

Программа  
по курсу  
"Прикладные проблемы геометрии"  
5-й курс, весна, 2011–12 уч. год

лектор А.С.Мищенко

28 января 2012 г.

**Геометрическая формулировка задач**

1. Конфигурационное пространство. Примеры нетривиальных конфигурационных пространств: плоский маятник, пространственный маятник, двузвенный плоский маятник, твердое тело с закрепленной точкой.
2. Фазовое пространство, примеры.
3. Многообразия. Касательное расслоение.
4. Основы векторных расслоений

**Эллиптические псевдодифференциальные операторы**

1. Понятие дифференциального оператора на многообразии, главный символ оператора.
2. Псевдодифференциальные операторы (ПДО) на многообразиях.
3. Соболевские нормы и ограниченность ПДО в соболевских пространствах.
4. Теорема вложения Соболева (о компактности вложения соболевских пространств).
5. Компактные и фредгольмовы операторы.
6. Индекс фредгольмова оператора и его свойства.
7. Альтернатива Фредгольма.
8. Обобщение эллиптической задачи на случай векторных расслоений.

9. Трактовка эллиптичности в терминах векторных расслоений.
10. Гомологическая формула Атья-Зингера для вычисления индекса эллиптического оператора.

### **Геометрические методы в Гамильтоновой механике**

1. Вариационные задачи, уравнения Эйлера.
2. Определение симплектического пространства  $M$ ,  $\dim M = 2n$ .
3. Симплектическая форма  $\omega$  на симплектическом пространстве, ее свойства.
4. Функция Гамильтона, система уравнений Гамильтона.
5. Косой градиент функции, скобка Пуассона.
6. Первый интеграл.
7. Векторные поля и их обобщения - распределения плоскостей.
8. Теорема Фробениуса. Несколько формулировок.
9. Приведение симплектической формы к каноническому виду.
10. Теорема Дарбу.
11. Коммутирующие векторные поля и группы диффеоморфизмов.
12. Конечномерные алгебры Ли векторных полей и группы диффеоморфизмов.
13. Теорема Неттер о симметриях и первых интегралах.
14. Теорема Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем.
15. Некоммутативная версия полной интегрируемости.
16. Пример интегрируемости динамики твердого тела с закрепленной точкой.

### **Список литературы**

- [1] Мищенко А.С., Векторные расслоения и их приложения, М., "Наука" (1984). (<http://lib.mexmat.ru/books/2238>)
- [2] Luke G., Mishchenko A., Vector Bundles and Their Applications, Kluwer Academic Publisher (2000) (<http://lib.mexmat.ru/books/2222>). (<http://lib.mexmat.ru/books/2238>)

- [3] Шубин М.А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, 2005 (<http://lib.mexmat.ru/books/2123>)
- [4] Пале Р., Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе, 1970 (<http://lib.mexmat.ru/books/265>)
- [5] Агранович М.С., Эллиптические псевдодифференциальные операторы (часть 1), 2003 (<http://lib.mexmat.ru/books/1817>)
- [6] Агранович М.С., Эллиптические псевдодифференциальные операторы (часть 2), 2004 (<http://lib.mexmat.ru/books/1941>)
- [7] Том Р., Некоторые свойства "в целом" дифференцируемых многообразий, В книге "Расслоенные пространства и их приложения ИЛ, М.,(1958),с. 293 – 351 (<http://lib.mexmat.ru/books/2219>)
- [8] Трофимов В.В., Фоменко А.Т., Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений, М., "Факториал" (1995).
- [9] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И., Математические аспекты классической и небесной механики, ВИНТИ, Итоги науки и техники, серия "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Динамические системы — 3, Том 3 (1985), с. 9 – 43. (<http://lib.mexmat.ru/books/2854>)
- [10] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация (том 1) (1999). (<http://lib.mexmat.ru/books/337>)
- [11] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация (том 2) (1999). (<http://lib.mexmat.ru/books/338>)