М. Ф. Атья, И. М. Зингер, Индекс эллиптических операторов. I, *УМН*, 1968, том 23, выпуск 5(143), 99–142

1968 г. сентябрь — октябрь *т. XXIII, вып. 5 (143)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.4+513.83

ИНДЕКС ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. I[1])

М. Ф. Атья и И. М. Зингер

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Эта статья является первой в серии статей, посвященных изучению индекса эллиптических операторов на компактном многообразии. Основной результат был анонсирован в [6], а для многообразий с границей [2]) в [5]. Большой перерыв между этими заметками и настоящей статьей связан с несколькими причинами. С одной стороны, довольно полное изложение уже появилось в [14]. С другой стороны, наше первоначальное доказательство, приведенное с незначительными изменениями в [14], имело ряд недостатков. Во-первых, использование кобордизмов и связанные с этим вычисления были недостаточно прозрачными. Более серьезный недостаток состоял в том, что этот метод доказательства не был применим при некоторых естественных обобщениях, в которых соответствующие группы кобордизмов неизвестны. Читатель, хорошо знакомый с теоремой Римана — Роха, мог заметить, что наше первоначальное доказательство теоремы об индексе моделировало доказательство Хирцебруха теоремы Римана — Роха. Естественно, мы искали доказательство, моделирующее доказательство Гротендика. Хотя нам это удалось не до конца, мы нашли доказательство, которое является гораздо более естественным, не использует кобордизмов и поэтому

[1]) Перевод с английского препринта статьи M. F. Atiyah, I. M. Singer «The index of elliptic operators. I» выполнен С. И. Гельфандом.

[2]) Совместно с Р. Боттом.

допускает обобщения. По крайней мере по духу оно сильно похоже на подход Гротендика.

Следующая важная особенность нашего нового подхода состоит в исключении из рассмотрения когомологий, по крайней мере в первом приближении. Алгебраическая топология, которая в действительности связана с изучением эллиптических операторов,— это K-теория [1]).

Это не удивительно, поскольку K-теория может быть грубо охарактеризована как «алгебраическая топология линейной алгебры». Поэтому в этой работе гомологии и когомологии не используются ни явно, ни неявно. Наша основная теорема, дающая формулу для индекса эллиптического оператора, сформулирована чисто в терминах K-теории. Это особенно важно для приложений, с которыми мы будем иметь дело в следующих статьях. Когомологическую формулу, рассматриваемую в [6] можно легко получить из K-теоретической формулы этой статьи. Это, конечно, является лишь упражнением по алгебраической топологии, переходом от одного множества топологических инвариантов к другому, и это будет сделано в третьей статье этой серии. Какая из формул в действительности дает «лучший ответ», является частично делом вкуса. Это зависит от того, какие инварианты более привычны или с какими легче проводить вычисления.

Одно из обобщений задачи об индексе играет некоторую роль в нашем доказательстве и поэтому включено в настоящую статью. Это обобщение относится к эллиптическому оператору, инвариантному относительно компактной группы Ли G. В этом случае индексом будет характер группы G. Подходящей для этого случая алгебраической топологией является K_G-теория [2]) (или эквивариантная K-теория), и наша формула для индекса выражена в терминах этой теории. В статье II этой серии мы покажем, как эта формула может быть выражена в терминах множеств неподвижных точек элементов G. Формула для характеров, получаемая таким способом, тесно связана с обобщенной формулой Лефшеца из [4] и является ее частным случаем, когда неподвижные точки изолированы. Особенно интересным частным случаем этой формулы для характеров (для произвольного множества неподвижных точек) является формула Ленглендса [12] для размерности пространства автоморфных форм. Это явится предметом отдельной статьи [3]).

Кроме уже упомянутых вопросов, в следующих статьях этой серии будут рассмотрены:

(1) Семейства эллиптических операторов, параметризованных пространством X. В этом случае можно определить индекс в $K(X)$.

(2) Вещественные эллиптические операторы. Если, например, D — вещественный кососимметрический эллиптический оператор, $\dim \operatorname{Ker} D \pmod 2$ является инвариантом при деформации. Это можно интерпретировать как индекс, и будет получена общая формула, включающая этот факт как частный случай.

1) См. [1], [2].

2) См. [16].

3) См. также [7].

(3) Многообразия с краем.

(4) Операторы, эллиптические относительно действия группы, т. е. такие, символы которых эллиптичны в направлениях, трансверсальных к орбитам. Для того чтобы удержать эту статью в разумных и удобных для чтения размерах, мы не будем стараться развить всю необходимую топологию и анализ в ней. Вместо этого мы изложим относящийся к этому основной материал. В частности, § 2 содержит обзор K- и K_G-теории с особым упором на те части теорем, которые будут нам нужны. В § 5 мы введем псевдодифференциальные операторы, а в § 6 кратко рассмотрим основные аналитические свойства индекса эллиптических операторов. Все это — достаточно стандартный материал.

Основные идеи доказательства объяснены в § 1. В § 3 мы определяем топологический индекс, используя основные факты о K-теории из § 2. Затем в § 4 мы формулируем некоторые аксиомы для «индексных функций» и доказываем теорему единственности 4.1, из которой следует, что каждая индексная функция, удовлетворяющая этим аксиомам, совпадает с топологическим индексом из § 3. Элементарные свойства аналитического индекса, данные в § 6, показывают, что он является индексной функцией. На этом шаге мы можем сформулировать нашу основную теорему 6.1, которая утверждает просто, что аналитический индекс совпадает с топологическим. В силу теоремы единственности для индексных функций из § 4 достаточно доказать, что аналитический индекс удовлетворяет аксиомам. Это сделано в §§ 8 и 9. В § 7 содержится отступление, связанное с эллиптическими комплексами, и мы показываем, как из теоремы 6.1 следует теорема 7.1 для эйлеровой характеристики эллиптического комплекса.

Многие аналитические идеи, используемые здесь, принадлежат Сили. Он впервые ввел свойство «вырезания», а также проделал для нас подробное рассмотрение операторов на произведении многообразий. Окончательным аналитическим результатам §§ 5—9 мы в значительной мере обязаны помощи Л. Хёрмандера, с которым у нас было много проясняющих вопрос обсуждений. Наконец мы очень рады признать свой долг Р. Пале, работа [14] которого дала такое полное изложение нашего первоначального доказательства и была очень полезна для нас при подготовке этой статьи.

§ 1. Идея доказательства

В этом параграфе мы попробуем изложить некоторые интуитивные соображения о природе доказательства. Более формальное изложение в следующих параграфах будет по техническим причинам проходить слегка по-иному.

Пусть X — подмногообразие многообразия Y, X и Y компактны. Обозначим через i: $X \to Y$ вложение. Пусть A — эллиптический оператор на X. Основной этап нашего доказательства состоит в построении (на уровне символов) эллиптического оператора $i_!(A)$ на Y, для которого

$$\operatorname{index} A = \operatorname{index} i_!(A). \tag{1.1}$$

После того как это сделано, мы можем рассматривать в качестве Y сферу, и общая задача об индексе сведется к случаю операторов на сфере. Для таких операторов задача легко может быть решена. В действительности мы можем пойти еще на один шаг дальше. А именно, если $i: X \to S$ — вложение и $j: P \to S$ — вложение точки, то можно показать, что существует эллиптический оператор B в точке P, для которого $j_!(B) = i_!(A)$ (с точностью до некоторой эквивалентности, сохраняющей индекс). Отсюда

$$\operatorname{index} A = \operatorname{index} i_!(A) = \operatorname{index} j_!(B) = \operatorname{index} B,$$

и задача сведена к точке, где она конечно тривиальна.

Построение $i_!(A)$ и проверка (1.1) являются поэтому основной проблемой. В трубчатой окрестности U многообразия X в Y мы можем рассмотреть «трансверсальный комплекс де Рама» C, т. е. в каждой нормальной плоскости к X мы рассматриваем комплекс де Рама этой плоскости; «тензорное произведение» $A \otimes C$ можно тогда определить как эллиптический комплекс над U, по крайней мере на языке символов. Оказывается, что на границе U имеется естественная тривиализация символа C, что позволяет нам определить символ $A \otimes C$ на всем Y. Это и есть определение $i_!(A)$.

Для вычисления индекса $i_!(A)$ мы используем свойство вырезания [1]), замеченное Сили [11], которое говорит, что

$$\operatorname{index} i_!(A) = \operatorname{index} k_!(A),$$

где $k: X \to Z$ — вложение X в «удвоенное» U. Такое Z расслоено над X на сферы. Более того, символ $k_!(A)$ является тензорным произведением символа A на X и символа, «эллиптического вдоль слоев», который можно грубо описать как «половина» комплекса де Рама вдоль слоев. Если бы теперь Z было прямым произведением $X \times S$, мы могли бы использовать мультипликативное свойство индекса ([14], гл. XIV) и получить, что

$$\operatorname{index} k_!(A) = \operatorname{index} A \cdot \operatorname{index} j_!(1), \tag{1.2}$$

где $j: P \to S$ — вложение точки, а 1 — оператор в P с индексом 1. Это приводит нас к доказательству (1.1) в случае $X = P$, $Y = S$, которое довольно просто проводится прямыми вычислениями (и, более того, ввиду мультипликативного свойства может быть сведено к случаю $\dim S = 1, 2$). В общем случае, когда Z не является прямым произведением, мы должны обобщить мультипликативное свойство индекса, чтобы иметь возможность рассматривать расслоения [2]). При этом формула в общем случае не получается такой простой, как (1.2), но она бывает такой, когда «оператор вдоль слоев» является в некотором смысле грубым. К счастью, комплекс де Рама является в этом смысле грубым, так что (1.2) выполнено и доказательство закончено. Эта грубость комплекса де Рама получается (с некоторой точки зрения) из того, что его группы когомологий являются группами когомологий базисного пространства и поэтому имеют *целочисленный базис*. Пространство решений общего эллиптического оператора обычно не обла-

---

[1]) Очень похожая идея была высказана независимо Дж. Коэном.

[2]) Именно здесь в задачу об индексе полезно ввести группу.

дает такой дискретной структурой и поэтому может «меняться» непрерывным образом.

Возможно, стоит сделать замечание о построении оператора $i_!(A)$. Тривиализация комплекса де Рама, используемая в продолжении символа $A \otimes C$ с U на все Y, соответствует существованию естественной краевой задачи [1]). Использование такой краевой задачи, возможно, более естественно, но, с другой стороны, граничные вопросы требуют более тонких аналитических и топологических рассмотрений. Поэтому мы пока будем держаться в стороне от краевых задач.

Наконец, стоит указать, что данное в этой статье доказательство можно упростить несколькими способами, если получать только теорему об индексе из [6], в частности, если удовлетвориться вычислением индекса дифференциальных операторов. Однако, поскольку нашей целью является доказательство, которое можно различными способами обобщать, мы не стараемся провести эти упрощения. Идеи же во всех случаях одинаковы.

§ 2. Обзор K-теории

Все результаты, изложенные здесь, содержатся в [1]. Основная теорема периодичности также содержится в [3], а более подробные результаты о K_G можно найти в [16]. Нужно отметить, что единственным [2]) нетривиальным результатом, нужным во всем этом, является теорема периодичности [3]).

Пусть X — компактное пространство. Классы изоморфизмов комплексных векторных расслоений над X образуют абелеву полугруппу относительно $\oplus$, и соответствующая абелева группа будет обозначаться через $K(X)$. Если E — векторное расслоение над X, то соответствующий элемент из $K(X)$ будет обозначаться через $[E]$. $K(X)$ является коммутативным кольцом относительно $\otimes$. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ индуцирует естественный гомоморфизм колец $f^*: K(Y) \to K(X)$, который зависит только от гомотопического класса f. $K(P)$ (P — точка) естественно изоморфно кольцу $\mathbf{Z}$ целых чисел. Если X — пространство с отмеченной точкой P, то $\widetilde{K}(X)$ определяется как ядро гомоморфизма

$$K(X) \longrightarrow K(P),$$

индуцированного вложением $P \to X$. Более того, у нас есть естественное разложение

$$K(X) \cong K(P) \oplus \widetilde{K}(X) = \mathbf{Z} \oplus \widetilde{K}(X).$$

Если Y — замкнутое подпространство в X, то через X/Y мы обозначим пространство с отмеченной точкой, получающееся при стягивании Y в точку (если $Y = \varnothing$, то $X/\varnothing = X + P$ — дизъюнктное объединение). Определим

$$K(X, Y) = \widetilde{K}(X/Y).$$

---

[1]) См. [5] в связи граничных значений с тривиализацией эллиптического символа.

[2]) В K_G-теории нам нужна также основная (Петера — Вейля) теорема о представлениях G.

[3]) Дальнейшие замечания о теореме периодичности и о доказательствах из [1] и [3] будут сделаны в этом параграфе.

Если X — локально компактное пространство, то по определению положим $K(X) = \widetilde{K}(X^+)$, где X^+ — одноточечная компактификация X; это будет контравариантным функтором от X относительно собственных отображений, потому что только такие отображения продолжаются на X^+. Это «K-теория с компактными носителями», и имеется другой, очень удобный способ для ее описания. За основные объекты мы возьмем комплексы векторных пучков на X, т. е. последовательности

$$0 \to E^0 \xrightarrow{\alpha} E^1 \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\alpha} E^n \to 0$$

векторных пучков E^i и гомоморфизмов α, для которых $\alpha^2 = 0$. Носителем такого комплекса называется множество тех $x \in X$, для которых последовательность

$$0 \to E_x^0 \to E_x^1 \to \ldots \to E_x^n \to 0$$

не точна. Мы рассмотрим только *комплексы с компактными носителями*. Два таких комплекса E и F называются гомотопными, если на $X \times I$ (I — единичный интервал) существует такой комплекс G, что $G \mid (X \times \{0\}) = E$ и $G \mid (X \times \{1\}) = F$. Классы гомотопий комплексов на X будут обозначаться через $C(X)$. Это — абелева полугруппа относительно операции $\oplus$, которая содержит подполугруппу $C_\varnothing(X)$, состоящую из комплексов с пустым носителем. Вторым определением $K(X)$ является фактор $C(X)/C_\varnothing(X)$, который хотя и является с первого взгляда только полугруппой, может быть легко превращен в группу. Доказательство совпадения двух наших определений $K(X)$ можно найти в [16] [1]). В действительности некомпактные пространства мы будем использовать очень слабо (например, пространство всех векторных расслоений над компактной базой), и читателю будет нетрудно вообще исключить их из рассмотрения. Формализм, однако, получается намного проще и понятнее в локально компактной теории.

Если E — комплекс векторных расслоений с компактным носителем, то через $[E]$ мы обозначим его класс в $K(X)$. Если X в действительности компактно, то

$$[E] = \sum (-1)^i [E^i]. \tag{2.1}$$

Два комплекса E и F, в которые входят одинаковые пучки и гомоморфизмы α_E и α_F которых совпадают вне компактного множества, гомотопны, так что $[E] = [F]$. В действительности мы можем определить класс $[E]$ комплекса E, даже если гомоморфизмы α не определены на некотором компакте L — мы просто умножаем на α $1 - \varphi$, где φ — непрерывная функция с компактным носителем, равная 1 в окрестности L.

Заметим, что $K(X)$— кольцо без единицы, если X не компактно. Если U — открытое множество в локально компактном пространстве X, то у нас есть естественное отображение

$$X^+ \to X^+/(X^+ - U) = U^+,$$

[1]) Если X, Y компактны, то аналогичное определение $K(X, Y)$ через комплексы с носителями на $X - Y$ обсуждается в [1]. Описанный здесь способ следует из этого и свойства непрерывности (2.2) (см. ниже); мы рассматриваем группы $K(\overline{U}, \overline{U} - U)$.

и поэтому естественный гомоморфизм

$$i_*\colon K(U) \to K(X).$$

Поэтому если $\{U_\alpha\}$ — направленное семейство открытых относительно компактных подмножеств в X, группы $K(U_\alpha)$ образуют индуктивную систему групп (с гомоморфизмами $i_*^{\alpha\beta}\colon K(U_\alpha) \to K(U_\beta)$, если $U_\alpha \subset U_\beta$). Тогда K обладает следующим свойством непрерывности:

$$K = \varinjlim K(U_\alpha). \tag{2.2}$$

Доказательство этого свойства вполне элементарно (см. [16]).

Если мы работаем с комплексами фиксированной длины $n \geqslant 1$, то $K(X)$ по-прежнему можно определить как $C^n(X)/C^n_\varnothing(X)$. Выгода использования комплексов произвольной длины лежит в мультипликативной структуре. А именно, если E — комплекс на X, F — комплекс на Y, то $E \boxtimes F$ (внешнее тензорное произведение) будет комплексом на $X \times Y$, который имеет компактный носитель, если у E и F были компактные носители. Это индуцирует отображение произведения

$$K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y).$$

В качестве простого примера умножения комплексов рассмотрим комплексы $0 \to E^0 \xrightarrow{\alpha} E^1 \to 0$ и $0 \to F^0 \xrightarrow{\beta} F^1 \to 0$ с компактными носителями на многообразиях X и Y соответственно. Их внешним тензорным произведением будет комплекс

$$0 \to E^0 \boxtimes F^0 \xrightarrow{\varphi} E^1 \boxtimes F^0 \oplus E^0 \boxtimes F^1 \xrightarrow{\psi} E^1 \boxtimes F^1 \to 0,$$

где $\varphi\colon \alpha \boxtimes 1 \oplus 1 \boxtimes \beta$, $\psi = -1 \boxtimes \beta + \alpha \boxtimes 1$. Теперь, используя метрику в расслоениях, мы можем построить комплекс длины 1, представляющий в $K(X \times Y)$ тот же класс, что и комплекс $E \boxtimes F$, а именно комплекс

$$0 \to E^0 \boxtimes F^0 \oplus E^1 \boxtimes F^1 \xrightarrow{\theta} E^1 \boxtimes F^0 \oplus E^0 \boxtimes F^1 \to 0,$$

где

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha \boxtimes 1 & -1 \boxtimes \beta^* \\ 1 \boxtimes \beta & \alpha^* \boxtimes 1 \end{pmatrix}$$

и α^*, β^* — сопряженные к α, β по отношению к метрике (относительно доказательства того, что этот комплекс эквивалентен $E \boxtimes F$, см. [1], 2.6.10). Этот частный представитель произведения двух комплексов понадобится нам в § 9.

Для приложений к эллиптическим операторам нам в основном понадобятся группы $K(V)$, где V — *вещественное* векторное расслоение над пространством [1]) X. Если W — другое такое расслоение, то, беря композицию произведения

$$K(V) \otimes K(W) \to K(V \times W)$$

---

[1]) В приложениях X будет гладким многообразием, а $V = TX$ — касательным расслоением.

с отображением $K(V\times W)\to K(V\oplus W)$, индуцированным диагональным вложением $X\to X\times X$, мы получаем произведение

$$K(V)\otimes K(W)\to K(V\oplus W). \tag{2.3}$$

Если, в частности, $W=X$, то мы видим, что $K(V)$ есть $K(X)$-модуль.

Пусть E^i, E^{i+1} — комплексные векторные расслоения на X и π^*E^i — индуцированное расслоение на V: слой $(\pi^*E^i)_v$ можно отождествить с $E^i_{\pi(v)}$. Гомоморфизм α: $\pi^*E^i\to\pi^*E^{i+1}$ называется (положительно) однородным степени m, если

$$\alpha_{\lambda v}=\lambda^m\alpha_v\in\operatorname{Hom}(E^i_{\pi(v)}, E^{i+1}_{\pi(v)})$$

для всех $v\in V$ и всех вещественных $\lambda>0$. Заметим, что если мы зафиксируем метрику на V и обозначим через $S(V)$ пучок единичных сфер в V, то такой однородный гомоморфизм α определяется своим ограничением на $S(V)$. Если все гомоморфизмы α комплекса E над V однородны степени m, мы скажем, что E имеет степень m. Если X *компактно* и если всюду вне нулевого сечения V E точен, то E имеет компактный носитель и определяет элемент из $K(V)$. Легко показать, что $K(V)$ в действительности можно определить, используя только однородные комплексы (данной степени). Точнее, пусть ${}^mC(V)$ обозначает полугруппу однородных (с компактными носителями) комплексов степени m по модулю однородных (с компактными носителями) гомотопий и пусть ${}^mC_\varnothing(V)\subset{}^mC(V)$ обозначает элементы, представленные комплексами, ограничение которых на единичные сферы $S(V)$ индуцируется комплексом на X, так что

$$\alpha_v=\|v\|^m\beta_{\pi(v)},$$

где

$$\ldots\to E^i\xrightarrow{\beta}E^{i+1}\to\ldots$$

точен на X. Тогда

$${}^mC(V)/{}^mC_\varnothing(V)\cong C(V)/C_\varnothing(V)\cong K(V).$$

Это доказывается следующим образом. Для данного комплекса E на V с компактным носителем L выберем пучок шаров $B_\rho(V)$ радиуса ρ, содержащий L. Класс $[E]$ зависит только от ограничения E на $B_\rho(V)$. Из того, что X является деформационным ретрактом $B_\rho(V)$, следует, что над $B_\rho(V)$ $E^i\overset{\gamma_i}{\cong}\pi^*F^i$, где F^i обозначает ограничение E^i на нулевое сечение. Более того, если мы выберем γ_i на нулевом сечении равным 1, то этот гомоморфизм будет единственным с точностью до гомотопии. Полагая

$$\alpha_i'=\gamma_{i+1}\alpha_i\gamma_i^{-1}$$

на границе $S_\rho(V)$ пучка $B_\rho(V)$ и продолжая α_i' на V как однородную функцию степени m, мы получаем однородный комплекс E'. Ставя в соответствие комплексу E комплекс E', мы определяем гомоморфизм $C(V)\to{}^mC(V)$, который индуцирует требуемый изоморфизм

$$C(V)/C_\varnothing(V)\to{}^mC(V)/{}^mC_\varnothing(V).$$

Снова ограничиваясь комплексами длины 1, мы можем написать

$$K(V)={}^mC^1(V)/{}^mC^1_\varnothing(V).$$

Степень m играет здесь, конечно, очень маленькую роль. Умножая на $\| v \|^{s-m}$, мы можем отобразить ${}^{m}C(V)$ изоморфно на ${}^{s}C(V)$. Поэтому кажется естественным рассматривать только случай $m = 0$. Однако это неудобно для точного описания произведений. Если E и F — однородные комплексы степени m с компактными носителями над векторными расслоениями V и W соответственно, то $E \boxtimes F$ над $V \times W$ снова будет иметь компактный носитель (т. е. будет точным вне нулевого сечения), если $m > 0$; если же $m \leqslant 0$, то гомоморфизмы в $E \boxtimes F$ будут иметь разрывы в точках вида $(v, 0)$ и $(0, w)$. Этот факт будет иметь большое аналитическое значение в § 9.

С другой стороны, мы не можем ограничиться значениями $r > 0$, поскольку иногда нам обязательно нужно взять $r = 0$. Это бывает, когда X (база V) некомпактно. Однородный комплекс над V, такой как рассматривался выше, не может иметь компактный носитель, если $r \neq 0$, если же $r = 0$, то он имеет компактный носитель, если он точен вне нулевого сечения и, *кроме того*, вне некоторого компакта в X гомоморфизмы α постоянны на слоях V. В действительности для некомпактного X нам будет нужен в точности следующий факт: каждый элемент $a \in K(V)$ можно представить однородным комплексом степени 0 с компактным носителем

$$0 \longrightarrow \pi^*(E^0) \xrightarrow{\alpha} \pi^*(E^1) \longrightarrow 0,$$

где E^0 и E^1 тривиальны вне компакта в X. Это доказывается так же, как раньше. Поскольку $K(V) = \widetilde{K}(V^+)$, мы можем представить a комплексом

$$0 \longrightarrow F^0 \xrightarrow{\varphi} F^1 \longrightarrow 0, \tag{2.4}$$

в котором вне некоторого компакта $L \subset V$ имеют место изоморфизмы

$$\beta_i\colon F^i \mid V - L \longrightarrow (V - L) \times \mathbf{C}^n,$$

а $\varphi = \beta_1^{-1}\beta_0$ над $V - L$. Пусть Y — открытое относительно компактное множество в X, содержащее $\pi(L)$, и ρ выбрано так, что компактное множество L лежит в пучке шаров $B_\rho(V) \mid \overline{Y}$. Тогда a можно представить ограничением комплекса (2.4) на $B_\rho(V) \mid \overline{Y}$. Поскольку $B_\rho(V) \mid Y$ стягивается на компакт $\overline{Y}$,

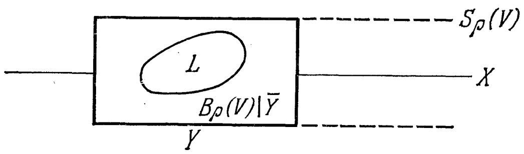

Рис. 1.

мы можем найти на $B_\rho(V) \mid \overline{Y}$ изоморфизмы $\theta_i\colon F^i \longrightarrow \pi^* E^i$ (где E^i — ограничение F^i на нулевое сечение V). Более того, мы можем предположить, что θ_i продолжается до изоморфизмов над $\pi^{-1}(\overline{Y} - Y)$, индуцируемых изоморфизмами β_i; точнее, это значит, что если $x \in \overline{Y} - Y$ и $\pi(v) = x$, то гомоморфизм $\theta_i(v)\colon F^i_v \longrightarrow (\pi^* E^i)_v = F^i_x$ совпадает с композицией $\beta_i(x)^{-1} \circ \beta_i(v)$. Положим теперь $\alpha = \theta_1^{-1}\varphi\theta_0$ на

$$\partial(B_\rho(V) \mid \overline{Y}) = (S_\rho(V) \mid \overline{Y}) \cup (B_\rho(V) \mid (\overline{Y} - Y)),$$

продолжим его на все $V \mid \overline{Y}$, так, чтобы он был однородным степени 0, и продолжим его вне $\overline{Y}$ очевидным образом (используя то, что E^i там тривиальны и α изоморфно тождественному отображению). Теперь у нас представитель для $a \in K(V)$ требуемого типа.

Замечание. Если база X является гладким многообразием, то классы изоморфизмов непрерывных и гладких векторных расслоений на X совпадают (стандартными аппроксимационными рассуждениями). Аналогично, если V тоже гладко, мы получим ту же группу $K(V)$, рассматривая только гладкие расслоения на V при предыдущем определении комплексов.

Предположим теперь, что V — комплексное векторное расслоение на X, и пусть сперва X компактно. Тогда внешняя алгебра $\Lambda^*(V)$ определяет естественным образом комплекс векторных расслоений на V, точный вне нулевого сечения (и однородный степени 1). Мы назовем этот комплекс внешним комплексом V и обозначим его $\Lambda(V)$. Класс $\Lambda(V)$ дает элемент $K(V)$, который мы обозначим λ_V. Поскольку $K(V)$ является $K(X)$-модулем, умножение на λ_V индуцирует гомоморфизм

$$\varphi\colon K(X) \to K(V).$$

Мы назовем его *гомоморфизмом Тома*. Заметим, что если $i\colon X \to V$ — вложение нулевого сечения, то ввиду (2.1)

$$i^*\varphi(x) = \left\{\sum(-1)^i \lambda_i(V)\right\} x \quad \text{для} \quad x \in K(X). \tag{2.5}$$

Для локально компактных X внешний комплекс $\Lambda^*(V)$ не имеет компактного носителя. Однако для каждого комплекса E на X с компактным носителем произведение $\Lambda^*(V) \otimes E$ имеет компактный носитель и

$$E \mapsto \Lambda^*(V) \otimes E$$

снова определяет гомоморфизм Тома $K(X) \to K(V)$.

Поскольку для векторных пространств V, W у нас есть естественный изоморфизм алгебр

$$\Lambda^*(V \oplus W) \cong \Lambda^*(V) \otimes \Lambda^*(W),$$

для векторных расслоений V, W на компактном пространстве X имеет место мультипликативная формула

$$\lambda_V \cdot \lambda_W = \lambda_{V \oplus W}. \tag{2.6}$$

Здесь мы используем произведение (2.3). Из формулы (2.6) следует, что гомоморфизм Тома

$$K(X) \to K(V \oplus W)$$

совпадает с композицией двух гомоморфизмов Тома

$$K(X) \to K(V),$$
$$K(V) \to K(V \oplus W),$$

где второй получается, если $V \oplus W$ рассматривать как расслоение над V.

Фундаментальный результат K-теории, *теорема периодичности Ботта* [1]), утверждает, что φ является *изоморфизмом*. Отметим, в частности, специаль-

[1]) Она называется также теоремой об изоморфизме Тома в K-теории; периодичность Ботта ограничивается частным случаем тривиального расслоения V.

ный случай $X = P$ — точка, $V = \mathbf{C}^n$. Тогда мы имеем изоморфизм

$$\varphi\colon K(P) \longrightarrow K(\mathbf{C}^n).$$

Поэтому $K(\mathbf{C}^n) = \mathbf{Z}$ и порождается $\lambda_n = \lambda_{\mathbf{C}^n}$. Свойство мультипликативности λ показывает, что $\lambda_n = (\lambda_1)^n$.

Существует почти непосредственное обобщение K-теории на категорию G-пространств, где G — компактная группа Ли. А именно, пусть X — компактное G-пространство, т. е. компактное пространство с заданным действием G на X. Под G-векторным расслоением на X мы понимаем G-пространство E, которое является векторным расслоением на X, причем проекция $E \to X$ совместима с действием группы и для каждого $g \in G$ отображение

$$E_x \longrightarrow E_{g(x)},$$

определенное элементом g, линейно. Заметим, что если X — точка, то G-векторным расслоением над X является просто пространство комплексного представления группы G.

Исходя из G-векторного расслоения на компактном G-пространстве X, мы строим кольцо $K_G(X)$ точно так же, как и когда группы нет. Все элементарные построения K-теории распространяются без существенных изменений и на K_G (см. [16]). Теорема периодичности Ботта представляет собой, вообще говоря, новые свойства, и не все доказательства автоматически обобщаются на K_G-теорию. В частности, доказательство, данное в [1], применимо только к случаю, когда векторное расслоение V разлагается в сумму линейных расслоений. Эта разложимая ситуация будет достаточна для наших целей, поскольку фактически мы будем использовать лишь случай, когда X — точка, а G — абелева группа. Однако это ограничение довольно искусственно, и в [3] дается более фундаментальное доказательство теоремы периодичности, применимое прямо к K_G-теории. Поскольку доказательство в [3] использует индекс некоторых классических эллиптических операторов (на сфере и проективном пространстве), может показаться, что мы попали в порочный круг. Однако это не так: основная теорема (6.7) этой статьи не используется в [3]. В некотором смысле теорема (6.7) этой статьи выражает индекс общего эллиптического оператора через индекс некоторых классических операторов, а для них имеются точные методы вычисления, которые приводят прямо к конкретным формулам из II и III статей этой серии.

В действительности мы будем использовать только специальный случай теоремы периодичности, когда X — точка, и поэтому можем сформулировать его точно.

Теорема 21. *Пусть G — компактная группа Ли, V — комплексный G-модуль. Тогда гомоморфизм*

$$\varphi\colon K_G(\text{точка}) \longrightarrow K_G(V), \tag{2.7}$$

задающийся формулой $\varphi(x) = x \cdot \lambda_V$, является изоморфизмом.

Заметим, что K_G (точка) является кольцом характеров или представлений $R(G)$ группы G и поэтому определяется своим ограничением на все абелевы подгруппы. Именно поэтому мы можем ограничиться абелевыми группами и использовать только теорему периодичности в виде, доказанном в [1].

Если G действует на X свободно, так что $X \to X/G$ — главное расслоенное многообразие, то у нас есть естественный изоморфизм

$$K_G(X) \cong K(X/G).$$

Вообще, если $G \times H$ действует на X так, что H действует свободно, то

$$K_{G \times H}(X) \cong K_G(X/H).$$

В дополнение к уже изложенным результатам нам нужна будет небольшая лемма технического характера, точное доказательство которой в литературе отсутствует и которую мы поэтому здесь докажем.

Пусть W — вещественный G-модуль, $V = W \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ — его комплексификация. Тогда отображение

$$\psi\colon V \longrightarrow V,$$

задающееся комплексным сопряжением, является G-отображением. Мы хотим исследовать индуцированный гомоморфизм

$$\psi^*\colon K_G(V) \longrightarrow K_G(V).$$

По теореме 1 $K_G(V)$ является свободным $R(G)$-модулем, порожденным элементом λ_V, так что достаточно вычислить $\psi^*\lambda_V$. Это довольно легко сделать в общей ситуации, но для наших целей достаточно двух случаев, содержащихся в следующей лемме.

Лемма 2.1. *Пусть* $\psi\colon V \longrightarrow V$ — *комплексное сопряжение, где* $V = W \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ — *комплексификация вещественного* G-*модуля* W, *и пусть* ψ^* — *индуцированный гомоморфизм* $K_G(V)$. *Тогда*

(1) *если* $W = \mathbf{R}^1$, $G = O(1)$, *то* $\psi^* a = -a[V]$;

(2) *если* $W = \mathbf{R}^2$, $G = SO(2)$, *то* $\psi^* a = a$.

Доказательство. Случай (2) следует из того, что ψ G-гомотопно тождественному отображению. Положим

$$\psi_t(u + iv) = u + ig_t(v), \quad u, v \in W, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $g_t \in G = SO(2)$ — поворот на угол πt. В случае (1) заметим, что элемент $\psi^*\lambda_V + \lambda_V[V] \in K_{O(1)}(V)$ представляется комплексом

$$\mathbf{C} \oplus V \xrightarrow{\alpha_z} V \oplus \mathbf{C},$$

где

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{C} = \Lambda^0(V)$ — тривиальный $O(1)$-модуль, и мы используем естественные изоморфизмы $V \cong \bar{V}$, $V \otimes V \cong \mathbf{C}$. Пусть $g_t \in GL(2, \mathbf{C})$ — путь, связывающий единицу с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

дает гомотопию из α_z в $\begin{pmatrix} 0 & z\bar{z} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому в единичном круге $S(V)$ α_z гомотопно константе и, значит,

$$\psi^*\lambda_V + \lambda_V[V] = 0.$$

Ввиду (2.7) это оканчивает доказательство.

§ 3. Символы и топологический индекс

Пусть X — дифференцируемое многообразие, TX — касательное расслоение X [1]). Это — вещественное векторное расслоение. Если X — дифференцируемое G-многообразие (т. е. если компактная группа Ли G непрерывно действует на X), то это же верно для TX и мы можем рассматривать группу $K_G(TX)$.

Предположим теперь, что X и Y — G-многообразия, $X \subset Y$ и X компактно. Пусть i: $X \to Y$ — вложение. Определим прежде всего гомоморфизм

$$i_!: K_G(TX) \to K_G(TY).$$

Выберем G-инвариантную риманову метрику на Y (в окрестности X), и пусть N — открытая трубчатая окрестность X в Y. Тогда N является G-многообразием и может быть отождествлено с нормальным расслоением X в Y (которое является, конечно, вещественным векторным G-расслоением). Касательное расслоение TX является замкнутым G-подмногообразием в TY, и трубчатая окрестность TN многообразия TX в TY может быть отождествлена с векторным расслоением на TX, получающимся поднятием $N \oplus N$. Простая проверка этого оставляется читателю, но, поскольку здесь употребляются два экземпляра N, мы примем, что первое слагаемое соответствует точке из Y, а второе — касательным векторам к Y (вдоль слоев N). Более того, мы отождествим $N \oplus N$ с $N \oplus iN = N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, так что окрестность TN многообразия TX в TY отождествляется с $\pi^*(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$, где π: $TX \to X$ — проекция. Поскольку это — комплексное векторное расслоение, у нас есть гомоморфизм Тома

$$\varphi: K_G(TX) \to K_G(TN).$$

Так как TN открыто в TY, у нас есть естественный гомоморфизм

$$k_*: K_G(TN) \to K_G(TY),$$

индуцированный вложением. Комбинируя φ и k_*, мы получаем гомоморфизм

$$i_!: K_G(TX) \to K_G(TY),$$

который и был нам нужен. Легко проверить, что он не зависит от используемой при построении метрики и от выбора трубчатой окрестности. Функториальность этого гомоморфизма (т. е. то, что если $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Z$ — вложения,

[1]) Используя риманову метрику (если нужно, G-инвариантную), мы в топологических параграфах обычно будем отождествлять касательные и кокасательные расслоения. В аналитических параграфах TX будет обозначать кокасательное расслоение.

то $(ji)_! = j_! i_!$) является следствием транзитивности гомоморфизма Тома (см. § 2). Из формулы (2.5) следует, что

$$i^* i_!(x) = \{\sum(-1)^i \lambda^i (N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})\}(x), \quad x \in K_G(TX), \tag{3.1}$$

где i^*: $K_G(TY) \to K_G(TX)$ — гомоморфизм ограничения и $K_G(TX)$ рассматривается обычным образом как $K_G(X)$-модуль.

Используя уже построенный гомоморфизм $i_!$, мы определим гомоморфизм

$$K_G(TX) \longrightarrow R(G).$$

Этот гомоморфизм будет называться *топологическим индексом* и обозначаться t-ind.

Итак, пусть X — компактное дифференцируемое G-многообразие, i: $X \to E$ — дифференцируемое G-вложение X в пространство E вещественного представления группы G. Существование таких вложений фактически является следствием теоремы Петера — Вейля (относительно доказательства см. [13]). Пусть j: $P \to E$ — вложение начала координат P в E. Тогда у нас есть гомоморфизмы

$$K_G(TX) \xrightarrow{i_!} K_G(TE) \xleftarrow{j_!} K_G(TP) = R(G).$$

Но $j_!$ является в точности гомоморфизмом Тома для векторного пространства $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ (рассматриваемого как G-расслоение над точкой P) и, значит, ввиду (2.7) является изоморфизмом. Поэтому мы можем определить

$$t\text{-ind} : K_G(TX) \longrightarrow R(G)$$

по формуле

$$t\text{-ind} = (j_!)^{-1} \circ i_!.$$

Чтобы показать, что это не зависит от выбранного вложения $i : X \longrightarrow E$, рассмотрим другое вложение $i' : X \longrightarrow E'$ и диагональное вложение

$$k : X \longrightarrow E \oplus E', \quad k(x) = i(x) \oplus i'(x).$$

Достаточно показать, что i и k дают один и тот же ответ для t-ind (то же будет верно и для i' и k). Но теперь у нас есть G-гомотопия вложений $X \longrightarrow E \oplus E'$, заданная формулой

$$k_s(x) = i(x) \oplus si'(x), \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

а t-ind зависит только от класса G-гомотопий. Поэтому достаточно сравнить вложение i: $X \to E$ с k_0: $X \to E \oplus E'$. Если N — нормальное расслоение к $i(X)$, то $N \oplus E'$ будет нормальным расслоением для $k_0(X)$. Аналогичный результат верен, очевидно, если X заменить на P. Транзитивность гомоморфизма Тома приводит к следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & K_G(TX) \arrow[dl, "i_!"'] \arrow[dr, "(k_0)_!"] & \\
K_G(TE) \arrow[rr, "\psi"] & & K_G(T(E \oplus E')) \\
 & K_G(TP) \arrow[ul, "j_!"] \arrow[ur, "l_!"'] \arrow[d, equal] & \\
 & R(G) &
\end{tikzcd}$$

где ψ — гомоморфизм Тома для $E'\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ (как G-расслоения над TE), а j, l — вложения $P\to E$ и $P\to E\oplus E'$. Ввиду (2.7) $j_!$ и $l_!$ являются изоморфизмами, и, значит, это же верно для ψ. Теперь из диаграммы следует, что оба возможных пути из $K_G(TX)$ вниз в $R(G)$ совпадают, т. е. формально, что

$$l_!^{-1}(k_0)_! = j_!^{-1}\psi^{-1}\psi i_! = j_!^{-1}i_!.$$

Поэтому i и k_0 приводят к одинаковому значению для t-ind. Таким образом, мы установили, что t-ind не зависит от выбора вложения $X\to E$, используемого при его определении.

Важным элементом из $K(TX)$ на любом компактном многообразии X является класс ρ_X «символа де Рама». Он определяется следующим образом [1]). Рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda^*(T)$ касательного расслоения $T = TX$. Будучи поднятой на T, эта алгебра дает комплекс вещественных векторных расслоений, точный вне нулевого сечения. Его комплексификация определяет поэтому элемент $\rho_X\in K(TX)$. Если X — G-многообразие, на $\Lambda^*(T)$ естественно действует G, и поэтому $\rho_X\in K_G(TX)$.

Замечание. Элемент ρ_X тесно связан (но его не нужно путать) с элементами λ_V из § 2. Эта связь состоит в следующем. Если $T^{\mathbf{C}}=T\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$, элемент

$$\lambda_{T^{\mathbf{C}}}\in K_G(T^{\mathbf{C}}X).$$

Если $i: TX\to T^{\mathbf{C}}X$ — вложение, то

$$\rho_X = i^*\lambda_{T^{\mathbf{C}}}.$$

Если $X=S^n=\mathbf{R}^n\cup\infty$, $G=O(n)$, то мы получаем, в частности, элемент $\rho_{S^n}\in K_{O(n)}(TS^n)$. Этот элемент будет играть фундаментальную роль в нашем доказательстве. В действительности еще более важным будет элемент $j_!(1)\in K_{O(n)}(T\mathbf{R}^n)$, где $j: P\to\mathbf{R}^n$ — вложение начала координат. Следующая лемма показывает, что этот элемент является в некотором смысле «половиной» ρ_X.

Лемма 3.1. *Пусть $j^0: P^0\to S^n$, $j^\infty: P^\infty\to S^n$ — вложения начала координат и бесконечности в S^n и $\theta: TS^n\to TS^n$ — умножение (касательных векторов)* на -1. *Тогда*

$$\rho_{S^n} = j_!^0(1)+\theta^*j_!^\infty(1)\in K_{O(n)}(TS^n). \qquad (3.2)$$

Доказательство. S^n можно отождествить с объединением $B_0^n\cup B_\infty^n$ двух экземпляров единичного диска $B^n\subset R^n$, и это отождествление совместимо с действием $O(n)$. Поэтому у нас есть $O(n)$-изоморфизм

$$TS^n\cong(B_0^n\times\mathbf{R}^n)\cup(B_\infty^n\times\mathbf{R}^n),$$

где точки на экваторе $S^{n-1}=\partial B_0^n=\partial B_\infty^n$ отождествляются при помощи равенства

$$(x,\ v)\to(x,\ h_xv),\quad x\in S^{n-1},\quad v\in\mathbf{R}^n;$$

[1]) Мы будем опускать множитель i, который естествен с точки зрения дифференциальных операторов, но несуществен для наших целей.

h_x обозначает отражение относительно гиперплоскости в $\mathbf{R}^n$, ортогональной к x. Переходя к внешним алгебрам, мы получаем $O(n)$-изоморфизм комплексов

$$\pi^*\Lambda^*T^{\mathbf{C}} \simeq (B_0^n \times \mathbf{R}^n \times \Lambda^*(\mathbf{C}^n)) \cup (B_\infty^n \times \mathbf{R}^n \times \Lambda^*(\mathbf{C}^n)),$$

где $\pi: TS^n \to S^n$ — проекция, и в правой части сделано отождествление

$$(x, v, w) \mapsto (x, h_x v, h_x(w)), \qquad \text{(i)}$$

$h_x(\ )$ обозначает отображение в $\Lambda^*(\mathbf{C}^n)$, индуцированное отображением h_x.

Возьмем теперь $0 \leqslant s \leqslant 1$ и построим новый комплекс A_s векторных расслоений на ${}_sTS^n$, изменяя гомоморфизмы расслоений следующим образом. Определим отображение

$$B_0^n \times \mathbf{R}^n \times \Lambda^i(\mathbf{C}^n) \to B_0^n \times \mathbf{R}^n \times \Lambda^{i+1}(\mathbf{C}^n)$$

формулой

$$(x, v, w) \mapsto (x, v, (v - isx)_\Lambda w), \qquad \text{(ii)}$$

а отображение

$$B_\infty^n \times \mathbf{R}^n \times \Lambda^i(\mathbf{C}^n) \to B_\infty^n \times \mathbf{R}^n \times \Lambda^{i+1}(\mathbf{C}^n)$$

формулой

$$(x, v, w) \mapsto (x, v, (v + isx)_\Lambda w). \qquad \text{(iii)}$$

Поскольку $h_x(x) = -x$, из (i) следует, что (ii) и (iii) согласованы на S^{n-1} и поэтому действительно определяют комплекс векторных расслоений на TS^n. Отметим теперь следующие свойства комплексов A_s:

а) для всех s A_s точен вне нулевого сечения TS^n;

б) A_0 совпадает с первоначальным комплексом $\pi^*\Lambda^*T^{\mathbf{C}}$;

в) A_1 точен вне P_0 и P_∞.

Ввиду а) и б) элемент $\rho_{S^n} \in K_{O(n)}(TS^n)$ можно определять при помощи комплекса A_s для любого s. Ввиду в) комплекс A_1 определяет элемент $a = a^0 + a^\infty$ в

$$K_{O(n)}(T(S^n - S^{n-1})) = K_{O(n)}(T^0) \oplus K_{O(n)}(T^\infty),$$

где $T^0 = T(B_0^n - S^{n-1})$, $T^\infty = T(B_\infty^n - S^{n-1})$. Из наших определений[1]) следует, что

$$a^0 = k_!^0(1), \quad a^\infty = \theta^* k_!^\infty(1),$$

где $k^0: P^0 \to B_0^n - S^{n-1}$, $k^\infty: P^\infty \to B_\infty^n - S^{n-1}$ — вложения. После применения естественного гомоморфизма

$$K_{O(n)}(T(S^n - S^{n-1})) \to K_{O(n)}(TS^n),$$

a переходит в ρ_{S^n}, $k_!^0(1)$ и $k_!^\infty(1)$ в $j_!^0(1)$ и $j_!^\infty(1)$ соответственно, и мы получаем

$$\rho_{S^n} = j_!^0(1) + \theta^* j_!^\infty(1),$$

что и требовалось.

---

[1]) Рассматриваемые комплексы отличаются в действительности скалярным множителем i, который не влияет, однако, на класс в K.

§ 4. Аксиомы для индекса

В предыдущем параграфе мы построили $R(G)$-гомоморфизм

$$t\text{-ind}: K_G(TX) \longrightarrow R(G).$$

В этом параграфе мы сформулируем аксиомы, которыми этот гомоморфизм однозначно определяется. Затем в аналитической части этой статьи мы введем *аналитический индекс* и покажем, что он удовлетворяет этим аксиомам.

Итак, пусть для каждого компактного G-многообразия X нам задан $R(G)$-гомоморфизм

$$\text{ind}_G^X: K_G(TX) \longrightarrow R(G).$$

(Если не возникнет путаницы, мы будем писать ind вместо ind_G^X.) Мы предположим, что этот гомоморфизм функториален по отношению к диффеоморфизмам X и гомоморфизмам G. Точнее, если $f\colon X \to Y$ — G-диффеоморфизм, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_G(TX) \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\text{ind}_G^X"'] & & K_G(TY) \arrow[dl, "\text{ind}_G^Y"] \\ & R(G) & \end{tikzcd}$$

коммутативна, и если $\varphi: G' \longrightarrow G$ — гомоморфизм, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_G(TX) \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\text{ind}_G^X"'] & K_{G'}(TX) \arrow[d, "\text{ind}_{G'}^X"] \\ R(G) \arrow[r, "\varphi^*"] & R(G') \end{tikzcd}$$

коммутативна. Такой функториальный гомоморфизм мы будем называть в дальнейшем *индексной функцией*.

Сформулируем следующие две аксиомы для индексных функций.

($A1$) *Если* X — *точка*, ind *является тождественным гомоморфизмом* $R(G)$.

($A2$) ind *коммутирует с гомоморфизмом* $i_!$ *из* § 3.

Значение ($A1$) ясно: если X — точка, $TX = X$ и $K_G(TX)$ естественно изоморфно $R(G)$. В ($A2$) мы имеем в виду, что для любого вложения $i\colon X \to Y$, где X, Y — компактные G-многообразия, диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_G(TX) \arrow[rr, "i_!"] \arrow[dr, "\text{ind}_G^X"'] & & K_G(TY) \arrow[dl, "\text{ind}_G^Y"] \\ & R(G) & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Топологический индекс t-ind удовлетворяет ($A1$) и ($A2$). Первое очевидно, а второе следует из транзитивности $i_!$.

Следующее предложение почти сразу следует из § 3.

Предложение 4.1. *Пусть* ind — *индексная функция, удовлетворяющая* ($A1$) *и* ($A2$). *Тогда* $\mathrm{ind} = t\text{-}\mathrm{ind}$.

Доказательство. Для данного X рассмотрим вложение i: $X \to E$, где E — вещественный G-модуль. Пусть E^+ — одноточечная компактификация E. Поскольку мы предположили, что G действует на E ортогональными преобразованиями, G действует дифференцируемым образом на сфере E^+, т. е. E^+ является G-многообразием. Пусть теперь i^+: $X \to E^+$ — вложение, определенное вложением i. Аналогично, если P — начало координат в E, у нас есть вложения j: $P \to E$, j^+: $P \to E^+$. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & K_G(TE) \arrow[d] & \\ K_G(TX) \arrow[ur, "i_!"] \arrow[r, "i_!^+"] \arrow[dr, "\mathrm{ind}_G^X"'] & K_G(TE^+) \arrow[d, "\mathrm{ind}_G^{E^+}"] & K_G(TP) = R(G) \arrow[ul, "j_!"'] \arrow[l, "j_!^+"'] \arrow[dl, "\mathrm{ind}_G^P"] \\ & R(G) & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Два верхних треугольника в ней коммутативны ввиду способа, которым определялись $i_!$ и $j_!$. Два нижних треугольника коммутативны ввиду ($A2$). По ($A1$) ind_G^P — тождественное отображение. Теперь $j_!$ — изоморфизм, и $t\text{-}\mathrm{ind}$: $K_G(TX) \to R(G)$ определяется равенством $t\text{-}\mathrm{ind} = j_!^{-1} i_!$. Диаграмма показывает, что он совпадает с ind_G^X.

Аксиому ($A2$) проверять нелегко, и мы сейчас покажем, что она следует из нескольких других, более элементарных аксиом. Сперва мы опишем *аксиому вырезания*.

($B1$). *Пусть* U — (*некомпактное*) G-*многообразие*,

$$j: U \to X, \quad j': U \to X'$$

— *два открытых* G-*вложения в компактные* G-*многообразия* X *и* X'. *Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & K_G(TX) \arrow[dr, "\mathrm{ind}_G^X"] & \\ K_G(TU) \arrow[ur, "j_*"] \arrow[dr, "j'_*"'] & & R(G) \\ & K_G(TX') \arrow[ur, "\mathrm{ind}_G^{X'}"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Если ($B1$) выполнено, мы можем определить

$$\mathrm{ind}: K_G(TU) \to R(G)$$

как композицию $\operatorname{ind} \circ j^*$, и этот гомоморфизм не зависит от выбора вложения $j: U \to X$, если хотя бы одно такое X существует[1]). В частности, если E — вещественный G-модуль, то определено отображение

$$\operatorname{ind}: K_G(TE) \to R(G).$$

Наша следующая аксиома является, как и $(A1)$, нормализационной аксиомой[2]).

$(B2)$. *Пусть* $j_!: \mathbf{R}(O(n)) \to K_{O(n)}(T\mathbf{R}^n)$ *индуцировано вложением* $j: P \to \mathbf{R}^n$, *где* P — *начало координат. Тогда* $\operatorname{ind} j_!(1) = 1$.

В действительности представляет интерес рассмотрение более слабой аксиомы, имеющей дело только с абелевыми группами $O(1)$ и $SO(2)$.

$(B2)'$ $\operatorname{ind} j_!(1) = 1$, *где* $j_!$ *или*

$$R(O(1)) \to K_{O(1)}(T\mathbf{R}^1)$$

или

$$R(SO(2)) \to K_{SO(2)}(T\mathbf{R}^2).$$

Наконец, введем *аксиому мультипликативности*. Она является наиболее важной, и при ее формулировке требуется некоторая осторожность. Простейший вид аксиомы мультипликативности, имеющий дело с произведением многообразий $X \times Y$, является недостаточным. Нам нужно рассматривать не только произведение, но и расслоенные многообразия.

Пусть $P \to X$ — компактное дифференцируемое главное расслоенное многообразие с группой H (компактной группой Ли). Тогда H свободно действует на P справа, и $X = P/H$. Если F — компактное дифференцируемое H-многообразие (H действует слева), мы можем образовать ассоциированное расслоенное многообразие V над X по формуле

$$Y = P \times_H F;$$

это значит, что Y является фактормногообразием $P \times F$ при действии H: $h(p, f) = (ph^{-1}, hf)$. Поскольку H действует на F, она действует и на TF; $P \times_H TF$ является поэтому векторным расслоением над Y. Это расслоение называется обычно касательным расслоением вдоль слоев и обозначается $T(Y/X)$; оно является подрасслоением TY, и (используя метрику) у нас есть разложение

$$TY = T(Y/X) \oplus \pi^* TX,$$

где $\pi: Y \to X$ — проекция. Поэтому у нас есть умножение

$$K(TX) \otimes K(T(Y/X)) \to K(TY).$$

С другой стороны, у нас есть гомоморфизмы

$$K_H(TF) \to K_H(P \times TF) \cong K(P \times_H TF) = K(T(Y/X)).$$

Комбинируя их, мы получаем умножение

$$K(TX) \otimes K_H(TF) \to K(TY).$$

---

[1]) В действительности это предположение может быть опущено, но этот факт нам не понадобится.

[2]) В $(B2)$ мы или предполагаем, что выполнено $(B1)$, так что ind однозначно определен на $K_{O(n)}(T\mathbf{R}^n)$, или мы определим его с помощью стандартного вложения $\mathbf{R}^n \subset (\mathbf{R}^n)^+ = S^n$.

Пусть теперь во всей описанной ситуации действует вторая компактная группа Ли G. Точнее, пусть G действует (слева) на P и F, коммутирует с действием H и индуцирует поэтому действие на $X=P/H$ и $Y=P\times_H F$. Тогда мы получаем умножение

$$K_G(TX)\otimes K_G(T(Y/X))\longrightarrow K_G(TY)$$

и гомоморфизм

$$K_{G\times H}(TF)\longrightarrow K_{G\times H}(P\times TF)\cong K_G(P\times_H TF)=K_G(T(Y/X)),$$

комбинируя которые имеем

$$K_G(TX)\otimes K_{G\times H}(TF)\longrightarrow K_G(TY). \tag{4.2}$$

С другой стороны, если V — произвольный комплексный $G\times H$-модуль, то $P\times_H V$ является G-векторным расслоением над X. Оно продолжается до $R(G)$-гомоморфизма

$$\mu_P: R(G\times H)\longrightarrow K_G(X). \tag{4.3}$$

Напомним, наконец, что $K_G(TX)$ является $K_G(X)$-модулем. Теперь мы можем сформулировать нашу аксиому мультипликативности

($B3$). *Для любых G, H, P, F таких, как указано выше,*

$$\operatorname{ind}_G^Y(ab)=\operatorname{ind}_G^X(a\cdot\mu_P(\operatorname{ind}_{G\times H}^F(b))),$$

где $a\in K_G(TX)$, $b\in K_{G\times H}(TF)$, произведение ab понимается в смысле (4.2) *и μ_P-гомоморфизм из* (4.3).

Пусть, в частности, $\operatorname{ind}_{G\times H}^F(b)$ лежит в подкольце $R(G)$ кольца $R(G\times H)$. Тогда, поскольку μ_P и ind_G^X являются $R(G)$-гомоморфизмами, ($B3$) упрощается до равенства

$$\operatorname{ind} ab=\operatorname{ind} a\cdot\operatorname{ind} b\in R(G).$$

Нам будет нужен только этот специальный случай ($B3$), и поэтому мы сформулируем

($B3$)$'$. *Если* $\operatorname{ind}_{G\times H}^F(b)\in R(G)\subset R(G\times H)$,

то в обозначениях ($B3$)

$$\operatorname{ind}_G^Y(ab)=\operatorname{ind}_G^X(a)\operatorname{ind}_{G\times H}^F b.$$

Замечание. Если F — точка, $H=1$, то из ($B3$)$'$ следует ($A1$), за исключением случая $\operatorname{ind}\equiv 0$ (это, конечно, тривиальное формальное замечание).

Аксиомы ($B3$) и ($B3$)$'$ имеют дело с векторными расслоениями с группой H. Поэтому, в частности, они могут применяться к произведениям (взяв $H=1$). В этом случае из ($B3$)$'$ следует

($B3$)$''$. *Если X, F — G-многообразия, $a\in K_G(TX)$, $b\in K_G(TF)$, то*

$$\operatorname{ind}_G^{X\times F}(ab)=\operatorname{ind}_G^X a\cdot\operatorname{ind}_G^F b.$$

Можно, конечно, переформулировать ($B3$)$''$ в терминах «внешнего произведения» для различных групп G. А именно, если X_i — G_i-многообразие, $a_i\in K_{G_i}(TX_i)$, мы можем образовать произведение $a_1a_2\in K_G(TX)$, где $X=X_1\times X_2$, $G=G_1\times G_2$. Применяя затем ($B3$)$''$ с $X_1=X$, $X_2=F$, мы видим, что

$$\operatorname{ind}_G^X a_1 a_2 = \operatorname{ind}_{G_1}^{X_1} a_1 \cdot \operatorname{ind}_{G_2}^{X_2} a_2,$$

где последнее произведение задается отображением

$$R(G_1) \otimes R(G_2) \to R(G).$$

Наша цель состоит в том, чтобы вывести $(A2)$ из аксиом $(B1)$, $(B2)'$ и $(B3)'$ Сперва мы докажем

Предложение 4.2. *Из аксиом* $(B1)$, $(B2)'$ и $(B3)''$ *следует* $(B2)$.

Доказательство. Аксиома $(B1)$ позволяет нам распространить $(B3)''$ на открытые множества в компактных многообразиях. А именно, если $a_i \in K_{G_i}(TU_i)$, где U_i — открытое множество в X_i $(i = 1, \ldots, k)$, то

$$\operatorname{ind} \prod a_i = \prod \operatorname{ind} a_i. \tag{4.4}$$

(Значение $(B1)$ состоит в том, что $\operatorname{ind} \prod a_i$ можно вычислять при помощи любого многообразия, компактифицирующего $\prod U_i$, а не обязательно с $\prod X_i$.) В частности, это свойство мультипликативности выполнено для $U_i = \mathbf{R}^{n_i}$ и $G_i \subset O(n_i)$, $a_i = j_!^i(1)$, $j^i : P \to \mathbf{R}^{n_i}$. Если все $n_i = 1$ или 2, $G_i = O(1)$ или $SO(2)$, то $(B2)'$ утверждает, что $\operatorname{ind} a_i = 1$. Поэтому ввиду $(B3)'$ $\operatorname{ind} \prod a_i = \prod \operatorname{ind} a_i = 1 \in R(\prod G_i)$. Поскольку $j_!$ мультипликативно, $\prod a_i$ является ограничением $a = j_!(1) \in K_{O(n)}(T\mathbf{R}^n)$. Тогда $\operatorname{ind} a \in R(O(n))$ дает 1 при ограничении на любую подгруппу $\prod G_i$ из $O(n)$ (где $G_i = O(1)$ или $SO(2)$). Но эти компактные подгруппы содержат все циклические подгруппы в $O(n)$, и поэтому их достаточно для определения характера на $O(n)$. Отсюда $\operatorname{ind} a = 1 \in R(O(n))$ и $(B2)$ установлена.

Замечание. Проверка (для аналитического индекса) аксиомы $(B2)$ в действительности не сложнее, чем проверка $(B2)'$, но кажется уместным заметить (как мы сделали в (4.4)), что аксиомы $(B2)'$ достаточно.

Докажем теперь

Предложение 4.3. *Из аксиом* $(B1)$, $(B2)$ *и* $(B3)'$ *следует* $(A2)$.

Если у нас есть индексная функция, удовлетворяющая $(B1)$, то, как было замечено выше, из $(B3)'$ и $(B3)''$ следует аналогичный результат для открытых множеств в компактных многообразиях. А именно, $(B3)'$ остается верной, когда F — открытое множество (инвариантное относительно $G \times H$) в некотором $G \times H$-компактном многообразии $\widetilde{F}$; пространство $Y = P \times_H F$ будет тогда открытым множеством в компактном многообразии $P \times_H \widetilde{F}$. В частности, мы можем взять $F = \mathbf{R}^n$, $\widetilde{F} = (\mathbf{R}^n)^+ = S^n$, $H = O(n)$, $b = j_!(1)$, где $j : A \to \mathbf{R}^n$ — вложение начала координат A. Тогда P является главным $O(n)$-расслоением на компактном многообразии X и G действует на P, коммутируя с $O(n)$. Пусть G тривиально действует на $\mathbf{R}^n$. Пространство $Y = P \times_{O(n)} \mathbf{R}^n$ будет тогда ассоциированным вещественным векторным расслоением над X, которое является G-расслоением. Гомоморфизм

$$K_G(TX) \to K_G(TY),$$

задающийся равенством $a \mapsto ab$, будет в точности гомоморфизмом $i_!$, индуцированным вложением нулевого сечения $i: X \to Y$. Если ind удовлетворяет $(B2)$, то

$$\mathrm{ind}_{O(n)}\, b = 1 \in R(O(n)), \tag{4.5}$$

и если мы рассмотрим G с тривиальным действием на $\mathbf{R}^n$, то эта же формула будет верной при замене $O(n)$ на $G \times O(n)$ (используя функториальность отображения ind относительно гомоморфизма проекции $G \times O(n) \to O(n)$). Применяя $(B3)'$, получаем

$$\mathrm{ind}\, i_!(a) = \mathrm{ind}\, ab = \mathrm{ind}\, a \cdot \mathrm{ind}\, b = \mathrm{ind}\, a \in R(G).$$

Это устанавливает $(A2)$ в специальном случае, когда Y является вещественным векторным расслоением над X. Для произвольного вложения

$$k: X \to Z$$

гомоморфизм

$$k_!: K_G(TX) \to K_G(TZ)$$

определяется как композиция

$$j_!: K_G(TX) \to K_G(TN)$$

и естественного гомоморфизма

$$K_G(TN) \to K_G(TZ),$$

где N — нормальное расслоение для X в Z. В следующей диаграмме

$$\begin{tikzcd}
K_G(TX) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{ind}^X"'] & K_G(TN) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ind}^N"] & K_G(TZ) \arrow[dl, "\mathrm{ind}^Z"] \\
& R(G) &
\end{tikzcd}$$

коммутативность первого треугольника следует из только что доказанного, а второй коммутативен ввиду $(B1)$. Поэтому

$$\mathrm{ind}^Z k_!(a) = \mathrm{ind}^X a \tag{4.6}$$

и $(A2)$ установлено в общем случае.

Из предложений 4.1, 4.2 и 4.3 получаем следующую теорему единственности.

Теорема 4.1. *Пусть* ind — *индексная функция, удовлетворяющая* $(B1)$, $(B2)'$ *и* $(B3)'$. *Тогда* ind $= t$-ind.

Замечание. Нужно заметить, что мы использовали только $(B3)'$, а не $(B3)$. В действительности в § 9 будет отмечено, что для аналитического индекса выполнена более сильная аксиома $(B3)$, и тогда из теоремы 4.1 будет следовать, что t-ind удовлетворяет $(B3)$.

Аксиома $(B2)'$ может быть заменена на другую, которую удобнее проверять [1]. Напомним (см. § 3), что для каждого компактного G-многообра-

[1]) Для проверки $(B2)'$ для аналитического индекса нужно вычислять индекс некоторого оператора в евклидовом пространстве. С некоторой точки зрения это более естественно, чем проверка $(B2)''$ на сфере. Однако для $(B2)'$ нужен более точный анализ, который можно отбросить с помощью топологических деформаций, подразумевающихся в лемме 4.1.

зия X у нас есть «класс символа де Рама» $\rho_X \in K_G(TX)$. Сформулируем теперь следующий вариант $(B2)'$:

$(B2)''$ (i) $\operatorname{ind} \rho_{S^2} = 2 \in R(SO(2))$,

(ii) $\operatorname{ind} \rho_{S^1} = 1 - \xi \in R(O(1))$,

где ξ: $O(1) \to U(1)$ — *стандартное представление*,

(iii) $\operatorname{ind} j_!(1) = 1 \in \mathbf{Z}$,

где j: $P \to S^1$ — *вложение начала координат*.

Замечание. Возникающие здесь элементы лежат в $K_{O(n)}$ $(n = 1$ или $2)$, но в (i) и (iii) мы предпочитаем ограничиться меньшими группами.

Мы покажем теперь, как $(B2)'$ можно заменить на $(B2)''$.

Лемма 4.1. *Пусть* ind — *индексная функция, удовлетворяющая* $(B2)''$. *Тогда она удовлетворяет и* $(B2)'$.

Доказательство. По (3.2)

$$\rho_{S^n} = j_!^0(1) + \theta^* j_!^\infty(1) \in K_{O(n)}(TS^n),$$

где j_0: $P^0 \to S^n$, j^∞: $P^\infty \to S^n$ — вложение начала координат и бесконечности и θ — умножение касательных векторов на -1. Пусть f: $S^n \to S^n$ — отражению относительно экватора, так что f переставляет P^0 и P^∞ и коммутирует с θ. Тогда

$$f^*(\theta^* j_!^\infty(1)) = \theta^* j_!^0(1).$$

Ввиду свойства функториальности индексной функции отсюда следует, что

$$\operatorname{ind} \theta^* j_!^\infty(1) = \operatorname{ind} \theta^* j_!^0(1) \in R(O(n)).$$

Значит,

$$\operatorname{ind} \rho_{S^n} = \operatorname{ind}(1 + \theta^*) j_!^0(1).$$

По определению $j_!^0$ (которое мы теперь будем обозначать просто $j_!$) проводится через группу $K_{O(n)}(T\mathbf{R}^n)$ и на $T\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$ θ совпадает с комплексным сопряжением. Применяя лемму 2.1, мы получаем

$$\operatorname{ind} \rho_{S^2} = \operatorname{ind} 2j_!(1) = 2 \operatorname{ind} j_!(1) \in R(SO(2)),$$

$$\operatorname{ind} \rho_{S^1} = \operatorname{ind}(1 - \xi) j_!(1) = (1 - \xi) \operatorname{ind} j_!(1) \in R(O(1)).$$

Предложения (i) и (ii) из $(B2)''$ дают равенства

$$2 \operatorname{ind} j_!(1) = 2,$$

$$(1 - \xi) \operatorname{ind} j_!(1) = 1 - \xi.$$

Аннулятор элемента $(1 - \xi)$ в

$$R(O(1)) = \mathbf{Z}[\xi]/1 - \xi^2$$

состоит из целых кратных $(1 + \xi)$. Поэтому

$$\operatorname{ind} j_!(1) = 1 \in R(SO(2)),$$

$$\operatorname{ind} j_!(1) = 1 + a(1 + \xi) \in R(O(1))$$

для некоторого целого a. Ограничивая второе уравнение на тождественное отображение в (i) и применяя (iii) из $(B2)''$, мы получаем

$$1 = 1 + 2a, \quad \text{т. е.} \quad a = 0.$$

Поэтому ind $j_!$ (1) $= 1$ и для SO (2), и для O (1). Это — в точности аксиома $(B2)'$, принимая во внимание, что ind на K $(T\mathbf{R}^n)$ определяется с помощью компактификации $\mathbf{R}^n \to S^n$ (см. замечание [2]) на стр. 117).

В заключение этого параграфа укажем, что топологический индекс из § 3 удовлетворяет, очевидно, аксиомам ($A1$), ($A2$) и ($B2$). Совсем не так очевидно, что он удовлетворяет ($B1$) и ($B3$), но после небольших усилий это можно установить непосредственно. С другой стороны, как только мы покажем, что аналитический индекс (который будет введен в § 6) удовлетворяет ($B1$), ($B2$) и ($B3$), из теоремы единственности 4.1 будет следовать, что t-ind $=$ a-ind и, значит, t-ind тоже удовлетворяет этим аксиомам.

§ 5. Псевдодифференциальные операторы

В этом параграфе мы дадим обзор основных аналитических фактов о псевдодифференциальных операторах. Их применение к индексу эллиптических операторов будет изложено в § 6. Доказательства сформулированных здесь результатов содержатся в работах Кона и Ниренберга [11], Сили [15], Хёрмандера [9], [10] и Пале [14]. Мы, однако, постараемся изложить материал так, чтобы только тривиальные результаты оставались без доказательства.

Термин «псевдодифференциальные» применяется в различных местах к слегка различным классам операторов. Для наших целей любой класс достаточно хорош, поскольку, в конце концов, мы образуем замыкание этого класса, и на этом этапе всякое различие между ними исчезает. Возможно, самый большой и наиболее естественный класс содержится в работе Хёрмандера [10], и поэтому мы начнем с того, что напомним его определение [1]).

Рассмотрим сперва открытое множество $U \subset \mathbf{R}^n$, и пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — стандартные координаты. Для каждого целого m через $S^m(U)$ мы обозначим множество таких гладких функций $p(x, \xi)$ на $U \times \mathbf{R}^n$, что для каждого компакта $K \subset U$ и всех мультииндексов α, β

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta, K}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}, \quad x \in K, \ \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Здесь D_ξ^α обозначает частную производную

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{\alpha_1}\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{\alpha_n},$$

$|\alpha| = \sum \alpha_i$ и $C_{\alpha, \beta, K}$ — константа, зависящая от α, β, K и p. Для каждой такой функции p определим линейный оператор

$$P\colon \mathscr{D}(U) \to \mathscr{E}(U)$$

формулой

$$Pu = (2\pi)^{-n}\int p(x, \xi)\,\hat{u}(\xi)\,e^{i\langle x, \xi\rangle}\,d\xi.$$

[1]) В действительности в [10] рассматриваются классы $L^m_{\rho, \delta}$, а нам будет нужен только случай $\rho = 1$, $\delta = 0$. Другие значения ρ и δ использованы в [10] для некоторых классов гипоэллиптических операторов. Проблема индекса для них может быть решена сведением к рассмотренному здесь стандартному эллиптическому случаю. Это доказано в статье Хёрмандера, которая скоро будет опубликована.

Здесь $\mathscr{E}$ обозначает множество гладких функций на U, $\mathscr{D}$ — множество таких же функций с компактным в U носителем и $\hat{u}$ — преобразование Фурье u. Если p является многочленом от ξ степени m с гладкими коэффициентами, то $p \in S^m(U)$ и P — дифференциальный оператор, обычным образом сопоставленный с p. Поэтому и в общем случае зависимость P от p мы будем выражать формулой

$$P = p(x, D),$$

где D обозначает формальный вектор с компонентами $-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Псевдодифференциальным называется такой оператор, который локально имеет указанный вид. Точнее, обозначим через $L^m(U)$ множество всех таких отображений $P\colon \mathscr{D}(U) \to \mathscr{E}(U)$, что для каждой функции $f \in \mathscr{D}(U)$ существует такая функция $p_f \in S^m(U)$, что для всех $u \in \mathscr{D}(U)$ $\quad P(fu) = p_f(x, D)\,u$. Эквивалентное определение ([10], § 2) состоит в том, что P непрерывен и коммутатор

$$p_f(x, \xi) = e^{-i\langle x, \xi\rangle} P\left(f e^{i\langle x, \xi\rangle}\right)$$

принадлежит $S^m(U)$ для всех $f \in \mathscr{D}(U)$.

В этой статье мы введем подкласс $\mathscr{P}^m \subset L^m$, состоящий из операторов P, для которых все функции $p_f(x, \xi)$ лежат в некотором подпространстве $S_0^m(U \times \mathbf{R}^n) \subset S^m(U \times \mathbf{R}^n)$. Функция $p \in S_0^m$, если для всех $\xi \neq 0$ существует предел

$$\sigma(p)(x, \xi) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{p(x, \lambda\xi)}{\lambda^m}.$$

Тогда $\sigma(p)$ является C^∞-функцией на $U \times (\mathbf{R}^n - 0)$, однородной по ξ степени m. Для оператора $P \in \mathscr{P}^m$ определим символ $\sigma(P)$ равенством

$$\sigma(P)(x, \xi) = \sigma(p_f)(x, \xi),$$

где f — произвольная функция, равная 1 вблизи x; этот символ не зависит от выбора f. Символ является C^∞-функцией от (x, ξ) при $\xi \neq 0$ и однороден по ξ степени m. Из результатов [10] следует, что L^m и $\mathscr{P}^m$ инвариантны относительно диффеоморфизмов U, и поэтому соответствующие классы операторов могут быть определены в целом для гладких векторных расслоений на гладких (паракомпактных) многообразиях (относительно деталей см. [10] или [4]). Если E и F — гладкие векторные расслоения над гладким многообразием X, то через $\mathscr{P}^m(X; E, F)$ мы обозначим пространство псевдодифференциальных операторов [1])

$$P\colon \mathscr{D}(X, E) \to \mathscr{E}(X, F)$$

типа $\mathscr{P}^m$. Локально по отношению к системе координат на X и базисам в E и F такой оператор P задается матрицей $p_{ij}(x, D)$ операторов в евклидовом пространстве.

[1]) Через $\mathscr{E}(X, E)$ мы обозначаем пространство гладких сечений E над X, а через $\mathscr{D}(X, E)$ — пространство таких сечений с компактным носителем. Когда ясно, что понимается под X, X будет пропускаться.

Символ $\sigma(P)$ в пространстве $\mathcal{P}^m(X;\, E,\, F)$ определен как гладкий гомоморфизм

$$\sigma(P)\colon\ \pi^*(E) \longrightarrow \pi^* F$$

векторных расслоений на кокасательном пространстве TX (с выброшенным нулевым сечением), где π обозначает проекцию $\pi\colon\ TX \to X$. В каждом слое в TX символ $\sigma(P)$ (положительно) однороден степени m. Через $\mathrm{Symb}^m(X;\, E,\, F)$ мы обозначим пространство всех гомоморфизмов $\pi^*E \to \pi^*F$, которые определены и гладки вне нулевого сечения и однородны степени m на каждом слое TX. Если мы рассмотрим пучок $S(X)$ единичных сфер в TX, определенный какой-нибудь гладкой римановой метрикой, то мы можем, очевидно, отождествить $\mathrm{Symb}^m(X;\, E,\, F)$ с пространством гладких гомоморфизмов $\pi_s^*E \to \pi_s^*F$, где $\pi_s\colon\ S(X) \to X$ — проекция.

Напомним кратко некоторые важные свойства псевдодифференциальных операторов. Прежде всего, определена композиция двух таких операторов, т. е. если

$$P \in \mathcal{P}^m, \qquad Q \in \mathcal{P}^q, \qquad f \in \mathcal{D}(X),$$

то

$$PfQ \in \mathcal{P}^{m+q} \quad \text{и} \quad \sigma(PfQ) = \sigma(P)\, f\sigma(Q).$$

Если X — компактное многообразие, функцию f можно отбросить. Затем для этих операторов определен транспонированный оператор, т. е. если

$$P \in \mathcal{P}^m(X;\, E,\, F),$$

то

$$P^t \in \mathcal{P}^m(X;\, F',\, E'),$$

где $E' = \mathrm{Hom}(E,\, \Omega)$ (Ω — пучок объемов на X, как в [4], § 5), и P^t является транспонированным к P (так что расширение P^t на обобщенные функции совпадает с сопряженным к P). Более того, $\sigma(P^t) = \sigma(P)'$, где $\sigma \mapsto \sigma'$ — отображение символов, индуцируемое изоморфизмом $\mathrm{Hom}(E,\, F) \to \mathrm{Hom}(F',\, E')$ расслоений. Если мы выберем гладкую эрмитову метрику на E и гладкую положительную меру на X, то мы получим антилинейный изоморфизм $E \to E'$. Если у нас есть также метрика на F, то транспонированный оператор $P^t \in \mathcal{P}^m(X;\, F',\, E')$ можно заменить на «формально сопряженный» $P^* \in \mathcal{P}^m(X;\, F,\, E)$. Для его символа мы имеем $\sigma(P^*) = \sigma(P)^*$.

Перейдем теперь к пространствам Соболева. Если E — гладкое векторное расслоение на гладком многообразии X и s — неотрицательное целое число [1]), то через $H_s^{\mathrm{loc}}(X,\, E)$ мы обозначим пространство тех обобщенных сечений u расслоения E, для которых $Du \in L_2^{\mathrm{loc}}$ для всех дифференциальных операторов

$$D\colon\ \mathcal{D}(X,\, E) \longrightarrow \mathcal{D}(X,\, 1)$$

порядка $\leqslant s$ с гладкими коэффициентами. Если в локальных координатах (x_j) и в локальном базисе e_i для E $u = \sum u_i(x)\, e_i$, то (в координатной

---

[1]) Эти пространства определены и для действительных s, но случай целого s достаточен для наших целей. Свойства инвариантности для целого s достаточно тривиальны.

окрестности)

$$u \in H_s^{\mathrm{loc}} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_i \in L_2^{\mathrm{loc}} \quad \text{для всех } \alpha \text{ с } |\alpha| \leqslant s.$$

В пространстве $H_s^{\mathrm{loc}}(X, E)$ имеется естественная топология, заданная счетным множеством[1]) полунорм; оно является пространством Фреше. Рассмотрим также подпространство

$$H_s^{\mathrm{comp}}(X, E) \subset H_s^{\mathrm{loc}}(X, E),$$

состоящее из компактных сечений; оно имеет свою собственную естественную топологию, как индуктивный предел (по компактным $K \subset X$) гильбертовых пространств (эта топология не индуцируется, конечно, топологией в H_s^{loc}). Определим $H_{-s}^{\mathrm{loc}}(X, E)$ как двойственное к $H_s^{\mathrm{comp}}(X, E')$ и $H_{-s}^{\mathrm{comp}}(X, E)$ — как двойственное к $H_s^{\mathrm{loc}}(X, E')$, где, как и выше, $E' = \mathrm{Hom}(E, \Omega)$.

Если X компактно, то $H_s^{\mathrm{loc}} = H_s^{\mathrm{comp}}$ и записывается просто как H_s. Точное выражение для гильбертовой нормы в H_s может быть записано через эрмитову метрику и связность на E и гладкую положительную меру на X следующим образом. Если $s = 0$, то у нас есть обычная L_2-норма

$$\| u \| = \left(\int_X \langle u, u \rangle \right)^{1/2}.$$

Для $s > 0$ мы введем сперва положительный дифференциальный оператор $\Delta = 1 + D^*D$, где $D\colon \mathscr{D}(E) \to \mathscr{D}(E \otimes T)$ — ковариантная производная, определенная связностью, и затем положим

$$\| u \|_s = \left(\int_X \langle \Delta^s u, u \rangle \right)^{1/2}.$$

Для $s < 0$ мы возьмем двойственную норму. Заметим, что если компактная группа G дифференцируемым образом действует на X и E, то инвариантная мера на X и инвариантная связность приводят к гильбертовой норме на $H_s(X, E)$, инвариантной относительно G.

Псевдодифференциальные операторы хорошо ведут себя относительно H_s-пространств, а именно:

Предложение 5.1. *Псевдодифференциальный оператор*

$$P\colon \mathscr{D}(X, E) \to \mathscr{E}(X, E)$$

в $\mathscr{P}^m(X; E, F)$ *продолжается при целых* s *до непрерывного линейного оператора*

$$P_s\colon H_s^{\mathrm{comp}}(X; E) \to H_{s-m}^{\mathrm{loc}}(X; F). \tag{5.1}$$

Пусть $\mathrm{Op}_s^m = \mathrm{Op}_s^m(X; E, F)$ — пространство всех непрерывных линейных отображений $H_s^{\mathrm{comp}}(X; E) \to H_{s-m}^{\mathrm{loc}}(X; F)$ с топологией ограниченной сходимости. Тогда $P \mapsto P_s$ определяет отображение $\mathscr{P}^m \to \mathrm{Op}_s^m$, образ которого мы обозначим через $\mathscr{P}_s^m$. Если X компактно, Op_s^m — банахово пространство (норма будет обозначаться $\| \ \|_s^m$) и замыкание $\overline{\mathscr{P}}_s^m$ имеет, как показывает следующий результат, довольно простую структуру.

---

[1]) Все наши многообразия предполагаются паракомпактными, так что в них можно выбрать счетное множество координатных окрестностей.

Предложение 5.2. *Пусть X — компакт. Тогда символ*

$$\sigma\colon \mathcal{P}_s^m(X;\, E,\, F) \longrightarrow \operatorname{Symb}^m(X;\, E,\, F)$$

непрерывен в топологии, определяемой sup-*нормой на пучке единичных сфер в TX; по непрерывности он продолжается до отображения*

$$\sigma_s\colon \overline{\mathcal{P}_s^m}(X;\, E,\, F) \longrightarrow \overline{\operatorname{Symb}^m}(X;\, E,\, F), \tag{5.2}$$

которое является сюръективным и ядро которого состоит из вполне непрерывных операторов $H_s \longrightarrow H_{s-m}$.

Замечание. Напомним, что $\operatorname{Symb}^m(X;\, E,\, F)$ изоморфно (при ограничении на пучок единичных сфер SX в TX) пространству гладких изоморфизмов $\pi_s^*E \longrightarrow \pi_s^*F$, где $\pi_s\colon S(X) \longrightarrow X$ — проекция. Замыкание $\overline{\operatorname{Symb}^m}(X;\, E,\, F)$ может быть поэтому отождествлено с пространством непрерывных гомоморфизмов $\pi_s^*E \longrightarrow \pi_s^*F$.

Для получения C^∞-результатов из H_s-пространств удобно рассмотреть все s одновременно. Для этого введем (для любого, не обязательно компактного X) пространство $\operatorname{Op}^m(X;\, E,\, F)$ всех линейных операторов $\mathcal{D}(X;\, E) \longrightarrow \mathcal{D}'(X,\, F)$, продолжающихся по непрерывности до операторов из $\operatorname{Op}_s^m(X;\, E,\, F)$ при всех s. Из леммы Соболева следует теперь, что

$$\mathcal{D}(X,\, E) = \bigcap_s H_s^{\mathrm{comp}}(X;\, E), \qquad \mathcal{E}(X,\, F) = \bigcap_s H_s^{\mathrm{loc}}(X,\, E)$$

(в топологии обратного спектра), и поэтому в действительности операторы из Op^m отображают $\mathcal{D}(X,\, E) \longrightarrow \mathcal{E}(X,\, F)$ (непрерывно). Для каждого s у нас есть вложение Op^m в Op_s^m и, значит, отображение Op^m в $\bigcap_s \operatorname{Op}_s^m$, его образ замкнут, и мы снабдим Op^m индуцируемой при этом отображении топологией, которая превращает его в пространство Фреше.

Пространство Op^m является *локальным* пространством в том смысле, что ядра Шварца на $X \times X$ являются локальным пространством распределений. Это значит, что оператор P лежит в Op^m тогда и только тогда, когда для каждой пары φ, ψ C^∞-функций на X с компактным носителем $\varphi P \psi \in \operatorname{Op}^m$. Рассуждая как в [3] (приложение), мы получаем, что если $\{U_i\}$ — покрытие X координатными окрестностями, так что $\{U_i \times U_j\}$ покрывает $X \times X$, то

$$P \in \operatorname{Op}^m(X) \iff P \mid U_i \in \operatorname{Op}^m(U_i) \text{ для всех } i.$$

Более того, полунормы в U_i определяют полунормы в X.

Ввиду предложения 5.1 $\mathcal{P}^m \subset \operatorname{Op}^m$, и мы можем рассмотреть замыкание $\overline{\mathcal{P}^m}$. Поскольку $\mathcal{P}^m$ является по определению локальным пространством операторов и Op^m также локально, $\overline{\mathcal{P}^m}$ будет локальным. $\mathcal{P}^m \longrightarrow \mathcal{P}_s^m$ по определению непрерывно, и поэтому из предложения 5.2 следует, что символ продолжается по непрерывности и дает диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{P}^m} \arrow[rr] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \overline{\mathcal{P}_s^m} \arrow[dl, "\sigma_s"] \\
& \overline{\operatorname{Symb}^m} &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что в этой диаграмме σ_s сюръективно, в то время как для σ это неверно. В действительности описать образ σ довольно трудно, и мы не будем углубляться в этот вопрос. Оператор $P \in \overline{\mathcal{P}}_s^m$ будет называться эллиптическим, если $\sigma_s(P)$ обратим. Оператор $P \in \overline{\mathcal{P}}^m$ назовем эллиптическим, если $\sigma(P)$ обратим (в пространстве $\overline{\mathrm{Symb}^m}$ непрерывных символов); это значит, что P эллиптичен $\Longleftrightarrow$ P_s эллиптичен для некоторого $s \Longleftrightarrow P_s$ эллиптичен для всех s.

Наиболее важной причиной введения замыкания $\overline{\mathcal{P}}^m$ является объяснение поведения псевдодифференциальных операторов на произведении многообразий. А именно, пусть E и F — гладкие векторные расслоения на X и G — гладкое векторное расслоение на Y. Если P — непрерывное линейное отображение $\mathcal{D}(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}(X, F)$, то через $\widetilde{P}$ мы обозначим «поднятый» оператор из $\mathcal{D}(X \times Y, E \boxtimes G)$ в $\mathcal{E}(X \times Y, F \boxtimes G)$, т. е. единственное непрерывное линейное отображение, для которого

$$\widetilde{P}(u \otimes v) = Pu, \quad u \in \mathcal{D}(X, E), \quad v \in \mathcal{D}(Y, G).$$

Если $m \geqslant 0$, то этот поднятый оператор хорошо ведет себя по отношению к пространствам Op^m, т. е. $P \longmapsto \widetilde{P}$ определяет непрерывное отображение

$$\mathrm{Op}^m(X;\ E,\ F) \longrightarrow \mathrm{Op}^m(X \times Y;\ E \boxtimes G,\ F \boxtimes G). \tag{5.3}$$

Чтобы проверить это, достаточно рассмотреть случай, когда X и Y являются областями в евклидовом пространстве, а все расслоения одномерны и тривиальны. Пусть теперь $P \in \mathrm{Op}^m(X)$. Тогда для $f \in \mathcal{D}(X \times Y)$, компактов $K \subset X$, $L \subset Y$ и $|\alpha| + |\beta| = s - m \geqslant 0$ имеем

$$\int_{K \times L} |D_x^\alpha D_y^\beta \widetilde{P} f|^2\, dx\, dy = \int_L dy \int_K |D_x^\alpha \widetilde{P} D_y^\beta f|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C \int_L dy \int_K \sum_{|\gamma| \leqslant |\alpha| + m} |D_x^\gamma D_y^\beta f|^2\, dx \leqslant C \int_{K \times L} \sum_{|\beta| + |\gamma| \leqslant s} |D_x^\gamma D_y^\beta f|^2\, dx\, dy.$$

Это показывает, что отображение (при $s \geqslant m$) $\widetilde{P}$: $H_s(X \times Y) \longrightarrow H_{s-m}(X \times Y)$ непрерывно и $P \longrightarrow \widetilde{P}$ — непрерывное отображение из $\mathrm{Op}^m(X)$ в $\mathrm{Op}_s^m(X \times Y)$. Переходя к сопряженным пространствам, получаем аналогичный результат для $s \leqslant 0$. Поэтому для $m = 0$ или 1 все окончено, и мы получаем непрерывность (5.3). Для $m > 1$ нужны небольшие дополнительные рассуждения, но, поскольку случай $m = 1$ достаточен для наших приложений, мы опустим точное доказательство.

К сожалению, вообще говоря, неверно, что $P \in \mathcal{P}^m \Rightarrow \widetilde{P} \in \mathcal{P}^m$. Однако для замыкания $\overline{\mathcal{P}}^m$ мы имеем

Предложение 5.3. *Если для некоторого $m > 0$ $P \in \overline{\mathcal{P}}^m(X;\ E,\ F)$, то поднятый оператор $\widetilde{P} \in \overline{\mathcal{P}}^m(X \times Y;\ E \boxtimes G,\ F \boxtimes G)$. Более того, $\sigma(\widetilde{P}) = \widetilde{\sigma}(P)$, где $\widetilde{\sigma}$ — поднятие σ, определяемое формулой $\widetilde{\sigma}_{(\xi,\ \eta)}(e \otimes g) = \sigma_\xi(e) \otimes g$, $\xi \in TX$, $\eta \in TY$, $e \in E$, $g \in G$.*

Это в точности свойство ($S6$) из [14], гл. 11, но мы напомним доказательство, которое достаточно элементарно.

Поскольку $\overline{\mathcal{P}}^m$ — локальный класс операторов, достаточно рассмотреть случай $X = U \subset \mathbf{R}^n$, $Y = V \subset \mathbf{R}^q$ области в евклидовом пространстве, а все пучки тривиальны и одномерны. Более того, по непрерывности (5.3) достаточно доказать, что

$$P \in \mathcal{P}^m(U) \Rightarrow \widetilde{P} \in \overline{\mathcal{P}}^m(U \times V). \tag{5.4}$$

Снова ввиду локальности класса $\overline{\mathcal{P}}^m$ достаточно будет показать, что для всех φ, $\psi \in \mathcal{D}(U)$, φ_1, $\psi_1 \in \mathcal{D}(V)$ $Q = \varphi\varphi_1\widetilde{P}\psi\psi_1 \in \overline{\mathcal{P}}^m(U \times V)$. Для этого мы построим семейство $R^t \in \mathcal{P}^0(U \times V)$, определенное при $t > 0$ и такое, что

(i) $Q \circ R^t \in \mathcal{P}^m(U \times V)$,

(ii) $Q \circ R^t \to Q$ в $\mathrm{Op}^m(U \times V)$ при $t \to 0$.

Прежде всего выберем определенное при $t > 0$ семейство функций $\sigma^t(\xi, \eta)$, принимающих значение в единичном интервале и такое, что:

а) σ^t однородна степени 0 и бесконечно дифференцируема вне начала координат;

б) $\sigma^t = 1$ при $|\xi| < t\,|\eta|$, $\sigma^t = 0$ при $|\xi| > 2t\,|\eta|$.

Пусть, кроме того, $\varphi(\lambda)$ есть C^∞-функция параметра $\lambda \in \mathbf{R}$ такая, что

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } |\lambda| \leqslant 1, \\ 1 \text{ при } |\lambda| \geqslant 2. \end{cases}$$

Пусть

$$\rho^t(\xi, \eta) = 1 - \varphi\left(t\left(\sqrt{|\xi|^2 + |\eta|^2}\right)\right)\sigma^t(\xi, \eta).$$

Поведение этой функции указано ниже: $\rho^t = 1$ в горизонтально заштрихованной области и $\rho^t = 0$ в вертикально заштрихованной области.

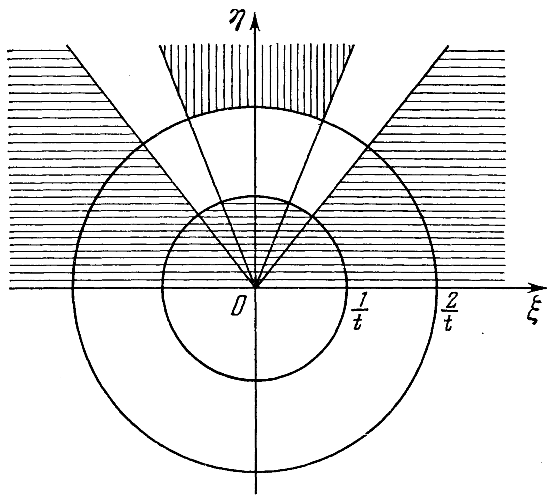

Рис. 2.

Наконец, определим R^t как свертку с обратным преобразованием Фурье ρ^t, так что

$$R^t u(x, y) = (2\pi)^{-n-q} \int \rho^t(\xi, \eta)\, \hat{u}(\xi, \eta)\, e^{i\langle x, \xi\rangle + i\langle y, \eta\rangle}\, d\xi\, d\eta.$$

Тогда оператор $Q_t = Q \circ R_t$ задается интегральной формулой

$$(Q_t u)(x, y) = (2\pi)^{-n-q} \int \varphi_1(y)\,\varphi(x)\,p_\psi(x, \xi)\,\rho^t(\xi, \eta)\,\widehat{\psi_1 u}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Свойства функции ρ^t показывают, что $p_\psi \rho^t \in S_0^m(U \times V \times \mathbf{R}^{n+q})$, так что $Q_t \in \mathcal{P}^m(U \times V)$. Теперь, как замечено в [11], H_s-оценки для псевдодифференциальных операторов не требуют регулярности по (ξ, η). Из того, что для $m \geqslant 0$ $\dfrac{D_x^\beta p_\psi(x, \xi)}{(1+|\xi|+|\eta|)^m}$ ограничено, следует, что $Q \in \mathrm{Op}^m$ (что мы уже знаем). Аналогично для $m > 0$ неравенство

$$\left| \frac{D_x^\beta \{p_\psi(x, \xi)(\rho^t(\xi, \eta) - 1)\}}{(1+|\xi|+|\eta|)^m} \right| < C_\beta t^m$$

(которое легко следует из свойств ρ^t) показывает, что при $t \to 0$ $Q_t - Q \to 0$ в Op^m. Для символов мы имеем

$$\sigma(Q_t) = \varphi_1 \varphi \sigma(p_\psi)(1 - \sigma^t)\,\psi_1 = \varphi_1 \varphi \tilde{\sigma}(P)(1 - \sigma^t)\,\psi\psi_1$$

и при $t - 0$ оно стремится к $\varphi_1 \varphi \tilde{\sigma}(P)\,\psi\psi_1$. Поскольку символ тоже является локальным объектом, отсюда следует нужное равенство $\sigma(\tilde{P}) = \tilde{\sigma}(P)$.

Последнее нужное нам свойство псевдодифференциальных операторов относится к ситуации с действием группы. Пусть X — компактное многообразие, G — компактная группа Ли, гладко действующая на X, E и F — векторные расслоения на X. Тогда G действует на пространстве $\overline{\mathcal{P}}^m(X; E, F)$ (ввиду инвариантности $\overline{\mathcal{P}}^m$ относительно диффеоморфизмов). Если $g \in G$, $P \in \overline{\mathcal{P}}^m$, то действие группы будет обозначаться через $g(P)$. Заметим, что если u — сечение E и $u \mapsto gu$ — действие G на сечениях, то

$$g(P)\,u = gPg^{-1}u.$$

Нам нужно теперь следующее свойство непрерывности[1]).

Предложение 5.4. *Для фиксированного* $P \in \overline{\mathcal{P}}^m(X; E, F)$ *отображение* $G \to \overline{\mathcal{P}}^m \subset \mathrm{Op}^m$, *заданное формулой* $g \mapsto g(P)$, *непрерывно.*

Поскольку действие G на пространствах H_s предполагается унитарным и $\overline{\mathcal{P}}^m$ является равномерным замыканием $\mathcal{P}^m$, достаточно доказать предложение 5.4 для $P \in \mathcal{P}^m$. Пусть A — элемент из алгебры Ли группы G и A_E, A_F — дифференциальные операторы первого порядка, получаемые при действии A на E и F соответственно. Символ $\sigma(A_E)$ задается формулой

$$\sigma(A_E)\,\xi = A(\xi)\,I_E, \tag{5.5}$$

где I_E — тождественное преобразование E и $A(\xi)$ — скалярное произведение кокасательного вектора $\xi \in (TX)_x$ и касательного вектора A_x, определяемого действием A на X. Поэтому

$$\sigma(P)\,\sigma(A_E) = \sigma(A_F)\,\sigma(P)$$

[1]) Приведенным ниже доказательством предложения 5.4 мы обязаны Л. Хёрмандеру. В действительности доказательство инвариантности псевдодифференциальных операторов относительно диффеоморфизмов дает некоторую равномерность, включающую это предложение в качестве частного случая.

и, значит, по основному свойству псевдодифференциальных операторов

$$PA_E - A_F P \in \mathcal{P}^m.$$

Если A лежит в ограниченной окрестности нуля в алгебре Ли, мы можем найти такие константы C_s, что

$$\| PA_E - A_F P \|_s^m < C_s.$$

Для $g_t = \exp tA$ и $u \in \mathcal{D}(E)$ положим

$$f_t = g_t(P)\, u = \exp tA_F \circ P \circ \exp(-tA_E)\, u.$$

Тогда

$$\left\| \frac{df_t}{dt} \right\|_{m-s} = \| \exp tA_F \circ (PA_E - A_F P) \circ \exp(-tA_E)\, u \| \leqslant C_s \| u_s \|,$$

поскольку G действует унитарно во всех пространствах H_s. Поэтому

$$\| f_t - f_0 \|_{m-s} \leqslant C_s t \| u \|_s$$

устанавливает непрерывность отображения $P \longrightarrow g(P)$ в единице G. Поскольку каждый элемент g непрерывно действует на $\overline{\mathcal{P}^m}$, справедливость предложения 5.4 установлена всюду.

Если $P \in \overline{\mathcal{P}^m}$ и dg — нормализованная мера Хаара на G $\left(\text{так что } \int\limits_G dg = 1\right)$, мы ввиду предложения 5.4 можем образовать среднее

$$Av(P) = \int\limits_G g(P)\, dg$$

и оно снова лежит в $\overline{\mathcal{P}^m}$ [1]).

Поскольку $\sigma\colon \overline{\mathcal{P}^m} \longrightarrow \overline{\mathrm{Symb}^m}$ непрерывно, мы сразу же получаем, что

$$\sigma Av(P) = Av(\sigma P). \tag{5.6}$$

Аналогичные результаты справедливы для замыкания $\overline{\mathcal{P}_s^m}$ в каждом пространстве H_s.

§ 6. Индекс эллиптических операторов

Пусть X — *компактное* многообразие, E и F — гладкие векторные расслоения на X. Напомним, что оператор $P \in \mathcal{P}^m(X;\, E,\, F)$ называется *эллиптическим* порядка m, если $\sigma(P)$ обратим. Тогда можно построить такое $Q \in \mathcal{P}^{-m}(X;\, E,\, F)$, что оба оператора $PQ - 1$ и $QP - 1$ задаются гладкими ядрами (и, в частности, вполне непрерывны). Это сразу приводит нас к основным результатам для эллиптических операторов:

Предложение 6.1. *P имеет замкнутый образ,* $\operatorname{Ker} P$ *и* $\operatorname{Coker} P$ *конечномерны, и все обобщенные решения P и его сопряженного бесконечно дифференцируемы, т. е.* $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P_s$ *и* $\operatorname{Coker} P \cong \operatorname{Coker} P_s \cong \operatorname{Ker} P_s^*$ *для всех s.*

По определению индекс P равен

$$\operatorname{index} P = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Coker} P.$$

---

[1]) В действительности верно, что $P \in \mathcal{P}^m \Rightarrow AvP \in \mathcal{P}^m$, но установление этого требует некоторого труда и не нужно для наших целей.

Ввиду последней части предложения 6.1

$$\operatorname{index} P = \operatorname{index} P_s$$

для всех s.

Для операторов $P \in \overline{\mathcal{P}}_s^m$ с обратимым символом мы можем, используя предложение 5.2, найти такое $Q_{s-m} \in \overline{\mathcal{P}}_{s-m}^{-m}(X;\ E,\ F)$, что $QP-1$ и $PQ-1$ вполне непрерывны. Отсюда следует, что P является оператором Фредгольма (из H_s в H_{s-m}), т. е. что образ P замкнут, и $\operatorname{Ker} P$ и $\operatorname{Coker} P$ конечномерны. Поэтому индекс P определен для всех эллиптических $P \in \overline{\mathcal{P}}_s^m$. Ввиду стандартных свойств операторов Фредгольма в гильбертовом пространстве индекс является непрерывной (и, значит, локально постоянной) функцией и не меняется при прибавлении вполне непрерывного оператора. Вместе с предложением 5.2 отсюда следует

Предложение 6.2. *Индекс зависит только от гомотопического класса символа в пространстве непрерывных обратимых символов данного порядка.*

В действительности порядок оператора несуществен в вопросах об индексе, как показывает

Предложение 6.3. *Если P и Q — эллиптические операторы в $\mathcal{P}^m$, $\mathcal{P}^n$ такие, что $\sigma(P)$ и $\sigma(Q)$ совпадают на пучке единичных сфер в TX (в какой-нибудь метрике), то* $\operatorname{index} P = \operatorname{index} Q$.

Для доказательства предложения 6.3 заметим, что $\sigma(P)/\sigma(Q)$ самосопряжен, и поэтому мы можем найти такой самосопряженный эллиптический оператор R, что

$$\sigma(P) = \sigma(Q)\,\sigma(R).$$

Поэтому

$$\operatorname{index} P = \operatorname{index} Q + \operatorname{index} R = \operatorname{index} Q,$$

так как $\operatorname{index} R = 0$ для самосопряженного оператора.

Укажем, наконец, еще два тривиальных формальных свойства индекса:

Предложение 6.4. $\operatorname{index} P \oplus Q = \operatorname{index} P + \operatorname{index} Q$.

Предложение 6.5. *Если P: $\mathcal{D}(X,\ E) \to \mathcal{D}(X,\ F)$ индуцируется изоморфизмом расслоений $E \to F$ на X, то* $\operatorname{index} P = 0$.

Если $P \in \overline{\mathcal{P}}_s^m(X;\ E,\ F)$ эллиптичен, то $\sigma(P)$ определяет, как в § 2, элемент из $K(TX)$. Более того, наше описание $K(TX)$ в § 2 через однородные комплексы (длины 1) и указанные выше свойства индекса (предложения 6.2—6.5) показывают, что $\operatorname{index} P$ *зависит только от класса* $\sigma(P)$ *в* $K(TX)$ и что отображение $P \mapsto \operatorname{index} P$ индуцирует гомоморфизм

$$K(TX) \to \mathbf{Z},$$

который будет называться *аналитическим индексом* и обозначаться a-ind. Заметим, что этот гомоморфизм не зависит от используемых чисел m и s. Независимость от m следует из предложения 6.3, а независимость от s — из того, что $\mathcal{P}^m$ плотно в $\overline{\mathcal{P}}_s^m$ (в нашем случае это есть регулярность предложения 6.1), и из непрерывности индекса.

Вернемся теперь к рассмотрению эллиптического оператора $P \in \overline{\mathcal{P}}^m$, так что P_s — оператор Фредгольма для всех s. Поскольку $\sigma(P_s)$ не зависит от s, из сказанного выше следует, что $\operatorname{index} P_s$ не зависит от s. Но

$$\operatorname{index} P_s = \dim \operatorname{Ker} P_s - \dim \operatorname{Ker} P^*_{m-s}.$$

Поскольку $H_s \supset H_{s+1}$ и $H_{m-s} \subset H_{m-s-1}$, $\operatorname{index} P_s$ является монотонно убывающей функцией s и может быть константой, лишь если $\operatorname{Ker} P_s$ и $\operatorname{Ker} P^*_{m-s}$ не зависят от s. Таким образом, мы установили

Предложение 6.6. *Пусть $P \in \overline{\mathcal{P}}^m$ эллиптичен. Тогда все обобщенные решения уравнения $Pu = 0$ бесконечно дифференцируемы, и то же верно для P^*.*

Из предложения 6.6 и из того, что каждый оператор P_s имеет замкнутый образ, легко следует, что P имеет замкнутый образ. В самом деле, если f лежит в замыкании образа P, то лежит в замыкании образа P_s при всех s и, значит, $f = P_s g_s$ для $g_s \in H_s$. Но из предложения 6.6 следует, что $g_s - g_t \in C^\infty$ для всех s и t, так что $g_s \in C^\infty$. Поэтому мы можем вычислять $\operatorname{index} P_s$ с помощью C^∞-сечений

$$\operatorname{index} P_s = \operatorname{index} P = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Coker} P.$$

Рассмотрим, наконец, ситуацию с действием группы. Если компактная группа Ли G гладко действует на X и на векторных расслоениях над X и если $P \in \overline{\mathcal{P}}^m$, то, как мы видели в § 5, можно усреднить P по X и получить $AvP \in \overline{\mathcal{P}}^m$, причем это усреднение коммутирует со взятием символа. Если, в частности, $\sigma(P)$ инвариантен, то

$$\sigma(AvP) = \sigma(P).$$

Аналогичные результаты выполнены для $P \in \overline{\mathcal{P}}^m_s$.

Остается теперь показать, что G-инвариантный оператор Фредгольма $P\colon H \to H'$, где H и H' — гильбертовы пространства с действием G на них, имеет индекс в $R(G)$, обладающий обычными свойствами. Определение $\operatorname{index} P$ очевидно. А именно, положим

$$\operatorname{index} P = [\operatorname{Ker} P] - [\operatorname{Coker} P] \in R(G),$$

что имеет смысл, поскольку $\operatorname{Ker} P$ и $\operatorname{Coker} P$ — конечномерные G-модули. Для доказательства локальной постоянности этого индекса относительно топологии, задающейся нормой, поступим следующим образом [1]). Пусть $V \subset H$ — произвольное G-инвариантное замкнутое подпространство конечной коразмерности, для которого $V \cap \operatorname{Ker} P = 0$ (например, $V = (\operatorname{Ker} P)^\perp$), и пусть $\widetilde{P}\colon H/V \to H'/P(V)$ индуцировано P. Из точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H/V & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{p}} & & \\
0 & \longrightarrow & P(V) & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & H'/P(V) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

мы получаем G-изоморфизмы $\operatorname{Ker} P \cong \operatorname{Ker} \widetilde{P}$, $\operatorname{Coker} P \cong \operatorname{Coker} \widetilde{P}$. Поэтому

$$\operatorname{index} P = [\operatorname{Ker} P] - [\operatorname{Coker} P] = [\operatorname{Ker} \widetilde{P}] - [\operatorname{Coker} \widetilde{P}] = [H/V] - [H'/P(V)]$$

---

[1]) Мы даем здесь доказательство инвариантности обычного индекса, которое естественно обобщается на случай действия группы.

ввиду простого свойства индекса для конечномерных пространств. Теперь отображение $(PV)^{\perp} \oplus V \to H'$, заданное формулой $x \oplus y \mapsto x + Qy$, является изоморфизмом, когда $Q = P$, а значит, и когда $\|Q - P\|$ мало. Поэтому для таких Q $V \cap \operatorname{Ker} Q = 0$ и $(PV)^{\perp} \cong H'/Q(V)$. Вводя $\widetilde{Q}$: $H/V \to H'/P(V)$, находим, как и раньше,

$$\operatorname{index} Q = \operatorname{index} \widetilde{Q} = [H/V] - [H'/Q(V)] = [H/V] - [P(V)^{\perp}] = \operatorname{index} P.$$

Поэтому index $P \in R(G)$ локально постоянен[1]). Если K вполне непрерывен и G-инвариантен, то гомотопия $P + tK$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, показывает, что index P = index $(P + K)$.

Как уже указывалось во введении, нашей основной теоремой является следующая

Теорема 6.1. *Аналитический индекс и топологический индекс совпадают как гомоморфизмы* $K_G(TX) \to R(G)$.

Эта теорема дает в принципе полный топологический ответ на вопрос о вычислении индекса G-инвариантных эллиптических операторов.

Другие более точные методы вычисления топологического индекса будут выведены в статьях II и III.

Ввиду аксиоматической характеристики топологического индекса, данной в § 4, нам нужно только показать, что топологический индекс удовлетворяет соответствующим аксиомам. То, что

$$a\text{-ind}: K_G(TX) \to R(G)$$

функториален относительно G-диффеоморфизмов X и гомоморфизмов групп $G \to G'$, сразу следует из естественности конструкции.

Аксиома ($A1$) для аналитического индекса довольно тривиальна. Действительно, эллиптический оператор P в точке — это G-линейное отображение P: $V \to W$ конечномерных G-модулей и

$$[\sigma(P)] = [V] - [W] = \operatorname{index} P \in R(G).$$

Проверка остальных аксиом будет проведена в §§ 8, 9.

§ 7. Эллиптические комплексы

В этом параграфе мы на время отклонимся от нашей цели и обсудим понятие *эллиптического комплекса*. Пусть X — компактное многообразие, E^i — последовательность гладких векторных расслоений над X и

$$d_i: \mathscr{D}(X, E^i) \to \mathscr{D}(X, E^{i+1})$$

— псевдодифференциальные операторы порядка m с символами σ_i. Последовательность

$$0 \to \mathscr{D}(E_0) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathscr{D}(E^n) \to 0$$

[1]) Заметим, что мы в действительности не использовали компактности G. Все это выполняется для *унитарных* представлений произвольной группы G, если под $R(G)$ понимать группу, порожденную характерами конечномерных представлений G.

называется *эллиптическим комплексом* (порядка m), если:

(i) $d_{i+1}d_i = 0$,

(ii) комплекс символов

$$0 \longrightarrow p^*E^0 \xrightarrow{\sigma_0} p^*E_1 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} p^*E_n \longrightarrow 0$$

над кокасательным расслоением TX точен всюду вне нулевого сечения.

В [4] показано, что[1]) группы гомологий $H^i(E) = \operatorname{Ker} d_i/\operatorname{Im} d_{i-1}$ конечномерны и поэтому определена эйлерова характеристика

$$\chi(E) = \sum (-1)^i \dim H^i(E).$$

Если компактная группа G действует на E (и коммутирует с d_i), то $H^i(E)$ будет G-модулем и мы определим $\chi(E)$ как элемент из $R(G)$.

Если комплекс имеет длину 1, то у нас есть ровно один эллиптический оператор d_0 и $\chi(E)$ становится индексом d_0. Поэтому эллиптический комплекс является естественным обобщением одного эллиптического оператора. Более того, эллиптические комплексы естественно возникают в дифференциальной геометрии. Двумя наиболее важными примерами являются комплекс де Рама. и его комплексный аналог — комплекс Дольбо.

Комплекс символов $\sigma(E)$ для E является, в терминологии § 2, однородным комплексом с компактным носителем на TX и, значит, определяет элемент из $K(TX)$ или $K_G(TX)$ в групповой ситуации. Проблема вычисления $\chi(E)$ через класс комплекса $\sigma(E)$ в $K_G(TX)$ может быть сведена к проблеме индекса для одного оператора следующим простым приемом.

Введя G-инвариантную метрику на X и на всех расслоениях, мы получим сопряженные d_i^* к операторам d_i. Рассмотрим теперь оператор

$$D\colon \mathscr{D}(\oplus_i E^{2i}) \longrightarrow \mathscr{D}(\oplus_i E^{2i+1}),$$

заданный равенством $D = d + d^*$. Точнее,

$$D(u_0, u_2, \ldots) = (d_0u_0 + d_1^*u_2,\ d_2u_2 + d_3^*u_4,\ \ldots).$$

Поскольку $d^2 = 0$, имеем также $(d^*)^2 = 0$ и, значит,

$$D^*D = \oplus_i\Delta_{2i}, \quad DD^* = \oplus_i\Delta_{2i+1},$$

где Δ_i обозначает «лапласиан» на $\mathscr{D}(E_i)$, заданный равенством

$$\Delta_i = d_{i-1}d_{i-1}^* + d_i^*d_i.$$

Из того, что комплекс $\sigma(E)$ символов точен (вне нулевого сечения), следует, что

$$\sigma(\Delta_i) = \sigma_{i-1}\sigma_{i-1}^* + \sigma_i^*\sigma_i \in \operatorname{Hom}(\pi^*E^i, \pi^*E^i)$$

является изоморфизмом (вне нулевого сечения). Поэтому Δ_i, а значит, и D эллиптичны. Используя свойства регулярности эллиптических операторов, получаем, как в обычной теории Ходжа, что

$$\operatorname{Ker} D = \oplus_i H^{2i} \cong \oplus_i H^{2i}(E),$$
$$\operatorname{Coker} D = \oplus_i H^{2i+1} \cong \oplus_i H^{2i+1}(E),$$

[1]) В действительности в [4] порядки операторов d_i не предполагаются одинаковыми. Здесь для простоты мы это предположим.

где H^i обозначает пространство «гармонических» сечений E^i, т. е. ядро Δ_i. Поэтому

$$\operatorname{index} D = \chi(E).$$

Более того, $\sigma(D)$ и $\sigma(E)$ представляют один и тот же класс в $K_G(TX)$ ([1], 2, 6, 10). Таким образом, мы пришли к случаю одного оператора, и из нашей основной теоремы 6.1 немедленно следует

Теорема 7.1. *Пусть E — G-инвариантный эллиптический комплекс на компактном G-многообразии X и $[\sigma(E)] \in K_G(TX)$ — класс последовательности символов комплекса E. Тогда эйлерова характеристика*

$$\chi(E) = \sum (-1)^i H^i(E) \in R(G)$$

задается равенством

$$\chi(E) = t\text{-ind}\,[\sigma(E)].$$

Замечание. В [3] рассматривался общий эндоморфизм эллиптического комплекса (не обязательно возникающий из компактной группы), и введение метрики, инвариантной относительно T, вообще говоря, невозможно. Поэтому в [3] рассмотрение комплексов существенно, а мы можем обойтись без этого.

§ 8. Аксиомы вырезания и нормализации

В этом параграфе мы покажем, что аналитический индекс из § 6 удовлетворяет аксиоме вырезания $(B1)$ и аксиоме нормализации $(B2)''$ из § 4.

Рассмотрим сперва аксиому вырезания $(B1)$. Пусть U — открытое G-инвариантное подмножество компактного G-многообразия X и $j\colon U \to X$ — вложение. Тогда j индуцирует гомоморфизм

$$j_*\colon K_G(TU) \to K_G(TX).$$

Мы коротко покажем, что каждый элемент $a \in K_G(TU)$ является классом символа эллиптического G-инвариантного оператора P, «тождественного вне компакта». Более точно это значит, что если $P \in \overline{\mathcal{P}}^0(U, E, F)$ G-инвариантен, $[\sigma(P)] = a$, то

$$\alpha\colon E/U - L \to (U-L) \times \mathbf{C}^n,$$
$$\beta\colon F/U - L \to (U-L) \times \mathbf{C}^n$$

— изоморфизмы G-расслоений вне некоторого компакта L и для $u \in \mathcal{D}(U-L; E)$ мы имеем

$$Pu = \beta^{-1}\alpha u. \tag{8.1}$$

Предположим на время, что у нас есть такой оператор P. Тогда он продолжается естественным образом до G-инвариантного оператора j_*P на X; а именно, мы тривиально продолжаем E, F до расслоений j_*E, j_*F на X, используя α и β, а затем продолжаем P вне U по (8.1). Ясно, что

$$[\sigma_{j_*}(P)] = j_*[\sigma(P)] = j_*(a) \in K_G(TX).$$

Ясно, что, с другой стороны, если $u \in \mathcal{D}(X, j_*E)$, то (8.1) показывает, что

$$(j_*P)\, u = 0 \Rightarrow \operatorname{supp} u \subset U \text{ и } Pu = 0.$$

Значит, $\operatorname{Ker} P \cong \operatorname{Ker} j_* P$, и это же верно для сопряженного P^*. Поэтому

$$\operatorname{index}^X j_* P = [\operatorname{Ker} P] - [\operatorname{Ker} P^*] \in R(G).$$

Это показывает, что $\operatorname{index}^X j_* P$ может быть вычислен, если знать оператор P на U, и поэтому он не зависит от X, а это и есть аксиома ($B1$).

Остается только показать, как построить оператор P. Как показано в § 2, мы можем представить $a \in K_G(TU)$ классом комплекса над TU

$$0 \to \pi^* E \xrightarrow{\sigma} \pi^* F \to 0,$$

где E, F — векторные расслоения на U, σ — однородный гомоморфизм степени нуль, и вне компакта $L_1 \subset U$ имеют место изоморфизмы

$$\alpha\colon E/U - L_1 \to (U - L_1) \times \mathbf{C}^n,$$
$$\beta\colon F/U - L_1 \to (U - L_1) \times \mathbf{C}^n,$$

так что $\sigma = \pi^*(\beta^{-1}\alpha)$; более того, все здесь G-инвариантно и мы можем предположить σ гладким. Поскольку построение псевдодифференциального оператора с данным символом проводится локально, а затем распространяется при помощи разбиения единицы, ясно, что мы можем найти такое $P_1 \in \mathcal{P}^0(U;\ E,\ F)$, то $\sigma(P_1) = \sigma$ и P_1 тождественно (или, точнее, индуцировано $\beta^{-1}a$) вне некоторого (G-инвариантного) компакта $L \supset L_1$. Нужный оператор P равен теперь среднему $Av(P_1)$. Строго говоря, мы показали только, что усреднение сохраняет класс $\overline{\mathcal{P}}^0$ на *компактных* многообразиях. Поскольку U некомпактно, нам нужно или распространить доказательство на некомпактные многооразия (что нетрудно), или рассуждать следующим образом. Мы можем, конечно, образовать $Av(P_1)$ в некотором слабом смысле (например, используя топологию обобщенных функций для ядер). С другой стороны, поскольку P_1 тождествен вне компактного множества, ясно, что усреднение по G коммутирует с расширением с X на U, т. е.

$$Av(j_* P_1) = j_* Av(P_1).$$

Поскольку X компактно, $Av(j_* P_1) \in \overline{\mathcal{P}}^0(X;\ j_* E,\ j_* F)$. Поэтому его ограничение на U, равное $Av(P_1)$, лежит в $\overline{\mathcal{P}}^0(U,\ E,\ F)$.

Проверим теперь $(B2)''$. Для предложений (i) и (ii) нам нужно рассмотреть комплекс де Рама внешних дифференциальных форм на n-сфере для $n = 1,\ 2$; классом символа будет тогда в точности элемент ρ_X из аксиомы $(B2)''$. Если мы можем использовать теоремы де Рама, которые утверждают, что когомологии этого комплекса естественно изоморфны обычным группам когомологий $H^1(S^n,\ \mathbf{C})$, то (i) и (ii) из $(B2)''$ станут очевидными. Действительно

$$H^q(S^n,\ \mathbf{C}) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < q < n,$$
$$\dim H^0(S^n,\ \mathbf{C}) = \dim H^n(S^n,\ \mathbf{C}) = 1.$$

Связная группа $SO(2)$ тривиально действует на $H^q(S^2,\ \mathbf{C})$ и поэтому

$$a\text{-ind}\,\rho_{S^2} = 2 \in R(SO(2)),$$

что доказывает (i). С другой стороны, образующая группы $O(1)$ меняет ориентацию S^1 и поэтому действует на $H^1(S^1,\ \mathbf{C})$ как умножение на -1

(но тривиально на $H^0(S^1, \mathbf{C})$). Поэтому

$$a\text{-ind}\,\rho_{S^1} = 1 - \xi \in R(O(1)),$$

что доказывает (ii).

Однако и прямое доказательство, не использующее теоремы де Рама (или когомологии сфер), достаточно просто. Для окружности комплекс де Рама есть $f \longmapsto df = \frac{df}{dx}\,dx$, где $x \bmod 1$ — параметр на окружности. Поэтому $\operatorname{Ker} d$ состоит из постоянных функций, а $\operatorname{Coker} d$ порождается dx. Образующей в $O(1)$ является отображение $x \longmapsto -x$, индуцирующее отображение $dx \longmapsto -dx$ в $\operatorname{Coker} d$ и тождественное в $\operatorname{Ker} d$. Поэтому

$$a\text{-ind}\,\rho_{S^1} = 1 - \xi.$$

Для S^2 комплекс де Рама имеет три члена

$$0 \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d0} \Omega^1 \xrightarrow{d1} \Omega^2 \longrightarrow 0.$$

Снова $\operatorname{Ker} d^0$ состоит из констант. Переходя к сопряженным, мы видим, что $\operatorname{Coker} d^1$ порождается формой объема в Ω^2. Поскольку $SO(2)$ тривиально действует в обоих этих пространствах, остается показать, что нет вклада из Ω^1, т. е. что

$$dw = 0 \Rightarrow w = df, \quad w \in \Omega^1, \quad f \in \Omega^0.$$

Теперь [1]) вне северного полюса лемма Пуанкаре показывает, что $w = df_0$, и аналогично вне южного полюса $w = df_\infty$. Тогда

$$d(f_0 - f_\infty) = 0$$

и, значит,

$$f_0 - f_\infty = \text{const}.$$

Поэтому f_0 в действительности определено всюду, т. е. $f_0 \in \Omega^0$.

Мы переходим теперь к предложению (iii) аксиомы $(B2)''$. Здесь оператор, индекс которого мы хотим сосчитать, не является дифференциальным оператором, и вопрос в этом случае составляет сущность соглашений о знаке [2]). В действительности, если используем мультипликативную аксиому $(B3)''$, мы можем вычислить $(a\text{-ind}\,j_!(1))^2$ на $S^1 \times S^1$ (или лучше на S^2). Используя предложение (i) аксиомы $(B2)''$, которое мы уже проверили, находим

$$(a\text{-ind}\,j_!(1))^2 = 1,$$

так что $a\text{-ind}\,j_!(1) = \pm 1$, и вся задача сводится к тому, чтобы показать, что *при нашем выборе соглашений о знаке* мы должны взять знак $+$. Это и будем мы сейчас делать.

---

[1]) Приводимое здесь доказательство является фактически упрощенным вариантом доказательства теоремы де Рама.

[2]) См. [14], стр. 281, относительно обсуждения различных мест, где затрагивается соглашение о знаках. Поскольку у нас нет когомологий, наша проблема знака немного менее остра, чем в [14].

Рассмотрим сперва оператор P, определенный на окружности $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ равенством

$$Pe^{inx} = \begin{cases} e^{inx} & \text{при} \quad n \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad n < 0. \end{cases}$$

Покажем, что $P \in \mathcal{P}^0$. Пусть носитель $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ сосредоточен на интервале длины $< 2\pi$ (который мы отождествим с его образом в S^1). Коэффициентами Фурье $f(x)e^{ix\xi}$ являются $\hat{f}(n-\xi)$. Поэтому на $\operatorname{supp} f$

$$p_f(x, \xi) = e^{-ix\xi}P(f(x)e^{ix\xi}) = \sum_0^\infty \hat{f}(n-\xi)e^{ix(n-\xi)} = f(x) - \sum_{-1}^{-\infty} \hat{f}(n-\xi)e^{ix(n-\xi)}.$$

При $\xi \to -\infty$ сумма $\sum\limits_0^\infty$ стремится к 0 быстрее любой степени $|\xi|$, и это же верно для всех ее производных по x и ξ. При $\xi \to +\infty$ тем же свойством обладает $\sum\limits_{-1}^{-\infty}$. Поэтому P — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. Поскольку

$$p_f(x, \xi) \to \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad \xi \to +\infty, \\ 0 & \text{при} \quad \xi \to -\infty, \end{cases}$$

$P \in \mathcal{P}^0$ и его символ σ_P задается равенством

$$\sigma_P(x, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \xi > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Определим $A = e^{ix}P + (1-P)$. Это — оператор из $\mathcal{P}^0$, символ которого равен

$$\sigma_A(x, \xi) = \begin{cases} e^{ix} & \text{при} \quad \xi > 0, \\ 1 & \text{при} \quad \xi < 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Поэтому A эллиптичен. С другой стороны, по определению

$$Ae^{inx} = \begin{cases} e^{i(n+1)x} & \text{при} \quad n \geqslant 0, \\ e^{inx} & \text{при} \quad n < 0, \end{cases}$$

и, значит, $\operatorname{Ker} A = 0$, а $\operatorname{Coker} A$ порождается постоянными функциями. Поэтому $\operatorname{index} A = -1$.

Для установления аксиомы $(B2)''$ для аналитического индекса достаточно поэтому показать, что естественный гомоморфизм

$$K(T\mathbf{R}^1) \to K(TS^1) \tag{8.3}$$

переводит элемент $-j_!(1)$ в класс σ_A в $K(TS^1)$. Для этого мы определим непрерывный символ σ на $\mathbf{R}^1$ равенством (8.2) при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и положим $\sigma = 1$ при $x < 0$ или $x > 2\pi$. Ясно, что $[\sigma] \to [\sigma_A]$ при гомоморфизме (8.3). Поэтому нам достаточно установить

$$[\sigma] = -j_!(1) \in K(T\mathbf{R}^1).$$

Оба эти элемента определяются отображениями

$$T\mathbf{R}^1 - (\text{компакт}) \to \mathbf{C}^*.$$

Для σ этим компактом является прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $|\xi| \leqslant 1$, а для $j_!(1)$ — круг $|x+i\xi| \leqslant 1$.

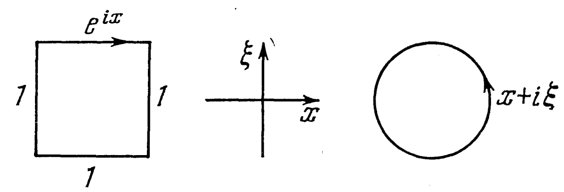

Рис. 3.

На прямоугольнике $\sigma = e^{ix}$ на верхнем отрезке и 1 во всех остальных точках, а $j_!(1) = x + i\xi$ на единичной окружности. Элементарной гомотопией можно перевести σ в $-j_!(1)$, что и оканчивает проверку аксиомы (B2)″.

§ 9. Аксиома мультипликативности

В этом параграфе мы покажем, что аналитический индекс удовлетворяет аксиоме мультипликативности ($B3$) (а значит, и более слабой аксиоме ($B3$)″).

Когда мы это сделаем, все аксиомы, необходимые для применения теоремы 4.1, будут установлены, и мы получим совпадение аналитического и топологического индекса. Таким образом, наша основная теорема 6.1 будет доказана.

Мы напомним сперва аксиому ($B3$). Пусть $Y = P \times_H F$ — расслоенное многообразие над компактным многообразием X, где $P \to X$ — главное расслоенное многообразие с компактной группой Ли H, а F — компактное многообразие, на котором H действует слева. Кроме того, еще одна компактная группа Ли G действует на P и F, коммутируя с действием H. Поэтому G действует на $X = P/H$ и $Y = P \times {}_H F$. В дальнейшем метрики на P, X, F, Y и на рассматриваемых векторных расслоениях предполагаются инвариантными относительно G и (или) H. Аксиома ($B3$) имеет дело с двумя элементами $a \in K_G(TX)$, $b \in K_{G \times H}(TF)$ и их произведением, в некотором смысле, которое является элементом $ab \in K_G(TY)$.

Нам нужно выразить аналитический индекс ab через аналитические индексы a и b. Для этого мы должны сперва представить a, b и ab эллиптическими операторами. Это мы будем делать довольно осторожно.

Рассмотрим сперва $a \in K_G(TX)$. Выберем представляющий этот элемент гладкий символ α порядка[1] 1 (и G-инвариантный). Пусть $A_1 \in \mathcal{F}^1$ имеет символ α, но сперва мы не будем требовать, чтобы A_1 был G-инвариантным. Выберем покрытие $\{U_j\}$ многообразия X и тривиализацию P, а значит, и Y над каждым U_j. Пусть $\{\varphi_j^2\}$ — гладкое разбиение единицы на X относительно этого покрытия, и рассмотрим оператор $A_1^j = \varphi_j A_1 \varphi_j$ на U_j. Пусть $Y_j = p^{-1}(U_j) = U_j \times F$, где $p\colon Y \to X$ — проекция. Тогда поднятый на Y_j оператор $\widetilde{A}_1^j$ принадлежит ввиду (5.4) классу $\overline{\mathcal{F}}^1(Y_j)$. Учитывая множитель φ_j, этот оператор можно рассматривать и как оператор на Y, и поэтому он принадлежит $\overline{\mathcal{F}}^1(Y)$. Усредним теперь по G

$$\widetilde{A} = Av\left(\sum \widetilde{A}_1^j\right) \in \overline{\mathcal{F}}^1(Y).$$

[1]) Как мы обещали в § 5, будем использовать предложение 5,3 только для $m = 1$.

Поскольку $\sigma\left(\sum A_1^j\right)=\sum \varphi_j^2\sigma(A_1)=\alpha$ и так как взятие символа коммутирует с поднятием (предложение 5.3) и с усреднением (5.6),

$$\sigma(\widetilde{A})=\widetilde{\alpha}.$$

Заметим, что поскольку мы всюду взяли инвариантную метрику, поднятие $\widetilde{\alpha}$ символа α определено глобально. А именно, если мы разложим кокасательное к Y пространство на вертикальную компоненту η и горизонтальную компоненту ξ, то $\widetilde{\alpha}(\xi, \eta)=\alpha(\xi)$ (где ξ отождествляется с соответствующим вектором для базисного многообразия X).

Если мы ограничим $\widetilde{A}_1^j$ на сечения, приходящие с базы, т. е. постоянные вдоль слоев Y, мы восстановим первоначальный оператор A_1^j. Поэтому ограничение $\widetilde{A}$ на такие сечения будет G-инвариантным эллиптическим оператором $A=Av\left(\sum A_1^j\right)\in\overline{\mathcal{P}}^1(X)$ с символом α.

Рассмотрим теперь элемент $b\in K_{G\times H}(TF)$. Выберем $G\times H$-инвариантный оператор $B\in\overline{\mathcal{P}}^1(F)$, где $\beta=\sigma(B)$ лежит в классе b. Пусть $\widetilde{B}_1$ — оператор на $P\times F$, получающийся поднятием B. Будучи $G\times H$-инвариантным, он индуцирует G-инвариантный оператор $\widetilde{B}$ на $Y=P\times_H F$: мы просто ограничим $\widetilde{B}_1$ на сечения, постоянные вдоль слоев расслоения $P\times F\to Y$. Поскольку P локально тривиально, на открытых множествах $Y_j=p^{-1}(U_j)=U_j\times F$ ограничение $\widetilde{B}_j$ оператора $\widetilde{B}$ является поднятием B. Теперь из предложения 5.3 следует, что $\widetilde{B}_j\in\overline{\mathcal{P}}^1(Y_j)$ и, значит, $\widetilde{B}\in\overline{\mathcal{P}}^1(Y)$. Пусть $\widetilde{\beta}=\sigma(\widetilde{B})$. $\widetilde{\beta}$ инвариантно определяется по β и в терминах горизонтальной ξ и вертикальной η компонент $\widetilde{\beta}(\xi, \eta)=\beta(\eta)$.

Наконец, перейдем к ab. Для этого мы рассмотрим оператор

$$D=\begin{pmatrix}\widetilde{A} & -\widetilde{B}^* \\ \widetilde{B} & \widetilde{A}^*\end{pmatrix}\in\overline{\mathcal{P}}^1(Y).$$

Он G-инвариантен (вместе с $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$) и

$$\sigma(D)=\begin{pmatrix}\widetilde{\alpha} & -\widetilde{\beta}^* \\ \widetilde{\beta} & \widetilde{\alpha}^*\end{pmatrix}$$

Замечание. Если $A\in\overline{\mathcal{P}}^1(X, E^0, E^1)$ и $B\in\overline{\mathcal{P}}^1(F, G^0, G^1)$, то

$$D\in\overline{\mathcal{P}}^1(Y, E^0\boxtimes G^0\oplus E^1\boxtimes G^1, E^0\boxtimes G^1\oplus E^1\boxtimes G^0)$$

и два поднятия A, возникающие в D, являются поднятиями на различные расслоения: $\widetilde{A}$ в левом верхнем углу матрицы является поднятием на G^0, а $\widetilde{A}^*$ в правом нижнем — сопряженным к поднятию на G^1. Однако положение в матрице всегда показывает, какие расслоения имеются в виду, и для упрощения обозначений мы не будем упоминать о появляющихся в действительности расслоениях.

Как было объяснено в § 2, $\sigma(D)$ является представителем класса ab. Сейчас нам нужно вычислить индекс эллиптического оператора D.

Покажем сперва, что $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ коммутируют. Из локального представления Y_j в виде прямого произведения $U_j\times F$ следует, что $\widetilde{B}_j$ коммутирует с $\widetilde{A}_1^j$. Поэтому $\widetilde{B}$ коммутирует с $\sum \widetilde{A}_1^j$ и ввиду G-инвариантности также с $\widetilde{A} = Av(\sum \widetilde{A}_1^j)$. То же верно и для $\widetilde{B}^*$, и поэтому все недиагональные члены в D коммутируют с диагональными. Поэтому

$$D^*D = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^*\widetilde{A} + \widetilde{B}^*\widetilde{B} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}\widetilde{A}^* + \widetilde{B}\widetilde{B}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix},$$

$$DD^* = \begin{pmatrix} \widetilde{A}\widetilde{A}^* + \widetilde{B}^*\widetilde{B} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}^*\widetilde{A} + \widetilde{B}\widetilde{B}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя ядра (на гладких сечениях), получаем

$$\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D^*D = \operatorname{Ker} P_0 \oplus \operatorname{Ker} Q_0,$$
$$\operatorname{Ker} D^* = \operatorname{Ker} DD^* = \operatorname{Ker} P_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1.$$

Но ввиду предложения 6.6 (регулярность для эллиптических операторов в $\overline{\mathcal{P}}^m$) $\operatorname{Ker} D^* = \operatorname{Coker} D$ и, значит,

$$\operatorname{index}^Y D = (\operatorname{Ker} P_0 - \operatorname{Ker} P_1) + (\operatorname{Ker} Q_0 - \operatorname{Ker} Q_1) \in R(G).$$

Рассмотрим теперь оператор $P_0 = \widetilde{A}^*\widetilde{A} + \widetilde{B}^*\widetilde{B}$ (на гладких сечениях). Для каждого такого сечения U

$$\langle P_0 u, u\rangle = \langle \widetilde{A}u, \widetilde{A}u\rangle + \langle \widetilde{B}u, \widetilde{B}u\rangle$$

и, значит, $\operatorname{Ker} P_0 = \operatorname{Ker} \widetilde{A} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{B}$. Поскольку $\widetilde{B}$ является естественным расширением оператора B на слои, $\operatorname{Ker} \widetilde{B}$ состоит из тех гладких сечений, которые для каждого слоя B, Y_x лежат в $\operatorname{Ker} B_x$ (где B_x — оператор на Y_x, соответствующий B на стандартном слое F). Но это лишь другой способ выражения того, что $\operatorname{Ker} \widetilde{B}$ является пространством гладких сечений векторного расслоения $K_B = P \times_H \operatorname{Ker} B$ на X. Поскольку $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ коммутируют, $\widetilde{A}$ индуцирует оператор C на сечениях K_B. Поскольку $\widetilde{A} = Av(\sum \varphi_j \widetilde{A}_1^j \varphi_j)$, $C = Av(\sum \varphi_j C_j \varphi_j)$, где C_j — оператор, индуцируемый $\widetilde{A}_1^j$ на K_B/U_j. Но по определению $\widetilde{A}_1^j$ это значит, что $C_j = A_1 \otimes IdK_B$. Поэтому $C_j \in \mathcal{P}^1$, $C \in \overline{\mathcal{P}}^1$,

$$\sigma(C) = \alpha \otimes IdK_B.$$

Поэтому C является G-инвариантным эллиптическим оператором на X, и класс $\sigma(C)$ в $K_G(TX)$ является произведением $a[K_B]$ класса $a \in K_G(TX)$ с символом α и класса $[K_B] \in K_G(X)$ векторного расслоения K_B. Поскольку $\widetilde{A}^* = (A^*)^\sim$, замена $\widetilde{A}$ на $\widetilde{A}^*$ меняет P_0 на P_1 и C на C^*. Поэтому

$$\operatorname{Ker} P_0 - \operatorname{Ker} P_1 = \operatorname{Ker} C - \operatorname{Ker} C^* = a\text{-ind}^X a\,[\mathrm{K}_B] \in R(G).$$

Заменяя B на B^*, получаем аналогично

$$\operatorname{Ker} Q_1 - \operatorname{Ker} Q_0 = a\text{-ind}^X a\,[L_B] \in R(G),$$

где $L_B = P \times_H \operatorname{Coker} B$. Наконец, окончательно получаем

$$\operatorname{index}^X D = a\text{-ind}^X (a([K_B] - [L_B])) = a\text{-ind}^X (a\mu_p(a\text{-ind}^F_{G \times H} b)) \in R(G).$$

Поскольку класс $\sigma(D)$ равен произведению ab, мы установим аксиому (B3) для аналитического индекса. Это заканчивает доказательство теоремы 6.1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ф. Атья, «Лекции по K-теории», М., «Мир», 1967.

[2] M. F. Atiyah, Algebraic topology and elliptic operators, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 237—249.

[3] M. F. Atiyah, Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. of Math. (Oxford) (в печати).

[4] M. F. Atiyah, R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, I, Ann. of Math. **86** (1967), 374—407.

[5] M. F. Atiyah, R. Bott, The index theorem for manifolds with boundary, Differential Analysis (Proc. Bombay Symposium), Oxford, 1964.

[6] М. Ф. Атья, Р. Ботт, Индекс эллиптических операторов на компактных многообразиях, Сб. Математика **10** : 3 (1966).

[7] Ф. Хирцебрух, Эллиптические дифференциальные операторы на многообразиях, УМН **23** : 1 (1968), 191—209.

[8] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.

[9] Л. Хёрмандер, Псевдодифференциальные операторы; в сб. «Псевдодифференциальные операторы», М., «Мир», 1967.

[10] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Symposia in Pure Mathem. **10** (в печати) (перевод препринта этой статьи в сб. «Псевдодифференциальные операторы», М., «Мир», 1967).

[11] Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг, Алгебра псевдодифференциальных операторов, сб. «Псевдодифференциальные операторы», М., «Мир», 1967.

[12] R. P. Langlands, The dimension of spaces of holomorphic forms, Amer. Journ Math. 85, (1963), 99—125.

[13] R. Palais, Imbedding of compact differentiable transformation groups in orthogonal representations, J. of Math. and Mech. **6** (1957), 673—678.

[14] R. Palais, Seminar of Atiyah-Singer index theorem, Ann. of Math. Study **57** (Princeton, 1965) (готовится русский перевод).

[15] Р. Т. Сили, Интегродифференциальные операторы на векторных расслоениях, Сб. Математика 11 : 2 (1967).

[16] G. B. Segal, Equivariant K-theory, Publ. Math. IHES.