диффеоморфна модельной поверхности единственного типа.

Ясно, что две модельные поверхности диффеоморфны в том и только том случае, если они (а) имеют одинаковый род и одинаковое число краевых компонент и (b) обе ориентируемы или обе неориентируемы.

Если модельная поверхность M имеет род g и ∂M имеет b компонент, то эйлерова характеристика χ этой поверхности равна $2 - 2g - b$, когда поверхность M ориентируема, и $\chi = 2 - g - b$, когда поверхность M неориентируема. Этим доказана

1.9. Теорема. *Две модельные поверхности диффеоморфны в том и только том случае, если они имеют одинаковый род, одинаковую эйлерову характеристику и одинаковое число краевых компонент.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ориентируемая поверхность рода p содержит p непересекающихся окружностей, объединение которых не разделяет поверхность.

2. Неориентируемая поверхность рода p содержит p непересекающихся окружностей, каждая из которых обращает ориентацию.

3. Пусть C — окружность на поверхности M без края, которая не разделяет M.

(a) Если C обращает ориентацию, то C обладает окрестностью, диффеоморфной ленте Мёбиуса, и существует поверхность N, такая, что $M \approx N \# P$.

(b) Если поверхность M ориентируема, то существует окружность $C' \subset M$, пересекающая C трансверсально и в единственной точке[1]). Более того:

(c) $C \cup C'$ обладает в M окрестностью, диффеоморфной $T - \operatorname{Int} D$, где D — диск в торе T. Следовательно, $M \approx W \# T$ для некоторой поверхности W.

4. (a) Всякая ориентируемая поверхность рода p является краем компактного 3-многообразия.

(b) Неориентируемая поверхность рода p является краем компактного 3-многообразия в том и только том случае, если p четно. [Воспользуйтесь упр. 7 к § 5.2.]

5. Комплексная проективная плоскость необращаема. [См. упр. 15 к § 5.2.]

***6. Всякое ли ориентируемое 3-многообразие обращаемо?

7. Пусть M есть n-многообразие без края. Тогда $M \approx M \# S^n$.

8. Пусть $f: S^1 \to M$ — петля на поверхности M. Тогда f в том и только том случае сохраняет ориентацию (в смысле § 4.4), если $\#_2(f, f) = 0$ (определение этого индекса пересечения mod 2 см. в упр. 4 к § 5.2).

2. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДИСКА

Следующий результат является решающим для классификации поверхностей.

2.1. Теорема. *Пусть $f: M \to \mathbb{R}$ — допустимая функция Морса на компактной связной поверхности M. Предположим, что f имеет в точности 3 критические точки и что эти точки имеют тип* 0, 0, 1. *Тогда $M \approx D^2$.*

Общий план доказательства таков. Сначала мы построим функцию $g: N \to \mathbb{R}$ с теми же свойствами, что и f, на поверхности N, относительно которой нам уже будет известно, что она диффеоморфна D^2. Затем мы построим гомеоморфизм между M и N с помощью линий уровня и градиентных траекторий двух функций Морса. Наконец, этот гомеоморфизм будет сглажен и превращен в диффеоморфизм.

Прежде чем приступать к доказательству, мы обсудим один метод продолжения диффеоморфизмов.

Пусть M_i $(i = 0, 1)$ — полные римановы многообразия и f_i: $M_i \to \mathbb{R}$ — отображение. Для $x \in M_i$ обозначим через $\Lambda_i(x)$ максимальную интегральную кривую векторного поля $\operatorname{grad} f_i$ на M_i, проходящую через x. Пусть, далее, $U_i \subset M_i$ — открытые множества и $G: U_0 \to U_1$ — диффеоморфизм со следующими свойствами: для каждого $x \in U_0$

(1) $$f_1(G(x)) = f_0(x)$$

(2) $$\text{и } G(U_0 \cap \Lambda_0(x)) = U_1 \cap \Lambda_1 G(x).$$

[1]) Это верно, конечно, и для неориентируемой поверхности. — *Прим. перев.*

Мы скажем в этом случае, что G *сохраняет поверхности уровня и градиентные траектории.*

Пусть $U_i^* \subset M_i$ — *насыщение* множества U_i относительно потока поля $\operatorname{grad} f_i$, т. е.

$$U_i^* = \bigcup_{x \in U_i} \Lambda_i(x).$$

2.2. Лемма. *Предположим, в дополнение к сказанному, что для каждого* $x \in U_0$

(a) $f_0(\Lambda_0(x)) = f_1(\Lambda_1(f(x)))$;

(b) *множество* $\Lambda_0(x) \cap U_0$ *связно.*

Тогда G *продолжается до единственного диффеоморфизма* $G\colon U_0^* \to U_1^*$, *удовлетворяющего требованиям* (1) *и* (2).

Доказательство. Всякая критическая точка функции f_0, лежащая в U_0^*, лежит также в U_0; поэтому G уже определено в окрестности таких точек. Если $x \in U_0^* - U_0$, то $\Lambda_0(x)$ содержит хотя бы одну точку $y \in U_0$. Положим

$$G(x) = \Lambda_1(G(y)) \cap f_1^{-1}(f_0(x)).$$

Пересечение непусто в силу (a); оно содержит только одну точку, поскольку функция f_1 монотонна на градиентных траекториях; наконец, $G(x)$ не зависит от y в силу (b).

Остается показать, что отображение G принадлежит классу C^∞. Пусть $x \in U_0^*$; положим $G(x) = y$. Тогда из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} & \\ \Lambda_0(x) \arrow[ur, "f_0"] \arrow[rr, "G"'] & & \Lambda_1(y) \arrow[ul, "f_1"'] \end{tikzcd}$$

следует, что

$$G \mid \Lambda_0(x) = [f_1 \mid \Lambda_1(y)]^{-1} \circ [f_0 \mid \Lambda_0(x)].$$

Таким образом, $G|\Lambda_0(x)$ принадлежит классу C^∞. Что все отображение G принадлежит классу C^∞, следует из того, что классу C^∞ принадлежат градиентные потоки. ∎

Заметим, что лемма 2.2 верна также в ситуации, когда U_0 и U_1 — открытые подмножества поверхностей уровня (условие (b) в этом случае тривиально). Доказательство остается прежним.

Рассмотрим теперь модельную функцию

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$g(x,\ y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + y^2$$

$$= \int_0^x t(t+1)(t-2)\,dt + y^2.$$

Критические точки функции g — точки $(0,\ 0)$, $(-1,\ 0)$, $(2{,}0)$. Они невырожденны и имеют тип 1, 0, 0 соответственно. Заметим, что соответствующие критические значения различны.

2.3. Лемма. *При $c \geqslant 0$ множество $g^{-1}(c)$ связно.*

Доказательство. Заметим, что функция g является собственным отображением, так что множество $g^{-1}(c)$ компактно. Одной из компонент критического уровня $g^{-1}(0)$ является восьмерка, и каждая из двух петель этой восьмерки заключает в себе один из двух (локальных) минимумов функции g. Если бы множество $g^{-1}(0)$ имело другие компоненты, то каждая из них была бы окружностью, охватывающей другой минимум, что невозможно. Поэтому множество $g^{-1}(0)$ связно. Если $c > 0$, то каждая компонента множества $g^{-1}(c)$ есть окружность, охватывающая минимум. Но одна из этих компонент охватывает $g^{-1}(0)$ и потому охватывает оба минимума. Следовательно, $g^{-1}(c)$ имеет только одну компоненту. ∎

2.4. Лемма. *Если $\xi > 0$, то $g^{-1}(-\infty,\ \xi] \approx D^2$.*

Доказательство. В силу теоремы 6.2.2 о регулярном интервале, нам достаточно доказать это для какого-нибудь большого ξ. Мы покажем, что если ξ велико, то всякий луч, исходящий из точки $(0,\ 0)$, трансверсально пересекает кривую $g^{-1}(\xi)$. Поскольку множество $g^{-1}(\xi)$ связно, из этого вытекает, что $g^{-1}(-\infty,\ \xi]$ есть звездное множество; последнее же влечет за собой утверждение леммы.

Так как вектор $\operatorname{grad} f$ перпендикулярен к $g^{-1}(\xi)$, достаточно показать, что если $|x|^2 + |y|^2$ достаточно велико, то

$$\langle \operatorname{grad} f(x,\ y),\ (x,\ y)\rangle \neq 0.$$

Но

$$\langle \operatorname{grad} f(x,\ y),\ (x,\ y)\rangle = \langle (x^3 - x^2 - 2x,\ 2y),\ (x,\ y)\rangle$$

$$= x^2(x^2 - x - 2) + 2y^2,$$

а последняя сумма положительна, если $x > 2$ или $y > 3$. ∎

Рассмотрим теперь градиентный поток Φ_t функции g, заданный системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - x^2 - 2x,$$
$$\frac{dy}{dt} = 2y.$$

Эту систему легко решить (см. рис. 9—2). Ясно, что обе координатные оси относительно этого потока инвариантны. Стационарные точки потока — это, очевидно, критические точки функции g. Поток имеет два источника, $(-1, 0)$ и $(2, 0)$, и одно седло, $(0, 0)$. Траектории потока ортогональны линиям уровня $g = \text{const}$.

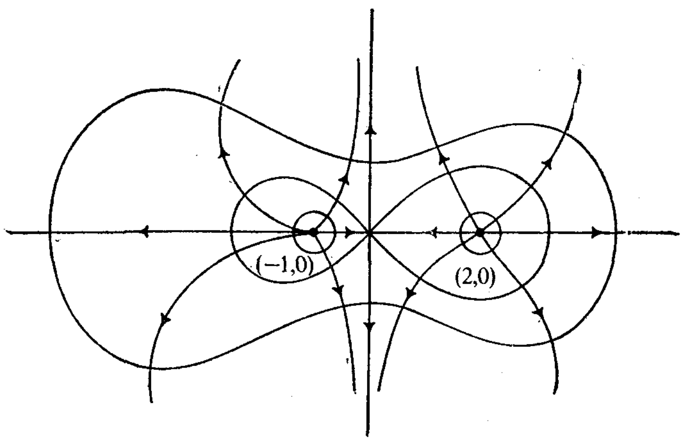


Рис. 9—2. Уровни и градиенты.

Если $y \neq 0$ или если $y = 0$ и $x < -1$ или $x > 2$, то $|\Phi_t(x, y)| \to \infty$ при $t \to \infty$. Если $-1 \leqslant x < 0$ или $0 < x \leqslant 2$, то $\Phi_t(x, 0) \to (0, 0)$ при $t \to \infty$.

Если $t \to -\infty$, то $\Phi_t(x, y) \to (-1, 0)$ при $x < 0$, $\Phi_t(x, y) \to (0, 0)$ при $x = 0$ и $\Phi_t(x, y) \to (2, 0)$ при $x > 0$.

Пусть теперь f: $M \to \mathbb{R}$ — функция, о которой идет речь в теореме 2.1. Пусть $a, b, c \in M$ — три критические точки функции f, причем a и c — локальные минимумы, а b — седло. Надлежащим образом изменив в случае необходимости функцию f вблизи a или c, мы можем считать, что $f(b) > f(a) > f(c)$.

Пусть λ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такой диффеоморфизм, что

$$\lambda(f(a)) = -\frac{11}{12} = g(-1, 0),$$
$$\lambda(f(b)) = 0 = g(0, 0),$$
$$\lambda(f(c)) = -\frac{8}{3} = g(2, 0).$$

Композиция $\lambda \circ f: M \to \mathbb{R}$ есть функция Морса, обладающая всеми свойствами, перечисленными в теореме 2.1. Поэтому мы можем считать, что $f(a) = g(-1, 0)$, $f(b) = g(0, 0)$, $f(c) = g(2, 0)$.

Пусть $\xi = f(\partial M) > 0$. Тогда ξ есть наибольшее значение функции f и $f^{-1}(\xi) = \partial M$.

Покажем сначала, что ∂M связно. В силу теоремы 6.2.2 о регулярном интервале, достаточно показать, что при некотором ε, $0 < \varepsilon < \xi$, связно $f^{-1}(\varepsilon)$, поскольку $\partial M \approx f^{-1}(\varepsilon)$.

Снабдим M римановой метрикой, индуцированной вблизи критических точек морсовскими картами. Пусть F_t — поток векторного поля $-\operatorname{grad} f$; тогда отображение $F_t: M \to M$ определено при всех $t \geqslant 0$. Для каждого $x \in M$ предел $\bar{x} = \lim\limits_{t \to \infty} F_t(x)$ есть одна из трех критических точек. При этом множества

$$W_a = \{x \in M \mid \bar{x} = a\},$$
$$W_c = \{x \in M \mid \bar{x} = c\}$$

открыты и не пересекаются.

Как это непосредственно видно на морсовской карте в окрестности седла b, имеются только две непостоянные траектории, стремящиеся к b; они пересекают $f^{-1}(\varepsilon)$ в двух точках, скажем q_1 и q_2. Более того, множество $\{q_1, q_2\}$ является общей границей в $f^{-1}(\varepsilon)$ пересечений $f^{-1}(\varepsilon) \cap W_a$ и $f^{-1}(\varepsilon) \cap W_c$. Никакая компонента множества $f^{-1}(\varepsilon)$ не может целиком содержаться в W_a, так как в этом случае W_a было бы компонентой множества M, а это противоречило бы связности M. Подобное верно и для W_c. Следовательно, каждая компонента множества $f^{-1}(\varepsilon)$ должна разделяться подмножеством множества $\{q_1, q_2\}$. Но разделяющее подмножество не может быть одноточечным, и поэтому каждая компонента должна содержать как q_1, так и q_2. Таким образом, имеется всего одна компонента.

Пусть теперь $\varphi: U \to \mathbb{R}^2$ и $\psi: V \to \mathbb{R}^2$ — морсовские карты для функций f и g в окрестностях точек b и $(0, 0)$. Можно считать, что $\varphi(U) = \psi(V)$. Положим

$$H = \varphi^{-1}\psi: V \to M.$$

Очевидно, H диффеоморфно отображает V на U, сохраняя поверхности уровня (т. е. $gH = f$). Можно выбрать V таким образом, что H по отношению к некоторой римановой метрике на M будет изометрией (при этом V наследует от $\mathbb{R}^2$ стандартную метрику). В таком случае H сохраняет также градиентные траектории.

Можно считать также, что V пересекает каждую градиентную траекторию функции g по связному множеству; можно положить, например, $V = \operatorname{Int} B_\delta$ для малого $\delta > 0$. Тогда, в силу леммы 2.2, H продолжается до диффеоморфизма $H: V^* \to U^*$ между насыщениями множеств V и U, сохраняющего линии уровня и градиентные траектории.

Далее, при надлежащем выборе ψ этот диффеоморфизм H обладает следующим свойством: при $t \to \infty$ grad f-траектория точки $H(p)$ стремится к a или к c, если grad g-траектория точки $p \in V^*$ стремится соответственно к $(-1, 0)$ или к $(2, 0)$.

Фиксируем вещественное число α, такое, что

$$g(2, 0) < g(-1, 0) < \alpha < g(0, 0) = 0.$$

Пусть D и D' — компоненты точек $(-1,0)$ и $(2,0)$ соответственно в области $g^{-1}(-\infty, \alpha] \subset \mathbb{R}^2$. В силу леммы Морса, D и D' — диски. Заметим, что ∂D и $\partial D'$ — компоненты линий уровня.

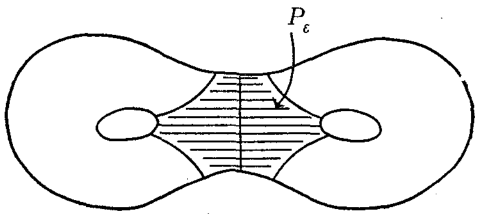


Рис. 9—3.

Пусть, далее, $\varepsilon > 0$ — очень маленькое число, и пусть $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат $|x| \leqslant \varepsilon$, $|y| \leqslant \varepsilon$ и B_ε^* — насыщение множества B_ε по отношению к градиентному потоку функции g.

Положим

$$P_\varepsilon = [B_\varepsilon^* - \operatorname{Int}(D \cup D')] \cap g^{-1}(-\infty, \varepsilon].$$

(См. рис. 9—3.) Если ε достаточно мало, то $B_\varepsilon \subset V$ и $P_\varepsilon \subset V^*$; кроме того, множества

$$A = P_\varepsilon \cap D = P_\varepsilon \cap \partial D,$$
$$A' = P_\varepsilon \cap D' = P_\varepsilon \cap \partial D'$$

— (компактные) дуги. Зафиксируем такое ε.

Пусть Γ и Γ' — компоненты точек a и c в множестве $f^{-1}(\infty, \alpha]$. Тогда Γ и Γ' — непересекающиеся диски.

Диффеоморфизм $H\colon V^* \to U^*$ вкладывает дуги A, A' в окружности $\partial\Gamma$, $\partial\Gamma'$ соответственно. *Существуют диффеоморфизмы* $D \approx \Gamma$, $D' \approx \Gamma'$, *совпадающие* с H *на* A, A'. Чтобы убедиться в этом, отождествим посредством некоторых диффеоморфизмов D и Γ с D^2 таким образом, чтобы сужение $H|A$ превратилось в сохраняющее ориентацию вложение H_0 дуги $B \subset \partial D^2$ в ∂D^2. В силу теорем об изотопии дисков, H_0 изотопно включению B в D^2, и в силу теоремы о продолжении изотопии, H_0 продолжается до диффеоморфизма диска D^2. Следовательно, H продолжается до диффеоморфизма $D \approx \Gamma$, и подобное верно для D' и Γ'.

Итак, мы построили диффеоморфизм

$$G\colon D \cup D' \to \Gamma \cup \Gamma',$$
$$G(D) = \Gamma, \quad G(D') = \Gamma'.$$

Продолжим теперь сужение

$$G\colon \partial D \cup \partial D' \to \partial\Gamma \cup \partial\Gamma'$$

до диффеоморфизма между насыщениями

$$F\colon (\partial D \cup \partial D')^* \to (\partial\Gamma \cup \partial\Gamma')^*,$$

который сохраняет линии уровня и градиентные траектории; это можно сделать в силу леммы 2.2 и замечания после ее доказательства.

Заметим, что отображения F и H совпадают на

$$(\partial D \cup \partial D')^* \cap P_\varepsilon,$$

поскольку они совпадают на $A \cup A'$ и оба сохраняют линии уровня и градиентные траектории.

Определим отображение

$$K\colon g^{-1}(-\infty, \xi] \to M$$

формулой

$$K = \begin{cases} G & \text{на } D \cup D', \\ H & \text{на } P_\varepsilon, \\ F & \text{в остальных местах.} \end{cases}$$

Это отображение непрерывно, взаимно однозначно и является отображением на. Следовательно, K есть гомеоморфизм. Более того, K является диффеоморфизмом на $D \cup D'$ и на $g^{-1}(-\infty, \xi] - \operatorname{Int}(D \cup D')$.

На основании теоремы сглаживания 8.1.9 мы заключаем, что $N \approx M$. Следовательно, $N \approx D^2$ в силу леммы 2.4; доказательство теоремы 2.1 закончено. ▌

В доказательстве теоремы 2.1 мы не пользовались теоремами 8.3.3 и 8.3.4 или какими-либо другими специальными свойствами многообразий размерности 1 или 2. Очевидные изменения, затрагивающие только обозначения, превращают предыдущее рассуждение в доказательство следующего обобщения теоремы 2.1.

2.5. Теорема. *Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — допустимая функция Морса на компактном связном n-многообразии M. Предположим, что f имеет в точности 3 критические точки и что эти точки имеют типы* 0, 0, 1. *Тогда $M \approx D^n$.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Небольшая модификация доказательства теоремы 2.1 превращает его в доказательство следующего утверждения. Пусть $f: M \to \mathbb{R}$, $g: D^2 \to \mathbb{R}$ — допустимые функции Морса, имеющие по три критические точки индексов 0, 0, 1. Предположим, что f и g принимают в соответствующих критических точках одинаковые значения и что $f(\partial M) = g(\partial D^2)$. Тогда существует гомеоморфизм $h: D^2 \to M$, такой, что $fh = g$. Более того, M обладает римановой метрикой, по отношению к которой h переводит градиентные траектории функции g в градиентные траектории функции f.

2. Пусть $a \lessdot 0 \lessdot b$. Рассмотрим полиномиальное отображение

$$P_{a,b}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R},$$

$$P_{a,b}(x, y) = \int_0^x s(s-a)(s-b)\,ds + |y|^2.$$

(a) $P_{a,b}$ есть функция Морса, имеющая локальные минимумы в точках $(a, 0)$ и $(b, 0)$ и седло типа 1 в точке $(0, 0)$ и не имеющая других критических точек.

(b) $P_{a,b}(a, 0) \neq P_{a,b}(b, 0)$ в том и только том случае, если $a \neq -b$.

(c) Пусть α принадлежит образу функции $P_{a,b}$. Множество $P_{a,b}^{-1}(-\infty, \alpha]$ связно в том и только том случае, если $\alpha \geqslant 0$.

(d) $P_{a,b}^{-1}(-\infty, \alpha] \approx D^k$, если $\alpha \gtrdot 0$.

3. Пусть M — компактная связная поверхность без края, которая допускает функцию Морса, имеющую ровно четыре критические точки, в точности одна из которых является седлом. Тогда $M \approx S^2$.

4. Пусть $f: M \to \mathbb{R}$ — функция Морса на связном компактном римановом многообразии без края. Предположим, что вблизи критических точек риманова метрика определяется с помощью морсовских карт. Тогда если f имеет более чем один локальный минимум, то существуют два локальных минимума, a и b, и критическая точка p типа 1 со следующим свойством: одна ветвь нестабильного многообразия в точке p (для поля grad f) стремится к a, а другая ветвь стремится к b.

5. [Смейл.] Пусть M — компактное связное многообразие. Если $\partial M = \varnothing$, то M обладает функцией Морса с только одним минимумом и только одним максимумом. [Воспользуйтесь упражнением 4 и теоремой 2.5.]

3. КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Мы начинаем с исследования окрестностей критического уровня допустимой функции Морса f на компактной связной поверхности M. Пусть $p \in M$ — седло (критическая точка индекса 1). Предположим, что $f(p) = 0$ и что $\varepsilon > 0$ таково, что p есть единственная критическая точка в $N = f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$. Предположим также, что N связно, и положим

$$C_- = f^{-1}(-\varepsilon),$$
$$C_0 = f^{-1}(0),$$
$$C_+ = f^{-1}(\varepsilon).$$

Тогда C_- и C_+ — компактные 1-многообразия с краем и $C_- \cup C_+ = \partial N$. Поскольку N связно, C_0 также должно быть связным. Следовательно, C_0 есть восьмерка.

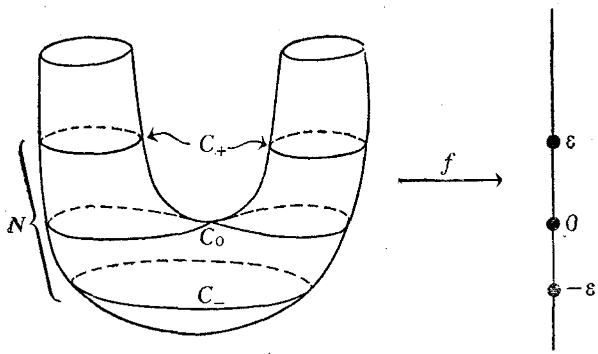


Рис. 9—4.

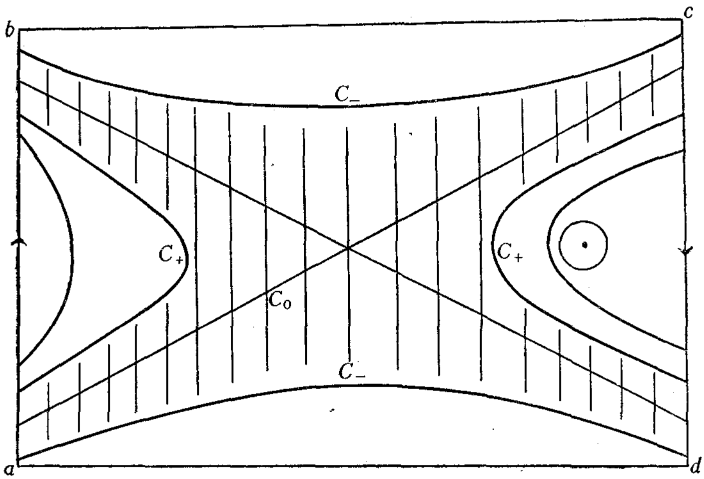


Рис. 9—5. Отрезок ab отождествляется с cd. Множество N заштриховано.

Вот два примера. В каждом из них f имеет в M одно седло и один минимум.

(1) M есть U-образный цилиндр в $\mathbb{R}^3$, и f есть функция высоты, как показано на рис. 9—4.

(2) M есть лента Мёбиуса, и линии уровня функции f расположены, как показано на рис. 9—5.

Заметим, что пример (1) также получается из рис. 9—5, только отрезки ab и cd следует склеить без переворачивания, чтобы получился цилиндр.

В действительности с точностью до диффеоморфизма это единственные примеры такого N. Этот факт нам не потребуется, и мы ограничимся доказательством следующего извлечения из него.

3.1. Лемма. *Пусть f и N обозначают то же, что выше. Тогда либо* (a) *N ориентируемо и ∂N имеет три компоненты, либо* (b) *N неориентируемо и ∂N имеет две компоненты.*

Доказательство. Как это видно из устройства морсовской карты в окрестности точки p, эта точка обладает в N X-образной окрестностью. Обозначим четыре ветви этого X в соответствии с квадрантами, в которых они лежат (рис. 9—6). Стрелки на рис. 9—6 изображают grad f. Ключевой вопрос: как четыре ветви I, II, III, IV соединяются в C_0? Предположим, что I соединяется с IV. Получающаяся петля λ с началом p *сохраняет ориентацию*, как показывает рассмотрение ориентации, опредяелемой касательным вектором к петле и вектором grad f. (Нужно немного сдвинуть петлю с точки p, чтобы сделать ее гладко вложенной; см. рис. 9—7.) Ясно, что в этом случае ветвь II должна соединяться с III. Заметим, что C_+ связно, так как в противном случае мы могли бы обойти петлю, следуя верхней части C_+, и некоторая градиентная траектория должна была бы дважды пересекать C_+. А это невозможно, поскольку $C_+ = f^{-1}(\varepsilon)$. (См. рис. 9—8.)

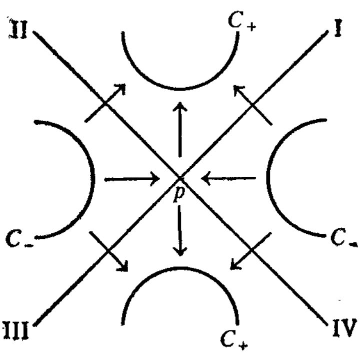


Рис. 9—6. Уровни и градиенты вблизи седла.

По аналогичным причинам правая и левая ветви C_- должны замыкаться каждая на себя, образуя две компоненты.

Если I соединяется не с IV, а с II, то ситуация аналогична предыдущей, только теперь C_- связно, а C_+ состоит из двух компонент.

Предположим теперь, что I соединяется с III. Получающаяся петля обращает ориентацию (рис. 9—9). В этом случае две ветви C_+ соединяются между собой и C_+ связно. Подобным же образом, II соединяется с IV и C_- связно. ∎

Пусть $B_1, \ldots, B_k \subset D^2 - \partial D^2$ — непересекающиеся вложенные диски. Положим $H_k = D^2 - \bigcup \operatorname{Int} B_i$ и $H_0 = D^2$.

Под *диском с k дырами* подразумевается поверхность, диффеоморфная H_k, т. е. ориентируемая модельная поверхность рода 0 с $k + 1$ краевыми окружностями. Любые две такие поверхности (с одним и тем же k) диффеоморфны. Поскольку эйлерова характеристика поверхности H_k равна $1-k$, поверхность H_k не диффеоморфна H_l при $k \neq l$. Заметим, что $H_1 \approx S^1 \times I$.

Вернемся к ситуации леммы 3.1.

3.2. Лемма. *Пусть N — поверхность из леммы* 3.1 (a). *Тогда N есть диск с двумя дырами.*

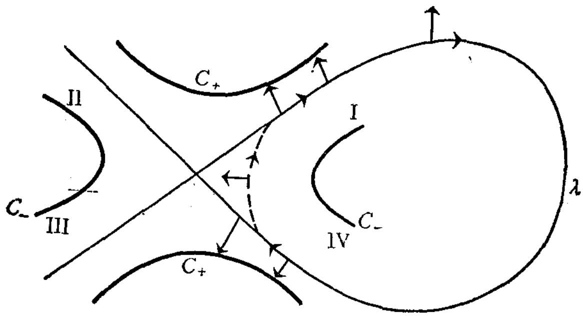


Рис. 9—7. Петля λ сохраняет ориентацию.

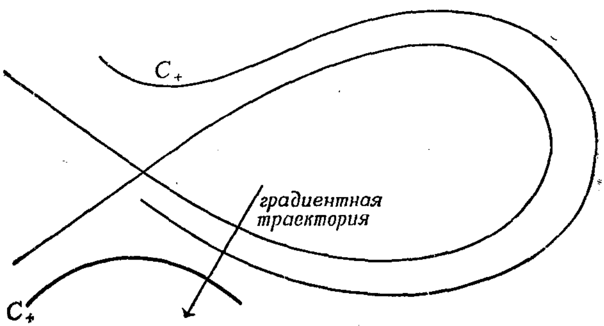


Рис. 9—8. Невозможно, потому что $C_+ = f^{-1}(\varepsilon)$.

Доказательство. Можно считать, что C_- имеет две компоненты, а C_+ имеет одну компоненту. Приклеим к N вдоль каждой компоненты C_- по диску; получится новое многообразие V. Рассмотрим отображение $g: V \to \mathbb{R}$, совпадающее с f на N и определяемое на каждом диске как $x^2 + y^2 - 1 - \varepsilon$ (диски отождествляются с D^2). Дифференциальная структура на V может быть выбрана таким образом, что функция g принадлежит классу C^∞. (Достаточно воспользоваться воротниками, определяемыми линиями уровня и градиентными траекториями.) Тогда g есть допустимая функция Морса на V, имеющая седло и два минимума. В силу теоремы 2.1, $V \approx D^2$. Следовательно, $N \approx H_2$. ∎

Поскольку седло есть критическая точка индекса 1, лемме 3.2 можно придать следующий вид.

3.3. Теорема. *Пусть M — компактная связная ориентируемая поверхность, допускающая функцию Морса с единственной критической точкой—седлом. Тогда M есть диск с двумя дырами; более того, f достигает своего наибольшего и наименьшего значения на ∂M.*

Теперь легко классифицировать компактные ориентируемые поверхности, допускающие функцию Морса с единственным седлом.

3.4. Теорема. *Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — допустимая функция Морса на связной компактной ориентируемой поверхности. Предполо-*

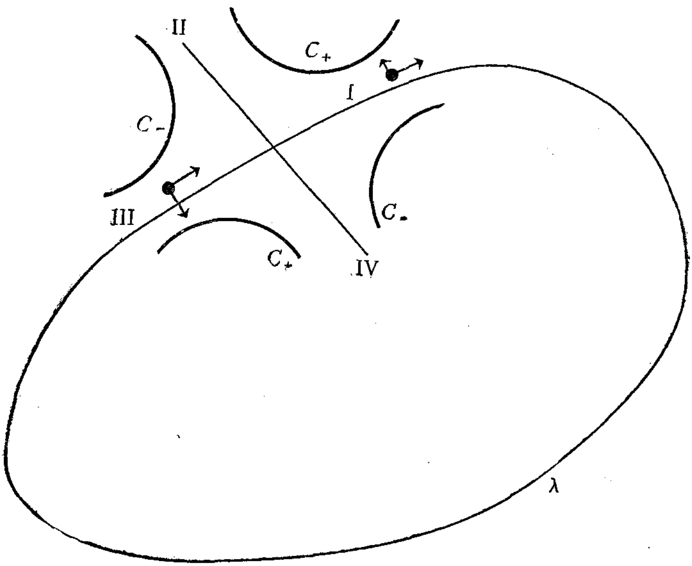


Рис. 9—9. Петля λ обращает ориентацию.

жим, что f имеет ровно одно седло (и, возможно, другие критические точки типа 0 или 2). Тогда поверхность M диффеоморфна S^2, D^2, $S^1 \times I$ или H_2. Если сужение $f \mid \partial M$ не постоянно, то $M \not\approx H_2$.

Доказательство. Удалим из M внутренности непересекающихся дисков, окружающих критические точки типов 0 и 2 (если таковые имеются). Сделаем это таким образом, чтобы каждый диск не содержал других критических точек и чтобы границы этих дисков были компонентами линий уровня. Получающееся многообразие W диффеоморфно H_2 в силу теоремы 3.3. Если у функции f не было критических точек типа 0 или 2, то $M = W$; но этого не может быть, если $f|\partial M$ есть константа. При наличии же у f критических точек типа 0 или 2 поверхность M получается из W в результате приклеивания к некоторым из граничных окружностей дисков. Таким образом, в этом случае M есть $S^1 \times I$, D^2 или S^2. ∎

Переходим теперь к классификации компактных ориентируемых поверхностей. Предположим сначала, что край отсутствует.

3.5. Теорема. *Пусть M — компактная связная ориентируемая поверхность без края. Тогда существует единственное целое число $p \geqslant 0$, такое, что M есть ориентируемая поверхность рода p в смысле определения из* 9.1 (*«сфера с p ручками»*). *Эйлерова характеристика поверхности M вычисляется по p при помощи формулы $\chi(M) = 2 - 2p$. В частности, число $\chi(M)$ четно и не превышает* 2.

Доказательство. Применим индукцию по числу ν седел у функции Морса $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Предположим, что у f нет седел. Снабдим M римановой метрикой. Пусть $P \subset M$ — множество минимумов. Каждая траектория поля $\operatorname{grad} f$ в $M - P$ стремится к одному из максимумов. Зона притяжения каждого максимума представляет собой открытое множество; но она и замкнута, поскольку разные зоны не пересекаются. Поскольку множество $M - P$ связно, мы видим, что максимум всего один. Аналогично доказывается, что число минимумов равно 1. Таким образом, $M \approx S^2$ в силу теоремы 8.3.4.

Пусть теперь $\nu = k > 0$, и предположим, что утверждение теоремы выполняется, если M допускает функцию Морса, имеющую меньше чем k седел. Мы можем считать, что f разделяет критические точки. Тогда существует единственное седло p, такое, что $f(p) < f(q)$ для всякого седла $q \neq p$.

Пусть $f(p) = \alpha$, и пусть $\beta > \alpha$ — такое число, что p — единственная критическая точка в $f^{-1}[\alpha, \beta]$.

Пусть V — компонента точки p в $f^{-1}(-\infty, \beta]$. Заметим, что $\partial V \subset f^{-1}(\beta)$. Так как $f|V$ имеет единственное седло, мы можем применить теорему 3.4. Так как $\partial V \neq \varnothing$, мы заключаем, что $V \neq S^2$. Наконец, $V \neq H_2$, поскольку сужение $f|\partial V$ постоянно. Таким образом, $V \approx D^2$ или $V \approx S^1 \times I$.

Предположим, что $V \approx D^2$. Тогда мы можем построить новую функцию Морса $g\colon M \to \mathbb{R}$, равную f на $M - V$ и имеющую единственную критическую точку в V — минимум. Поскольку g имеет только $k - 1$ седел, индуктивное предположение показывает, что для M утверждение теоремы верно.

Предположим, наконец, что $V \approx S^1 \times I$. Тогда $\partial V = S^1 \times \{0, 1\}$. Пусть M_0 — поверхность, получающаяся из $M - \operatorname{Int} V$ в результате приклеивания к ∂V двух дисков. Переопределяя надлежащим образом функцию f на этих дисках, мы получаем функцию Морса $f_0\colon M_0 \to \mathbb{R}$, у которой седел меньше, чем у f. В силу индуктивного предположения, M_0 есть ориентируемая поверхность некоторого рода q. Но очевидно, что M получается из

M_0 приклеиванием ручки. Следовательно, M есть ориентируемая поверхность рода $q+1$. Это завершает индукцию.

Единственность рода и формула для эйлеровой характеристики уже были доказаны в § 9.1.▌

Теперь легко дать геометрическую интерпретацию рода.

3.6. Теорема. *Пусть M — ориентируемая поверхность рода p. Тогда в M существуют p непересекающихся окружностей, дополнение к которым связно; но всякие $p+1$ непересекающихся окружностей разделяют M.*

Доказательство. Если $p=0$, мы можем считать, что $M=S^2$. Первая часть утверждения пуста в этом случае, а вторая следует из теоремы 4.4.6.

Предположим, что $C_1, \ldots, C_q$ — непересекающиеся окружности в M, $q \geqslant 1$ и разность $M - \bigcup C_i$ связна. Пусть $N_1, \ldots, N_q$ — непересекающиеся замкнутые трубчатые окрестности окружностей $C_1, \ldots, C_q$, и пусть $V = M - \bigcup \operatorname{Int} N_i$. Пусть, далее, W получается из V в результате приклеивания дисков к $2q$ краевым окружностям поверхности V. Заметим, что W связно и ориентируемо и что M получается из W приклеиванием q ручек. Если W имеет род $g \geqslant 0$, то M имеет род $g+q=p$. Следовательно, $q \leqslant p$.▌

Классификация компактных ориентируемых ∂-поверхностей содержится в следующем утверждении.

3.7. Теорема. *Пусть M — связная компактная ориентируемая поверхность с эйлеровой характеристикой χ. Предположим, что ∂M состоит из $k>0$ компонент. Тогда сумма $\chi+k$ четна. Положим $p=1-(\chi+k)/2$. Тогда поверхность M диффеоморфна поверхности, получающейся из ориентируемой поверхности рода p удалением внутренностей k непересекающихся дисков.*

Доказательство. Заклеим граничные окружности поверхности M дисками. Получится поверхность W, эйлерова характеристика которой равна $\chi+k$. Следовательно, W есть ориентируемая поверхность рода p и $\chi+k=2-2p$.▌

Число p, которое относит ∂-поверхности M теорема 3.7, называется *родом поверхности* M.

Обратимся к неориентируемым поверхностям.

3.8. Лемма. *Всякая неориентируемая поверхность N содержит подмногообразие, диффеоморфное ленте Мёбиуса.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь обращающую ориентацию петлю $f\colon S^1 \to N - \partial N$. Можно считать, что f есть погружение, что f не имеет тройных точек и что в двойных точках ветви пересекаются трансверсально. Тогда двойных точек будет конечное число, т. е. на S^1 имеется конечное число пар точек, скажем

$A_1, B_1; \ldots; A_k, B_k$, таких, что $f(A_1) = f(B_1), \ldots, f(A_k) = f(B_k)$ и отображение f взаимно однозначно на $S^1 - \{A_1, \ldots, A_k\}$. Отображение каждой из двух дуг, на которые окружность делится точками A_1, B_1, можно рассматривать как петлю, и по крайней мере одна из этих петель должна обращать ориентацию. Эта петля, после небольшого изменения вблизи концевых точек, делается гладким отображением окружности, обращающим ориентацию и имеющим меньшее число двойных точек. Повторив эту процедуру надлежащее число раз, мы получим гладко вложенную в $N - \partial N$ окружность, обращающую ориентацию. Трубчатая окрестность этой окружности и будет диффеоморфна ленте Мёбиуса. ∎

3.9. Лемма. *Пусть N — компактная связная неориентируемая поверхность. Тогда существует единственное целое число $p > 0$, такое, что N содержит p, но не $p + 1$, непересекающихся гладко вложенных лент Мёбиуса.*

Доказательство. Достаточно найти такое целое n, что $n + 1$ лент Мёбиуса, лежащих в N, не могут быть непересекающимися.

Пусть $B \subset N$ — лента Мёбиуса. Тогда край ∂B связен; следовательно, разность $N - B$ связна. Поэтому если $B_1, \ldots, B_p \subset N$ — непересекающиеся ленты Мёбиуса, то и разность $N - \bigcup B_i$ связна.

Пусть $\pi\colon \tilde{N} \to N$ — ориентируемое двулистное накрытие над N. Тогда $\pi^{-1}(B)$ есть цилиндр в $\tilde{N}$ для любой ленты Мёбиуса $B \subset N$.

Пусть V — связное двумерное подмногообразие поверхности N. Тогда прообраз $\pi^{-1}(V)$ в том и только том случае связен, если V неориентируемо. Следовательно, прообраз $\pi^{-1}(V)$ связен в том и только том случае, если V содержит ленту Мёбиуса.

Предположим, что род поверхности $\tilde{N}$ равен $n - 1 \geqslant 0$.

Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — непересекающиеся ленты Мёбиуса в N. Тогда $\pi^{-1}(B_1), \ldots, \pi^{-1}(B_n)$ — непересекающиеся цилиндры в $\tilde{N}$; они содержат n непересекающихся вложенных окружностей. Поэтому $\tilde{N} - \bigcup \pi^{-1}(B_i)$, т. е. $\pi^{-1}(N - \bigcup B_i)$, не связно по теореме 3.6. Следовательно, разность $N - \bigcup B_i$ ориентируема и не может содержать ленты Мёбиуса. ∎

Число p из леммы 3.9 мы назовем *числом Мёбиуса* поверхности N.

3.10. Теорема. *Пусть N — компактная связная неориентируемая поверхность без края, число Мёбиуса которой равно p. Тогда N есть неориентируемая поверхность рода p.*

Доказательство. Пусть M_0 получается из N в результате вырезания внутренностей p непересекающихся лент Мёбиуса. Тогда M_0 ориентируемо. Заклеим ∂M_0 p дисками; получится ориентируемая поверхность M; пусть род поверхности M равен g. Очевидно, N получается из M приклеиванием p скрещенных колпаков. В силу теорем 1.7 и 1.8, N есть неориентируемая поверхность рода $2g + p$. Но это показывает, что число *Мёбиуса поверхности* N не меньше $2g + p$. Следовательно, $2g = 0$ и M есть сфера. ∎

В заключение мы приведем удобный критерий диффеоморфности.

3.11. Теорема. *Две связные компактные поверхности в том и только том случае диффеоморфны, если они обе ориентируемы или обе неориентируемы и если они имеют одинаковые эйлеровы характеристики и одинаковое число краевых компонент.*

Доказательство. В ориентируемом случае это следует из теоремы 3.7. В неориентируемом случае приклеим к каждой компоненте края ленту Мёбиуса; эйлерова характеристика при этом не изменится. Теорема следует теперь из теоремы 3.10. ∎

УПРАЖНЕНИЯ

1. Компактная поверхность, вложенная в $\mathbb{R}^2$, диффеоморфна D^2 или некоторому H_k.

***2.** Пусть M — поверхность и $C \subset M$ — окружность. Если C стягиваемо по M в точку, то C ограничивает в M диск.

***3.** Связная некомпактная односвязная поверхность M без края диффеоморфна $\mathbb{R}^2$. [Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}_+$ — собственная функция Морса. Для всякого регулярного значения $\alpha \in f(M)$ подмногообразие $M_\alpha = f^{-1}(-\infty, \alpha]$ есть диск с дырами. Для достаточно большого $\beta \gg \alpha$ всякая краевая окружность многообразия M_α ограничивает диск в M_β. Поэтому M есть объединение возрастающей последовательности дисков: $M = \bigcup D_i$, $D_i \subset \operatorname{Int} D_{i+1}$. При этом $D_{i+1} - \operatorname{Int} D_i \approx S^1 \times I$, так что диффеоморфизм $M \approx \mathbb{R}^2$ можно построить, последовательно продолжая его с D_i на D_{i+1}.]

4. (a) Пусть M — ориентируемая поверхность рода p и C_1, C_2 — окружности в M. Предположим, что никакая из этих окружностей не разделяет M. Тогда $(M, C_1) \approx (M, C_2)$. [Представьте M как сферу с ручками, так чтобы окружность C_i стандартным образом обходила ручку.]

(b) Предположим, что каждая из окружностей C_1, C_2 разделяет M. При каких обстоятельствах верно заключение предложения (a)?

5. (a) Пусть $M = T - \operatorname{Int} D$, где $D \subset T$ — диск в торе. Тогда M и H_2 не гомеоморфны, но $M \times I$ и $H_2 \times I$ гомеоморфны.

(b) Удвоения поверхностей M и H_2 диффеоморфны.

6. Две компактные ориентированные поверхности, которые диффеоморфны, могут быть связаны сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом.

7. Всякая компактная неориентируемая ∂-поверхность допускает диффеоморфизм, который обращает ориентацию ее края.

***8.** Пусть C, C' — окружности, вложенные в сферу $S^2 = \partial D^3$. Тогда всякий диффеоморфизм $f\colon C \to C'$ продолжается до диффеоморфизма шара D^3. [Окружности C и C' ограничивают в S^2 диски, на которые диффеоморфизм f может быть продолжен, и т. д.]

9. Группы кобордизмов в размерности 2 таковы: $\Omega^2 = 0$, $\mathfrak{N}^2 = \mathbb{Z}_2$.

10. Если M есть ориентируемая поверхность рода p, то всякие трансверсально пересекающиеся (или непересекающиеся) $2p+1$ окружностей в M разделяют M.

11. Каков аналог теоремы 3.6 и упр. 10 для неориентируемых поверхностей?

12. В компактной неориентируемой поверхности все максимальные множества непересекающихся лент Мёбиуса имеют одинаковую мощность.

13. Пусть M есть связная некомпактная поверхность. *Конец* поверхности M определяется как функция, относящая компактному множеству $K \subset M$ компоненту дополнения $M - K$ таким образом, что для любых компактных множеств $K_1, K_2 \subset M$ выбранные компоненты дополнений $M - K_1$, $M - K_2$ имеют пересечение с некомпактным замыканием.

(a) Число концов является дифференциальным инвариантом.

(b) $\mathbb{R}^2$ имеет 1 конец.

(c) Для всякого кардинального числа k, не превосходящего континуума, существует поверхность, имеющая ровно k концов.

*(d) Некомпактная связная поверхность M имеет конечное число концов в том и только том случае, если существует компактная поверхность N, такая, что $M \approx N - \partial N$. Это же условие является необходимым и достаточным для того, чтобы поверхность имела конечную связность (ср. упр. 17).

***14.** Пусть M — связная поверхность и $\{S_i\}$ — объединение несчетного числа непересекающихся окружностей в M. Тогда для некоторых j, k разность $M - (S_j \cup S_k)$ не связна. [Указание. Пусть $\{f_\alpha: S^1 \to M\} = Y$ — несчетное множество вложений. Покажите, что пространство $C^1_W(S^1, M)$ сепарабельно, и установите с помощью этого, что Y содержит хотя бы одну из своих предельных точек.]

***15.** $\mathbb{R}^3$ не содержит несчетного числа непересекающихся лент Мёбиуса [см. указание к упр. 14].

***16.** Пусть $f: M \to N$ — отображение степени d между компактными связными ориентированными поверхностями без края. Имеется ли какое-нибудь соотношение между d, родом M и родом N?

***17.** *Связность* $c(M)$ компактной поверхности M есть целое число $c \geqslant 0$ (если такое существует), обладающее следующим свойством. Пусть $V \subset M$ есть объединение $V_1 \cup \ldots \cup V_r$, где каждое V_i есть правильная дуга или окружность в $M - \partial M$ и $V_i \pitchfork V_j$ при $i \neq j$. Предположим, что $M - V$ связно. Тогда $r \leqslant c$ и если $r < c$, то V есть собственное подмножество другого множества V^c того же типа. (*Связность Римана* есть $c(M) + 1$.)

(a) Если ∂M имеет b компонент, то $c(M) = 2 - \chi(M) - b$.

(b) $c(M)$ есть размерность над $\mathbb{Z}_2$ пространства $H_1(M, \partial M; \mathbb{Z}_2)$.

(c) Выразите $c(M)$ через b и род M.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приводим сводку некоторых основных результатов анализа и общей топологии.

Общая топология

Топологическое пространство X называется:

хаусдорфовым, если любые две его различные точки имеют непересекающиеся окрестности;

нормальным, если для любой пары непересекающихся замкнутых множеств A, B существует непрерывное отображение $f\colon X \to [0, 1]$ с $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$;

паракомпактным, если всякое открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ обладает локально конечным открытым вписанным покрытием $\mathcal{V} = \{V_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Это означает, что $\mathcal{V}$ есть такое открытое покрытие пространства X, что всякий элемент покрытия $\mathcal{V}$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$ и что всякая точка $x \in X$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{V}$.

Замыкание множества $S \subset X$ обозначается через $\overline{S}$.

П.1. Теорема. *Если X нормально и $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ есть локально конечное открытое покрытие, то $\mathcal{U}$ обладает ужатием, т. е. открытым покрытием $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, таким, что $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$.*

П.2. Теорема. *Паракомпактные хаусдорфовы пространства нормальны.*

Разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, есть совокупность $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ непрерывных отображений $f_\lambda\colon X \to [0, 1]$, обладающих следующими тремя свойствами: $f_\lambda(X - U_\lambda) = 0$; семейство открытых множеств $\{f_\lambda^{-1}(0, 1]\}$ является локально конечным покрытием, вписанным в $\mathcal{U}$; $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) = 1$ при всех x.

П.3. Теорема. *Топологическое пространство в том и только том случае является паракомпактным, если каждое его открытое покрытие обладает подчиненным ему разбиением единицы.*

П.4. Теорема. *Метрические пространства паракомпактны.*

Подмножество A пространства X называется *нигде не плотным*, если его замыкание $\overline{A}$ не содержит непустого открытого множества;

эквивалентное требование: $X - \bar{A}$ плотно в X. Если A есть объединение счетного множества замкнутых нигде не плотных множеств, то говорят, что A есть *множество первой категории;* в противном случае A называется *множеством второй категории.*

П.5. Теорема Бэра о категории. *Полное метрическое пространство является множеством второй категории в себе. Эквивалентные формулировки: объединение счетного множества замкнутых нигде не плотных множеств нигде не плотно; пересечение счетного множества открытых всюду плотных множеств всюду плотно.*

Анализ

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — отображение. Линейное отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется *дифференциалом* отображения f в точке $x \in U$, если

$$\lim_{h\to 0} |h|^{-1}(f(x+h) - f(x) - L(h)) = 0.$$

Здесь $|h|$ есть норма $\left(\sum_{j=1}^{n} h_j^2\right)^{1/2}$ вектора $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Если такое отображение L существует, оно единственно и обозначается через Df_x или $Df(x)$.

Отображение f называется *отображением класса* C^1, если Df_x существует для всякого $x \in U$ и отображение

$$Df\colon U \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$
$$x \mapsto Df_x,$$

непрерывно.

Индуктивным образом определяется принадлежность f классу C^r с $2 \leqslant r < \infty$: она означает, что отображение

$$Df\colon U \to \mathbb{R}^{mn} = L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

принадлежит классу C^{r-1}. Если f принадлежит C^r для всех r, то говорят, что f принадлежит *классу* C^∞.

Пусть $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Говорят, что отображение f (*вещественно*) *аналитично*, или принадлежит классу C^ω, если в некоторой окрестности каждой точки множества U каждая из функций f_j представляется как сумма сходящегося степенного ряда (от m переменных). В этом случае f принадлежит классу C^∞, и это позволяет нам считать, что $\infty \leqslant \omega$.

П.6. Теорема. *Отображение f в том и только том случае принадлежит классу C^r с $1 \leqslant r < \infty$, если каждая из функций f_i:*

$U \to \mathbb{R}$ обладает непрерывными частными производными всех порядков $\leqslant r$.

Пусть U и V — открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Говорят, что f: $U \to V$ есть C^r-*диффеоморфизм*, если f есть C^r-гомеоморфизм и обратное отображение также принадлежит классу C^r.

Пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $p \in W$. Отображение f: $W \to \mathbb{R}^n$ класса C^r называется *локальным диффеоморфизмом* класса C^r в точке p, если существует открытое множество $U \subset W$, такое, что $p \in U$, множество $f(U)$ открыто и сужение $f|U$: $U \to f(U)$ является C^r-диффеоморфизмом.

П.7. Теорема об обратной функции. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и f: $U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r с $1 \leqslant r \leqslant \omega$. Если отображение Df_p для некоторой точки $p \in W$ обратимо, то f есть локальный диффеоморфизм класса C^r в точке p.*

П.8. Теорема о неявной функции (проективный вариант). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и f: $U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r с $1 \leqslant r \leqslant \omega$. Пусть, далее, $p \in U$, $f(p) = 0$ и отображение Df_p эпиморфно. Тогда существует локальный диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^m$ в точке 0, такой, что $\varphi(0) = p$ и*

$$f\varphi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Доказательство. Сделав, если требуется, линейную замену координат в $\mathbb{R}^m$, мы можем считать, что $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{ij}$ для $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$. Определим отображение h: $U \to \mathbb{R}^m$ формулой $h = (h_1, \ldots, h_m)$, где $h_i = f_i$ при $i = 1, \ldots, n$ и $h_i(x_1, \ldots, x_m) = x_i$ при $i = n + 1, \ldots, m$. Тогда h принадлежит классу C^r и Dh_p имеет ранг m. В силу теоремы об обратной функции, h есть локальный диффеоморфизм класса C^r точке p. Поэтому в окрестности точки 0 пространства $\mathbb{R}^m$ отображение h имеет обратное отображение φ класса C^r. Тогда $h(\varphi(x)) = x$ для x, близких к 0; это отображение φ удовлетворяет условиям теоремы.

П.9. Теорема о неявной функции (инъективный вариант). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и f: $U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r с $1 \leqslant r \leqslant \omega$. Пусть, далее, $q \in \mathbb{R}^n$ — такая точка, что $0 \in f^{-1}(q)$, и пусть отображение Df_0 мономорфно. Тогда существует локальный диффеоморфизм ψ пространства $\mathbb{R}^m$ в точке q, такой, что $\psi(q) = 0$ и*

$$\psi f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Доказательство «двойственно» доказательству теоремы П.8 и оставляется в качестве упражнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абрахам (Abraham R.)

1. Transversality in manifolds of mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 470—474.

Абрахам и Роббинс (Abraham R., Robbins J.)

1. Transversal mappings and flows. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

Адамар (Hadamard J.)

1. Sur quelques applications de l'indice de Kronecker. Дополнение к книге J. Tannery, Theorie des fonctions, Vol. 2, 2e Ed. Paris, 1910.

Александров и Хопф (Alexandroff P. S., Hopf H.)

1. Topologie I. Springer-Verlag, Berlin, 1935.

Артин и Мазур (Artin M., Mazur B.)

1. On periodic points. *Annals of Math.* **81** (1965), 81—99.

Бохнер (Bochner S.)

1. Analytic mapping of compact Riemannian spaces into Euclidean space. *Duke Math. J.* **3** (1937), 339—354.

Браун М. (Brown M.)

1. The monotone union of open n-cells is an open n-cell. *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** (1961), 812—814.
2. Locally flat embeddings of topological manifolds. *Annals of Math.* **75** (1962), 331—340.

Браун Э. Б. (Brown A. B.)

1. Functional dependence. *Trans. Amer. Math. Soc.* **38** (1935), 379—394.

Брауэр (Brouwer L. E. J).

1. Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* **71** (1912), 97—115.

Грауэрт (Grauert H.)

1. On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds. *Annals of Math.* **68** (1958), 460—472. [Имеется перевод: сб. Математика 4 (1960), № 3, 29—40.]

Гуревич и Волмэн (Hurewicz W., Wallman H.)

1. Dimension theory. Princeton University Press. Princeton, 1941. [Имеется перевод: Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. — М.: ИЛ, 1948.]

Дейк, ван (Dyck W., van)

1. Beitrage zur Analysis Situs I. Ein- und zwei-dimensionale Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* **32** (1888), 457—512.

Джеймс (James I. M.)

1. Euclidean models of projective spaces. *Bull. London Math. Soc.* **3** (1971), 257—276.

Дольд (Dold A.)

1. Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York, 1974. [Имеется перевод: Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. — М.: Мир, 1976.]

Дубовицкий А. Я.

1. О дифференцируемых отображениях n-мерного куба в k-мерный куб. *Матем. сб.*, нов. сер. **32** (74) (1953), 443—464.

Жордан (Jordan C.)

1. Sur les déformations des surfaces. *J. de Math.* (2), XI (1866), 105—109.

Кервер (Kervaire M.)

1. A manifold which does not admit any differentiable structure. *Comment. Math. Helv.* **34** (1960), 304—312.

Кнезер и Кнезер (Kneser H., Kneser M.)

1. Reell-analytische Strukturen der Alexandroff-Geraden. *Arch. d. Math.* **9** (1960), 104—106.

Кох и Пуппе (Koch W., Puppe D.)

1. Differenzierbar Strukturen auf Mannigfaltigkeiten ohne abzahlbare Basis. *Arch. d. Math.* **19** (1968), 95—102.

Кронекер (Kronecker L.)

1. Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Monatsberichte Berl. Acad. (1869), 159—193 und 688—698.

Кэйпер (Kuiper N. H.)

1. C^1-equivalence of functions near isolated critical points. В книге R. D. Anderson, Symposium on infinite dimensional topology, Princeton University Press, Princeton, 1972.

Ленг (Lang S).

1. Introduction to differentiable manifolds. Interscience, New York, 1962. [Имеется перевод: Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.]

Лефшец (Lefschetz S.)

1. Topology. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 12, New York 1930.

Ликориш (Likorish W. B. R.)

1. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Annals of Math.* **76** (1962), 531—540.

Манкрес (Munkres J. R.)

1. Elementary differential topology. Princeton University Press, Princeton 1963.
2. Differentiable isotopies on the 2-sphere. *Mich. Math. J.* **7** (1960), 193—197.

Мёбиус (Möbius A. F.)

1. Theorie der elementaren Verwandtshaft. Leipziger Sitzungsberichte math.-phys. Classe **15** (1869). [См. также Werke, Bd. 2.]

Милнор (Milnor J.)

1. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Math.* **64** (1956), 399—405. [Имеется перевод: сб. *Математика* **1** (1957), № 3, 35—42.]
2. Topology from the differentialble viewpoint. University of Virginia Press, Charlottesville, 1966. [Имеется перевод: в книге Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М.: Мир, 1972, с. 177—270.]
3. Morse theory. Princeton University Press, Princeton, 1963. [Имеется перевод: Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.]
4. A survey of cobordism theory. *Enseignement Math.* **8** (2) (1962), 16—23.

Морри (Morrey C. B.)

1. The analytic imbedding of abstract real-analytic manifolds. *Annals of Math.* **68** (1958), 159—201.

Морс А. П. (Morse A. P.)

1. The behavior of a function on its critical set. *Annals of Math.* **40** (1939), 62—70.

Морс М. (Morse M.)
1. Relations between the critical points of a real analytic function of n independent variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* **27** (1925), 345—396.
2. The calculus of Variations in the Large. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 18, New York, 1934.

Нэш (Nash J.)
1. Real algebraic manifolds. *Annals of Math.* **56** (1952), 405—421.

Пале (Palais R.)
1. Morse theory on Hilbert manifolds. *Topology* **2** (1963), 299—340.

Понтрягин Л. С.
1. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. Труды МИАН, 45 (1955).
2. Основы комбинаторной топологии. — М.: Гостехиздат, 1947.

Пуанкаре (Poincaré H.)
1. Analysis situs. *J. Ecole Polytechnique, Paris* **1** (2) (1895), 1—123. [См. также Oeuvres, t. 6.] [Имеется перевод: Пуанкаре А. Избранные труды. — М.: Наука, 1972, т. 2, с. 457—548.]
2. Complément à l'analysis situs. *Rendiconti Circolo Matematico, Palermo* **13** (1899), 285—343. [См. также Oeuvres, t. 6.] [Имеется перевод: Пуанкаре А. Избранные труды. — М.: Наука, 1972, т. 2, с. 549—593.]
3. Deuxième complément à l'analysis situs. *Proc. London Math. Soc.* **32** (1900), 277—308. [См. также Oeuvres, t. 6.] [Имеется перевод: Пуанкаре А. Избранные труды. — М.: Наука, 1972, т. 2, с. 594—622.]
4. Cinquième complément à l'analysis situs. *Rendiconti Circolo Matematico, Palermo* **18** (1904), 45—110. [См. также Oeuvres, t. 6.] [Имеется перевод: Пуанкаре А. Избранные труды. — М.: Наука, 1972, т. 2, с. 676—734.]

Риман (Riemann G. F. B.)
1. Allgemeine Voraussetzung und Hülfsmittel für die Untersuchung von Funktionen unbeschränkt veränderlicher Grössen. *J. reine und angewandte Math.* **54** (1857), 103—104.
2. Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen. *Abh. Gesellschaft Wiss. Göttingen* **13** (1868). [См. также Werke, 2. Auflage, S. 272 et. seq.]

Рохлин В. А.
* 1. Внутренние гомологии. *Докл. АН СССР* **89** (1953), № 5, 789—792.
* 2. Теория внутренних гомологий. *Успехи матем. наук* **14** (1959), № 4, 3—20.

Сард (Sard A.)
1. The measure of the critical points of differentiable maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 883—890.

Серф (Cerf J.)
1. Sur les difféomorphismes de la sphére de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 53. Springer-Verlag, New York, 1968.

Смейл (Smale S.)
1. Generalized Poincaré 's conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Math.* **74** (1961), 391—406. [Имеется перевод: сб. Математика **6** (1962), № 3, 139—155.]
2. Diffeomorphisms of the 2-sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 621—626.
3. Morse theory and a nonlinear generalization of the Dirichlet problem. *Annals of Math.* **80** (1964), 382—396.

Стинрод (Steenrod N.)
1. The topology of fibre bundles. Princeton University Press, Princeton, 1951. [Имеется перевод: Стинрод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.]

Такенс (Takens F.)
1. A note on sufficiency of jets. *Invent. Math.* **13** (1971), 225—231.

Том (Thom R.)
1. Quelques propriétés globales des variétés differentiables. *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), 17—86. [Имеется перевод: сб. Расслоенные пространства и их приложения. — М.: ИЛ, 1958, с. 293—351.]

Уайтхед (Whitehead J. H. C.)
1. On C^1-complexes. *Annals of Math.* **41** (1940), 809—824.

Уитни (Whitney H.)
1. A function not constant on a connected set of critical points. *Duke Math. J.* **1** (1935), 514—517.
2. Differentiable manifolds. *Annals of Math.* **37** (1936), 645—680.
3. On the topology of differentiable manifolds. В книге R. L. Wilder. Lectures in topology, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1941.
4. The selfintersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Annals of Math.* **45** (1944), 220—246.
5. The singularities of a smooth n-manifold in $(2n—1)$-space. *Annals of Math.* **45** (1944), 247—293.
6. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** (1934), 63—89.

Ханнер (Hanner O.)
1. Some theorems on absolute neighborhood retracts. *Arkiv. Mat.* **1** (1952), 389—408.

Хегор (Heegard P.)
1. Sur l'Analysis Situs. *Bull. Soc. Math. de France* **44** (1916), 161—242. [Перевод статьи Forstudier til en topologisk teori för de algebraiske Sammenhang. Dissertation, Kopenhagen, 1898.]

Хирш (Hirsch M. W.)
1. Immersions of manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959), 242—276.
2. On imbedding differentiable manifolds in euclidean space. *Annals of Math.* **73** (1961), 566—571.
3. A proof of nonretractability of a cell onto its boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 364—365.
4. The imbedding of bounding manifolds in euclidean space. *Annals of Math.* **74** (1961), 494—497.

Хирш и Мазур (Hirsch M. W., Mazur B.)
1. Smoothings of piecewise linear manifolds. Princeton Univ. Press, Princeton 1974.

Хирш и Смейл (Hirsch M. W., Smale S.)
1. Differential equations, dynamical systems and linear algebra. Academic Press, New York, 1974.

Хопф (Hopf H.)
1. Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume. *Viertelgschr. naturforsch. Ges. Zurich* **85** (1940), 165—177.

Швейцер (Schweitzer P. A.)
1. Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. *Annals. of Math.* **100** (1974), 386—400.

Шуб и Сулливан (Shub M., Sullivan D.)
1. A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps. *Topology* **13** (1974), 189—191.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\|A\|$	норма линейного отображения
$\operatorname{Bd} X$	граница множества
$\mathbb{C}P^n$	комплексное проективное n-пространство, 23
C^r	(отображение) с r непрерывными производными
C^∞	бесконечно дифференцируемое
C^ω	вещественно аналитическое
$C^r(M, N)$	множество C^r-отображений из M в N, 48
$C(X, Y)$	множество непрерывных отображений из X в Y
χ,	эйлерова характеристика, 177
χ'	гомологическая эйлерова характеристика, 211
deg	степень отображения, 163
det	детерминант
Df	производная f
$D_\varepsilon(\xi)$	замкнутое шаровое подрасслоение расслоения ξ радиуса ε
$\operatorname{Diff}^r(M)$	множество C^r-диффеоморфизмов многообразия M
dim	размерность
$D^k f$	k-я производная f
D^n	(замкнутый) единичный шар в $\mathbb{R}^n$, 35
Δ	диагональ, 38
∂M	край многообразия M, 44
∂-многообразие	многообразие с краем, 44
E^*	пространство Тома векторного расслоения E, 224
e^k	k-клетка, 207
e_*^{n-k}	двойственная $(n-k)$-клетка, 210
$\operatorname{Emb}^r(M, N)$	множество C^r-вложений многообразия M в N
ε_B^n, ε^n	тривиальное n-мерное векторное расслоение, 119
$\widehat{F}$	след изотопии F, 231
$f\|A$	сужение отображения f на подмножество A
F^{ev}	эвалюационное отображение, соответствующее отображению F, 108
$f'(x)$	производная в точке x отображения интервала
$f^*\xi$	векторное расслоение, индуцированное расслоением ξ посредством отображения f, 130
$\Phi\|W$	индуцированная дифференциальная структура, 22
gf, $g\circ f$	композиция отображений
$GL(n)$	группа обратимых вещественных $n\times n$-матриц
$G_{n,k}$	грассманово многообразие k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$, 23
$\operatorname{grad} f$	градиентное векторное поле функции f
$\gamma_{s,k}$	универсальное или грассманово расслоение над $G_{s,k}$, 134
H_k	диск с k дырами, 260
$H_n(X, A)$	сингулярная гомологическая группа, 211

$H_n(X, A; F)$	сингулярное гомологическое векторное пространство с коэффициентами в поле F, 211
$H_p f$	гессиан, 190
$\mathrm{Imm}^r(M, N)$	множество C^r-погружений многообразия M в N
$\mathrm{ind}_x f$	индекс нуля векторного поля f, 177
$\mathrm{ind}(p)$, $\mathrm{ind} f(p)$	индекс критической точки p функции f, 191
$\mathrm{ind}\, Q$	индекс квадратичной формы Q, 191
$\mathrm{Int}\, X$	внутренность множества X
$J^r(M, N)$	множество r-струй отображений многообразия M в N, 80
$J^r(m, n)$	то же, что $J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, 83
$j^r_x(f)$, $j^r f(x)$	r-струя функции f в точке x, 82
$j^r f$	r-расширение отображения f, 84
$L(E, F)$	векторное пространство линейных отображений из E в F
$\theta * f$	свертка отображений, 62
$[M]$	кобордический класс, 221
$M[f]$	поверхность с ручкой, приклеенной по отображению f, 246
$M \# N$	связная сумма, 248
M_x	касательное пространство к многообразию M в точке x, 28
M_x^*	кокасательное пространство к многообразию M в точке x, 189
$\mathfrak{N}^k$	группа неориентированных кобордизмов, 221
$\mathcal{N}^r(f; \Phi, \Psi, K, \varepsilon)$	сильная базисная окрестность, 50
ν_k	k-е типовое число функции Морса, 210
$(\nu_0, \ldots, \nu_n)$	тип функции Морса, 210
$O(n)$	группа вещественных ортогональных $n \times n$-матриц
ω^n	стандартная ориентация пространства $\mathbb{R}^n$, 139
Ω^n	группа ориентированных кобордизмов, 221
P^n	вещественное проективное n-пространство, 22
$\mathrm{Prop}^r(M, N)$	множество собственных C^r-отображений многообразия M в N
$\pi_n(X)$	n-я гомотопическая группа пространства X
$\mathbb{R}^n$	евклидово n-пространство
S (индекс)	сильная топология, 50
S^n	единичная n-сфера
$SO(n)$	группа вещественных ортогональных $n \times n$-матриц с определителем 1
$\mathrm{Supp}\, g$	носитель функции g, 59
Σ_f	множество критических точек отображения f, 95
$T_A M$	сужение расслоения TM на A, 28
Tf, $T_x f$	дифференциал отображения f, 29
TM	многообразие касательных векторов многообразия M, 27
T^*M	кокасательное расслоение многообразия M, 189
$T_x M$	см. M_x
$T_1 M$	многообразие единичных касательных векторов многообразия M, 39
$V_{n,k}$	многообразие Штифеля k-реперов в $\mathbb{R}^n$, 106
W (индекс)	слабая топология, 49
$\lvert X \rvert$	норма вектора X
$\chi(\xi)$	число Эйлера векторного расслоения ξ, 176

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ