

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **1**

1. Мощность множества. Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах.
2. Критерий компактности подмножества евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Задачи:

1. Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  две метрики на множестве  $X$ . Показать, что  $\rho_3 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$  тоже является метрикой.
2. Докажите, что для любого топологического пространства  $X$  множество  $\pi(X, \mathbb{I})$  состоит из одного элемента.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **2**

1. Теорема Кантора о множестве всех подмножеств.
2. Нормальность хаусдорфова компактного пространства.

Задачи:

1. Пусть  $\rho_1$  – метрика на множестве  $X$ . Показать, что  $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$  тоже является метрикой. Являются ли метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$  эквивалентными?
2. Докажите, что число элементов множества  $\pi(\mathbb{I}, Y)$  совпадает с числом компонент линейной связности пространства  $Y$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **3**

1. Структура открытого множества на прямой.
2. Компактность декартового произведения компактных пространств.

Задачи:

1. Пусть  $\rho_1$  – метрика на множестве  $X$ . Показать, что  $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1\}$  тоже является метрикой. Являются ли метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$  эквивалентными?
2. Показать, что любые два непрерывных отображения  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  гомотопны.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **4**

1. Открытость шаровой окрестности.
2. Гомотопия непрерывного отображения. Категорные свойства гомотопии.

Задачи:

1. Докажите, что следующая функция в  $\mathbb{R}^n$  есть метрика:  $\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$ .
2. Пусть  $\mathbf{S}^n$  –  $n$ -мерная сфера и  $s_0 \in \mathbf{S}^n$  – точка на сфере. Доказать, что пространство  $\mathbf{S}^n \setminus \{s_0\}$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^n$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **5**

1. Счетная база подмножестве евклидоваго пространства.
2. Гомотопическая эквивалентность топологических пространств. Категорные свойства.

Задачи:

1. Докажите, что следующая функция в  $\mathbb{R}^n$  есть метрика:  $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .
2. Докажите, что вся плоскость  $\mathbb{R}^2$  гомеоморфна открытой полуплоскости  $\mathbb{C}^+$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **6**

1. Плотность подмножества рациональных чисел на вещественной прямой.
2. Стыгиваемость евклидоваго пространства.

Задачи:

1. Пусть  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывные отображения. Докажите, что отображение  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ , определенное по формуле  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  является непрерывной.
2. Докажите, что замкнутый круг  $\mathbf{D}^2$  гомеоморфен квадрату  $\mathbf{I}^2$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **7**

1. Непрерывность композиции непрерывных отображений.
2. Ретракция, деформационная ретракция.

Задачи:

1. Пусть  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывные отображения, причем  $0 \notin g(X)$ . Докажите, что отображение  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ , определенное по формуле  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  является непрерывной.
2. Докажите, что полуплоскость  $\{x \geq 0\}$  гомеоморфна квадранту  $\{x, y \geq 0\}$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **8**

1. Непрерывность сужения непрерывного отображения.
2. Гомотопическая эквивалентность окружности и  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Задачи:

1. Пусть  $GL(n; \mathbb{R}) \subset \mathbf{Mat}(p \times n, \mathbb{R})$  — пространство обратимых матриц. Показать, что отображение  $f : GL(n; \mathbb{R}) \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ ,  $f(A) = A^{-1}$  является непрерывным.
2. Пусть отображения  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  в сферу радиуса 1 удовлетворяют неравенству  $|f(x) - g(x)| < 2$ . Доказать, что отображения  $f$  и  $g$  гомотопны.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **9**

1. Непрерывность объединения непрерывных отображений.
2. Гомотопическая эквивалентность одномерного графа и букета окружностей.

Задачи:

1. Привести пример последовательности непрерывных функций  $f_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i \in \mathbf{N}$ , для которой функция  $f(x) = \sup \{f_i(x) : i \in \mathbf{N}\}$  не является непрерывной.
2. Докажите, что полуплоскость  $\{x \geq 0\}$  гомеоморфна квадранту  $\{x, y \geq 0\}$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **10**

1. Эквивалентность определений непрерывности по Коши и по Гейне.
2. Аксиома о продолжении гомотопии, ее эквивалентная формулировка в виде ретракции.

Задачи:

1. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества на отрезок  $[0, 1]$ .
2. Докажите, что плоскость без точки  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$  гомеоморфна плоскости без круга  $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **11**

1. Гомеоморфность интервалов различной длины.
2. Факторпространство по стягиваемому подмножеству.

Задачи:

1. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества  $K$  на его квадрат  $K \times K$ .
2. Показать, что подмножество  $A \subset \mathbb{R}^n$  компактно тогда и только тогда,  $A$  замкнуто и ограничено.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **12**

1. Гомеоморфность открытого диска и евклидова пространства.
2. Накрытия. Аксиома о накрывающей гомотопии.

Задачи:

1. Докажите, что всякое непрерывное отображение  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}^2$ , у которого образ  $f(\mathbf{I}) \subset \mathbf{I}^2$  всюду плотен, является сюръекцией.
2. Доказать, что для любого компакта  $K \subset \mathbf{R}^n$  существует гладкая вещественнозначная функция  $f$ , такая, что  $K = f^{-1}(0)$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **13**

1. Гомеоморфность открытого диска и открытого куба.
2. Фундаментальная группа пунктированного топологического пространства. Корректность определения групповой структуры.

Задачи:

1. Привести пример двух гомеоморфных пространств  $X$  и  $Y$  и биекции  $f : X \rightarrow Y$ , которая не является гомеоморфизмом.
2. Связно ли пространство  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел (с топологией, индуцированной из  $\mathbb{R}$ )? Связно ли пространство иррациональных чисел?

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **14**

1. Гомеоморфность замкнутого диска и замкнутого куба.
2. Функториальные свойства фундаментальных групп.

Задачи:

1. Пусть  $\mathbf{S}^1$  – окружность и  $s_0 \in \mathbf{S}^1$  – точка на окружности. Доказать, что пространство  $\mathbf{S}^1 \setminus \{s_0\}$  гомеоморфно  $\mathbb{R}$ .
2. Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **15**

1. Гомеоморфность плоскости без точки  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$  и открытого круга без точки  $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

2. Поведение фундаментальной группы при перемене отмеченной точки.

Задачи:

1. Доказать, что если множества  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$  равномощны, то и множества  $A$  и  $B$  равномощны.

2. Связно ли подмножество плоскости, составленное из точек, у которых хотя бы одна из координат рациональна?

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **16**

1. Гомеоморфность двумерного тора  $\mathbb{T}^2$  и декартового произведения окружностей  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

2. Связь фундаментальных групп пространства и его накрытия.

Задачи:

1. Доказать, что всякое подмножество счетного множества является счетным множеством.

2. Показать, что компоненты связности замкнуты.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **17**

1. Гомеоморфность группы трехмерных специальных ортогональных матриц  $\mathbb{SO}(3)$  и трехмерного вещественного проективного пространства  $\mathbb{RP}_3$ .

2. Универсальное накрытие окружности.

Задачи:

1. Доказать, что множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел счетно.

2. Найдите два негомотопных отображения одноточечного пространства в  $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **18**

1. Замкнутость графика непрерывного отображения.

2. Вычисление фундаментальной группы окружности.

Задачи:

1. Доказать, что если  $A$  и  $B$  — счетные множества, то их объединение  $A \cup B$  — счетное множество.

2. Докажите, что если множества  $A$  и  $B$  оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то  $A$  и  $B$  тоже линейно связны.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **19**

1. Хаусдорфовость тихоновского произведения.
2. Фундаментальная группа декартового произведения пространств.  
Задачи:
  1. Доказать, что объединение счетного семейства счетных множеств есть множество счетное.
  2. Пусть отображения  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \{0\}$  удовлетворяют неравенству  $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ . Доказать, что отображения  $f$  и  $g$  гомотопны.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **20**

1. Хаусдорфовость метрического пространства.
2. Теорема ван Кампена.  
Задачи:
  1. Показать, что множество вещественных чисел несчетно.
  2. Рассмотрим сферу  $\mathbb{S}^2$  и двоеточие на ней  $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^2$ . Доказать, что фактор пространство  $\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^0$  и букет  $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$  гомотопически эквивалентны.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **21**

1. Нормальность метрического пространства.
2. Построение универсального накрытия.

Задачи:

1. Показать, что на бесконечном полуинтервале  $X = (0, +\infty)$  семейство подмножеств  $\{\emptyset, (a, +\infty), 0 \leq a < +\infty\}$  образует некоторую топологию.
2. Показать, что если у тора стянуть в точку конечное число меридиан, то получится букет некоторого числа сфер и окружности.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **22**

1. Лемма Урысона.
2. Построение накрытия по подгруппе фундаментальной группы.

Задачи:

1. Показать что множество  $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  замкнуто на вещественной прямой  $\mathbf{R}$ .
2. Построить деформационную ретракцию тора с выколотой точкой на букет меридиана и параллели.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_



Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **25**

1. Вторая аксиома счетности. Сепарабельность пространства со второй аксиомой счетности.

2. Свободные гомотопии замкнутых путей и их связь с фундаментальной группой.

Задачи:

1. Верно ли, что объединение плотных подмножеств плотно?

Верно ли, что пересечение плотных подмножеств плотно?

2. Пусть  $f : X \rightarrow Y$  непрерывное отображение, являющееся гомотопической эквивалентностью. Доказать, что два отображения  $g_0, g_1 : Z \rightarrow X$  гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны композиции  $f \cdot g_0, f \cdot g_1 : Z \rightarrow Y$ .

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **26**

1. Теорема Урысона о метризуемости нормального пространства со второй аксиомой счетности.

2. Теорема об отсутствии ретракции двумерного диска на окружность.

Задачи:

1. Покажите, что пересечение двух (конечного семейства) плотных открытых подмножеств плотно.

2. Показать, что два любых непрерывных отображения произвольного пространства в выпуклое подмножество евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  гомотопны.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **27**

1. Компактные топологические пространства. Непрерывный образ компактного пространства.

2. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

Задачи:

1. Пусть  $C[0, 1]$  – пространство всех непрерывных функций на отрезке  $[0, 1]$ . Доказать, что функция  $\rho(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$  задает метрику на пространстве  $C[0, 1]$ .

2. Показать, что если у каждой точки пространства  $X$  имеется связная окрестность, то каждая его компонента связности открыта.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Московский Государственный университет  
им. М.В.Ломоносова  
**Механико–математический факультет**  
Наименование дисциплины: Введение в топологию  
(математики, 2-й курс; осенний семестр 2012/13 уч. г.)

Билет №: **28**

1. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства.

2. Теорема о причисывании ежа.

Задачи:

1. Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  две метрики на множестве  $X$ . Показать, что  $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$  тоже является метрикой.

2. Докажите, что всякое несюръективное непрерывное отображение произвольного топологического пространства в сферу  $S^n$  гомотопно постоянному отображению.

17 декабря 2012 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_