-	+	-	-	0

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 208	Фамилия Глюз

1a). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2 \cos 2\phi \quad \text{(лемниската)};$$

2a). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3a). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность)};$$

4a). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения)}.$$

5a). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность)};$$

$$k = \frac{|[\dot{r}, \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3} = \frac{|[(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}), (e^t, e^{-t}, 0)]|}{|(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})|^3} = \frac{|(\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^{t}, 0)|}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}^{\,3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2e^{2t}+2e^{-2t}}}{\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}^{\,3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(e^{2t}+e^{-2t})^2}}{(e^t+e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$$\varkappa = \frac{((e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}), (e^t, e^{-t}, 0), (e^t, -e^{-t}, 0))}{(|[(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}), (e^t, e^{-t}, 0)]|)^2} =$$

+

$$\frac{-2\sqrt{2}}{2(e^{2t}+e^{-2t})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{(e^{2t}+e^{-2t})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

№1

$r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$ $\quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi - \frac{\pi}{4}; \pi + \frac{\pi}{4}\right]$

или

$r = a\sqrt{\cos(2\varphi)}$

$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$\dot{r} = (\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi; \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi)$

$\ddot{r} = (\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\sin\varphi - r\cos\varphi, \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}^2\cos\varphi - r\sin\varphi)$

$K = ?\frac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - \cancel{r\ddot{r}}|}{(\dot{r})^3} = \frac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}|}{\sqrt{(\dot{r}^2 + r^2)^3}} =$

$= \frac{|a^2\cos 2\varphi + 2a^2\sin 2\varphi + a^2\sqrt{\cos 2\varphi \sin 2\varphi}|}{\sqrt{(a^2\sin 2\varphi + a^2\cos 2\varphi)^3}} =$

$= \frac{a^2|\cos 2\varphi + 2\sin 2\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi \sin 2\varphi}|}{a^3\sqrt{(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi)^3}} =$

$= \frac{\cancel{\quad}}{a^4} = \frac{a^2\left|\cos 2\varphi + \frac{2}{\cos 2\varphi} + \frac{1}{\cos^2 2\varphi}\right|}{\left(a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2}{\cos 2\varphi}\right)^{3/2}}$

$-$

№3 ГЛЮЗ

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{e}(s)$$

$$r_s = \dot{\vec{\rho}}(s) + \lambda \dot{e}(s)$$

$$r_\lambda = \vec{e}(s) \qquad \dot{\vec{\rho}}(s) = v$$

$$E = 1$$

$$G = (v, \vec{e}) \qquad -$$

$$F\ (\vec{e}, \vec{e})$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & (v, e) \\ (v, e) & (e, e) \end{pmatrix}$$

№5

№8

ГЛ1-03

$\cancel{\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)}$

$r = (a\cos u \cos v, a\cos u \sin v, c\sin u)$

$n = \frac{[r_u \times r_v]}{|r_u \times r_v|}$

$r_{uu}(-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, -c\sin u)$

$r_{vv}(-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, 0)$

$r_{uv}(a\sin u\sin v, -a\sin u\cos v, 0)$

$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

$[r_u \times r_v] = [(-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, c\,\cancel{\sin u})$ $\cos u$,

$(-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)] =$

$= (\cancel{a^2\cos u\sin u}\ -ac\cos u\sin u\cos v, ac\cos u\sin u\sin v, -a^2\cos u\sin u)$

$n = \frac{(+ac\cos u\sin u\cos v, \ldots)}{a\cos u\sin u\sqrt{(a^2+c^2)}} = \frac{(c\cos v, c\sin v, a)}{\sqrt{a^2+c^2}}$

$$L = (r_{uu}^{N4}, n) = \frac{+\cancel{ca}\cos u\, ca + ca\cos u\cos^2 v + ca\cos u\sin^2 v + ac \ldots}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

ПЛ103

$$L = \frac{ac(\cos u + \sin u)}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$M = \frac{-ac\sin u\sin v\cos v + ac\sin v\sin u\cos v}{\sqrt{a^2+c^2}} = 0$$

$$N = \frac{ac\cos u\cos^2 v + ac\cos u\sin^2 v}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{ac\cos u}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\frac{ac}{a^2+c^2}\begin{pmatrix} \cos u + \sin u & 0 \\ 0 & \cos u \end{pmatrix} = I$$

$-$

−	+	−	−	0

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 208	Фамилия Подречнев

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2\cos 2\phi \quad \text{(лемниската);}$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathrm{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1) \text{(линейчатая поверхность);}$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения).}$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$r = \lambda\vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность);}$$

② $k = \dfrac{|[\dot r,\ddot r]|}{|\dot r|^3} = \dfrac{|[(e^t,-e^{-t},\sqrt2),(e^t,e^{-t},0)]|}{|(e^t,e^{-t},\sqrt2)|^3} = \dfrac{|(\sqrt2 e^{-t},\sqrt2 e^{t},0)|}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}} = \dfrac{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}\cdot\sqrt2}{\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}^3} = \dfrac{\sqrt2}{(e^t+e^{-t})^2}$

$æ = \dfrac{((e^t,-e^{-t},\sqrt2),(e^t,e^{-t},0),(e^t,-e^{-t},0))}{(|[(e^t,e^{-t},\sqrt2),(e^t,e^{-t},0)]|)^2} = \dfrac{-\sqrt2}{(e^t+e^{-t})^2}$ (+)

① $r = a\sqrt{\cos 2t}$ $\quad k = \dfrac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{\sqrt{(\rho'^2+\rho^2)^3}}$

$\dot r = -\dfrac{a\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}$

$\ddot r = -a\cdot\dfrac{2(\cos 2t)^{\frac32}+\frac{2\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}}{\cos 2t}$

$r^2+\dot r^2+\dot r^2-r\ddot r = a^2\left(1+\dfrac{2\sin^2 2t}{\cos 2t}\pm\dfrac{2(\cos 2t)^{\frac32}+\frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}}{\sqrt{\cos 2t}}\right) =$

$= a^2\left(\dfrac{\cos 2t+2\sin^2 2t-2\cos^2 2t+\sin 2t}{\cos 2t}\right) = a^2\left(\dfrac{(\cos 2t+\sin 2t)+2(\sin 2t-\cos 2t)(\sin 2t+\cos 2t)}{\cos 2t}\right) =$

$= a^2\dfrac{(\cos 2t+\sin 2t)(1+2\sin 2t-2\cos 2t)}{\cos 2t}$

$r^2+r'^2 = a^2\cos 2t + \dfrac{a^2\sin^2 2t}{\cos 2t} = \dfrac{a^2}{\cos 2t}$? (−)

$K = a^2\dfrac{(\cos 2t+\sin 2t)(1+2\sin 2t-2\cos 2t)}{\cos 2t}\sqrt{\left(\dfrac{\cos 2t}{a^2}\right)^3} = \dfrac{\sqrt{\cos 2t}(\cos 2t+\sin 2t)(1+2\sin 2t-2\cos 2t)}{a}$

(4) $r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u)$

$n = \dfrac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$

$[r_u, r_v] = [(-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, c\cos u),$
$(-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)]' =$
$= (-c\cos u\sin u\cos v, -a\cos u\sin u\sin v, -a^2\cos\sin)$

$r_{uu} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, -c\sin u)$
$r_{vv} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, 0)$
$r_{uv}\ (a\sin u\sin v, -a\sin u\cos v, 0)$

$n = \dfrac{(-c\cos v, -c\sin v, a)}{\sqrt{a^2+c^2}}$

$\overline{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

$L = (r_{uu}, n) = \dfrac{ac(\cos u + \sin u)}{\sqrt{a^2+c^2}}$

$N = \dfrac{ac\cos u\cos^2 v + ac\cos u\sin^2 v}{\sqrt{a^2+c^2}} = \dfrac{ac\cos u}{\sqrt{a^2-c^2}}$

$M = 0$

$\overline{II} = \left(\cancel{\dfrac{(\cos u+\sin u)ac}{\sqrt{a^2+c^2}}} \quad \dfrac{ac\cos u}{\sqrt{a^2+c^2}} \right)$

$\overline{II} = \begin{pmatrix} \dfrac{ac(\cos u+\sin u)}{\sqrt{a^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{ac\cos u}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$

(3) $r = \bar{f}(s) + \lambda\bar{e}(s)$

$r_s = \dot{\bar{f}}(s) + \lambda\dot{\bar{e}}(s)$

$r_\lambda = \bar{e}(s)$

$\dot{\bar{f}}(s) = v$

$E = 1$

$F = (\bar{e}, \bar{e})$

$G = (\bar{v}, \bar{e})$

$I = \begin{pmatrix} 1 & (\bar{v},\bar{e}) \\ (\bar{v},\bar{e}) & (\bar{e};\bar{e}) \end{pmatrix}$

−	+	−	−	−

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 208	Фамилия Мефодьева

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2\cos 2\phi \quad \text{(лемниската)};$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$\mathbf{r} = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность)};$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения)}.$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность)};$$

2а $\quad r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$ кручение: $\varkappa = \dfrac{(r', r'', r''')}{([r', r''])^2}$ кривизна $k = \dfrac{|[r', r'']|}{|r'|^3}$

$r' = (e^t, -e^{t}, \sqrt{2})$

$r'' = (e^t, e^{-t}, 0)$

$r''' = (e^t, -e^{-t}, 0)$

$$K = \frac{\left|\left(\begin{vmatrix} -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^{-t} & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sqrt{2} & e^t \\ 0 & e^t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix}\right)\right|}{\left(\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}\right)^3} = \frac{|(-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 1+1)|}{\left(\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}\right)^3} = \frac{\sqrt{2(e^{-2t}+e^{2t}+2)}}{\left(\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}\right)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{e^{-2t}+e^{2t}+2}}{\left(\sqrt{e^{-2t}+e^{2t}+2}\right)^3} = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t}+e^{-2t}+2} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^t & e^t \\ -e^{-t} & e^{-t} & -e^{-t} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{4+2e^{2t}+2e^{-2t}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t+e^{-t})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

+

1а $\quad r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската)

$(x^2+y^2) = 2c^2(x^2-y^2)$ в нашем случае $2c^2 = a^2$

$c^2 = \dfrac{a^2}{2}$

$(x^2+y^2) = a^2(x^2-y^2)$

$y = \pm\sqrt{\sqrt{c^4+4x^2c^2} - x^2 - c^2} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{a^4}{4}+4x^2\dfrac{a^2}{2}} - x^2 - \dfrac{a^2}{2}}$

$\varphi = t \qquad r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

(1a) $\varphi = t$

$r = a\sqrt{\cos 2t}$

$$K = \frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{\sqrt{(\rho'^2+\rho^2)^3}}$$

$$\dot r = a\cdot\frac{-1}{2\sqrt{\cos 2t}}\cdot 2\cdot\sin 2t = a\frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

$$\ddot r = a\cdot\frac{\cos 2t\cdot 2\sqrt{\cos 2t} - \frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}\cdot 2\cdot\sin 2t}{\cos 2t} = a\,\frac{2(\cos 2t)^{3/2} + \frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}}{\cos 2t}$$

$$r^2 + \dot r^2 + \dot r'^2 - r\cdot r'' = a^2\cos 2t + 2\cdot a^2\frac{2\sin^2 2t}{\cos 2t} - a\sqrt{\cos 2t}\cdot a\,\frac{2(\cos 2t)^{3/2} + \frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}}{\cos 2t}$$

$$= a^2\left(1 + \frac{2\sin^2 2t}{\cos 2t} - \frac{2(\cos 2t)^{3/2} + \frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}}{\sqrt{\cos 2t}}\right) = a^2\left(1 + \frac{2\sin^2 2t}{\cos 2t} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\cos^2 2t + \sin 2t}{\cos 2t}\right) = a^2\left(\frac{\cos 2t + 2\sin^2 2t - 2\cos^2 2t + \sin 2t}{\cos 2t}\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{(\cos 2t + \sin 2t) + 2(\sin 2t - \cos 2t)(\sin 2t + \cos 2t)}{\cos 2t}\right) =$$

$$= a^2\,\frac{(\cos 2t + \sin 2t)(1 + 2\sin 2t - 2\cos 2t)}{\cos 2t}$$

$$\rho'^2 + r^2 = a^2\cos 2t + a^2\frac{\sin^2 2t}{\cos 2t} = a^2\frac{\cos^2 2t + \sin^2 2t}{\cos 2t} = \frac{a^2}{\cos 2t}$$

$$K = a^2\,\frac{(\cos 2t + \sin 2t)(1 + 2\sin 2t - 2\cos 2t)}{\cos 2t} : \sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos 2t}\right)^3} =$$

$$= \frac{a^2(\cos 2t + \sin 2t)(1 + 2\sin 2t - 2\cos 2t)}{\cos 2t} : \frac{a^3}{(\cos 2t)^{3/2}} = \frac{(\cos 2t + \sin 2t)(1 + 2\sin 2t - 2\cos 2t)\sqrt{\cos 2t}}{a}$$

(4a) $r = (a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v)$ $\quad u \leftrightarrow v$

$r_u = (-a\cos v\sin u, b\cos v\cos u, 0)$ $\quad r_v = (-a\cos u\sin v, -b\sin u\sin v, c\cos v)$

$E = (r_u, r_u) = \cos^2 v(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)$

$G = (r_u, r_v) = \frac{a^2}{4}\sin 2u\sin 2v - \frac{b^2}{4}\sin 2u\sin 2v$

$F = (r_v, r_v) = a^2\cos^2 u\sin^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + c^2\cos^2 v = \sin^2 v(a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u) + c^2\cos^2 v$

$-c\sin u$

$r_{uu} = (-a\cos v\cos u, -b\cos v\sin u, 0)$ $\quad r_{vv} = (-a\cos u\cos v, -b\sin u\cos v, -c\sin v)$

$$m = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} \quad [r_u, r_v] = \left(\begin{vmatrix} b\cos v\cos u & 0 \\ -b\sin u\sin v & c\cos v\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -a\cos v\sin u \\ c\cos v & -a\cos u\sin v\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a\cos v\sin u & b\cos v\cos u \\ -a\cos u\sin v & -b\sin u\sin v\end{vmatrix}\right) =$$

$$= (bc\cos^2 v\cos u,\ ac\cos^2 v\sin u,\ ab\sin^2 u\cos v\sin v + ab\cos^2 u\sin v\cos v) =$$

$$= (bc\cos^2 v\cos u,\ ac\cos^2 v\sin u,\ ab\cos v\sin v) \Rightarrow$$

(5а) $r = \lambda\vec{\rho}(s)$ (конническая поверхность) Мефодьева.

108 группа

$r = \vec{\rho}(s)$

гауссова кривизна $k = \dfrac{\det II}{\det I}$

(8а) $r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s)$ $(|\vec{e}(s)| = 1)$

$r_s = \dot{\vec{\rho}}(s) + \lambda\dot{e}(s)$

$r_\lambda = \vec{e}(s)$

$E = (r_s, r_s) = (\dot{\vec{\rho}}(s), \dot{\rho}(s)) = 1$

$G = (r_s, r_\lambda) = (\dot{\vec{\rho}}(s), \vec{e})$

$F = (r_\lambda, r_\lambda) = (\vec{e}, \vec{e})$

$$I = \begin{pmatrix} (\dot{\rho}(s), \dot{\rho}(s)) & (\dot{\vec{\rho}}(s), \vec{e}) \\ (\dot{\vec{\rho}}(s), \vec{e}(s)) & (\vec{e}, \vec{e}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (v, e) \\ (v, e), & (e, e) \end{pmatrix}$$

—

продолжение 5а.

$r_s = v\dot{\vec{\rho}}(s) = v \times 1$

$r_v = \vec{\rho}(s)$

$E = (r_s, r_s) = (ve, ve) = v^2$

$G = (r_s, r_v) = (v, \rho)$

$F = (r_v, r_v) = (\rho, \rho)$

$$I = \begin{pmatrix} v^2 & (v, \rho) \\ (v, \rho) & (\rho, \rho) \end{pmatrix}$$

—

~~(30) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{B}(s)$~~

Мефодьева

208
1/Бурино

~~$\vec{r}_s = \vec{T} + \lambda(-\varkappa\vec{n})$~~

~~$\vec{r}_\lambda = \vec{B}$~~

~~$G = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2\varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$~~

~~$\dot{\tau} = \varkappa n$~~

~~$\dot{n} = -k\tau + \varkappa b$~~

~~$\dot{b} = -\varkappa n$~~

(⇒) продолжении (4a)

$$|[r_u, r_v]| = \left(b^2c^2\cos^4 v\cos^2 u + a^2c^2\cos^4 v\sin^2 u + a^2b^2\cos^2 v\sin^2 v\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\cos^2 v\,(b^2c^2\cos^2 v\cos^2 u + a^2c^2\cos^2 v\sin^2 u + a^2b^2 \sin^2 v)\right)^{1/2} =$$

$$= \cos v\sqrt{\cos^2 v\,(b^2c^2\cos^2 u + a^2c^2\sin^2 u) + a^2b^2\sin^2 v}$$

$$\underline{m} = \frac{(bc\cos^2 v\cos u,\ ac\cos^2 v\sin u,\ ab\cos v\sin v)}{\cos v\sqrt{\cos^2 v\,(b^2c^2\cos^2 u + a^2c^2\sin^2 u) + a^2b^2\sin^2 v}}$$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} (r_{uu}, m) & (r_{uv}, m) \\ (r_{uv}, m) & (r_{vv}, m) \end{pmatrix}$$

$$(r_{uu}, m) = \frac{1}{\cos v\sqrt{\cos^2 v\,(b^2c^2\cos^2 u + a^2c^2\sin^2 u) + a^2b^2\sin^2 v}}\big(-a\cos v\cos u\cdot bc\cos^2 v\cos u,$$

$$-b\cos v\sin u\cdot ac\cos^2 v\sin u,\ 0\big) =$$

A – обозначение

$$= A(-abc\cos^3 v\cos^2 u,\ -abc\cos^3 v\sin^2 u,\ 0)$$

$$(r_{uv}, m) = A(a\sin u\sin v\cdot bc\cos^2 v\cos u,\ -b\sin v\cos u\cdot ac\cos^2 v\sin u,\ 0) =$$

$$= A(abc\cos^2 v\sin v\sin u\cos u,\ -abc\cos^2 v\sin v\sin u\cos u,\ 0)$$

$$r_{uv} = (+a\sin u\sin v,\ -b\sin v\cos u,\ 0)$$

$$(r_{vv}, m) = A(-a\cos u\cos v\cdot bc\cos^2 v\cos u,\ -b\sin u\cos v\cdot ac\cos^2 v\sin u,\ ab\cos v\sin v\cdot(-c\sin v)) =$$

$$= A(-abc\cos^3 v\cos^2 u,\ -abc\cos^3 v\sin^2 u,\ -abc\cos v\sin^2 v)$$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} A(-abc\cos^3 v\cos^2 u,\ -abc\cos^3 v\sin^2 u,\ 0) & A(abc\cos^2 v\sin v\sin u\cos u,\ -abc\cos^2 v\sin v\sin u\cos u,\ 0) \\ A(abc\cos^2 v\sin v\sin u\cos u,\ -abc\cos^2 v\sin v\cos u\sin u,\ 0) & A(-abc\cos^3 v\cos^2 u,\ -abc\cos^3 v\sin^2 u,\ -abc\cos v\sin^2 v) \end{pmatrix}$$

+ | + | + | 0 | 0

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 208	Фамилия Петрова Таня

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2 \cos 2\phi \quad \text{(лемниската)};$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность)};$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения)}.$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность)};$$

2а

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$$
$$\dot r = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$
$$\ddot r = (e^t, e^{-t}, 0)$$
$$[\dot r, \ddot r] = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^{t}, 2)$$
$$|[\dot r, \ddot r]| = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})$$
$$|\dot r| = e^t + e^{-t}$$

$$\dddot r = (e^t, -e^{-t}, 0)$$

$$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{2}(-1-1) = -2\sqrt{2}$$

$$k = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \frac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

+

$$\varkappa = \frac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{|[\dot r, \ddot r]|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t+e^{-t})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

4а

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u)$$ эллипсоид вращения

$$r_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, c\cos u)$$
$$r_v = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)$$
$$[r_u, r_v] = (-ac\cos^2 u\cos v, -ac\cos^2 u\sin v, -a^2\cos u\sin u)$$
$$|[r_u, r_v]| = a\cos u\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}$$
$$n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = \frac{(-c\cos u\cos v, -c\cos u\sin v, -a\sin u)}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}}$$

$$r_{uu} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, -c\sin u)$$
$$r_{uv} = (a\sin u\sin v, -a\sin u\cos v, 0)$$
$$r_{vv} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, 0)$$

$$L=(r_{uu},n)=\frac{1}{\sqrt{c^2\cos^2u+a^2\sin^2u}}\cdot ac\,(\cos^2u\cos^2v+\cos^2u\sin^2v+$$
$$+\sin^2u)=\frac{ac}{\sqrt{c^2\cos^2u+a^2\sin^2u}}$$

$$M=(r_{uv},n)=\frac{1}{\sqrt{c^2\cos^2u+a^2\sin^2u}}\big(-c\cos u\cos v\, a\sin u\sin v+$$
$$+(-c\cos u\sin v)(-a\sin u\cos v)\big)=0$$

$$N=(r_{vv},n)=\frac{1}{\sqrt{c^2\cos^2u+a^2\sin^2u}}\big((-c\cos u\cos v)(-a\cos u\cos v)+$$
$$+(-c\cos u\sin v)(-a\cos u\sin v)\big)=\frac{ac\cos^2u}{\sqrt{c^2\cos^2u+a^2\sin^2u}}$$

$$\underline{\mathrm{II}}=\frac{ac}{\sqrt{c^2\cos^2u+a^2\sin^2u}}(du^2+\cos^2u\,dv^2).$$

10a $r^2=a^2\cos2\varphi$ <u>лемниската</u>

$$r=a\sqrt{\cos2\varphi}$$

$$K=\frac{|r^2+2\dot r^2-r\ddot r|}{(r^2+\dot r^2)^{3/2}}$$

$$\dot r=a\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos2\varphi}}\cdot(-\sin2\varphi)\cdot\cancel{2}=-\frac{a\sin2\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}$$

$$\ddot r=-a\left(\frac{2\cos2\varphi\cdot\sqrt{\cos2\varphi}-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos2\varphi}}\cdot(-\sin2\varphi)\cancel{2}\sin}{\cos2\varphi}\right.$$

$$=-a\left(\frac{2(\cos2\varphi)^{\frac32}+\frac{\sin^22\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}}{\cos2\varphi}\right)=$$

$$=-a\left(\frac{2(\cos2\varphi)^2+\sin^22\varphi}{(\cos2\varphi)^{3/2}}\right)$$

$$K=\frac{\left|a^2\cos2\varphi+2\frac{a^2\sin^22\varphi}{\cos2\varphi}+a^2\frac{2(\cos2\varphi)^{3/2}+\frac{\sin^22\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}}{\sqrt{\cos2\varphi}}\right|}{\left(a^2\cos2\varphi+\frac{a^2\sin^22\varphi}{\cos2\varphi}\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{\left|3a^2\cos2\varphi+\frac{3a^2\sin^22\varphi}{\cos2\varphi}\right|}{\left(a^2\cos2\varphi+\frac{a^2\sin^22\varphi}{\cos2\varphi}\right)^{3/2}}=\frac{3a^2\left|\frac{1}{\cos2\varphi}\right|}{\left(\frac{a^2}{\cos2\varphi}\right)^{3/2}}=\frac{3}{a}\cdot\sqrt{\cos2\varphi}$$

+

3а) $r = \rho(s) + \lambda e(s), \ |e(s)| = 1$ Петрова Таня 208

линейчат. поверхн.

$$\frac{dr}{ds} = \tau + \lambda \frac{de}{ds}$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = e(s)$$

$$\mathrm{I} = \left|\tau + \lambda \frac{de}{ds}\right|^2 ds^2 + 2(e,\tau)\, ds\, d\lambda + d\lambda^2$$

+

$\pm$ | + | + | + | −

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 208	Фамилия Байсов Н. Д.

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2 \cos 2\phi \quad \text{(лемниската);}$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность);}$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u \cos v, a\cos u \sin v, c \sin u) \text{ (эллипсоид вращения).}$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность);}$$

1а) Дано: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = a\,(\cos 2\varphi)^{1/2} \cdot \cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = a\,(\cos 2\varphi)^{1/2} \sin\varphi \end{cases}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2} a \frac{1}{\cos^{1/2} 2\varphi} (-\sin 2\varphi) \cdot 2 \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot a\,(\cos 2\varphi)^{1/2} =$$

$$= a \frac{1}{\cos^{1/2} 2\varphi} (-\cos\varphi \sin 2\varphi - \cos 2\varphi \sin\varphi) = \frac{-a \sin 3\varphi}{\cos^{1/2} 2\varphi}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2} a \frac{1}{\cos^{1/2} 2\varphi} (-\sin 2\varphi) \cdot 2 \cdot \sin\varphi + a\,(\cos 2\varphi)^{1/2} \cos\varphi =$$

$$= \frac{a}{\cos^{1/2} 2\varphi} (-\sin 2\varphi \cdot \sin\varphi + \cos\varphi \cdot \cos 2\varphi) = \frac{a \cos 3\varphi}{\cos^{1/2} 2\varphi}$$

$$\ddot{x} = \frac{-3a\cos 3\varphi \cos^{1/2} 2\varphi - (-a\sin 3\varphi) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^{1/2} 2\varphi} (-\sin 2\varphi) \cdot 2}{\cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{-3a \cos 3\varphi \cos^{1/2} 2\varphi - a \sin 3\varphi \sin 2\varphi \cdot \frac{1}{\cos^{1/2} 2\varphi}}{\cos 2\varphi}$$

$$\ddot{y} = \frac{-3a \sin 3\varphi \cos^{1/2} 2\varphi - a\cos 3\varphi \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^{1/2} 2\varphi} (-\sin 2\varphi) \cdot 2}{\cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{-3a \sin 3\varphi \cos^{1/2} 2\varphi + a \cos 3\varphi \sin 2\varphi \cdot \frac{1}{\cos^{1/2} 2\varphi}}{}$$

$$|\dot r| = \left(\frac{a^2\sin^2 3\varphi}{\cos 2\varphi} + \frac{a^2\cos^2 3\varphi}{\cos 2\varphi}\right)^{1/2} = \frac{a}{\cos^{1/2} 2\varphi}$$

$$k = \frac{\cos^{3/2}2\varphi}{a^3}\cdot\left|\frac{-a\sin 3\varphi}{\cos^{1/2}2\varphi}\cdot\frac{-3a\sin 3\varphi\cos^{1/2}2\varphi + a\cos 3\varphi\sin 2\varphi\frac{1}{\cos^{1/2}2\varphi}}{\cos 2\varphi} + \frac{a\cos 3\varphi}{\cos^{1/2}2\varphi}\cdot\frac{-3a\cos 3\varphi\cos^{1/2}2\varphi - a\sin 3\varphi\sin 2\varphi\frac{1}{\cos^{1/2}2\varphi}}{\cos 2\varphi}\right| = \frac{\cos^{3/2}2\varphi}{a^3}\cdot\left|\frac{3a^2}{\cos 2\varphi}(-\cos 6\varphi) - \frac{a^2}{\cos^2 2\varphi}(\sin 3\varphi\cos 3\varphi\sin 2\varphi + \sin 3\varphi\cos 3\varphi\sin 2\varphi\right| = \frac{\cos^{1/2}2\varphi}{a}\left|\frac{-3\cos 6\varphi}{\cos 2\varphi} - \frac{\sin 2\varphi\sin 6\varphi}{\cos^2 2\varphi}\right|$$

? +

2a) $r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$

$$\dot r(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$
$$\ddot r(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$$
$$\dddot r(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)$$
$$[\dot r, \ddot r] = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)$$
$$|[\dot r, \ddot r]| = (2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4)^{1/2} = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})$$
$$|\dot r| = (e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{1/2} = e^t + e^{-t}$$
$$k = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$$
$$\varkappa = \frac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{|[\dot r, \ddot r]|^2} = \frac{\sqrt{2}\cdot(-2)}{2(e^t + e^{-t})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$$

+

3a) $r = \rho(s) + \lambda e(s)$ $\quad |e(s)| = 1$

$$r_s = \rho_s + \lambda e_s$$
$$r_\lambda = e$$

$$A = \begin{pmatrix} \langle r_s, r_s\rangle & \langle r_\lambda, r_s\rangle \\ \langle r_\lambda, r_s\rangle & \langle r_\lambda, r_\lambda\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \rho_s + \lambda e_s, \rho_s + \lambda e_s\rangle & \langle e, \rho_s + \lambda e_s\rangle \\ \langle e, \rho_s + \lambda e_s\rangle & \langle e, e\rangle \end{pmatrix}$$

т.с. $|e(s)| = 1$, то $\langle e, e\rangle = 1$ и $\langle e_s, e\rangle = 0$

+

$$A = \begin{pmatrix} \langle \rho_s, \rho_s\rangle + 2\lambda\langle e_s, \rho_s\rangle + \lambda^2\langle e_s, e_s\rangle & \langle e, \rho_s\rangle \\ \langle e, \rho_s\rangle & 1 \end{pmatrix}$$

Тайсов, 208

4a) $r = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ c\sin u)$

$r_u = (-a\sin u\cos v,\ -a\sin u\sin v,\ c\cos u)$
$r_v = (-a\cos u\sin v,\ a\cos u\cos v,\ 0)$

$r_{uu} = (-a\cos u\cos v,\ -a\cos u\sin v,\ -c\sin u)$
$r_{vu} = (a\sin u\sin v,\ -a\sin u\cos v,\ 0)$
$r_{vv} = (-a\cos u\cos v,\ -a\cos u\sin v,\ 0)$

$n = \dfrac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$ $\qquad [r_u, r_v] = (-ac\cos^2 u\cos v,\ -ac\cos^2 u\sin v,\ -a^2\cos u\sin u\cos^2 v -$
$- a^2\cos u\sin u\sin^2 v) =$

$= (-ac\cos^2 u\cos v,\ -ac\cos^2 u\sin v,\ -a^2\cos u\sin u)$

$|[r_u, r_v]| = (a^2c^2\cos^4 u + a^4\cos^2 u\sin^2 u)^{1/2} = X$

$$B = \begin{pmatrix} \langle r_{uu}, n\rangle & \langle r_{vu}, n\rangle \\ \langle r_{uv}, n\rangle & \langle r_{vv}, n\rangle \end{pmatrix}$$

$\langle r_{uu}, n\rangle = (a^2c\cos^3 u\cos^2 v + a^2c\cos^3 u\sin^2 v + a^2c\cos u\sin^2 u)\cdot\frac{1}{X} =$
$= a^2c(\cos^3 u + \cos u\sin^2 u)\cdot\frac{1}{X} = a^2c\cos u\cdot\frac{1}{X}$

$\langle r_{uv}, n\rangle = (-a^2c\cos^2 u\sin u\cos v\sin v + a^2c\cos^2 u\sin u\cos v\sin v + 0)\frac{1}{X} = 0$

$\langle r_{vv}, n\rangle = (a^2c\cos^3 u\cos^2 v + a^2c\cos^3 u\sin^2 v)\frac{1}{X} = a^2c\cos^3 u\cdot\frac{1}{X}$

$$B = \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & \cos^3 u \end{pmatrix}\cdot\frac{a^2c}{(a^2c^2\cos^4 u + a^4\sin^2 u\cos^2 u)^{1/2}}$$

+

5a) $r = \lambda\rho(s)$

$r_\lambda = \rho$ $\qquad r_{\lambda\lambda} = 0$
$r_s = \lambda\rho_s$ $\qquad r_{\lambda s} = \rho_s$
$\qquad r_{ss} = \lambda\rho_{ss}$

−

$\langle r_\lambda, r_\lambda\rangle = \langle\rho, \rho\rangle$
$\langle r_\lambda, r_s\rangle = \lambda\langle\rho, \rho_s\rangle$
$\langle r_s, r_s\rangle = \lambda^2\langle\rho_s, \rho_s\rangle$

− | + | − | − | +

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 208	Фамилия Свистова

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2\cos 2\phi \quad \text{(лемниската);}$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec\rho(s) + \lambda\vec{\mathbf{e}}(s) \quad (|\vec{\mathbf{e}}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность);}$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения).}$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec\rho(s) \text{ (коническая поверхность);}$$

3а) $r = \vec\rho(s) + \lambda\vec e(s)$ $(|\vec e(s)| = 1)$ линейчатая поверхность

$r_s = \dot{\vec\rho}(s) + \lambda\dot e(s)$

$\dot{\vec\rho}(s) = v$

$r_\lambda = \vec e(s)$

$E = (r_s, r_s) = (\dot{\vec\rho}(s), \dot{\vec\rho}(s)) = 1$

$G = (r_s, r_\lambda) = (\dot{\vec\rho}(s), \vec e)$

$F = (r_\lambda, r_\lambda) = (\vec e, \vec e)$

$$I = \begin{pmatrix} (\dot{\vec\rho}(s), \dot{\vec\rho}(s)) & (\dot{\vec\rho}(s), \vec e) \\ (\dot{\vec\rho}(s), \vec e(s)) & (\vec e, \vec e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (v, e) \\ (v, e) & (e, e) \end{pmatrix}$$

—

1а) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ лемниската

$$r' = a\frac{\sin}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad r'' = -\frac{a}{(\cos 2\varphi)^{3/2}}$$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}} = \frac{\left|a^2\cos 2\varphi + \dfrac{2a^2}{\cos 2\varphi} + \dfrac{a^2}{\cos^2 2\varphi}\right|}{\left(a^2\cos 2\varphi + 1\dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{a^2\left|\cos 2\varphi + \dfrac{2}{\cos 2\varphi} + \dfrac{1}{\cos^2 2\varphi}\right|}{\left(a^2\cos 2\varphi + \dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}\right)^{3/2}}$$

2a) $r(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$

$\dot r(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$

$\ddot r(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$

$\dddot r(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)$

$[\dot r, \ddot r] = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^{t}, 2)$

$|[\dot r, \ddot r]| = (2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4)^{1/2} = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})$

$|\dot r| = (e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{1/2} = e^t + e^{-t}$

$\langle [\dot r, \ddot r], \dddot r \rangle = -2\sqrt{2}.$

$\varkappa = \dfrac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{([\dot r, \ddot r])^2} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{2(e^t + e^{-t})^2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

$k = \dfrac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \dfrac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

+

4a) $r = (a\cos u \cos v, a\cos u \sin v, c\sin u)$ эллипсоид вращения

$r_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u \sin v, c\cos u)$ $r_{uv} = (a\sin u \sin v, -a\sin u\cos v, 0)$

$r_{uu} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u \sin v, -c\sin u)$

$r_v = (-a\cos u \sin v, a\cos u\cos v, 0)$

$r_{vv} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u \sin v, 0)$

$m = \dfrac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = \cancel{\dfrac{(-ac\cos^2 u\cos v, ac\cos^2 u \sin v, -a^2(\cos u \sin u))}{a^2\cos^2 u(c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u)}} =$

$\cancel{= \left(\dfrac{-c\cos v}{a(c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u)}, \dfrac{c\sin v}{a(c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u)}, \dfrac{-\sin u}{\cos u(c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u)}\right)}$

$\cancel{\mathrm{II} = \left(\dfrac{+ac\cos u\cos^2 v - ac\cos u \sin^2 v}{a(c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u)} + \dfrac{c\sin^2 u}{\cos u(c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u)}\right)\left(\dfrac{2ac\sin u\cos u\sin v}{a(c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u)}\right)}$

1a) $r = a\frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}$ Свистова 208

$$\dot r = a\,\frac{2(\cos 2t)^{3/2} + \frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}}{\cos 2t}$$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2+(r')^2)^{3/2}} = \frac{a^2\left(\frac{\cos 2t + 2\sin^2 2t - 2\cos^2 2t + \sin 2t}{\cos 2t}\right)}{\left(\frac{a^2}{\cos 2t}\right)^{3/2}} =$$

?

$$= \frac{a^2\left(\frac{(\cos 2t + \sin 2t)(1+2\sin 2t - 2\cos 2t)}{\cos 2t}\right)}{\left(\frac{a^2}{\cos 2t}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{(\cos 2t + \sin 2t)(1 + 2\sin t - 2\cos 2t)\sqrt{\cos 2t}}{a}$$ −

Ответ: $\frac{(\cos 2t + \sin 2t)(1 + 2\sin t - 2\cos 2t)\sqrt{\cos 2t}}{a}$

5a) проформы.

$$II = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda k(s)(\rho, \rho', n)}{|\rho, \dot\rho|} \end{pmatrix}$$

$k_1, k_2 = 0$? одно собств. значение 0, а второе не 0!

$K = 0$

$H = 0$ ±

Свистова 208.

$$\cancel{L = (r_{uu}, m) = \frac{1}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}}(c\cos u\cos^2 v - c\sin^2 u \ldots)}$$

$$m = \frac{(ac\cos^2 u\sin u\cos v,\ ac\cos^2 u\sin v\sin u,\ a^2\cos u\sin u)}{a\cos u\sin u\sqrt{(a^2+c^2)}} =$$

$$= \frac{(-c\cos v, -c\sin v, -a)}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$[r_u \times r_v] = \cancel{(\ldots)} =$$

$$= [(-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, c\sin u), (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)] =$$

$$= (-ac\cos u\sin u\cos v, -ac\cos u\sin u\sin v, -a^2\cos u\sin u).$$

$$L = (r_{uu}, m) = \frac{ac(\cos u + \sin u)}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$M = (r_{uv}, m) = \frac{-ac\sin u\sin v\cos v + ac\sin v\sin u\cos v}{\sqrt{a^2+c^2}} = 0$$

$$N = \frac{ac\cos u\cos^2 v + ac\cos u\sin^2 v}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{ac\cos u}{\sqrt{a^2+c^2}} = (r_{vv}, m)$$

$$II = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}\begin{pmatrix} \cos u + \sin u & 0 \\ 0 & \cos u \end{pmatrix}$$ —

№5а) $r = \lambda\vec{\rho}(s)$ (коническая поверхность).

$r_s = \lambda\dot{\vec{\rho}}(s) = \lambda e$

$r_\lambda = \vec{\rho}(s)$

$r_{ss} = 0$

$r_{s\lambda} = \dot{\vec{\rho}}(s) = v(s)$

$r_{\lambda\lambda} = -\lambda m\cdot k$

$$I = \begin{pmatrix} \lambda^2 & (\lambda, \rho) \\ (\lambda, \rho) & (\rho, \rho) \end{pmatrix}$$

$$m = \frac{[\lambda e, \vec{\rho}(s)]}{|[\lambda e, \vec{\rho}(s)]|}$$

$$II = \begin{pmatrix} (r_{ss}, m) & (r_{s\lambda}, m) \\ (r_{s\lambda}, m) & (r_{\lambda\lambda}, m) \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & (\dot{\rho}, m) \\ & (-\lambda k m, m) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & (v, m) \\ (v, m) & |m|^2\cdot\lambda k \end{pmatrix}$$

$$\cancel{II = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda k(s)\cdot\langle \rho, \rho, n\rangle \end{pmatrix}}$$

−	+	+	+	−

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ B.

Группа 208	Фамилия Стексова

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1+\cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$\mathbf{r} = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{\nu}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (каналовая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

№ 2b

$$r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$$

$$\dot r = (e^t(\sin t + \cos t), e^t(\cos t - \sin t), e^t)$$

$$\ddot r = (e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t, e^t) =$$

$$= (2e^t \cos t, -2e^t \sin t, e^t).$$

$$\dddot r = (2e^t \cos t - 2e^t \sin t, -2e^t \sin t - 2e^t \cos t, e^t)$$

$$[\dot r, \ddot r] = (e^{2t}(\cos t - \sin t) + 2e^{2t}\sin t, -e^{2t}(\sin t + \cos t) + 2e^{2t}\cos t, -2e^{2t}\sin t(\sin t + \cos t) - 2e^{2t}\cos t(\cos t - \sin t)) =$$

$$= (e^{2t}(\sin t + \cos t), e^{2t}(\cos t - \sin t), -2e^{2t})$$

$$|[\dot r, \ddot r]| = e^{2t}\sqrt{(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 4} =$$

$$= e^{2t}\sqrt{6}, \quad |\dot r| = e^t\sqrt{(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 1} = e^t\sqrt{3}.$$

$$k = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{e^{3t}(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$$

$$\langle \dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} \rangle = \begin{vmatrix} e^t(\sin t+\cos t) & e^t(\cos t-\sin t) & e^t \\ 2e^t\cos t & -2e^t\sin t & e^t \\ 2e^t(\cos t-\sin t) & -2e^t(\cos t+\sin t) & e^t \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3t} \begin{vmatrix} \sin t+\cos t & \cos t-\sin t & 1 \\ 2\cos t & -2\sin t & 1 \\ 2(\cos t-\sin t) & -2(\cos t+\sin t) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3t}\Big(-2\sin t(\sin t+\cos t) - 4\cos t(\sin t+\cos t) +$$
$$+ 2(\cos t-\sin t)^2 + 4\sin t(\cos t-\sin t) + \cancel{4\cos t(\sin t+\cos t)}$$
$$\cancel{-2(\cos t-\sin t)^2} + 2(\cos t+\sin t)^2 - 2\cos t(\cos t-\sin t)$$

$$= e^{3t}\Big(-2\sin^2 t - \cancel{2\sin t\cos t} - 4\sin t\cos t - \cancel{4\cos^2 t} +$$
$$+ 2 - 4\sin t\cos t + 4\sin t\cos t - 4\sin^2 t + \cancel{2} + 4\sin t\cos t$$
$$- 2\cos^2 t + \cancel{2\sin t\cos t}\Big) = 2e^{3t}\cancel{(-2\sin t\cos t - 2\cos^2 t)}.$$

$$k = \frac{\langle \dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} \rangle}{|[\dot{r}, \ddot{r}]|^2} = \cancel{\frac{e^{3t}(-2\sin t\cos t - 2\cos^2 t)}{6e^{4t}}} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{6e^t}(-2\sin t\cos t - 2\cos^2 t)} = \frac{-2e^{3t}}{e^{4t}\cdot 6} = -\frac{1}{3e^t}$$

+

16

$$r = a(1+\cos\varphi)$$

$$k = \frac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}|}{(r^2+\dot{r}^2)^{3/2}}$$

$$\dot{r} = -a\sin\varphi$$
$$\ddot{r} = -a\cos\varphi$$

$$k = \frac{|a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)|}{(a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|2a^2 + a^2 + 3a^2\cos\varphi|}{(2a^2+2a^2\cos\varphi)^{3/2}} = \frac{1+\cos\varphi}{a(1+2\cos\varphi)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} x = r(\cancel{\varphi})\cos\varphi \\ y = r(\cancel{\varphi})\sin\varphi \end{cases}$$

—

Стенкова.

1в (прод.)

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{(\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (\dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} = \sqrt{\dot{r}^2(\varphi)+r^2(\varphi)} = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi} = a\sqrt{2+2\cos\varphi}$$

$$s(\varphi) = a\int_0^{\varphi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{4a}$$

$$2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1-2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-2\cdot\frac{s^2}{16a^2} = \frac{8a^2-s^2}{8a^2}$$

$$k(s) = \frac{1+\frac{8a^2-s^2}{8a^2}}{a\left(1+2\left(\frac{8a^2-s^2}{8a^2}\right)\right)^{3/2}} = \frac{16a^2-s^2}{8a^3\left(\frac{12a^2-s^2}{4a^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{16a^2-s^2}{(12a^2-s^2)^{3/2}}$$

к 3в.

$$r(s,\varphi) = \vec{\rho}(s) + \vec{\nu}(s)\cos\varphi + \vec{\beta}(s)\sin\varphi$$

$$\frac{dr}{ds} = \tau + \dot{\nu}\cos\varphi + \dot{\beta}\sin\varphi$$

$$\frac{dr}{ds} = \tau + (-k\tau + æ\beta)\cos\varphi - æ\nu\sin\varphi$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\nu\sin\varphi + \beta\cos\varphi$$

$$G = \begin{pmatrix} (1-k\cos\varphi)^2 + æ^2 & æ \\ æ & 1 \end{pmatrix}$$

$$I(s,\varphi) = ((1-k\cos\varphi)^2+æ^2)\,ds^2 + 2æ\,ds\,d\varphi + d\varphi^2$$

+

стекловe

№ 4в.

$r = r((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$

$r_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$

$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$

$[r_u, r_v] = b(a+b\cos u)(-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$

$|[r_u, r_v]| = b(a+b\cos u)$.

$$n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$$

$r_{uu} = (-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u)$

$r_{uv} = (b\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0)$

$r_{vv} = (-(a+b\cos u)\cos v, -(a+b\cos u)\sin v, 0)$

$(r_{uu}, n) = b(\cos^2 u\cos^2 v + \cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u) = b$

$(r_{uv}, n) = -\cos u\cos v\, b\sin u\sin v + (-\cos u\sin v)(-b\sin u\cos v)$

$= 0.$

$(r_{vv}, n) = (-\cos u\cos v)(-(a+b\cos u)\cos v) +$

$+ (-\cos u\sin v)(-(a+b\cos u)\sin v) = (a+b\cos u)\cos u$

$\mathrm{II}(u,v) = b\,du^2 + (a+b\cos u)\cos u\, dv^2$ $+$

№ 5в.

$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s)$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \vec{\tau} + \lambda\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\tau} + \lambda(-\varkappa\vec{n})$$

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2\varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det G = 1 + \lambda^2\varkappa^2$

Сенилова

№ 5 в (продолжение)

$$m = \frac{[r_s, r_\lambda]}{|[r_s, r_\lambda]|}$$

это не число, а вектор!

$$p = (s, \lambda, \rho(s) + \lambda b s)$$

$$p_s = (1, 0, \vec{\tau} + \lambda(-\varkappa \vec{n}))$$

$$p_\lambda = (0, 1, \vec{b})$$

$$[p_s, p_\lambda] = (-\vec{\tau} + \lambda \varkappa \vec{n}, -\vec{b}, 1)$$

$$|[p_s, p_\lambda]| = \sqrt{1 + 1 + \lambda^2 \varkappa^2 + 1} = \sqrt{3 + \lambda^2 \varkappa^2}$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{3 + \lambda^2 \varkappa^2}} (-\vec{\tau} + \lambda \varkappa \vec{n}, -\vec{b}, 1)$$

$$p_{ss} = (0, 0, kn - \lambda \varkappa(-k\tau + \varkappa b)) = (0, 0, kn + k\lambda\varkappa\tau - \lambda\varkappa^2 b)$$

$$p_{\lambda\lambda} = (0, 0, \cancel{\varkappa n}\, 0)$$

$$p_{s\lambda} = (0, 0, -\varkappa n)$$

$$Q = \begin{pmatrix} kn + k\lambda\varkappa\tau - \lambda\varkappa^2 b & -\varkappa n \\ -\varkappa n & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 + \lambda^2 \varkappa^2}}$$

$$\det Q = -\frac{\varkappa^2 n^2}{3 + \lambda^2 \varkappa^2}$$

$$k = \frac{\det Q}{\det G} = \frac{-\varkappa^2 n^2}{(3 + \lambda^2 \varkappa^2)(1 + \lambda^2 \varkappa^2)}$$

Симонова

№ 5б. (продолж.)

$H = k_1 + k_2$.

$\det(Q - kG) = 0$.

$Q - kG = \begin{pmatrix} kn + k\lambda\varkappa\tau - \lambda\varkappa^2 b - k - k\lambda^2\varkappa^2 & -\varkappa n \\ -\varkappa n & -k\,\ldots \end{pmatrix}$

$-k^2 n - k^2\lambda\varkappa\tau + \lambda k\varkappa^2 b + k^2 + k^2\lambda^2\varkappa^2 -$

$- \varkappa^2 n^2 = 0$

$\cancel{k^2(1 - n - \lambda\varkappa\tau) + k(\lambda\varkappa^2 b + \lambda^2\varkappa^2) - \varkappa^2 n^2 = 0}$

$\cancel{D = (\lambda\varkappa^2 b + \lambda^2\varkappa^2)^2 + 4\varkappa^2 n^2(1 - n - \lambda\varkappa\tau) =}$

$\cancel{= \lambda^2\varkappa^4 b^2 + \lambda^4\varkappa^4 + 2\lambda^3\varkappa^4 b + 4\varkappa^2 n^2 -}$

$\cancel{-4\varkappa^2 n^3 - 4\lambda\varkappa^3 n^2\tau}$

$\cancel{H = k_1 + k_2 = -\frac{\lambda\varkappa^2 b + \lambda^2\varkappa^2}{1 - n - \lambda\varkappa\tau}}$

$k^2(1 + \lambda^2\varkappa^2 - n - \lambda\varkappa\tau) + \lambda k\varkappa^2 b - \varkappa^2 n^2 = 0$

$$H = k_1 + k_2 = \frac{\lambda\varkappa^2 b}{1 + \lambda^2\varkappa^2 - n - \lambda\varkappa\tau}$$

$$Q - kG = \frac{1}{\sqrt{3 + \lambda^2\varkappa^2}}\begin{pmatrix} kn + k\lambda\varkappa\tau - \lambda\varkappa^2 b - k(1 + \lambda^2\varkappa^2)\sqrt{3 + \lambda^2\varkappa^2} & -\varkappa n \\ -\varkappa n & -k\sqrt{3 + \lambda^2\varkappa^2} \end{pmatrix}$$

+	∓	+	+	−

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ B.

Группа 208	Фамилия Осинцев

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1+\cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$\mathbf{r} = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{\eta}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (каналовая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

(2)

$$k = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} \qquad \varkappa = \frac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{([\dot r, \ddot r])^2}$$

$$\dot r = (e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t)$$

$$\ddot r = (e^t\cos t + e^t\sin t + e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\cos t - e^t\sin t - e^t\sin t - e^t\cos t,\ e^t)$$

$$\dddot r = (2e^t\cos t - 2e^t\sin t,\ -2e^t\sin t - 2e^t\cos t,\ e^t)$$

$$|\dot r| = \sqrt{2e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}} = \sqrt{3}e^t$$

$$[\dot r, \ddot r] = e^t(e^t\cos t - e^t\sin t) + 2e^t e^t\sin t,\ -e^t(e^t\sin t + e^t\cos t) + e^t\cdot 2e^t\cos t,\ -2e^t\sin t(e^t\sin t + e^t\cos t) - 2e^t\cos t(e^t\cos t - e^t\sin t)$$

$$= (e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t,\ -e^{2t}\sin t + e^{2t}\cos t,\ \underbrace{-2e^{2t}\sin^2 t - 2e^{2t}\cos^2 t}_{-2e^{2t}})$$

$$|[\dot r, \ddot r]| = \sqrt{e^{4t}\cos^2 t + \cancel{2e^{4t}\cos t\sin t} + e^{4t}\sin^2 t + e^{4t}\sin^2 t + e^{4t}\cos^2 t - \cancel{2e^{4t}\cos t\sin t} + 4e^{4t}} =$$

$$= \sqrt{e^{4t} + e^{4t} + 4e^{4t}} = e^{2t}\sqrt{6};$$

$$\boxed{k = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{(\sqrt{3}e^t)^3} = \sqrt{2}e^{t}}$$

$$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = e^t(\sin t + \cos t)(-2e^{2t}\sin t + 2e^{2t}\sin t + 2e^{2t}\cos t) - e^t(\cos t - \sin t)(2e^{2t}\cos t - 2e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\sin t) +$$

$$+ e^t(-4e^{2t}\cos t\sin t - 4e^{2t}\cos^2 t + 4e^{2t}\cos t\sin t - 4e^{2t}\sin^2 t) = 2e^{3t}(\sin t + \cos t)\cos t - 2e^{3t}(\cos t - \sin t)\sin t$$

$$= 2e^{3t} - 4e^{3t} = -2e^{3t}$$

$$\varkappa = \frac{-2e^{3t}}{e^{4t}\cdot 6} = -\frac{1}{3}e^{-t}$$

Ответ: $k = \sqrt{2}e^{-t}$

$\varkappa = -\frac{1}{3}e^{-t}$

∓

①

$r = (1+\cos\varphi)a$

$r' = -a\sin\varphi$

$r'' = -a\cos\varphi$

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}} = \frac{3a^2(1+\cos\varphi)}{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\varphi}} = \boxed{\frac{3}{4a\cos\frac{\varphi}{2}}}$$

$$r^2+2r'^2-rr'' = (1+\cos\varphi)^2a^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi) =$$

$$= a^2(1+\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 2\sin^2\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi) = a^2(3+3\cos\varphi) = \underline{3a^2(1+\cos\varphi)}$$

$$r^2+r'^2 = (1+\cos\varphi)^2a^2 + a^2\sin^2\varphi = \underline{2a^2(1+\cos\varphi)}$$

+

Отв: $K = \boxed{\frac{3}{4a\cos\frac{\varphi}{2}}} = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\varphi}}}$;

③

$r_s = v(s) + n(s)\cos\phi + b(s)\sin\phi$

$r_\phi = -\vec{n}(s)\sin\phi + \vec{b}(s)\cos\phi$

$E = (r_s, r_s) = ((1-k\cos\phi)^2 + \varkappa^2)$

$G = (r_s, r_\varphi) = \varkappa$

$F = (r_\phi, r_\phi) = 1$

$$\boxed{\underline{I} = \begin{pmatrix} (1-k\cos\varphi)^2 + \varkappa^2 & \varkappa \\ \varkappa & 1 \end{pmatrix}}$$

+

④

$r = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$

$r_u = (-b\cos v\sin u, -b\sin v\sin u, b\cos u)$

$r_{uu} = (-b\cos v\cos u, -b\sin v\cos u, -b\sin u)$

$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$

$r_{vv} = (-(a+b\cos u)\cos v, -(a+b\cos u)\sin v, 0)$

$r_{uv} = (b\sin v\sin u, -b\cos v\sin u, 0)$

$(r_{uu}, m) = (b\cos^2 u\cos^2 v + b\sin^2 v\cos^2 u + b\sin^2 u) = b$

$(r_{vv}, m) = \cos^2 v\cos u(a+b\cos u) + (a+b\cos u)\sin^2 v\cos u = (a+b\cos u)\cos u$

$(r_{uv}, m) = -b\sin v\cos v\sin u\cos u + b\cos v\sin v\sin u\cos u + 0 = 0$

$$\underline{II} = \begin{pmatrix} (r_{uu}, m) & (r_{uv}, m) \\ (r_{uv}, m) & (r_{vv}, m) \end{pmatrix} = \boxed{\boxed{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)\cos u \end{pmatrix}}}$$

+

$$m = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$$

$[r_u, r_v] = (-b\cos u\cos v(a+b\cos u), -b\cos u(a+b\cos u)\sin v, -b\cos^2 v\sin u(a+b\cos u) - b\sin^2 v\sin u(a+b\cos u))$

$|[r_u, r_v]| = \sqrt{b^2(a+b\cos u)^2\cos^2 u\cos^2 v + b^2(a+b\cos u)^2\cos^2 u\sin^2 v + b^2(a+b\cos u)^2\sin^2 u} = \sqrt{b^2(a+b\cos u)^2\cos^2 u + b^2(a+b\cos u)^2\sin^2 u} = b(a+b\cos u).$

(3)

Осипов Михаил. 208 гр.

$r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{b}(s)$

$K = \frac{\det II}{\det I}$

$b' = -\varkappa n$

$n' = -kv + \varkappa b$

$v' = kn.$

$r_s = \tau + \lambda(-\varkappa n)$

$r_\lambda = b$

$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ $\quad r_s^2 \quad (r_s, r_\lambda)$; $\quad r_s r_\lambda \quad r_\lambda^2$

$r_s = v + \lambda(-\varkappa n)$

$r_\lambda = b$

$\det I = 1 + \lambda^2 \varkappa^2$

$I = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2\varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

$r_{ss} = kn + \varkappa\lambda(-kv + \varkappa b)$

$r_{\lambda\lambda} = 0$

$r_{s\lambda} = -\varkappa n$

$II = \begin{pmatrix} (r_{ss}, m) & (r_{s\lambda}, m) \\ (r_{s\lambda}, m) & (r_{\lambda\lambda}, m) \end{pmatrix} =$ −

$= \begin{pmatrix} k & -v \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix}$?

$\det II = -\varkappa^2$

$-(k-\lambda)\lambda - \varkappa^2 = 0$

$\lambda^2 - k\lambda - \varkappa^2 = 0$

$D = k^2 + 4\varkappa^2$

$k_{1,2} = \lambda_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4\varkappa^2}}{2}$

$K_{гаус} = \frac{-\varkappa^2}{1+\lambda^2\varkappa^2}$

$K_{ср} = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{k}{2}.$

Ответ: $K_{гаус.} = -\frac{\varkappa^2}{1+\lambda^2\varkappa^2}$

$K_{ср} = \frac{k}{2}.$

$\boxed{-}\boxed{\mp}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{0}$

мб1

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ В.

Группа 208	Фамилия Малей

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1 + \cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \vec{n}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (каналовая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

~~N1b~~

~~$r = a(1+\cos\varphi)$~~

N2b Найти k, $\varkappa$

$$r(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$$

$$\dot r(t) = (e^t \sin t + e^t \cos t, e^t\cos t - e^t \sin t, e^t)$$

$$\ddot r(t) = (\cancel{e^t \sin t} + e^t \cos t + e^t\cos t - \cancel{e^t \sin t}, \cancel{e^t\cos t} - e^t \sin t - e^t \sin t - \cancel{e^t \cos t}, e^t) =$$

$$= (2e^t \cos t, -2e^t \sin t, e^t)$$

$$\dddot r(t) = (2(e^t\cos t - e^t \sin t), -2(e^t \sin t + e^t \cos t), e^t)$$

$$[\dot r, \ddot r] = \Big(e^t(e^t\cos t - e^t \sin t) + 2e^t \cdot e^t \sin t, \ \cancel{e^t(e^t \sin t + e^t\cos t)}, \ 2e^t \cdot e^t \cos t - e^t \cdot e^t(\sin t + \cos t),$$

$$-e^t(\sin t + \cos t)\,2e^t \sin t - 2e^t \cos t\,(e^t \cos t - e^t \sin t)\Big) =$$

$$= \Big(e^{2t}(\cos t + \sin t), e^{2t}(\cos t - \sin t), 2e^{2t}(-\sin^2 t - \cos t\sin t - \cos^2 t + \cos t \sin t)\Big) =$$

$$= e^{2t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, -2)$$

Итак, $[\dot{r}, \ddot{r}] = e^{2t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, -2)$

$$|[\dot{r}, \ddot{r}]| = \sqrt{e^{4t}(\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + 4)} =$$

$$= e^{2t}\sqrt{1 + 1 + 4} = e^{2t}\sqrt{6}$$

$$\cancel{|\dot{r}| = \sqrt{e^{2t}}}$$

$$\dot{r} = e^{t}(\sin t + \cos t, \cos t - \sin t, 1)$$

$$|\dot{r}| = \sqrt{e^{2t}(1 + 1 + 1)} = e^{t}\sqrt{3}$$

$$k = \frac{|[\dot{r}, \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3} = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{(e^{t}\sqrt{3})^3} = \boxed{\cancel{e^{t}\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3e^{t}}$$

$$(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}) = e^{3t}\begin{vmatrix} \sin t + \cos t & \cos t - \sin t & 1 \\ 2\cos t & -2\sin t & 1 \\ 2(\cos t - \sin t) & -2(\cos t + \sin t) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3t}\Big(\cancel{-2\sin^2 t} - 2\sin t\cos t + 4\cos t \sin t - 4\cos^2 t + 2\cos^2 t - 2\cos t\sin t - 2\cos t \sin t + \cancel{2\sin^2 t} -$$

$$-\big(-4\cos t \sin t + 4\sin^2 t - 2(\cos^2 t + 2\cos t\sin t + \sin^2 t) + 2\cos^2 t - 2\cos t \sin t\big)\Big) =$$

$$= e^{3t}(-10\cos t \sin t - 2\cos^2 t + 10\cos t \sin t - 2\sin^2 t) =$$

$$= e^{3t}\cdot(-2) = -2e^{3t}.$$

$$\varkappa = \frac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{|[\dot r, \ddot r]|^2} = \frac{-2e^{3t}}{6e^{4t}} = \boxed{-\frac{1}{3}e^{-t}.}$$

Лист 2

Малеб

+

~~№3б~~

$\cancel{r = \bar\rho(s) + n(s)\cos\varphi + \vec{e}(s)\sin\varphi}$

$\cancel{\dot r_s = \vec\tau +}$

№4б

II - ?

$$r = ((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u)$$

$$r_u = (-b\sin u\cdot\cos v,\ -b\sin u\cdot\sin v,\ b\cos u)$$

$$\boxed{r_{uu} = (-b\cos u\cos v,\ -b\cos u\cdot\sin v,\ -b\sin u)}$$

$$\boxed{r_{uv} = (b\sin u\sin v,\ -b\sin u\cos v,\ 0)}$$

$$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0)$$

$$\boxed{r_{vv} = (-(a+b\cos u)\cos v,\ -(a+b\cos u)\sin v,\ 0)}$$

$$= \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$$

$$[r_u, r_v] = (-(a+b\cos u)\cdot b\cos v\sin u,\ (a+b\cos u)\, b\sin u\sin v,$$

$$-(a+b\cos u)\, b\cos u\cos^2 v - (a+b\cos u)\, b\cos u\sin^2 v =$$

$$= (a+b\cos u)\, b\,(-\cos v\sin u,\ \sin u\sin v,\ -\cos u)$$

лист 3

Малей

$$|[r_u, r_v]| = b(a + b\cos u)$$

$$n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

$$(r_{uu}, n) = b(\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u) = b$$

$$(r_{uv}, n) = -\cos u \cos v \, b \sin u \sin v + (-\cos u \sin v)(-b \sin u \cos v) = 0$$

$$(r_{vv}, n) = (-\cos u \cos v)(-(a + b\cos u)\cos v) + (-\cos u \sin v)(-(a+b\cos u)\sin v) =$$

$$= (a + b\cos u)\cos u$$

$$\boxed{\mathrm{II}(u, v) = b\,du^2 + (a + b\cos u)\cos u\, dv^2}$$ +

№ 56

$$r = \bar{\rho}(s) + \lambda \vec{b}(s)$$

$$r_s = \vec{\tau} + \lambda(-\varkappa \vec{\nu})$$

$$r_\lambda = \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 \varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det G = 1 + \lambda^2 \varkappa^2$$

Гауссова: $K = \dfrac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} = k_1 k_2$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Ме5-4

Малеб

№1в

$$r = a(1+\cos\varphi)$$

$$k = \frac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}|}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}$$

$$\dot{r} = -a\sin\varphi$$

$$\ddot{r} = -a\cos\varphi$$

$$k = \frac{|a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)|}{(a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|2a^2 + a^2 + 3a^2\cos\varphi|}{(2a^2 + 2a^2\cos\varphi)^{3/2}} = \frac{3(1+\cos\varphi)}{a(2+2\cos\varphi)^{3/2}}$$

—

№3в

I — ?

$$r = \vec{\rho}(s) + \vec{n}(s)\cos\varphi + \vec{b}(s)\sin\varphi =: r(s,\varphi)$$

$$r_s = \tau + \dot{\vec{n}}\cos\varphi + \dot{\vec{b}}\sin\varphi$$

$$r_s = \tau + (-k\tau + \varkappa b)\cos\varphi - \varkappa n\sin\varphi$$

$$r_\varphi = -\vec{n}(s)\sin\varphi + \vec{b}(s)\cos\varphi$$

$$G = \begin{pmatrix} (1-k\cos\varphi)^2+\varkappa^2 & \varkappa \\ \varkappa & 1 \end{pmatrix}.$$

+

мб 9.

Манев.

$$\boxed{I = ((1-k\cos\varphi)^2+\varkappa^2)\,ds + 2\varkappa\, ds\, d\varphi + d\varphi^2}$$

$$\boxed{K = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{\sqrt{3}e^{4/3}} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}e} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3e}}}$$

$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = e^t(\sin t+\cos t)(-2e^{2t}\cancel{\sin t} + \cancel{2e^{2t}}\sin t + 2e^{2t}\cos t) - e^t(\cos t - \sin t)(\cancel{2e^{2t}\cos t} - 2e^{2t}\cos t +$
$+ 2e^{2t}\sin t) + e^t(-\cancel{4e^{2t}}\cos t\sin t - 4e^{2t}\cos^2 t + 4e^{2t}\cancel{\cos t}\sin t - 4e^{2t}\sin^2 t) =$
$= 2e^{3t}(\sin t+\cos t)\cos t - 2e^{3t}(\cos t - \sin t)\sin t - 4e^{3t} =$
$= 2e^{3t} - 4e^{3t} = -2e^{3t}.$ +

$$\varkappa = \frac{-2e^{3t}}{e^{4t}\cdot 6} = \boxed{-\frac{1}{3}e^{-t}}$$

3b) $r_s = v(s) + n(s)\cos\varphi + b(s)\sin\varphi$
$r_\varphi = -\vec n(s)\sin\varphi + \vec b(s)\cos\varphi$
$E = (r_s, r_s) = ((1-k\cos\varphi)^2 + \varkappa^2)$
$G = (r_s, r_u) = \varkappa$
$F = (r_\varphi, r_\varphi) = 1$

$$I = \begin{pmatrix} (1-k\cos\varphi)^2+\varkappa^2 & \varkappa \\ \varkappa & 1 \end{pmatrix}$$ +

4b) $r = (\cancel{(a+b)\cos u}\ (a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$
$r_u = (-b\cos v\sin u, -b\sin v\sin u, b\cos u)$
$r_{uu} = (-b\cos v\cos u, -b\sin v\cos u, -b\sin u)$
$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$
$r_{vv} = (-(a+b\cos u)\cos v, -(a+b\cos u)\sin v, 0)$
$r_{uv} = (b\sin v\sin u, -b\cos v\sin u, 0).$

$m = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$

$[r_u, r_v] = (-b\cos u\cos v(a+b\cos u), -b\cos u(a+b\cos u)\sin v, -b\cos^2 v\sin u(a+b\cos u) - b\sin^2 v\sin u(a+b\cos u))$ $-b\sin u(a+b\cos u)(\cos^2 v + \sin^2 v)$

$|[r_u, r_v]| = \sqrt{b^2(a+b\cos u)^2\cos^2 u\cos^2 v + b^2(a+b\cos u)^2\cos^2 u\sin^2 v + b^2(a+b\cos u)^2\sin^2 u} =$
$= \sqrt{b^2(a+b\cos u)^2\cos^2 u + b^2(a+b\cos u)^2\sin^2 u} = b(a+b\cos u)$

II ~~$(u,v)=b_{ij}\ldots$~~ $= \begin{pmatrix} (r_{uu}, m) & (r_{uv}, m) \\ (r_{uv}, m) & (r_{vv}, m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)\cos u \end{pmatrix}$

$(r_{uu}, m) = b\cos^2 u\cos^2 v + b\sin^2 v\cos^2 u + b\sin^2 u = b.$
$(r_{vv}, m) = \cos^2 v\cos u(a+b\cos u) + (a+b\cos u)\sin^2 v\cos u = (a+b\cos u)\cos^2 u$
$(r_{uv}, m) = -b\sin v\cancel{\cos v}\sin u\cos u + b\cos v\cancel{\sin v}\sin u\cos u + 0 = 0.$ +

1b). $r = (1+\cos\varphi)a$. Емонова 208 2лист

$r' = -a\sin\varphi$

$r'' = -a\cos\varphi$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{|r^2 + r'^2|^{3/2}} = \frac{3a^2(1+\cos\varphi)}{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{3/2}} = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\varphi}}} = \frac{3}{4a|\cos\ldots}$$

+

$r^2 + 2r'^2 - rr'' = (1+\cos\varphi)^2a^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi) =$
$= a^2(1+\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 2\sin^2\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi) = a^2(3+3\cos\varphi) = 3a^2(1+\cos\ldots$

$r^2 + r'^2 = (1+\cos\varphi)^2a^2 + a^2\sin^2\varphi = 2a^2(1+\cos\varphi)$.

5b). $r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s)$

гаус. $K = \frac{\det II}{\det I}$

$(r_s r_s)$ (r_s, r_λ)

$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ (r_λ, r_λ).

$\dot{b} = -\varkappa n$.

$\dot{n} = -k\tau + \varkappa b$

$\dot{\tau} = kn$

$\tau = \dot{v}$

$r_s = \tau + \lambda(-\varkappa n)$

$r_\lambda = b$

$I = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2\varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det I = 1 + \lambda^2\varkappa^2$

$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

$r_{ss} = kn + \varkappa\lambda(-k\tau + \varkappa b)$

?

$r_{\lambda\lambda} = 0$

$r_{s\lambda} = -\varkappa n$

$\cancel{n = \frac{[r_s r_\lambda]}{|[r_s, r_\lambda]|} =}$

$[r_s, r_\lambda] =$

$$II = \begin{pmatrix} (r_{ss}, n) & (r_{s\lambda}, n) \\ (r_{s\lambda}, n) & (r_{\lambda\lambda}, n) \end{pmatrix} =$$

—

$$= \begin{pmatrix} k & -\varkappa \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix}$$

$(k-\lambda)\lambda - \varkappa^2 = 0$.
$\lambda^2 - k\lambda - \varkappa^2 = 0$
$\cancel{(k-\lambda)}$ $D = k^2 + 4\varkappa^2$
$\cancel{\lambda_1 = \lambda_2 = k_1 = k_2 = k}$.
$k_{1,2} = \lambda_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2+4\varkappa^2}}{2}$.

$\det II = -\varkappa^2$

$$\boxed{K_{гаус.} = -\frac{\varkappa^2}{1+\lambda^2\varkappa^2}}$$

$$\boxed{k_{ср} = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{k}{2}}$$

+	+	+	+	−

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ B.

Группа 208	Фамилия Пичугин

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1+\cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{n}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (канaловая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

N2

$$r = (e^t\sin t, e^t\cos t, e^t)$$

$$\dot r = (e^t\cos t + e^t\sin t, e^t\cos t - e^t\sin t, e^t)$$

$$\ddot r = (e^t\cos t + e^t\cos t, e^t\cos t - e^t\sin t - e^t\cos t - e^t\sin t, e^t) =$$

$$= (2e^t\cos t, -2e^t\sin t, e^t)$$

$$[\dot r, \ddot r] = (e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t + 2e^{2t}\sin t, 2e^{2t}\cos t - e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t, -2\cancel{e^{2t}\sin t}\cos t - 2e^{2t}\sin^2 t - 2e^{2t}\cos^2 t + 2\cancel{e^{2t}\sin t}\cos t) =$$

$$= (e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t, e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t, -2e^{2t})$$

$$|\dot r| = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + \cancel{2e^{2t}\sin t}\cos t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\cos^2 t - 2\cancel{e^{2t}\cos t\sin t} + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} =$$

$$= \sqrt{3e^{2t}} = e^{2t}\sqrt{3}$$

$$|[\dot r, \ddot r]| = e^{2t}\sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 4} =$$

$$= e^{2t}\sqrt{6}$$

$$K = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{e^{6t}\, 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3e^{4t}}$$

$$\ddot{r} = (2e^t\cos t - 2e^t\sin t, -2e^t\cos t - 2e^t\sin t, e^t).$$

$$\begin{vmatrix} e^t\cos t + e^t\sin t & e^t\cos t - e^t\sin t & e^t \\ 2e^t\cos t & -2e^t\sin t & e^t \\ 2e^t\cos t - 2e^t\sin t & -2e^t\cos t - 2e^t\sin t & e^t \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^t\sin t - e^t\cos t & e^t\cos t + e^t\sin t & 0 \\ 2e^t\cos t & -2e^t\sin t & e^t \\ -2e^t\sin t & -2e^t\cos t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -e^t \cdot (2e^{2t}\cos^2 t - \cancel{2e^{2t}\sin t\cos t} +$$

$$+ \cancel{2e^{2t}\sin t\cos t} + 2e^{2t}\sin^2 t) = -2e^{3t}.$$

$$\varkappa = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{|[\dot{r}, \ddot{r}]|^2} = -\frac{2e^{3t}}{6e^{4t}} = -\frac{1}{3e^t}.$$ +

№1.

$r = a(1+\cos\varphi)$

$r' = -a\sin\varphi$

$r'' = -a\cos\varphi$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi|}{(a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$= \frac{|3a^2 + a^2\cos\varphi + 2a\cos\varphi|}{|2a^2 + 2a\cos\varphi|^{3/2}} = \frac{3a^2(1+\cos\varphi)}{2\sqrt{2}a^{3/2}(1+\cos\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\varphi}} = \frac{3}{4a\cos\frac{\varphi}{2}}$$ +

№3.

$$r = \vec{\rho}(s) + \vec{n}(s)\cos\varphi + \vec{b}(s)\sin\varphi$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

Пичугин Владислав, 203 гр, вариант В

№3.

$$r = \vec{\rho}(s) + \vec{n}(s)\cos\varphi + \vec{b}(s)\sin\varphi$$

$$r_s = \dot{\vec{\rho}}(s) + \cos\varphi\,\dot{\vec{n}}(s) + \dot{\vec{b}}(s)\sin\varphi$$

$$r_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{n}(s) + \vec{b}(s)\cos\varphi$$

$$\cancel{\dot{\vec{\rho}}(s) = \vec{n}(s) = \vec{b}(s) = 1}$$

$$\dot{\vec{\rho}}(s) = \vec{\tau} \qquad \dot{\vec{b}}(s) = -\varkappa\vec{n}$$

$$\dot{\vec{n}}(s) = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{b}$$

$$r_s = \vec{\tau} + \cos\varphi(-k\vec{\tau}) + \cos\varphi\cdot\varkappa\vec{b} + \sin\varphi(-\varkappa\vec{n})$$

$$\begin{pmatrix} (1-k\cos\varphi)^2 + \varkappa^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\,\varkappa^2 & \sin^2\varphi\,\varkappa + \cos^2\varphi\,\varkappa \\ \sin^2\varphi\,\varkappa + \cos^2\varphi\,\varkappa & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varkappa^2 + (1-k\cos\varphi)^2 & \varkappa \\ \varkappa & 1 \end{pmatrix}$$ +

№4.

$$r = \big((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u\big)$$

$$r_u = (-b\cos v\sin u,\ -b\sin v\sin u,\ b\cos u)$$

$$r_{uu} = (-b\cos v\cos u,\ -b\sin v\cos u,\ -b\sin u)$$

$$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0)$$

$$r_{vv} = (-(a+b\cos u)\cos v,\ -(a+b\cos u)\sin v,\ 0)$$

$$r_{uv} = (b\sin v\sin u,\ -b\cos v\sin u,\ 0)$$ +

$$n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = (-\cos u\cos v,\ -\cos u\sin v,\ -\sin u)$$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} (r_{uu}, n) & (r_{uv}, n) \\ (r_{uv}, n) & (r_{vv}, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

$$(r_{uu}, n) = b\cos^2 u\cos^2 v + b\sin^2 v\cos^2 u + b\sin^2 u = b$$

$$(r_{vv}, n) = \cos^2 v\cos u(a+b\cos u) + (a+b\cos u)\sin^2 v\cos u = (a+b\cos u)\cos u$$

$$(r_{uv}, n) = -b\sin v\cos v\sin u\cos u + b\cos v\sin v\sin u\cos u + 0 = 0.$$

Пигурин Владислав, 206 гр. вариант В.

№5.

H, K - ?

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{b}(s)$$

$$r_s = \dot{\vec{\rho}}(s) + \lambda \dot{\vec{b}}(s)$$

$$r_\lambda = \vec{b}(s)$$

$$r_s = \vec{\tau} + \lambda(-\varkappa \vec{n})$$

$$r_\lambda = \vec{b}(s)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1+\varkappa^2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{ss} = \ddot{\vec{\rho}}(s) + \lambda \ddot{\vec{b}}(s) = \tau + \lambda(-\varkappa)\cdot\vec{\tau}(\lambda) + \lambda(-\varkappa) \times \varkappa \vec{b} =$$

$$r_{s\lambda} = \dot{\vec{b}}(s) \qquad = \vec{\tau} + \lambda\varkappa k \vec{\tau} - \lambda\varkappa^2\vec{b}$$

$$r_{\lambda\lambda} = 0$$

$$n = \frac{[r_s, r_\lambda]}{|[r_s, r_\lambda]|} = 0$$

$[r_s, r_\lambda] = 0$ ~~⇒ в кач-во нормали взяли~~

В кач-во нормали возьмём $\vec{n}$ из репера Френе

$$(r_{ss}, m) = 0$$

$$(r_{s\lambda}, m) = -\varkappa \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix} = II \; ?$$

$$(r_{\lambda\lambda}, m) = 0 \qquad |\det| = \varkappa^2$$

$$K = \frac{\varkappa^2}{1+\varkappa^2\lambda^2}$$

−

$-\ \pm\ -\ +0$

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ В.

Группа 208	Фамилия Синицина

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1 + \cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \vec{n}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (каналовая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

№ 2

$$\dot{r} = (e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t)$$

$$\ddot{r} = (e^t\sin t + e^t\cos t + e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\cos t - e^t\sin t - e^t\sin t - e^t\cos t,\ e^t)$$

$$\dddot{r} = (2e^t\cos t - 2e^t\sin t,\ -2e^t\sin t - 2e^t\cos t,\ e^t)$$

$$[\dot{r}, \ddot{r}] = (e^{2t}(\cos t + \sin t),\ e^{2t}(\cos t - \sin t),\ -2e^{2t})$$

$$|[\dot{r}, \ddot{r}]| = e^{2t}\sqrt{6}$$

$$|\dot{r}| = e^t\sqrt{3}$$

$$k = \frac{e^{2t}\cdot\sqrt{6}}{e^{3t}\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot e^{-t}$$

$+$

$$(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}) = -2e^{3t}$$

$$\varkappa = \frac{-2e^{3t}}{(e^{4t}\cdot\sqrt{6})^2} = \frac{-2}{\sqrt{6}}\cdot e^{-t}$$

№ 1

$r = a(1+\cos\varphi)$

$(x, y) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$

$\dot{r} = (\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi;\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi)$

$\ddot{r} = (\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\sin\varphi \cancel{+\dot{r}\sin\varphi} - r\cos\varphi,\ \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi$

$|\dot{r}| = \dot{r}^2 \cancel{\cos^2\varphi + r^2\sin^2+\varphi}\ \dot{r}^2 + r^2$

$|[\dot{r}, \ddot{r}]| = (\dot{r}\ddot{r}\sin\varphi\cos\varphi + 2\dot{r}^2\cos^2\varphi - r\cdot\dot{r}\sin\varphi\cdot\cos\varphi - r\cdot\ddot{r}\sin^2\varphi +$

$+ 2\dot{r}r\sin\varphi\cdot\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi - \dot{r}\ddot{r}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + 2\dot{r}^2\sin^2\varphi + r\cdot\dot{r}\sin\varphi\cdot\cos$

$- r\ddot{r}\cos^2\varphi + 2\dot{r}\cdot r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi) = \sqrt{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\cdot\ddot{r}}$

$\dot{r} = -a\sin\varphi$

$\ddot{r} = -a\cos\varphi$

$|\dot{r}| = a\sqrt{2+2\cos\varphi}$

$= a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) + 2\cdot a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)\cos\varphi) =$

$= a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi - \cos\varphi - \cos^2\varphi)$

$K = \dfrac{a\cdot\sqrt{1+\cos\varphi+2\sin^2\varphi}}{a^3(2+2\cos\varphi)^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{1+\cos\varphi+2\sin^2\varphi}}{a^2(2+2\cos\varphi)^{3/2}}$ —

№ 3

$r = \rho(s) + \bar{n}(s)\cos\varphi + \bar{b}(s)\sin\varphi$

$\dot{\rho}(s) = v$

$r_s = \dot{\rho}(s)$

$r_\varphi = -\bar{n}(s)\sin\varphi + \bar{b}(s)\cos\varphi$

—

$E = (r_s, r_s) = 1$

$G = (r_s, r_\varphi) = (v,\ -\bar{n}(s)\cos\varphi + \bar{b}(s)\sin\varphi)$

$F = (r_\varphi, r_\varphi) = (-\bar{n}(s)\cos\varphi + \bar{b}(s)\sin\varphi,\ -\bar{n}(s)\cos\varphi + \bar{b}(s)\sin\varphi)$

$I = \begin{pmatrix} 1 & (v, -\bar{n}(s)\cos\varphi + \bar{b}(s)\sin\varphi) \\ (v, -\bar{n}(s)\cos\varphi + \bar{b}(s)\sin\varphi) & (-\bar{n}(s)\cos\varphi + \bar{b}(s)\sin\varphi, -\bar{n}(s)\cos\varphi + \bar{b}(s)\sin\varphi) \end{pmatrix}$

Сипирина 303 группа.

вар. В.

№ 4.

$r = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$

$r_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$

$r_{uu} = (-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u)$

$r_{uv} = (b\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0)$

$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$

$r_{vv} = (-(a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, 0)$.

$[r_u, r_v] = (-b(a+b\cos u)\cos v\cos u, -b\cos u(a+b\cos u)\sin v,$

$-b\sin u\cos v(a+b\cos u)\cos v \mp b\sin u\sin v(a+b\cos u)\sin v) =$

$= -b((a+b\cos u)\cos v\cdot\cos u, (a+b\cos u)\sin v\cdot\cos u, \sin u(a+b\cos u))$

$|[r_u, r_v]| = b\cdot(a+b\cos u)$.

т.к. $n = \dfrac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$

$\langle r_{uu}, n\rangle = \dfrac{+b}{b(a+b\cos u)}((a+b\cos u)\cos^2 u\cos^2 v + (a+b\cos u)\cos^2 u\cdot\sin^2 v +$

$+ (a+b\cos u)\sin^2 v) = 1$

$\langle r_{uv}, n\rangle = \dfrac{\cancel{b}\,1}{(a+b\cos u)}((a+b\cos u)\sin u\sin v\cdot\cos u\cos v \mp (a+b\cos u)\sin u\cos v\cdot\sin v\cos u) =$

$= 0.$

$\langle r_{vv}, n\rangle = \dfrac{b}{(a+b\cos u)}\mp((a+b\cos u)^2\cdot\cos^2 v\cdot\cos u + (a+b\cos u)^2\sin^2 v\cdot\cos u) =$

$= b(a+b\cos u)\cos u$

~~$\mathrm{II} = b(a+b\cos u)\cos u$~~ $\mathrm{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b(a+b\cos u)\cos u \end{pmatrix}$

+

I	1	0	—

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ с.

Группа 208	Фамилия Романова Е.А.

1с). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида);}$$

2с). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$\mathbf{r} = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

3с). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{b}}(s) \text{ (поверхность главных нормалей);}$$

4с). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

5с). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\tau}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями).}$$

(3) $r = \bar{\rho}(s) + \lambda b(s)$

$(x(u), y(u), z(u)) + v(x_0(u), y_0(u), z_0(u)) = (x(u) + v x_0(u)), y(u) + v y_0(u)),$
$z(u) + v z_0(u)))$

$r_u = (x'_u + x'_{0u} \cdot v x_0(u)), y'_u + y'_{0u} v y_0(u)), z'_u + z'_{0u} v z_0(u))) = \rho'_s(s) + v \cdot b'_s(s)$

$r_v = b(s) = (x_0(u), y_0(u), z_0(u))$

$E = (\rho'_s + v b'_s, \rho'_s + v b'_s)$

$G = (b(s), b(s))$

$F = (\rho'_s(s) + v b'_s(s), b(s))$

$G\ \mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$\mathrm{I} = (\bar{\rho}'_s + v b'_s, \bar{\rho}'_s + v b'_s) ds^2 + (\bar{\rho}'_s + v b'_s, b) ds dv +$
$+ (b, b) dv^2$

—

(2) $r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

$\dot r(t) = (-\cos^2 t \cdot \sin t 3, 3\cos t \cdot \sin^2 t, -2\sin 2t)$

$\ddot r(t) = (-3\cos^3 t + 6\cos t \sin^2 t, -3\sin^3 t + 6\cos^2 t \sin t, -4\cos 2t)$

$\dddot r(t) = (9\cos^2 t \cdot \sin t - 6\sin^3 t + 12\cos^2 t \cdot \sin t, -9\cos t \cdot \sin^2 t + 6\cos^3 t - 12\cos t \sin^2 t, +8\sin 2t)$

$[\dot r, \ddot r] = (-12\cos 2t \cdot \cos t \cdot \sin^2 t - 6\sin^3 t \cdot \sin 2t + 12\sin 2t \cos^2 t \cdot \sin t,$
$-12\cos 2t \cos^2 t \sin t - 6\cos^3 t \cdot \sin 2t + 12\cos t \sin 2t \sin^2 t,$
$9\cos^2 t \sin^4 t + 18\cos^4 t \sin^2 t + 9\cos^4 t \sin^2 t - 18\cos^2 t \sin^4 t) =$

$= \cancel{(-12\cos t \cdot \sin t (\cos 2t \cdot \frac{\sin t}{\cos t} - \sin 2t \cdot \frac{\cos t}{\sin 2t \sin t}) - 6\sin^3 t \sin 2t,}$

$(12\sin^2 t \cdot \cos^3 t, +12\cos^2 t \sin^3 t, 0)$

$|[\dot r, \ddot r]| = \sqrt{144\sin^4 t \cdot \cos^6 t + 144\sin^6 t \cdot \cos^4 t} = 12\sin^2 t \cdot \cos^2 t$ 15

$|\dot r| = \sqrt{9\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9\cos^2 t \cdot \sin^4 t + 4\sin^2 2t} =$

$k =$ $= 5 \cdot \sin t \cos t$

$$\boxed{\begin{aligned} k &= \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \frac{12}{125} \cdot \frac{1}{\sin t \cdot \cos t} \\ \varkappa &= \frac{36 \cdot \cos t \cdot \sin t}{5} \end{aligned}}$$

$\frac{3}{25}$

$\langle [\dot r, \ddot r], \dddot r \rangle = |(21 \cdot 12 \cos^5 t \cdot \sin^3 t - 6 \cdot 12 \sin^5 t \cdot \cos^3 t + 12 \cdot 12 \cos t,$
$+21 \cdot 12 \cos^3 t \cdot \sin^5 t + 6 \cdot 12 \cdot \cos^5 t \cdot \sin^3 t), 0)| =$

$= \cancel{\sqrt{21^2 12^2 \cos^{10} t \cdot \sin^6 t + 6^2 \cdot 12^2 \sin^{10} t \cdot \cos^6 t + 21^2 \cdot 12^2 \cos^6 t \cdot \sin^{10} t + 6^2 \cdot 12^2 \cos^{10} t \cdot \sin^6 t}} =$

$= \sqrt{(21^2 \cdot 12^2 + 6^2 \cdot 12^2) \cos^6 t \sin^6 t \cdot (\cos^4 t + \sin^4 t)}$

$= \cancel{21 \cdot 12 \cos^3 t \cdot \sin^5 t - 6 \cdot 12 \cdot 2 \cdot \sin^5 t \cos^3 t} =$ $15 \cdot 12 \cos^3 t \cdot \sin^3 t$ 36

$-$

Романова Е 208 гр

① $r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$

$$k = \frac{\dot x \ddot y - \ddot x \dot y}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}$$

$\dot x = -a3\cos^2 t \cdot \sin t$ $\ddot x = -3a\cos^3 t + 6a\cos t \sin^2 t$

$\dot y = 3a\cos t \sin^2 t$ $\ddot y = -3a\sin^3 t + 6a\sin t\cos^2 t$

$$k = \frac{9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t - 18a^2\sin^2 t\cos^4 t + 9a^2\cos^4 t\sin^2 t - 18a^2\cos^2 t\cdot\sin^4 t}{(9a^2\cos^2 t\sin^2 t)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-9a^2\sin^4 t\cos^2 t - 9a^2\cos^4 t\sin^2 t}{27a^3\cos^3 t\sin^3 t} = \frac{\cos^2 t\sin^2 t}{3a\cos^3 t\sin^3 t} =$$

$$= \frac{1}{3a\cos^4 t\sin^4 t}$$

7

④ $xyz = a^3$ $z = \frac{a^3}{xy}$

$r = (x, y, \frac{a^3}{xy})$

$r_x = (1, 0, -\frac{a^3}{x^2y})$ $[r_x, r_y] = (\frac{a^3}{x^2y}, \frac{a^3}{xy^2}, 1)$

$r_y = (0, 1, -\frac{a^3}{xy^2})$ $|[r_x, r_y]| = \sqrt{1 + \frac{a^6}{x^4y^2} + \frac{a^6}{x^2y^4}} = \frac{\sqrt{x^4y^2 + x^2a^6 + y^2a^6}}{x^2y}$

$r_{xx} = (0, 0, +\frac{2a^3}{x^3y})$

$r_{yy} = (0, 0, \frac{2a^3}{x^3y^3})$

$r_{xy} = (0, 0, \frac{a^3}{x^2y^2})$

$n = [r_x, r_y]$

$$Q = \begin{pmatrix} \langle r_{xx}, n\rangle & \langle r_{xy}, n\rangle \\ \langle r_{xy}, n\rangle & \langle r_{yy}, n\rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I} = \cancel{\langle 0, 0, \frac{2a^3}{x^3y}\rangle}\ \frac{2a^3}{x^3y}dx^2 + \frac{a^3}{x^2y^2}dxdy + \frac{2a^3}{x^3y^3}dy^2$$

+ ∓ + + −

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ с.

Группа 208	Фамилия Меркушов

1c). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида);}$$

2c). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

3c). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность главных нормалей);}$$

4c). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

5c). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{r}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями).}$$

N2

$$æ = \frac{(r', r'', r''')}{([r', r''])^2} \qquad k = \frac{|[r', r'']|}{|r'|^3}$$

$$r' = (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t, -2\sin 2t)$$

$$r'' = (+6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t, 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t, -4\cos 2t)$$

$$r''' = (12\cos^2 t\sin t - 6\sin^3 t + 9\cos^2 t\sin t, 6\cos^3 t - 12\sin^2 t\cos t - 9\sin^2 t\cos t, 8\sin$$

$$|r'| = \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 4\sin^2 2t} = \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t + 16\sin^2 t\cos^2 t} =$$

$$= 5|\cos t\sin t|$$

$$[r', r''] = \left(\begin{vmatrix} 3\sin^2 t\cos t & -2\sin 2t \\ 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t & -4\cos 2t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2\sin 2t & -3\cos^2 t\sin t \\ -4\cos 2t & 6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t \end{vmatrix}, \right.$$

$$\left. , \begin{vmatrix} -3\cos^2 t\sin t & 3\sin^2 t\cos t \\ 6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t & 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t \end{vmatrix} \right) = \left(6\sin t\cos t \begin{vmatrix} \sin t & -2 \\ 2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t & -2\cos 2t \end{vmatrix}, \right.$$

$$\left. , 6\sin t\cos t \begin{vmatrix} -2 & -\cos t \\ -2\cos 2t & 2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t \end{vmatrix}, 9\cos t\sin t \begin{vmatrix} -\cos t & \sin t \\ 2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t & 2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left(6\sin t\cos t(2\sin t\cos 2t + 4\sin t\cos^2 t - 2\sin^3 t), 6\sin t\cos t(2\cos^3 t - 4\cos t\sin^2 t - 2\cos t\cos 2t), \right.$$

$$\left. , 9\sin t\cos t(\sin^3 t\cos t - 2\cancel{\sin t\cos^3 t} + \cancel{\cos^3 t}\sin t - 2\cos t\sin^3 t) \right) =$$

$= 3\sin t\cos t\Big(2\big(-4\cancel{\sin t}\cos^3 t + 3\sin t + 4\cancel{\sin t}\cos^3 t - 2\sin^3 t\big), 2\big(2\cos^3 t - 2\cos t\big),$

$-3\sin t\cos t\Big) = 3\sin t\cos t\big(4\sin t\cos^4 t, -4\cos t\sin^4 t, -3\sin t\cos t\big)$

$|[\dot r, \ddot r]| = 9\sin t\cos t\sqrt{16\sin^2 t\cos^4 t + 16\cos^2 t\sin^4 t + 9\sin^2 t\cos^2 t} = 15\sin^2 t\cos^2 t$

$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = 3\sin t\cos t\big(4\sin t\cos^4 t\cdot(21\cos^2 t\sin t - 6\sin^3 t) + 4\cos t\sin^4 t(6\cos^3 t - 21\sin^2 t\cos t) -$

$+ 36\sin t\sin t\cos t\big) = 3\sin t\cos t\big(21\cos^4 t\sin^2 t - 24\sin^4 t\cos^2 t - 24\cos^4 t\sin^2 t + 4\cdot 21\sin^3 t\cos^3 t$

$- 24\sin 2t\cdot\sin t\cdot\cos t\big) = 3\sin t\cos t\big(21\sin^2 2t \cancel{- 48\sin^4 t\cos^2 t} - 48\sin^4 t\cos^2 t\big) =$

$= 3\sin t\cos t\big(21\sin^2 2t - 48\sin^4 t\cos^2 t(1+\sin^2 t)\big)$

№1

$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$

$\dot r(t) = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t)$

$\ddot r(t) = (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t, 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t)$

$[\dot r(t), \ddot r(t)] = \cancel{9a^2(-\cos^2 t\sin t(2\sin t\cos^2 t}\ 9a^2\cos t\sin t($

$-2\cos^3 t\sin t + \sin^3 t\cos t - 2\sin^3 t\cos t + \cos^3 t\sin t) =$

$= -9a^2\cos t\sin t(\sin^3 t\cos t + \cos^3 t\sin t) = -9a^2\cos^2 t\sin^2 t$

$|[\dot r(t), \ddot r(t)]| = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$

$K = \dfrac{9a^2}{(3a)^3}\dfrac{\cos^2 t\sin^2 t}{\left(\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\right)^3} \boxed{\cancel{3a\cos t\cdot\sin t}} = \dfrac{1}{3a(\cos t\cdot\sin t)}$

№2. Продолжение

$K = \dfrac{15\sin^2 t\cos^2 t}{5^3\sin^3 t\cos^3 t} = \boxed{\dfrac{3}{25\sin t\cdot\cos t}}$

$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = 3\sin t\cdot\cos t\big(4\cdot 21\cos^4 t\sin^2 t - 24\sin^4 t\cos^2 t + 4\cdot 21\sin^4 t\cos^2 t - 24\cos^4 t\sin^2 t -$

$- 24\sin 2t\sin t\cdot\cos t\big) = 3\sin t\cos t\big(60\cos^4 t\sin^2 t + 60\sin^4 t\cos^2 t - 48\sin^2 t\cos^2 t\big) =$

$= 3\sin t\cos t\big(60\sin^2 t\cdot\cos^2 t - 48\sin^2 t\cdot\cos^2 t\big) = 36\sin^3 t\cos^3 t.$

$\varkappa = \dfrac{36\cdot\sin^3 t\cdot\cos^3 t}{15^2\cdot\sin^4 t\cdot\cos^4 t} = \boxed{\dfrac{4}{25\sin t\cdot\cos t}}$

№

Меркулов

№4

$xyz = a^3$

$x = u$

$y = v$

$z = \frac{a^3}{uv}$

$r = \left(u, v, \frac{a^3}{uv}\right)$

$r_u = \left(1, 0, \frac{-a^2}{u^2 v}\right)$

$r_v = \left(0, 1, \frac{-a^3}{u v^2}\right)$

$r_{uu} = \left(0, 0, \frac{+2a^3}{u^3 v}\right)$ $\quad r_{vv} = \left(0, 0, \frac{2a^3}{u v^3}\right)$ $\quad r_{uv} = \left(0, 0, \frac{a^3}{u^2 v^2}\right)$

$= [r_u, r_v] = \left(\frac{a^3}{u^2 v}, \frac{a^3}{u v^2}, 1\right)$

$|[r_u, r_v]| = \sqrt{\frac{a^6}{u^4 v^2} + \frac{a^6}{u^2 v^4} + 1}$

$m = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$

$(r_{uu}, m) = \frac{1}{|[r_u, r_v]|} \frac{2a^3}{u^3 v}$ $\quad (r_{uv}, m) = \frac{1}{|[r_u, r_v]|} \frac{a^3}{u^2 v^2}$ $\quad (r_{vv}, m) = \frac{1}{|[r_u, r_v]|} \frac{a^3}{u v^3}$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^6}{u^4 v^2} + \frac{a^6}{u^2 v^4} + 1}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2a^3}{u^3 v} & \frac{a^3}{u^2 v^2} \\ \frac{a^3}{u^2 v^2} & \frac{2a^3}{u v^3} \end{pmatrix}$$

+

№3

$r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{b}(s)$

$r_s = \vec{\tau} + \lambda(-\varkappa \vec{n})$

$r_\lambda = \vec{b}$

$(r_s, r_s) = 1 + \lambda^2 \varkappa^2$

$(r_s, r_v) = 0$

$(r_v, r_v) = 1$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 \varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№5.

$r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{\tau}$

$r_s = \vec{\rho}'(s) + \lambda k \vec{n}$ $\quad + \lambda k' \vec{n}$

$r_\lambda = \vec{\tau}$

$(r_s, r_s) = \rho'^2 + \lambda^2 k^2$

$(r_s, r_v) = 1$

$(r_\lambda, r_\lambda) = 1$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} \rho'^2 + \lambda^2 k^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$r_{ss} = k \rho(s) - \lambda k \varkappa \vec{n}$

$r_{s\lambda} = k \vec{b}$

$r_{\lambda\lambda} = 0$

$(r_{ss}, \vec{n}) = -\lambda k \varkappa + (\vec{\rho}'', n)$

$(r_{s\lambda}, \vec{m}) = 0$

$(r_{\lambda\lambda}, \vec{n}) = 0$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} -\lambda k \varkappa + (\rho'', n) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

−

Гауссова $K = \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} = 0$ $\quad$ средняя $K = \frac{-\lambda k \varkappa + (\rho''(s), n)}{2}$

+ | ∓ | - | 0 φ

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ с.

Группа 208	Фамилия Кокушкин

1c). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида)};$$

2c). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

3c). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность главных нормалей)};$$

4c). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

5c). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{v}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями)}.$$

1

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$$

$$\cancel{k = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3}}$$

$$\cancel{\dot r(t) = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t)}$$

$$\cancel{|\dot r| = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t} = 3a\cos t\sin t}$$

$$\cancel{|\dot r|^3 = 27a^3\cos^3 t\sin^3 t}$$

$$\cancel{\ddot r(t) = (-3a(-2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t), 3a(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t))}$$

$$\cancel{[\dot r, \ddot r] =}$$

$$K(t) = \frac{|(a\cos^3 t)'(a\sin^3 t)'' - (a\cos^3 t)''(a\sin^3 t)'|}{((a\cos^3 t)'^2 + (a\sin^3 t)'^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}{27a^3\cos^3 t\sin^3 t(\cos^2 t + \sin^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{3a\cos t\sin t}$$

+

(2)

$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

$2\sin t\cos t = \sin$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$k = \dfrac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3}$, $\varkappa = \dfrac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{[\dot r, \ddot r]^2}$

$\boxed{\dot r = (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t; -2\sin 2t)}$

$|\dot r| = \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 4\sin^2 2t} =$

$= \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 16\sin^2 t\cos^2 t} =$

$= \sin t\cos t\sqrt{9+16} = \boxed{5\sin t\cos t}$

$\boxed{\ddot r = (-3(-2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t), 3(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t), -4\cos 2t)}$

$[\dot r, \ddot r] = (-12\cos 2t\sin^2 t\cos t + 6\sin 2t(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t),$

$-(12\cos 2t\cos^2 t\sin t - 6(-2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t)\sin 2t),$

$-9(2\cos^4 t\sin^2 t - \cos^2 t\sin^4 t) + 9(-2\sin^4 t\cos^2 t +$

$+\sin^2 t\cos^4 t)) = (-12\sin^2\cos t(1 - 2\sin^2 t) +$

$+12\sin t\cos t(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t), -12\cos^2 t\sin t\cdot$

$\cdot(1 - 2\sin^2 t) + 12\sin t\cos t(-2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t),$

$9(-\sin^2 t\cos^4 t - \sin^4 t\cos^2 t)) = (12\sin^4 t\cos t -$

$-12\sin^2\cos t + 24\sin^2 t\cos^3 t, -12\cos^2\sin t + 24 \ldots +$

$+12\sin t\cos^4 t, -9\sin^2\cos^2 t)$

Кокушкин 208 вар. С

3

$$r = \bar{\rho}(s) + \lambda \bar{b}(s)$$

$$\dot{r}_s = \vec{\tau} + \lambda(-\varkappa \bar{n})$$

$$\dot{r}_\lambda = \bar{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2\varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-$

2 продолжение:

$$|[\dot{r}, \ddot{r}]| = 15 \sin^2 t \cos^2 t$$

$$K = \frac{15 \sin^2 t \cos^2 t}{125 \sin^3 t \cos^3 t} = \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{\sin t \cos t}$$

$$\varkappa = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{|[\dot{r}, \ddot{r}]|^2}$$

$$\dddot{r} = \Big(-3\,(2\sin^3 t - 4\cos^2 t \sin t - 3\cos^2 t \sin t),$$
$$3\,(2\cos^3 t - 4\cos t \sin^2 t - 3\sin^2 t \cos t),$$
$$8 \sin 2t\Big).$$

$$|[\dot{r}, \ddot{r}]|^2 = 225 \sin^4 t \cos^4 t$$

$$(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}) = \begin{vmatrix} -3\cos^2 t \sin t & 3\sin^2 \cos t & -2\sin t \\ -3(-2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t) & 3(2\sin t \cos^2 t - \sin^3) & -4\cos 2t \\ -3(2\sin^3 t - 4\cos^2 t \sin t - 3\cos^2 t \sin t) & 3(2\cos^3 t - 4\cos t \sin^2 t - 3\sin^2 t \cos t) & 8\sin 2t \end{vmatrix}$$

+	±	0	0	0

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ с.

Группа 208	Фамилия Уткин В.В.

1с). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида)};$$

2с). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

3с). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность главных нормалей)};$$

4с). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

5с). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{r}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями)}.$$

1c) $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$; $\dot{\vec{r}}(t) = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t)$; $\ddot{\vec{r}}(t) = 3a(2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t, 2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)$

$[\dot r, \ddot r] = 9a^2(-2\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t - 2\sin^4 t\cos^2 t + \sin^2 t\cos^4 t) = 9a^2(\sin^2 t\cos^4 t - 2\sin^4 t\cos^2 t) = -9a^2\sin \ldots$

$\cancel{|[\dot r, \ddot r]|^2 = (9a^2)^2 \cdot ((\sin^2 t\cos^2 t)^2 (4\cos^4 t + \sin^4 t - 4\cos^2 t\sin^2 t + 4\sin^4 t + \cos^4 t - 4\sin^2 t\cos^2 t)}$

$\cancel{= (9a^2)^2((\sin^2 t\cos^2 t)^2(5\cos^4 t + 5\sin^4 t - 8\cos^2 t\sin^2 t))}$

$5(1 - 2\sin^4 t - 2\sin^2 t) + 8(\sin^2 t - \sin^4 t) =$
$= 5 + 2\sin^4 t - 2\sin^2 t = (5 - 2\cos^2 t\sin^2 t)$
$2\sin^2 t(\sin^2 t - 1)$

$|\dot r|^2 = 9a^2(\cos^4 \sin^2 + \sin^4 \cos^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$

$k = \dfrac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \dfrac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t \cdot \sqrt{(5\cos^4 t + 5\sin^4 t - 8\cos^2\sin^2 t)}}{(3a\cos t\sin t)^3} = \dfrac{\sqrt{5(\cos^4 t + \sin^4 t) - 8\cos^2\sin^2 t}}{3a\cos t\sin t}$

$= \dfrac{\sqrt{5 - 2\cos^2 t\sin^2 t}}{3a\cos t\sin t}$, $t \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$

$|\dot r|^2 = 9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$; $|[\dot r, \ddot r]| = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$

+

$k = \dfrac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \dfrac{(3a\sin t\cos t)^2}{|(3a\sin t\cos t)^3|} = \dfrac{1}{3a|\sin t\cos t|} = \dfrac{2}{3a|\sin 2t|}$, $\forall t \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2c) $r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$: см стр 3. кривизна нет ... кручение - нет.

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ \ddot r \\ \dddot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t\sin t & ; 3\sin^2 t\cos t & ; -2\sin 2t \\ +6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t & ; 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t & ; -4\cos 2t \\ -6\sin^3 t + 12\cos^2 t\sin t + 9\cos^2 t\sin t & ; 6\cos^3 t - 12\sin^2 t\cos t - 9\sin^2 t\cos t & ; 8\sin 2t \end{pmatrix}$$

$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = \begin{vmatrix} -3\cos^2\sin t & 3\sin^2 t\cos t & -2\sin 2t \\ 6\cos t\sin^2 - 3\cos^3 & 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t & -4\cos 2t \\ -6\sin^3 t - 12\cos^2\sin t & 6\cos^3 t - 12\sin^2 t\cos t + 6\sin^2 t\cos t & 2\sin 2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3\cos^2\sin t & 3\sin^2\cos \\ 6\cos t\sin^2 - 3\cos^3 & 6\sin\cos^2 - 3\sin^3 \\ -6\sin^3 + 12\cos^2\sin & 6\cos^3 t - 12\sin^2\cos t \end{vmatrix}$

2 c) ~~Кривиз~~:
кривизна.

$c = [\dot r, \ddot r] = \dots = (12\sin^2\cos^3; -12\cos^3\sin^3; -9\sin^2\cos^2) = 3\sin^2\cos^2(4\cos, -4\sin, -3)$

$|c| = 15\sin^2 t\cos^2 t$

$|\dot r|^2 = 9\cos^4 s^2 + 9\sin^4\cos^2 + 16\sin^2\cos^2 = 25\cos^2\sin^2$

$k = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} = \frac{15\sin^2\cos^2}{5^3\sin^3\cos^3} = \frac{8}{25\sin 2t}.$

±

$$= \begin{vmatrix} -3\cos^2\sin & 3\sin^2\cos & -2\sin 2t \\ 6\cos\sin^2 - 3\cos^3 & 6\sin\cos^2 - 3\sin^2 & -4\cos 2t \\ -6\sin^3 + 12\cos^2\sin & 6\cos^3 - 12\sin^2\cos & 2\sin 2t \end{vmatrix}$$

$-3\cos^2\sin \quad 3\sin^2\cos \quad -2\sin 2t$

$9\cos\sin^2 - 3\cos \quad 9\sin\cos^2 - 3\sin \quad -4\cos 2t$

$18\sin\cos^3 - 6\sin \quad 2\sin 2t$

$\cos^2 - \sin$

$3\cos(2\sin^2 - \cos^2) = 9\cos\sin^2 - 3\cos$

$3\cos(2\sin^2 - \cos^2)$

$6\sin(2\cos^2 - \sin^2) = 18\sin\cos^3 - 6\sin$

$3\sin(2\cos^2 - \sin^2)$

$6\cos(1 - 2\sin^2)$

$-11 ; -11 ; -11 -$

$-11 - ; -11 - ; -11 -$ $\quad \cos 2 \quad 2\cos^2 - 1$

$-54 - 2 = -56$

$27 \quad 28$

54

$-12 \quad -18 = -21$

$x = \cos^3 t \quad x = \cos t$

$x = x^3$

$y = (1 - x^2)^3$

$z = 2x^2 - 1$

$x^3 (1-x^2)^3$

$3x^2$

$6x(x^2)^3 - 1$

$(18(-6+3) - 2$

36

$18(3 - 1) - 12 =$

$= 24$

$$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = \begin{vmatrix} -3\cos^2 t\sin t & 3\sin^2 t\cos t & -2\sin 2t \\ 6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t & 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t & -4\cos 2t \\ -6\sin^3 t + 21\cos^2 t\sin t & 6\cos^3 t - 21\sin^2 t\cos t & 8\sin 2t \end{vmatrix}$$

$3\cos^2\sin^2 t(-2\cos \ldots$

$$= \begin{vmatrix} -3\cos^2\sin & 3\sin^2\cos & -2\sin 2t \\ 6\cos\sin^2 - 3\cos^3 & 6\sin\cos^2 - 3\sin 3 & -4\cos 2t \\ -6\sin^3 & 6\cos^3 & 6\sin 2t \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -3\cos^2\sin & 3\sin^2\cos & -2\sin 2t \\ \cos\sin^2 - 3\cos^3 & 6\sin\cos^2 - 3\sin^3 & -4\cos 2t \\ -\sin^3 t & \cos^3 t & 6\sin 2t \end{vmatrix}$$

$= 18(-6\cos^4\sin^2 + 3\cos^2\sin^4 \ldots)\sin 2t + \ldots + 12\sin^4\cos t\cos 2t - 2\sin 2t(\cos^4\sin^2 - 3\cos\ldots$

$+ 2\sin 2t(3\sin^6 t - 6\sin^4 t\cos^2 t) - 18\sin 2t(\sin^4\cos^2 - 3\cos^4\sin^2) -$

$- 12\cos^5 t\sin t\cos 2t = \sin 2t(56\cos^4\sin^2 t - 24\sin^4\cos^2) - \cos 2t(12\sin^5 t\cos t - 12\cos^5 t\sin \ldots$

$[\dot r, \ddot r] = (-12\cos 2t\cos t\sin^2 t + 12\sin 2t\sin t\cos^2 t - 6\sin 2t\sin^3 t,$

$-12\sin 2t\cos t\sin^2 t + 6\sin 2t\cos^3 t - 12\cos 2t\cos^2 t\sin t,$

$-18\sin^2 t\cos^4 t + 9\cos^5 t\sin t$

кр

Гр 208 Уткин В.В.