

"Введение в топологию", конспект лекции 4.

А.С.Мищенко

25 сентября 2012 г.

План

Конструкции топологических пространств.

Несвязное объединение.

Декартово произведение.

Декартово произведение евклидовых пространств.

Сходимость в декартовых произведениях.

График непрерывного отображения.

Замкнутость графика непрерывного отображения.

Тихоновское произведение.

Хаусдорфовость тихоновского произведения.

Фактор топология.

Вещественное проективное пространство.

Лента Мебиуса.

Тор.

Бутылка Клейна.

Конусы и цилиндры отображений.

Надстройка.

$SO(3)$ и RP^3 .

Конструкции топологических пространств

Несвязное объединение топологических пространств

Определение 1 На несвязном объединении $X \sqcup Y$ двух топологических пространств X и Y топология задается каноническим образом: подмножество $U \subset X \sqcup Y$ считается открытым тогда и только тогда, когда пересечение $U \cap X$ открыто в X , а пересечение $U \cap Y$ открыто в Y .

Аналогично определяется топология на несвязном объединении $\coprod_{\alpha} X_{\alpha}$ произвольного семейства топологических пространств X_{α} : подмножество $U \subset \coprod_{\alpha} X_{\alpha}$ считается открытым тогда и только тогда, когда пересечение

$U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для произвольного индекса α . В частности, каждое слагаемое X_α является открытым подмножеством в несвязном объединении $\coprod_\alpha X_\alpha$.

Декартово произведение топологических пространств

Определение 2 Пусть $Z = X \times Y$ – декартово произведение двух топологических пространств X и Y . Топология в декартовом произведении задается следующим каноническим образом: Семейство подмножеств вида $U \times V \subset X \times Y$, у которых подмножество U открыто в X , а подмножество V открыто в Y , объявляется базой открытых множеств в топологии пространства Z .

Другими словами, подмножество $W \subset X \times Y$ является открытым множеством, если для любой его точки $(x, y) \in X \times Y$ имеются такие окрестности $x \in U \subset X$ и $y \in V \subset Y$, что

$$(x, y) \in U \times V \subset W \subset X \times Y.$$

Заметим, что декартово произведение $W = U \times V$ двух открытых подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ является открытым подмножеством в $X \times Y$. Обратное, вообще говоря не верно: открытое подмножество $W \subset X \times Y$ не обязано быть декартовым произведением, как показывает нижеследующий пример евклидовых пространств. **Разобрать более подробно!**

Декартово произведение евклидовых пространств

Теорема 1 Топология в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ совпадает с топологией в декартовом произведении $\prod_{k=1}^n \mathbf{R}_k^1$, где $\mathbf{R}_k^1$ – копия одномерного пространства $\mathbf{R}^1$.

Сходимость в декартовых произведениях

Теорема 2 Направленность $z_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) \in X \times Y$ имеет предел тогда и только тогда, когда существуют пределы направленностей x_α, y_α , причем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} z_\alpha = \left(\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha, \lim_{\alpha \rightarrow \infty} y_\alpha \right).$$

Непрерывность канонических отображений

Вложение в несвязное объединение

Теорема 3 Канонические вложения

$$i_X : X \hookrightarrow X \sqcup Y \text{ и } i_Y : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$$

непрерывны.

Проекции в декартовом произведении

Теорема 4 Канонические проекции $p_X : X \times Y \rightarrow X$ и $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$

$$p_X(x, y) \equiv x; \quad p_Y(x, y) \equiv y; \quad x \in X; \quad y \in Y$$

непрерывны.

График непрерывного отображения

Напомним, что график отображения $f : X \rightarrow Y$ это подмножество $\Gamma_f \subset X \times Y$.

Теорема 5 Пусть пространство Y хаусдорфово. Если отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств непрерывно, то график $\Gamma_f \subset X \times Y$ этого отображения является замкнутым подмножеством в декартовом произведении $X \times Y$.

Доказательство. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Покажем, что график отображения $\Gamma_f \subset X \times Y$ есть замкнутое подмножество. Для этого проверим, что, если $z_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) \in \Gamma_f \subset X \times Y$ некоторая направленность, имеющая предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} z_\alpha = z_0 = (x_0, y_0).$$

Согласно теореме 2 существует покоординатные пределы

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} y_\alpha = y_0.$$

Поскольку $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Gamma_f$, то $y_\alpha = f(x_\alpha)$. Поскольку отображение f непрерывно, то по теореме ??

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} y_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(x_\alpha) = f(x_0).$$

Поскольку пространство Y хаусдорфово, предел направленности единственен, т.е. получаем, что $y_0 = f(x_0)$. Следовательно, $z_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma_f$, что и означает, что подмножество Γ_f замкнуто. ■

Обратное утверждение вообще говоря неверно. Например, рассмотрим следующее отображение $f : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Это отображение не является непрерывным, в то время как его график $\Gamma_f \subset \mathbf{R}^2$ является замкнутым подмножеством.

Декартово произведение (бесконечного) семейства топологических пространств

Рассмотрим семейство топологических пространств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и их декартово произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Напомним, что на множестве X имеются естественные проекции $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ на соответствующий сомножитель X_α .

Определение 3 На множестве X зададим топологию, у которой предбаза открытых множеств задается как всевозможные прообразы $\{p_\alpha^{-1}(U)\}$ открытых подмножеств $U \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$.

Другими словами, подмножества $p_\alpha^{-1}(U) \subset X$, которые образуют предбазу (Проверить наличие определения!) топологии в X , имеют вид

$$p_\alpha^{-1}(U) = U \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta.$$

При этом база топологии, порожденная указанной предбазой, состоит из всевозможных декартовых произведений вида

$$\prod_{i=1}^k U_{\alpha_i} \times \prod_{\beta \neq \alpha_i} X_\beta.$$

Определение 4 Приведенная топология в декартовом произведении топологических пространств называется тихоновской топологией, а топологическое пространство с этой топологией называется тихоновским произведением топологических пространств X_α .

Имеет место

Теорема 6 Топология тихоновского произведения $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ является минимальной топологией на множестве X , для которой все проекции $p_{X_\alpha} : X \rightarrow X_\alpha$ непрерывны.

В случае, когда семейство сомножителей $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ конечно, база топологии в декартовом произведении $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ задается всевозможными произведениями $U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ открытых подмножеств $U_\alpha \subset X_\alpha$. (В соответствии с ранее приведенным определением!)

Теорема 7 Если все пространства X_α хаусдорфовы, то их тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ является хаусдорфовым пространством.

Фактор топология.

Определение фактор топологии.

Три важных примера фактор пространств. (по Ward)

Вещественное проективное пространство.

Лента Мебиуса.

Тор.

Другие примеры.

Бутылка Клейна.

Конусы и цилиндры отображений

Надстройка.

$SO(3)$ и $\mathbb{RP}_3$

Важный пример: Кривая Пеано

Теорема 8 *Пример непрерывного отображения отрезка на треугольник («кривая Пеано»).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Возьмем разбиение отрезка $\delta = [0, 1]$ на две его половины $\delta_0 = [0, \frac{1}{2}]$ и $\delta_1 = [\frac{1}{2}, 1]$. Это разбиение отрезка $[0, 1]$ назовем разбиением первого ранга, а отрезки $[0, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$ — отрезками первого ранга. Разбивая каждый отрезок первого ранга на две половины, получим четыре отрезка $\delta_{00}, \delta_{01}, \delta_{10}, \delta_{11}$, второго ранга, образующие разбиение второго ранга отрезка $[0, 1]$, и т. д.

Разбиение n -го ранга состоит из 2^n отрезков вида $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$, где индексы могут принимать два значения $i_1, i_2, \dots, i_n = 0$ или 1 . Длина этих отрезков равна $\frac{1}{2^n}$. Таким образом, каждый отрезок $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ делится пополам на два отрезка половинной длины: левый $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$ и правый $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$, причем они примыкают друг к другу по общей точке $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n 0} \cap \delta_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$.

Отрезки $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и $\delta_{j_1 j_2 \dots j_n}$ ранга n либо не пересекаются, либо примыкают друг к другу по общей точке. В последнем случае они должны иметь следующий вид $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ и $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ или $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 0 1 \dots 1}$ и $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 1 0 \dots 0}$.

Подобным образом будем разбивать (неравносторонний) прямоугольный треугольник Δ при помощи высоты, опущенной на гипотенузу, на два подобных треугольника Δ_0 — меньший, и Δ_1 — больший. Это разбиение треугольника Δ назовем разбиением первого ранга, а сами треугольники Δ_0 и Δ_1 — треугольниками первого ранга.

Повторяя разбиение дальше, получим треугольники ранга n , $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$, каждый из которых при помощи высоты, опущенной на гипотенузу, делится на два треугольника, меньший $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$ и больший $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$. Диаметры треугольников ранга n оцениваются числом $\frac{1}{q^n}$ для подходящего $q > 1$, и

значит, стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Можно проверить, что треугольники $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ и $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ или $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k 01 \dots 1}$ и $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k 10 \dots 0}$, соответственно, примыкают друг к другу.

Построим теперь отображение отрезка δ в треугольник Δ следующим образом: пусть $x \in \delta$ — произвольная точка. Для каждого ранга отрезков имеется один отрезок $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$, содержащий точку x или два примыкающих отрезка вида $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ и $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ или $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 01 \dots 1}$ и $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 10 \dots 0}$, которые содержат точку x . Если точка x является двоично иррациональной, то имеем первый случай, причем при переходе к рангу $n+1$ отрезок, содержащий точку, будет иметь вид $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$. Если же точка x является двоично рациональной, то начиная с некоторого ранга k пара примыкающих отрезков, которые содержат точку x имеют вид $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 01 \dots 1}$ и $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k 10 \dots 0}$. Рассмотрим тогда последовательность треугольников $P_n = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $n = 1, \dots, n \dots$ для иррациональной точки x , и последовательность объединений $P_n = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k 01 \dots 1} \cup \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k 10 \dots 0}$ для рациональной точки x . В обоих случаях имеем включение $P_n \supset P_{n+1}$, причем диаметр множеств P_n стремится к нулю. Полагаем

$$f(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n,$$

поскольку указанное пересечение непусто и состоит из одной точки.

Осталось только проверить, что отображение f непрерывно, а его образ совпадает со всем треугольником Δ .

Другое построение кривой Пеано

Сначала рассмотрим более простой случае отображения нульмерного множества на одномерный отрезок. Пусть K — канторово совершенное множество. Это подмножество отрезка, $K \subset \mathbf{I} = [0, 1]$, которое получается из отрезка путем выбрасывания из отрезка последовательности серединных отрезков при делении отрезка на три равных части. Всякое вещественное число $x \in [0, 1]$ будем представлять в виде бесконечной дроби в троичном разложении,

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k a_{k+1} \dots, \quad a_i = \{0, 1, 2\},$$

т.е. в виде сходящегося ряда

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \frac{a_5}{3^5} + \dots + \frac{a_k}{3^k} + \frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} + \dots$$

Это представление неоднозначно, поскольку троично рациональное число

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k 00000000 \dots = \\ &= \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \frac{a_5}{3^5} + \dots + \frac{a_k}{3^k}, \quad a_i = \{0, 1, 2\}, a_k \neq 0, \end{aligned}$$

имеет также и другое представление

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k-1} (a_k - 1) 22222222 \dots = \\ &= \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \dots + \frac{a_{k-1}}{3^{k-1}} + \frac{a_k - 1}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{2}{3^{k+2}} \dots, \end{aligned}$$

которые мы должны отождествлять.

После всех этих приготовлений, зададим канторово совершенное множество при помощи чисел, которые в троичном разложении не содержат цифр, равных единице: $a_k \neq 1$, т.е. $a_k = \{0, 2\}$. Для чисел из канторова совершенного множества вышеуказанная неоднозначность представления числа в виде троичной дроби исчезает, поскольку, если троично рациональное число

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k 00000000 \dots, \quad a_k \neq 0,$$

принадлежит канторову совершенному множеству K , то $a_k = 2$, т.е.

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{k-1} 200000000 \dots,$$

Это значит, что его второе представление имеет вид

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{k-1} 122222222 \dots$$

т.е. не подпадает под определение.

Аналогично, число

$$y = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{k-1} 100000000 \dots$$

имеет второе представление

$$y = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{k-1} 022222222 \dots,$$

причем последнее представление подпадает под определение точки из канторова совершенного множества, а первое нет. Таким образом интервалы вида

$$(0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{k-1} 100000000 \dots; 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{k-1} 200000000 \dots)$$

в точности являются теми интервалами, которые выбрасываются из отрезка $[0, 1]$ при построении канторова совершенного множества. Концы же этих интервалов принадлежат канторову совершенному множеству.

Построим теперь отображение

$$f : K \longrightarrow \mathbf{I} = [0, 1]$$

по следующему правилу: если $x \in K$, то y его троичной бесконечной дроби

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k a_{k+1} \dots = \\ &= \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \frac{a_5}{3^5} + \dots + \frac{a_k}{3^k} + \frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} + \dots, \end{aligned}$$

все цифры четные, т.е. $a_k = 2 \cdot b_k$, $b_k = \{0, 1\}$. Зададим отображение f формулой

$$f(x) = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \frac{b_4}{2^4} + \frac{b_5}{2^5} + \dots + \frac{b_k}{2^k} + \frac{b_{k+1}}{2^{k+1}} + \dots \in [0, 1].$$

т.е. бесконечной двоичной дробью

$$f(x) = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k b_{k+1} \dots \in [0, 1].$$

Это отображение сюръективно и непрерывно.

Теперь можно построить непрерывное и сюръективное отображение канторова совершенного множества K на декартов квадрат $\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \mathbf{I}^2$: Точке $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k a_{k+1} \dots \in K$ сопоставим пару точек

$$y = 0, b_1 b_3 b_5 b_7 b_9 \dots b_{2k-1} b_{2k+1} \dots \in \mathbf{I}$$

и

$$z = 0, b_2 b_4 b_6 b_8 b_{10} \dots b_{2k} b_{2k+2} \dots \in \mathbf{I}.$$

таким образом получается сюръективное и непрерывное отображение

$$F : K \longrightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{I} = \mathbf{I}^2.$$

Для завершения построения кривой Пеано остается продолжить отображение F с канторова совершенного множества $K \subset [0, 1]$ на весь отрезок $[0, 1]$.