Задачи 6

1 октября 2012 г.

1 Компактные пространства

155. Пусть отображение $f : E \to F$ является непрерывным отображением и пусть пространство E компактно. Доказать, что подпространство $f(E) \subset F$ компактно. (Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.4).

156. Доказать, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ не компактно.

157. Показать, что подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, A замкнуто и ограничено.

158. Показать, что в компактном пространстве X любая убывающая последовательность замкнутых непустых подмножеств $\{F_n : F_n \supset F_{n+1}\}$ имеет непустое пересечение: $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.

159. Показать, что если подмножество $A \subset X$ компактно, а X хаусдорфово, то A замкнуто.

160. Пусть A и B — компактные подмножества хаусдорфова пространства X. Верно ли, что множество $A \cup B$ компактно? Верно ли, что множество $A \cap B$ компактно?

161. Показать, что компактное хаусдорфово пространство нормально.

162. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция f, такая, что $K = f^{-1}(0)$. (Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.12).

Связность и линейная связность. Компоненты связности.

163. Показать, что пространство X несвязно тогда и только тогда, когда существует непрерывное сюръективное отображения пространства X на дискретное двоеточие (нульмерную сферу $\mathbf{S}^0$).

Решение.Пусть $f : X \longrightarrow \mathbf{S}^0$ — непрерывное сюръективное отображение, $\mathbf{S}^0 = \{-1, 1\}$. Одноточечные подпространства $\{-1\}, \{1\} \subset \mathbf{S}^0$ не пересекаются и открыты (и замкнуты). Поскольку отображение f непрерывно, то прообразы $f^{-1}(-1)$ и $f^{-1}(1)$ непусты, открыты и не пересекаются, причем $X = f^{-1}(-1) \sqcup f^{-1}(1)$. Значит пространство X несвязно. Обратно, если X несвязно, то оно представимо в виде объединения двух открытых подмножеств $X = A \sqcup B$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in A; \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Очевидно, что отображение f непрерывно и сюръективно.

164. Связно ли пространство $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$)?

165. Связно ли пространство иррациональных чисел (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$)?

166. Покажите, что множество $[0, 1] \sqcup (2, 3]$ несвязно в $\mathbb{R}$.

167. Показать, что замыкание связного множества связно.

168. Доказать, что объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.

169. Доказать, что отрезок $\mathbf{I} = [0; 1]$ связен.

170. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ связно.

171. Пусть X — связное пространство и $f : \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция. Доказать, что множество $f(X)$ является промежутком в $\mathbb{R}$ (т.е. интервалом, отрезком или полуинтервалом).

172. Докажите, что всякое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ связно.

173. Докажите, что открытое подмножество прямой $\mathbb{R}$ имеет счётное число компонент связности.

174. Докажите, что n-мерная сфера $\mathbb{S}^n$ связна.

175. Докажите, что если пространство снабжено структурой группы и умножение на любой элемент группы является непрерывным отображением, то связная компонента единицы является нормальной подгруппой.

    Решение.Пусть M — компонента единицы. Для каждой точки $x \in M$ множество xM связно и содержит точку $x = xe$. Таким образом, множества xM и M пересекаются, следовательно, $xM \subset M$, т. е. M является подгруппой X. Далее, для каждой точки $x \in X$ множество $x^{-1}Mx$ связно и содержит единицу. Следовательно, $x^{-1}Mx \subset M$, так что M — нормальная подгруппа. ∎

176. Показать, что отрезок $[0,1]$ связен.

Решение.Если бы отрезок $[0,1]$ был несвязен, то существовала бы непрерывная сюръекция $[0,1]\longrightarrow\mathbf{S}^0$, что противоречит теореме Больцано о промежуточном значении.

177. Рассмотрим подмножество плоскости, являющееся объединением спирали, записанной уравнением в полярных координатах (r,φ)

$$r = e^{frac11+\varphi^2}, \varphi \geq 0,$$

и окружности $x^2+y^2=1$. Является ли это множество связным?

178. Связны ли следующие подмножества плоскости:

1) составленное из точек, у которых обе координаты рациональны;

2) составленное из точек, у которых хотя бы одна из координат рациональна;

3) составленное из точек, у которых либо обе координаты рациональны, либо обе — иррациональны?

179. Пусть X связное пространство. Верно ли, что у каждой точки $x \in$ найдется связная окрестность?

180. Докажите, что любой многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами обладает вещественным корнем.

181. Показать, что пространства I,$\mathbb{R}$, $\mathbf{S}^1$ попарно не гомеоморфны.

182. Докажите, что квадрат и отрезок не гомеоморфны