

# "Введение в топологию", конспект лекции 3.

А.С.Мищенко

12 сентября 2012 г.

## План

**Определение.**

**Непрерывность отображения в точке**

**Предел отображения по Коши.**

Сходимость по направленному множеству.

Единственность предела направленности.

**Предел отображения в предельной точке по Гейне.**

Предел отображения в предельной точке по Гейне для метрических пространств.

**Непрерывность по Коши и по Гейне.**

**Свойства непрерывных отображений.**

Композиция непрерывных отображений.

Сужение непрерывного отображения.

Непрерывность объединения отображений.

**Кривая Пеано.**

## 1 Непрерывные отображения

### Определение

Рассмотрим два топологических пространства  $X, Y$  с топологиями  $\mathcal{T}_X$  и  $\mathcal{T}_Y$ , соответственно.

**Определение 1** *Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется непрерывным, если для каждого открытого подмножества  $U \subset Y$ , т.е.  $U \in \mathcal{T}_Y$ , прообраз  $f^{-1}(U) \subset X$  является открытым подмножеством в топологическом пространстве  $X$ , т.е.  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ . Свойство непрерывности отображения можно переформулировать в терминах замкнутых множеств: отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется непрерывным, если для каждого замкнутого подмножества  $F \subset Y$  прообраз  $f^{-1}(F) \subset X$  является замкнутым подмножеством в топологическом пространстве  $X$ .*

В самом деле подмножество  $F$  замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение  $Y \setminus F$  открыто. Поскольку прообраз  $f^{-1}(F)$  можно выразить формулой через его дополнение:

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F),$$

то замкнутость подмножества  $f^{-1}(F)$  эквивалентна открытости подмножества  $f^{-1}(Y \setminus F)$ , что эквивалентно непрерывности отображения  $f$  по первому определению.

## Непрерывность отображения в точке

Непрерывность отображения  $f : X \rightarrow Y$  можно подразбить на отдельные свойства в каждой точке  $x_0 \in X$ .

**Определение 2** Скажем, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $x_0$ , если для любой открытой окрестности  $U \ni f(x_0)$  образа  $f(x_0)$  найдется окрестность  $V \ni x_0$  точки  $x_0$ , для которой выполнено включение

$$f(V) \subset U.$$

**Теорема 1** Если точка  $x_0 \in X$  является изолированной точкой пространства  $X$ , то любое отображение  $f$  автоматически непрерывно в точке  $x_0$ .

Очевидно, что

**Теорема 2** непрерывное отображение непрерывно в каждой точке, и наоборот, если отображение  $f$  непрерывно в каждой точке, то оно является непрерывным отображением.

Непрерывность отображения в предельной точке тоже можно разбить на два отдельных свойства: существования предела функции в точке и совпадения предела со значением в точке.

## Предел отображения по Коши

**Определение 3** Скажем что отображение  $f : X \rightarrow Y$  имеет предел (по Коши) в предельной точке  $x_0 \in X$ , равный  $y \in Y$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y,$$

если для любой открытой окрестности  $U \ni y$  точки  $y$  найдется открытая окрестность точки  $x_0$ ,  $V \ni x_0$ , для которой выполнено включение образа выколотой окрестности

$$f(V \setminus x_0) \subset U.$$

**Определение 4** Тогда определение непрерывности отображения  $f : X \rightarrow Y$  в точке  $x_0$  можно сформулировать как равенство предела отображения в точке  $x_0$  и его значения в той же точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

В частности, если условие равенства предела и значения не выполнено, т.е. в случае, когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

отображение  $f$  можно доопределить в точке  $x_0$  по непрерывности, изменяя значение отображения  $f$  в точке  $x_0$ , положив  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Так измененное отображение уже будет непрерывным в точке  $x_0$ .

### Сходимость по направленному множеству

Рассмотрим направленное множества индексов  $(A, <)$  и направленность точек  $x_\alpha$  топологического пространства  $X$ , индексированное направленным множеством  $A$ .

**Определение 5** Скажем, что предел направленности  $x_\alpha$  равен точке  $x_0$  (которая не обязана быть предельной точкой),

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0,$$

или, что направленность сходится к точке  $x_0$ , если для любой открытой окрестности  $U \ni x_0$  точки  $x_0$  найдется такой индекс  $\alpha_0 \in A$ , что для любого индекса  $\alpha \succ \alpha_0$  выполнено включение  $x_\alpha \in U$ .

**Теорема 3** Заметим, что если точка  $x_0$  является изолированной, а  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0$ , то в этом случае направленность  $x_\alpha$  должна быть постоянной, начиная с некоторого индекса  $\alpha_0$ :

$$x_\alpha \equiv x_0 = \mathbf{const} \quad \text{для } \alpha \succ \alpha_0.$$

Для метрического пространства  $(X, \rho)$  определение предела направленности можно переписать в терминах сходимости расстояний:

**Теорема 4** равенство  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0$  эквивалентно

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \rho(x_\alpha, x_0) = 0.$$

### Единственность предела направленности

Нет причин считать, что предел некоторой направленности (если он существует) единственен. Другими словами, если  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0$  и  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = y_0$ , то равенство  $x_0 = y_0$  не обязательно.

**Теорема 5** *Например, если топологическое пространство  $X$  состоит более, чем из одной точки, и антидискретно, т.е. у него открытыми подмножествами является только два подмножества, пустое подмножество  $\emptyset$  и само  $X$ , то тогда всякая точка является пределом любой направленности.*

**Теорема 6** *Пусть  $X$  такое топологическое пространство, что любая сходящаяся направленность имеет единственный предел. Тогда  $X$  хаусдорфово. И обратно, у хаусдорфова пространства любая сходящаяся направленность имеет единственный предел.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если пространство  $X$  не хаусдорфово, то тогда имеется пара различных точек  $x \neq y \in X$ , для которых любые открытые окрестности  $U$  точки  $x \in U$  и окрестности  $V$  точки  $y \in V$  пересекаются, т.е. существует точка  $z_{U,V} \in U \cap V$ . Тогда направленность  $z_{U,V}$  имеет по крайней мере два предела: точку  $y$  и точку  $x$ .

## Предел отображения в предельной точке по Гейне

Применяя понятие предела направленности можно дать эквивалентное определение предела отображения в предельной точке. Рассмотрим произвольную направленность  $x_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , удовлетворяющую двум условиям: 1) для любого индекса  $\alpha \in A$  выполнено неравенство  $x_\alpha \neq x_0$ ; 2)  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0$ .

**Определение 6** *Скажем, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  имеет предел (по Гейне) в точке  $x_0$ , равный  $y \in Y$ , если для любой направленности  $x_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , для которой выполнены предыдущие два условия, имеет место равенство*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(x_\alpha) = y.$$

**Теорема 7 (Сходимость по Гейне)** *Два определения предела отображения в предельной точке по Коши и по Гейне эквивалентны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (Коши)  $\Rightarrow$  (Гейне): **Вставить доказательство.**

(Гейне)  $\Rightarrow$  (Коши): Если одноточечное подмножество  $\{x_0\}$  является открытым, сходимость отображения  $f$  по Коши очевидна, поскольку выколота окрестность  $\{x_0\} \setminus x_0$  является пустым множеством, а, значит, образ  $f(\{x_0\} \setminus x_0)$  пуст и лежит в любой окрестности точки  $y$ .

Противоположный случай заключается в том, что любой открытой окрестности  $U \ni x_0$  ее выколота окрестность не пуста. Рассмотрим следующее направленное множество  $A = \{(U, x) : U - \text{открытая окрестность точки } x_0; x \in U; x \neq x_0\}$ . Положим  $(U, x) \prec (V, y)$  если  $U \supset V$ . Рассмотрим направленность  $x_\alpha$ ,  $\alpha = (U, x)$ ,  $x_\alpha = x$ . Направленность  $x_\alpha$  удовлетворяет обоим условиям определения по Гейне:

$$x_\alpha \neq x_0;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0.$$

Первое условие, очевидно, выполняется по построению направленного множества  $A$ . Проверяем второе условие. Пусть  $V \ni x_0$  – некоторая открытая окрестность точки  $x_0$ . Выберем точку  $z \in V \setminus x_0$ . Пара  $\alpha_0 = (V, z)$  принадлежит направленному множеству  $A$ . Пусть другой индекс  $\beta = (W, x) \in A$  удовлетворяет условию  $\beta \succ \alpha_0$ . Это значит, что  $x \in W$ ,  $x \neq x_0$ ,  $W \subset V$ . Следовательно,  $x_\beta = x \in V$ , что означает, что  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0$ .

Таким образом, из существования предела по Гейне направленность  $f(x_\alpha)$  сходится к точке  $y \in Y$ . Это значит, что для любой окрестности  $U \ni y$  найдется индекс  $\alpha_0 = (V, z)$ , что при выполнении неравенства  $(W, x) = \beta \succ \alpha_0$  получается включение  $f(x_\beta) \in U$ , т.е.  $f(x) \in U$ , где  $x$  может быть выбрана произвольной точкой подмножества  $V \setminus x_0$ . Это значит, что  $f(V \setminus x_0) \subset U$ . Последнее включение в точности означает наличие предела по Коши. ■

## Предел отображения в предельной точке по Гейне для метрических пространств

Для метрического пространства  $(X, \rho)$  определение предела отображения в предельной точке по Гейне может быть существенно упрощено рассмотрением счетных последовательностей вместо произвольных направленностей. Напомним, что под последовательностью  $\{x_n\}$ ,  $x_n \in X$  понимается такая направленность, которая индексируется индексами из натуральных чисел  $n \in \mathbf{N}$ .

### Теорема 8 (Сходимость по Гейне в метрических пространствах)

Пусть  $(X, \rho)$  – некоторое метрическое пространство,  $f : X \rightarrow Y$  – отображение в топологическое пространство  $Y$ ,  $x_0 \in X$  – некоторая предельная точка. Отображение  $f$  имеет предел в точке  $x_0$ , равный  $y \in Y$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ , тогда и только тогда, когда для любой последовательности  $x_n \in X$ ;  $n \in \mathbf{N}$ , такой что  $x_n \neq x_0$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , существует предел последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  равный  $y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y.$$

**Доказательство.** Для доказательства нужно проверить, что счетных последовательностей достаточно для проверки сходимости отображения  $f$ .

**Закончить доказательство!!!!**

## Непрерывность по Коши и по Гейне

Таким образом, непрерывность отображения  $f : X \rightarrow Y$  в точке  $x_0 \in X$  можно переформулировать по Гейне в терминах сходимости направленностей или в случае метрических пространств в терминах счетных последовательностей.

**Теорема 9 (непрерывность отображения по Гейне)** *Отображение  $f : X \rightarrow Y$  является непрерывным в точке  $x_0 \in X$  тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к точке  $x_0$  направленности  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x_\alpha = x_0$  существует предел  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(x_\alpha)$  и выполняется равенство*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(x_\alpha) = f(x_0).$$

Для метрического пространства  $X$  в предыдущей теореме класс всех направленностей достаточно заменить на счетные последовательности.

## Свойства непрерывных отображений

### Композиция непрерывных отображений

### Сужение непрерывного отображения

**Теорема 10** *Сужение отображения есть композиция двух отображений: исходного и вложения подпространства в пространство.*

## Непрерывность объединения отображений

**Теорема 11** *Если сужения отображения на замкнутые слагаемые непрерывны, то и само отображение непрерывно.*

## Кривая Пеано

**Теорема 12** *Пример непрерывного отображения отрезка на треугольник («кривая Пеано»).*

Возьмем разбиение отрезка  $\delta = [0, 1]$  на две его половины  $\delta_0 = [0, \frac{1}{2}]$  и  $\delta_1 = [\frac{1}{2}, 1]$ . Это разбиение отрезка  $[0, 1]$  назовем разбиением первого ранга, а отрезки  $[0, \frac{1}{2}]$  и  $[\frac{1}{2}, 1]$  — отрезками первого ранга. Разбивая каждый отрезок первого ранга на две половины, получим четыре отрезка  $\delta_{00}, \delta_{01}, \delta_{10}, \delta_{11}$ , второго ранга, образующие разбиение второго ранга отрезка  $[0, 1]$ , и т. д.

Разбиение  $n$ -го ранга состоит из  $2^n$  отрезков вида  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ , где индексы могут принимать два значения  $i_1, i_2, \dots, i_n = 0$  или  $1$ . Длина этих отрезков равна  $\frac{1}{2^n}$ .

**Закончить доказательство!!!!**