

## Задачи 7

23 октября 2012 г.

183. Показать, что каждая точка содержится в некоторой компоненте связности, причём только в одной: ею является объединение всех связных множеств, содержащих эту точку.
184. Показать, что две компоненты связности либо не пересекаются, либо совпадают.
185. Показать, что пространство связно, тогда и только тогда, когда любая пара его точек лежит в некотором связном подмножестве.
186. Показать, что компоненты связности замкнуты.
187. Показать, что если у каждой точки пространства  $X$  имеется связная окрестность, то каждая его компонента связности открыта.

### **Линейная связность.**

188. Показать, что следующие топологические пространства являются линейно связными:
  - (a) Отрезок;
  - (b) Интервал;
  - (c) Евклидово пространство любой размерности;
  - (d) Сферы ненулевой размерности;
  - (e) Выпуклое подмножество евклидова пространства;
  - (f) Звездное подмножество евклидова пространства;
  - (g) Объединение любой совокупности попарно пересекающихся линейно связных множеств;
  - (h)
189. Докажите, что если множества  $A$  и  $B$  оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то  $A$  и  $B$  тоже линейно связны.
190. Доказать, что если граница множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  линейно связна, то замыкание этого множества тоже линейно связно.

191. Доказать, что непрерывный образ линейно связного пространства линейно связан.
192. Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.
193. Показать, что если в пространстве каждая точка обладает линейно связной окрестностью, то компоненты линейной связности открыты.
194. Показать, что если в пространстве каждая точка обладает линейно связной окрестностью, то связность и линейная связность равносильны.
195. Показать что для открытых подмножеств евклидова пространства связность и линейная связность равносильны.
196. Рассмотрим на плоскости замыкание  $\bar{\Gamma} \subset \mathbb{R}^2$  графика функции  $\Gamma = \{(x, y) : y = \sin \frac{1}{x}, x > 0\}$ . Является ли это множество связным? Линейно связным?
197. Показать, что дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}$  к множеству из предыдущей задачи линейно связно.