$- + - - \frac{2}{2}$

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 207	Фамилия Рогачев.

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2 \cos 2\phi \quad \text{(лемниската);}$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность);}$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения).}$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность);}$$

1а)

$r^2 = a^2\cos 2\phi$. Кривизна $k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$x = r\cdot\cos\phi$, $y = r\cdot\sin\phi$ $\Rightarrow$ $x = a\cdot\sqrt{\cos 2\phi}\cdot\cos\phi$, $y = a\cdot\sqrt{\cos 2\phi}\cdot\sin\phi$.

$\dot{x} = -\sin\phi\cdot a\cdot\sqrt{\cos 2\phi} - 8a\cdot\sin 2\phi\cdot\cos\phi\cdot\frac{1}{8}(\cos 2\phi)^{-\frac{1}{2}} = -a\left(\sin\phi\cdot\sqrt{\cos 2\phi} + \frac{\sin 2\phi\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}\right)$.

$\dot{y} = \cos\phi\cdot a\cdot\sqrt{\cos 2\phi} - a\cdot\frac{\sin 2\phi\cdot\sin\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$.

$$\dot{x} = -a\left(\frac{\sin\phi\cdot(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2\sin\phi\cos\phi\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}\right) = a\left(\frac{-3\sin\phi\cos^2\phi + \sin^3\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}\right)$$

$$\dot{y} = a\left(\frac{\cos\phi(\cos^2\phi - \sin^2\phi) - 2\sin\phi\cos\phi\sin\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}\right) = a\left(\frac{\cos^3\phi - 3\sin^2\phi\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}\right).$$

$$\ddot{x} = a\frac{(3\cos\phi\cdot\sin^2\phi - 3\cos^3\phi + 3\sin\phi\cdot\sin\phi\cdot 2\cdot\cos\phi)\sqrt{\cos 2\phi} + \frac{\sin 2\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}\cdot(\sin^3\phi - 3\sin\phi\cos^2\phi)}{\cos 2\phi} =$$

$$= a\frac{(9\cos\phi\sin^2\phi - 3\cos^3\phi)\cdot(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2\sin\phi\cos\phi(\sin^3\phi - 3\sin\phi\cos^2\phi)}{(\cos 2\phi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{6\cos^3\phi\sin^2\phi - 3\cos^5\phi - 7\sin^4\phi\cos\phi}{(\cos 2\phi)^{\frac{3}{2}}}\,a.$$

$$\ddot{y} = a\frac{\cos\phi(\cos^2\phi - \sin^2\phi)(\cancel{-3\sin\phi\cos^2\phi}\ \cdot\sin\phi\cdot\cos^2\phi + 3\sin^3\phi) + 2\sin\phi\cos\phi(\cos^3\phi - 3\sin^2\phi\cos\phi)}{(\cos 2\phi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-9\sin\phi\cos^4\phi + 3\sin^3\cos^2 - 9\sin^3\phi\cos^2\phi - 3\sin^5\phi + 2\sin\phi\cos^4\phi - 6\sin^3\phi\cos^2\phi}{\cos 2\phi^{\frac{3}{2}}}$$

$\ldots 3\sin^5\phi - 7\sin\phi\cos^4\phi - 12\sin^3\phi\cos^2\phi$

$$k = \frac{\frac{a^2}{\cos^2 2\varphi}\cdot\sin^2\varphi(\sin^2\varphi-3\cos^2\varphi)(-3\sin^4\varphi-7\cos^4\varphi-12\sin^2\varphi\cos^2\varphi)+\frac{a^2}{\cos^2 2\varphi}\cos^2\varphi(\cos^2\varphi-3\sin^2\varphi)(6\cos^4\sin^2-3\cos^4\ldots}{a^3\left(\frac{(\sin^3\varphi-3\sin\varphi\cos^2\varphi)^2+(\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi)^2}{\cos 2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

упростить это..

?

$-$

2а). кривизна и кручение пр-й кривой: $r = (e^t;\ e^{-t};\ t\cdot\sqrt{2})$.

$$k = \frac{|[\dot{r},\ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3};\quad \chi_{\text{кручение}} = \frac{(\dot{r},\ddot{r},\dddot{r})}{|[\dot{r},\ddot{r}]|^2}.$$

$\dot{r} = (e^t;\ -e^{-t};\ \sqrt{2})$ $\longrightarrow$ угол м. $\dot{r}$ и $\ddot{r}$.

$|\dot{r}|\cdot|\ddot{r}|\cos\varphi = e^{2t}-e^{-2t}$.

$\ddot{r} = (e^t;\ e^{-t};\ 0)$

$\cancel{|[\dot{r};\ddot{r}]| = S = |\dot{r}|\cdot|\ddot{r}|}$

$\dddot{r} = (e^t;\ -e^{-t};\ 0)$.

$[\dot{r};\ddot{r}] = (-e^{-t}\cdot\sqrt{2},\ \sqrt{2}e^{t},\ 2)$

$|[\dot{r},\ddot{r}]| = \sqrt{2e^{-2t}+2e^{2t}+4} = \cancel{\sqrt{4(ch\,2t)+1)} = 2\sqrt{ch2t+1}}$

$= \sqrt{2(e^{2t}+2e^t\cdot e^{-t}\cdot e^{-2t})} = \sqrt{2}\cdot(e^t+e^{-t})$.

$|\dot{r}| = \cancel{\sqrt{e}}\ (e^t+e^{-t})$

$(\dot{r},\ddot{r},\dddot{r}) = -\sqrt{2}-\sqrt{2}+0 = -2\sqrt{2}$. $\Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$

$$\chi = \frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t+e^{-t})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

Ответ: $k = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$, $\chi = \dfrac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$

$+$

③. $r = \vec{P}(s)+\lambda\vec{e}(s)$, $|e(s)| = 1$.

найти I кв. форму.

$\dot{r}_s = \dot{\vec{P}}(s)+\lambda\cdot\dot{\vec{e}}(s)$.

$\dot{r}_\lambda = \vec{e}(s)$

$\Rightarrow$ I кв.ф. $G = \begin{vmatrix}(\dot{r}_s\dot{r}_s) & (\dot{r}_s\dot{r}_\lambda)\\ (\dot{r}_s,\dot{r}_\lambda) & (\dot{r}_\lambda\dot{r}_\lambda)\end{vmatrix}$

$(\dot{r}_s;\dot{r}_\lambda) = (\dot{\vec{P}}(s);\vec{e}(s))+\lambda\underbrace{(\dot{\vec{e}}(s),\vec{e}(s))}_{=0\ (\text{т.к. } |e(s)|=1)} = (\dot{\vec{P}}(s),\vec{e}(s))$. $(\dot{r}_\lambda;\dot{r}_\lambda) = 1$.

$(\dot{r}_s,\dot{r}_s) = (\dot{\vec{P}}(s);\dot{\vec{P}}(s))+2(\dot{\vec{P}}(s);\lambda\dot{\vec{e}}(s))+(\lambda\cdot\dot{\vec{e}}(s),\lambda\cdot\dot{\vec{e}}(s)) = |\dot{\vec{P}}(s)|^2+2\lambda(\dot{\vec{P}}(s),\dot{\vec{e}}(s))+\lambda^2|\dot{\vec{e}}(s)|^2$

т.к. s — нат. параметр

$= 1+2\lambda(\dot{\vec{P}}(s);\dot{\vec{e}}(s))+\lambda^2$.

Ответ: $G = \begin{vmatrix}1+\lambda^2(\dot{e}_s,\dot{e}_s)+2\lambda(\dot{\vec{P}}(s),\dot{\vec{e}}(s)) & (\dot{\vec{P}}(s),\vec{e}(s))\\ (\dot{\vec{P}}(s),\vec{e}(s)) & 1\end{vmatrix}$.

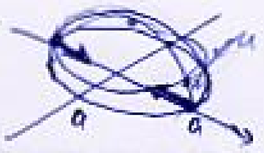
$-$

№4

Вариант лист 2. Вар. А

№4 $r = (a\cos u\cos v;\ a\cos u\sin v;\ c\sin u)$.

Q – вт. кв. форма $= \begin{pmatrix} \left(\frac{d^2 r}{du^2}, \vec{n}\right) & \left(\frac{d^2 r}{du\,dv}, \vec{n}\right) \\ \left(\frac{d^2 r}{du\,dv}, \vec{n}\right) & \left(\frac{d^2 r}{dv^2}, \vec{n}\right) \end{pmatrix}$.



$\dot{r}_u = (-a\sin u\cos v;\ -a\sin u\sin v;\ c\cos u)$;

$\dot{r}_v = (-a\cos u\sin v;\ a\cos u\cos v;\ 0)$,

$\vec{V}$, нормальный к r: $(-a\cos^2 u\cos v;\ -a\cos^2 u\sin v;\ -a\sin u\cos u\cos^2 v - a\sin u\cos u\sin^2 v)$

$= (-a\cos^2 u\cos v;\ -a\cos^2 u\sin v;\ -a\sin u\cos u)$.

в т. $(0,0)$ $\vec{V} = -a$; $\Rightarrow$ в т. $(\pi;0)$.

$\vec{n} = -\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{(a\cos^2 u\cos v;\ a\cos^2 u\sin v;\ a\sin u\cos u)}{\sqrt{a^2\cos^4 u\cos^2 v + a^2\cos^4 u\sin^2 v + a^2\sin^2 u\cos^2 u}}$

$\sqrt{a^2\cos^4 u + a^2\sin^2 u\cos^2 u} = \sqrt{a^2\cos^2 u} = a|\cos u|$

$-ac \quad -ac \quad -a^2$

$\vec{n} = \left(\frac{\cos^2 u\cos v}{|\cos u|};\ \frac{\cos^2 u\sin v}{|\cos u|};\ \frac{\sin u\cos u}{|\cos u|}\right)$

$= \left(|\cos u|\cos v;\ |\cos u|\sin v;\ \frac{\sin u\cos u}{|\cos u|}\right)$. но u – находится нужн. $\left(u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow$ от модуля можно избавиться.

$\ddot{r}_{uu} = (-a\cos u\cos v;\ -a\cos u\sin v;\ -c\sin u)$

$\ddot{r}_{uv} = (a\sin u\sin v;\ -a\sin u\cos v;\ 0)$

$\ddot{r}_{vv} = (-a\cos u\cos v;\ -a\cos u\sin v;\ 0)$.

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -a\cos^2 u\cos^2 v - a\cos u\sin^2 v - c\sin^2 u & \\ (a\sin u\cos u\sin v\cos v - a\sin u\cos u\sin v\cos v) & -a\cos^2 u\cos^2 v - a\cos^2 u \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -a\cos^2 u - c\sin^2 u & 0 \\ 0 & -a\cos^2 u \end{pmatrix}$.

Ответ.

–

5.а). $r = \lambda\vec{p}(s)$.

$G = (\ )$

$\dot{r}_\lambda = \vec{p}(s)$ $\quad \dot{r}_{\lambda\lambda} = 0$

$\dot{r}_s = \lambda\dot{\vec{p}}(s)$. $\quad \dot{r}_{\lambda s} = \dot{\vec{p}}(s)$.

$\dot{r}_{ss} = \lambda\ddot{\vec{p}}(s)$.

$G = \begin{pmatrix} |\vec{p}|^2 & \lambda(\dot{\vec{p}}, \vec{p}) \\ \lambda(\dot{\vec{p}}, \vec{p}) & |\dot{\vec{p}}(s)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda(\dot{\vec{p}}, \vec{p}) \\ \lambda(\dot{\vec{p}}, \vec{p}) & |\dot{\vec{p}}(s)|^2 \end{pmatrix}$ $= 0$ $= 1$

Q – ? ищем $\vec{n}$: $\vec{n} = \frac{[\vec{p}(s);\ \lambda\dot{\vec{p}}(s)]}{|[\vec{p}(s);\ \lambda\dot{\vec{p}}(s)]|}$

направление $\vec{n}$ (внутрь или вне) зависит от нап. обхода $\vec{p}(s)$.

$Q = \begin{pmatrix} (\dot{r}_{ss}, \vec{n}) & (\dot{r}_{\lambda s}, \vec{n}) = 0. \\ (\dot{r}_{\lambda s}, \vec{n}) & (\dot{r}_{\lambda\lambda}, \vec{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

0, т.к. $\dot{r}_{\lambda s} \parallel \lambda\dot{\vec{p}}_s$ $\qquad$ 0, т.к. $\dot{r}_{\lambda\lambda} = 0$

$\lambda_1\lambda_2 = K = 0$

$H = \frac{|\vec{p}(s)|^2 \cdot \lambda^2(\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}})}{\det G} = \frac{\lambda^2 \cdot (\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}})}{\lambda^2(|\dot{\vec{p}}(s)|^2 - (\dot{\vec{p}}, \vec{p})^2)} = \boxed{\frac{(\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}})}{1 - (\dot{\vec{p}}, \vec{p})^2}}$ Ответ: H; $K = 0$.

1

±

$\mp$	$+$	$\pm$	$\pm$	$\oplus$

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 207	Фамилия Волков

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2 \cos 2\phi \quad \text{(лемниската);}$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность);}$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u) \text{ (эллипсоид вращения).}$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$r = \lambda \vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность);}$$

Арчев 2013
№1 а)

$K - ?$ $K = \lambda_1 \lambda_2$

$H - ?$ $H = \lambda_1 + \lambda_2$

±

$r = r(\lambda, s) = \lambda \vec{\rho}(s)$ (конической)

$K = \dfrac{\det L}{\det G}$, $H = \mathrm{tr}\, L G^{-1}$

$r = \lambda \rho(s)$

$r'_\lambda = \rho(s)$

$r'_s = \lambda \dot{\rho}(s)$

$r''_{\lambda\lambda} = 0$

$r''_{ss} = \lambda \ddot{\rho}(s)$

$r''_{\lambda s} = \dot{\rho}(s)$

$G = (g_{ij}) = \langle r'_i, r'_j \rangle$

$L = (l_{ij})$ $\langle \rho, \rho \rangle = |\rho|^2$

$g_{11} = |\rho|^2$

$g_{12} = g_{21} = \lambda\, \rho \cdot \dot{\rho}$

$g_{22} = \lambda^2 \cdot |\dot{\rho}|^2$

$n = \lambda \dfrac{\rho \times \dot{\rho}}{|\lambda \rho \times \dot{\rho}|} = (\lambda \cdot \rho \times \dot{\rho})^0$ - орт

$l_{11} = 0$ $l_{12} = l_{21} = \dfrac{(\rho \times \dot{\rho}) \cdot \dot{\rho}}{?} = 0$

$l_{22} = \lambda \ddot{\rho} \cdot (\rho \times \dot{\rho})^0$

$K = 0$ (т.к. цилиндрические части плоскости)

$\cancel{G = (\lambda\rho)^2}$ $\quad G = \begin{pmatrix} \rho\cdot\rho & \lambda\rho\cdot\dot\rho \\ \lambda\rho\cdot\dot\rho & \lambda^2\dot\rho\cdot\dot\rho \end{pmatrix}$

$$G^{-1} = \frac{1}{\lambda^2\left((\rho\rho)\cdot(\dot\rho\dot\rho) - (\rho\cdot\dot\rho)^2\right)} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^2\dot\rho\dot\rho & -\lambda\rho\dot\rho \\ -\lambda\rho\dot\rho & \rho\rho \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \frac{1}{\dots}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & (\rho\rho)\cdot\lambda(\ddot\rho\,(\lambda\rho\times\ddot\rho)^0) \end{pmatrix}$$

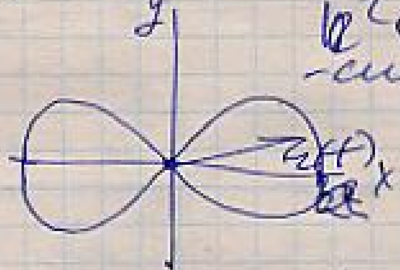
$$h = t_i \cdot L G^{-1} = \frac{\lambda\cdot(\rho,\rho)\cdot\left((\ddot\rho,\ (\lambda\rho\times\ddot\rho)^0\right)\ \frac{\lambda(\rho\times\dot\rho)}{|\lambda|\cdot|\rho\times\dot\rho|}}{\lambda^2\cdot\left((\rho,\rho)(\dot\rho,\dot\rho) - (\rho,\dot\rho)^2\right)\ \xi_{,t}}.$$

?

Беляев 207   вариант А   11.5.11.

№1а) найдите кривизну $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската)

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$



$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$
-лемн. $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a > 0$

$t = \varphi$ $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

кривизна: $k(t) = \dfrac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3}(t)$

$r(t) = (a\sqrt{\cos 2t}\cdot\cos t,\ a\sqrt{\cos 2t}\sin t,\ 0)$

$\dot r(t) = a\left(-\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\cdot\cos t - \sqrt{\cos 2t}\cdot\sin t,\ \dfrac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\cdot\sin t + \sqrt{\cos 2t}\cos t,\ 0\right) =$

$= a\left(\dfrac{-\sin 2t\cos t - \sin t\cos 2t}{\sqrt{\cos 2t}},\ \dfrac{\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}},\ 0\right)$

$\ddot r = a\left(\dfrac{\cancel{2\cos 2t\cdot\cos t + 2\sin 2t\sin t - \cos t\cos 2t + 2\sin t\sin 2t}\ + (-2\cos t + \sin t\cos 2t)\frac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}}{\cos 2t}\right)$

$$\frac{\left(-\sin t\cos 2t - 2\cos t\sin 2t - \cos t\sin 2t + 2\sin t\sin 2t\right)\sqrt{\cos 2t} - (\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t)\cdot\frac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}}{\cos 2t}$$

$$0\Big) = a\cdot\frac{1}{(\cos 2t)^{3/2}}\cdot\Big($$

$$\Big(\begin{cases} 3\cos 2t(\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t) + \\ + \sin 2t(\cos t\sin 2t + \sin t\cos 2t) \end{cases}$$

$$\Big[\begin{array}{l} \cos 2t(-\sin t\cos 2t - 2\cos t\sin 2t - \\ - \cos t\sin 2t + 2\sin t\sin 2t) + \\ + \sin 2t(\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t),\quad 0\Big) \end{array}$$

$$|\dot{r}|^3 = \sqrt{\ }\ a^2\Big(\frac{\sin^2 2t\cos^2 t + \sin^2 t\cos^2 2t + 2\sin t\sin 2t\cos \ldots}{\cos 2t}$$

$$+\cos^2 t\cos^2 2t + \sin^2 t\sin^2 2t - 2\cos t\sin 2t \ldots$$

$$= \frac{a^3}{\cos^{3/2} 2t}\Big(\ 1\Big) = \frac{a^3}{\cos^{\frac{3}{2}} 2t}$$

1) $|[\dot r, \ddot r]| = \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|_2$

$= \dfrac{a^2}{(\cos 2t)^2} \left| \begin{matrix} -\sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t & \cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t \\ \ldots & \ldots \end{matrix} \right|$

$= \dfrac{a^2}{\cos^2 2t} \Big(- \sin 2t \cos t \cdot \cos 2t \big(- \sin t \cos 2t - 2 \cos t \sin 2t - \cos t \sin 2t + 2 \sin t \sin 2t\big) - \sin 2t \cos t \sin 2t \cdot (\cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t) -$

$- \sin t \cos^2 2t \big(- \sin t \cos 2t - 2 \cos t \sin 2t - \cos t \sin 2t + 2 \sin t \sin 2t\big) - \sin t \cos 2t \sin 2t \cdot (\cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t) -$

$- 3 \cos t \cos^2 2t (\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t) + \cos t \cos 2t \sin 2t \cdot (\cos t \sin 2t + \sin t \cos 2t) -$

$- 3 \sin t \sin 2t \cos 2t (\cos t \cos 2t +$

$\cos^2 t +$

$(\cos t \cos 2t)^{\frac{3}{2}}$

$e^{-\omega t}\,\omega 2t)\ -\omega t\,\omega^2 t(\cos t\,\omega 2t + \sin t \cos 2t)]$

$=$

не окончана $\mp$

Ванеев 207

№2а) $k(t), \varkappa(t)$ – ?

$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$

$\dot{r} = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$

$\ddot{r} = (e^t, e^{-t}, 0)$

$\dddot{r} = (e^t, -e^{-t}, 0)$

$k(t) = \dfrac{|[\dot{r}, \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3}$

$\varkappa(t) = \dfrac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{|[\dot{r}, \ddot{r}]|^2}$

$|\dot{r}|^3 = (e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{\frac{3}{2}}$

$[\dot{r}, \ddot{r}] = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^{t}, 2)$

$|[\dot{r}, \ddot{r}]| = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4}$

$(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}) = ([\dot{r}, \ddot{r}], \dddot{r}) = -\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) + 0 =$

$= -2\sqrt{2}$

$$k(t) = \frac{(4e^{2t} + 4e^{-2t} + 8)^{1/2} \cdot \sqrt{2}}{(e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$$

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{3}$$

$$\varkappa(t) = \frac{-2\sqrt{2}}{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \frac{-\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$$

+

№3а) $r(s, \lambda) = \vec{\rho}(s) + \lambda \cdot \vec{e}(s)$ (линейчатая поверхность)

G — м-ца I кв. ф. $|\vec{e}| = 1$

$$G = \begin{pmatrix} \langle r'_s, r'_s \rangle & \langle r'_s, r'_\lambda \rangle \\ \langle r'_\lambda, r'_s \rangle & \langle r'_\lambda, r'_\lambda \rangle \end{pmatrix}$$

s — натур. парам.

$$\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \cdot \vec{e}(s)$$

$$\vec{r}'_s = \dot{\vec{\rho}}(s) + \lambda \cdot \dot{\vec{e}}(s).$$

$$\vec{r}'_\lambda = \vec{e}(s),$$

т.к. e — орт, $e \perp \dot{e}$

$$G = \Big(\langle r'_s, r'_s \rangle = \langle \dot{\vec{\rho}}(s), \dot{\vec{\rho}}(s) \rangle + \lambda^2 (\dot{e}, \dot{e}) + 2 \cdot \lambda \langle \dot{\vec{\rho}}(s), \dot{\vec{e}}(s) \rangle$$

(*) $\langle r'_\lambda, r'_\lambda \rangle = 1$

$\langle r'_s, r'_\lambda \rangle = \langle \dot\rho, \dot\rho \rangle + \lambda \langle \rho, \dot e \rangle + \lambda \langle \dot\rho, e \rangle + 0$

$$G = \begin{pmatrix} \dot\rho \cdot \dot\rho + 2\lambda e \rho + \lambda^2 & \rho\dot\rho + \lambda(\rho\dot e + e\dot\rho) \\ \dot\rho\dot\rho + \lambda(\rho\dot e + e\dot\rho) & 1 \end{pmatrix} \quad \pm$$

№ 4a.) – II к. ф.

$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u)$ (эллипс. вр.)

$L = (l_{ij}) = \langle r''_{ij}, \vec n \rangle$, $\vec n = \dfrac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$.

$r'_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, c\cos u)$

$r'_v = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)$

$r''_{uu} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, -c\sin u)$

$r''_{vv} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, 0)$

$r''_{uv} = (a\sin u\sin v, -a\sin u\cos v, 0)$

$\vec n = \dfrac{1}{|N|}(-ac\cos^2 u\cos v, ac\cos^2 u\sin v, a^2\sin u\cos u\cos^2 v + \sin u\cos u\sin^2 v))$

$$\vec{n} = \frac{(-ac\cos^2 u\cos v,\ ac\cos^2 u\sin v,\ -a^2\sin u\cos u)}{\sqrt{ac^2\cos^4 u + a^4\sin^2 u\cos^2 u}} \quad (= \eta)$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = L^T$$

$\cancel{l_{11} =}$

$$a^2 b^2 \cos^2 u \cos 2v$$

$$l_{11} = \frac{1}{\eta}\left(a^2 c\cos^3 u\cos^2 v - a^2 c\cos^3 u\sin^2 v + a^2 c\sin^2 u\cos u\right) =$$

$$a^2 c = \frac{\cos^3 u\cos 2v + \sin^2 u\cos u}{\eta}$$

$$l_{12} = l_{21} = -a^2 c\sin u\sin v\cos^2 u\cos v \pm$$

$$\frac{-a^2 c\sin u\cos v\cos^2 u\sin v}{\eta} = 0$$

$$= -\frac{2a^2 c}{\eta}\left(\sin u\cos v\sin v\cos^2 u\right).$$

$$l_{22} = \frac{1}{\eta}\left(-a^2 c\sin u\sin v\cos^2 u\cos v - a^2 c\sin u\cos v\cos^2 u\sin v\right) =$$

$$= \frac{-2a^2 c}{\eta}\left(\sin u\cos v\cos^2 u\sin v\right)$$

$\pm$

−	+	−	+	−

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 207	Фамилия Сладиева

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2 \cos 2\phi \quad \text{(лемниската)};$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность)};$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения)}.$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность)};$$

1а) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, $k - ?$

$$k = \frac{|F_\varphi'^2 F_{rr}'' - 2F_\varphi' F_r' F_{\varphi r}'' + F_r'^2 F_{\varphi\varphi}''|}{(F_r'^2 + F_\varphi'^2)^{3/2}}$$

$F = r^2 - a^2\cos\varphi$

$F_r' = 2r$, $F_{rr}'' = 2$

$F_\varphi' = a^2\sin\varphi$, $F_{\varphi\varphi}'' = a^2\cos\varphi$

$F_{\varphi r}'' = 0$

в полярных координатах формула другая

Ответ: $k = \frac{|2a^4\sin^2\varphi + 4r^2a^2\cos\varphi|}{(4r^2 + a^4\sin^2\varphi)^{3/2}}$

−

2а) $r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$, $k - ?$, $æ - ?$

$\dot{r}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$

$\ddot{r}(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$

$\dddot{r}(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)$

$$\begin{matrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{matrix}$$

$[\dot{r}, \ddot{r}] = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)$

$|[\dot{r}, \ddot{r}]| = \sqrt{2e^{2t} + e^{-2t} + 4} = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})$

$|\dot{r}| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$

$\langle [\dot{r}, \ddot{r}], \dddot{r} \rangle = -2\sqrt{2}$

Ответ: $k = \frac{|[\dot{r}, \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

$æ = \frac{\langle [\dot{r}, \ddot{r}], \dddot{r} \rangle}{|[\dot{r}, \ddot{r}]|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t + e^{-t})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

+

4а) $\vec r = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ c\sin u)$, II - ?

II : $b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, \vec m\right)$

$\vec m = \frac{[r'_{u}, r'_{v}]}{|[r'_{u}, r'_{v}]|}$

$r'_u = (-a\sin u\cos v,\ -a\sin u\sin v,\ c\cos u)$

$r'_v = (-a\cos u\sin v,\ a\cos u\cos v,\ 0)$

$[r'_u \times r'_v] = (-ac\cos^2 u\cos v,\ -ac\cos^2 u\sin v,\ -a^2\sin u\cos u)$

$|[r'_u \times r'_v]| = \sqrt{a^2c^2\cos^4 u\cos^2 v + a^2c^2\cos^4 u\sin^2 v + a^4\sin^2 u\cos^2 u} =$

$= \sqrt{a^2c^2\cos^4 u + a^4\sin^2 u\cos^2 u} = a\cos u\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}$

$r''_{uu} = (-a\cos u\cos v,\ -a\cos u\sin v,\ -c\sin u)$

$r''_{uv} = (a\sin u\sin v,\ -a\sin u\cos v,\ 0)$

$r''_{vv} = (-a\cos u\cos v,\ -a\cos u\sin v,\ 0)$

$$\text{II} = \begin{pmatrix} \frac{ac\cos^2 u\cos^2 v + ac\cos^2 u\sin^2 v + ac\sin^2 u}{\sqrt{\ }} & \frac{-a\sin u\cos u\sin v\cos v + a\sin u\cos u\sin v\cos v}{\sqrt{\ }} \\ 0 & \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{\ }} \end{pmatrix}$$

Ответ: $$\text{II} = \begin{pmatrix} \frac{ac}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}} & 0 \\ 0 & \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}} \end{pmatrix}$$

+

5а) $r = \lambda\vec\rho(s)$ $\quad H(P)$-? (средняя крив.) $\quad K(P)$-? (гауссова крив.) (коническая пов-сть)

~~$H(P) = \lambda_1 + \lambda_2$~~
~~$K(P) = \lambda_1\lambda_2$~~

$H(P) = \lambda_1 + \lambda_2$
$K(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$\begin{cases} x = h\cos\varphi \\ y = h\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$

~~$K = \frac{\det I}{\det II}$, $H = tr(I \cdot II^{-1})$~~

нормал. крив. $K = \lambda_2\sin^2\varphi + \lambda_1\cos^2\varphi$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = K(P) = 0$

(т.к. [illegible] = 0, а все ост. конст.).

$H(P) = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$

−

Не конус, а коническая поверхность!

3а) Селезнева, 204

$r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{e}(s)$ $\quad (|\vec{e}(s)| = 1)$ (линейчатая пов-сть) $\quad I - ?$

$$I : \begin{pmatrix} (r'_u, r'_u) & (r'_u, r'_v) \\ (r'_u, r'_v) & (r'_v, r'_v) \end{pmatrix}$$

$r'_s = \dot{\vec{\rho}}(s) + \lambda \dot{\vec{e}}(s)$

$r'_\lambda = \vec{e}(s)$

$+2\lambda(\dot{\rho}, \dot{e})$

$$I : \begin{pmatrix} (\dot{\vec{\rho}}(s))^2 + \lambda^2 (\dot{\vec{e}}(s))^2 & \dot{\vec{\rho}}(s)\vec{e}(s) + \lambda \dot{\vec{e}}(s)\vec{e}(s) \\ \dot{\vec{\rho}}(s)\vec{e}(s) + \lambda \dot{\vec{e}}(s)\vec{e}(s) & \underbrace{(\vec{e}(s))^2}_{=1} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} (\dot{\vec{\rho}}(s))^2 + \lambda^2 (\dot{\vec{e}}(s))^2 & \dot{\vec{\rho}}(s)\vec{e}(s) + \lambda \dot{\vec{e}}(s)\vec{e}(s) \\ \dot{\vec{\rho}}(s)\vec{e}(s) + \lambda \dot{\vec{e}}(s)\vec{e}(s) & 1 \end{pmatrix}$

$-$

−	+	−	0	0

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 207	Фамилия Якимец

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2\cos 2\phi \quad \text{(лемниската)};$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s) \quad (|\vec{e}(s)| = 1)\text{(линейчатая поверхность)};$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения)}.$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec{\rho}(s) \text{ (коническая поверхность)};$$

№1

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = a\cos^{\frac12}2\varphi\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = a\cos^{\frac12}2\varphi\sin\varphi \end{cases}$$

$\vec{r} = (x(\varphi); y(\varphi))$

$\vec{r}'(\varphi) = \left(a\left(-\frac{\cos\varphi\cdot\sin 2\varphi}{\cos^{\frac12}2\varphi} - \sin\varphi\cdot\cos^{\frac12}2\varphi\right); a\left(-\frac{\sin\varphi\cdot\sin 2\varphi}{\cos^{\frac12}2\varphi} + \cos\varphi\cos^{\frac12}2\varphi\right)\right) =$

№1

$r(\varphi) = a\cos^{\frac12}2\varphi \qquad k(\varphi) = \dfrac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{\frac32}}$

$r' = -\dfrac{a\sin 2\varphi}{\cos^{\frac12}2\varphi}; \quad r'' = a\left(-\dfrac{\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos^{\frac12}2\varphi} - 2\cos^{\frac12}2\varphi\cdot\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) = -\dfrac{a}{\cos^{\frac32}2\varphi}$

$k(\varphi) = \dfrac{a^2\cos 2\varphi + 2a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + a^2\left(\frac{1}{\cos 2\varphi} + \cos 2\varphi\right)}{\left(a^2\cos 2\varphi + a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)^{\frac32}} =$

$= \dfrac{1}{a}\,\dfrac{\cos^2 2\varphi + 2\sin^2 2\varphi + 1 + \cos^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi} = \dfrac{3}{a}\sqrt{\cos 2\varphi}$

Ответ: $\frac{3}{a}$

−

№2

$r = (e^t; e^{-t}; t\sqrt{2})$

$\dot{r}(t) = (e^t; -e^{-t}; \sqrt{2})$

$\ddot{r}(t) = (e^t; e^{-t}; 0)$

$\dddot{r}(t) = (e^t; -e^{-t}; 0)$

$[\dot{r}; \ddot{r}] = (-\sqrt{2}e^{-t}; \sqrt{2}e^{t}; 2)$

$|[\dot{r}; \ddot{r}]| = (2(e^{-2t} + e^{2t} + 2))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})$

$|\dot{r}| = (e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{\frac{1}{2}} = e^t + e^{-t}$

$\langle [\dot{r}; \ddot{r}]; \dddot{r} \rangle = -2\sqrt{2}$

+

$$k = \frac{|[\dot{r}; \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$$

$$\varkappa = \frac{\langle [\dot{r}; \ddot{r}], \dddot{r} \rangle}{|[\dot{r}; \ddot{r}]|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t + e^{-t})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$$

Ответ: $k = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$; $\varkappa = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

№3

по формуле Френе.

$\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{e}(s)$; $\vec{r}'_s = \underbrace{\vec{\rho}'(s)}_{\vec{\tau}(s)} + \lambda \underbrace{\vec{e}'(s)}_{\vec{n}(s)} = \vec{\tau}(s) + \lambda(-k\vec{\tau} + \varkappa B)$

?

Ф-ла Френе: $\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{n} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ B \end{pmatrix}$

$\vec{r}'_\lambda = \vec{e}(s)$ $(\vec{r}'_\lambda; \vec{r}'_\lambda) = 1$

(ибо по усл [...]

$(\vec{r}'(s); \vec{r}'(s)) = (1 - \lambda k)^2 - \varkappa^2$;

$(\vec{r}'_s; \vec{r}'_\lambda) = 0$

$$G = \begin{pmatrix} (\vec{r}'_s; \vec{r}'_s) & (r'_s; r'_\lambda) \\ (r'_s; r'_\lambda) & (r'_\lambda; r'_\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda k)^2 - \varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} (1-\lambda k)^2 - \varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

−

Ясинец К. 207

$$\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\cos^{\frac{1}{2}}2\varphi}\right)' = -\frac{2\cos 2\varphi}{\cos^{\frac{1}{2}}2\varphi} - \frac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\varphi}{\cos^{\frac{3}{2}}2\varphi} = -\cos^{\frac{1}{2}}2\varphi - \frac{1}{\cos^{\frac{3}{2}}2\varphi}$$

№4.

$$\vec{r} = (a\cos u\cos v;\ a\cos u\sin v;\ c\sin u)$$
$$\vec{r}\,'_u = (-a\sin u\cos v;\ -a\sin u\sin v;\ c\cos u)$$
$$\vec{r}\,'_v = (-a\cos u\sin v;\ a\cos u\cos v;\ 0)$$
$$\vec{r}\,''_{uu} = (-a\cos u\cos v;\ -a\cos u\sin v;\ -c\sin u)$$
$$r''_{vv} = (-a\cos u\cos v;\ -a\cos u\sin v;\ 0)$$
$$r''_{uv} = (a\sin u\sin v;\ -a\sin u\cos v;\ 0)$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2\sin^2 u} = a\sin u$$

$$Q = \begin{pmatrix} (r''_{uu};n) & (r''_{uv};n) \\ (r''_{uv};n) & (r''_{vv};n) \end{pmatrix}$$

−|0|+|−|0

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 207	Фамилия Бунамов Евгений

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2\cos 2\phi \quad \text{(лемниската);}$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec\rho(s) + \lambda\vec e(s) \quad (|\vec e(s)| = 1) \text{(линейчатая поверхность);}$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения).}$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec\rho(s) \text{ (коническая поверхность);}$$

$\boxed{1a)}$ $r = a\sqrt{\cos 2\varphi} = r(\varphi)$

В случае полярного задания кривизна выражается след. образом:

$$K(\varphi) = \frac{|r^2 + 2(r'_\varphi)^2 - r r''_{\varphi\varphi}|}{(r^2 + (r'_\varphi)^2)^{3/2}}$$

$$r'_\varphi = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$r''_{\varphi\varphi} = -a\left(\frac{2\cos 2\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) =$$

$$= -a\left(\frac{2\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{(\cos 2\varphi)^{3/2}}\right)$$

$$K(\varphi) = \frac{\left|a^2\cos 2\varphi + 2a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + a\sqrt{\cos 2\varphi}\left(-a\left(\frac{2\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{(\cos 2\varphi)^{3/2}}\right)\right)\right|}{\left(a^2\cos 2\varphi + a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{a^2|\cos^2 2\varphi + 2\sin^2 2\varphi - 2\cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi|}{\left(\frac{a^2}{\cos 2\varphi}\right)^{3/2}\cdot\cos 2\varphi} = \boxed{\sqrt{a}\cos 4\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

−

$\boxed{3a)}$ $r = \vec\rho(s) + \lambda\vec e(s) = r(s,\lambda)$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \vec\rho\,'_s + \lambda\vec e\,'_s \qquad \frac{\partial r}{\partial\lambda} = \vec e$$

$$G = \begin{pmatrix} (\rho'_s + \lambda e'_s, \rho'_s + \lambda e'_s) & (\vec\rho\,'_s + \lambda\vec e\,'_s, \vec e) \\ (\vec e, \rho'_s + \lambda\vec e\,'_s) & (\vec e, \vec e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec\rho\,'_s + \lambda\vec e\,'_s, \vec\rho\,'_s + \lambda\vec e\,'_s) & (\vec\rho\,'_s + \lambda\vec e\,'_s, \vec e) \\ (\vec e, \rho'_s + \lambda\vec e\,'_s) & 1 \end{pmatrix}$$

+

$\boxed{14a}$ $\vec{r} = (a\cos u \cos v;\ a\cos u \sin v;\ c\sin u)$

$\vec{r}'_u = (-a\sin u\cos v;\ -a\sin u \sin v;\ c\cos u)$

$\vec{r}'_v = (-a\cos u\sin v;\ a\cos u\cos v;\ 0)$

$\vec{n} = [\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v] = (-ac\cos^2 u\cos v;\ ac\cos^2 u\sin v;\ -a^2\sin u\cos u\cos^2 v - a^2\sin u\cos u\sin^2 v) =$

$= (-ac\cos^2 u\cos v;\ -ac\cos^2 u\sin v;\ -a^2\sin u\cos u)$

$|[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]| = \sqrt{a^2c^2\cos^4 u + a^4\sin^2 u\cos^2 u}$

$\vec{r}''_{uu} = (-a\cos u\cos v;\ -a\cos u\sin v;\ -c\sin u)$

$\vec{r}''_{uv} = (a\sin u\sin v;\ -a\sin u\cos v;\ 0)$

$\vec{r}''_{vv} = (-a\cos u\cos v;\ -a\cos u\sin v;\ 0)$

$(\vec{r}''_{uu}, \vec{n}) = +a^2c\cos^3 u\cos^2 v - a^2c\cos^3 u\sin^2 v - a^2c\sin^2 u\cos u =$

$= -a^2c(\cos^3 u\cos 2v - \sin^2 u\cos u)$

$(\vec{r}''_{uv}, \vec{n}) = -a^2c\cos^2 u\sin u\sin v\cos v - a^2c\cos^2 u\sin u\sin v\cos v =$

$= -2a^2c\cos^2 u\sin u\sin v\cos v = 0$

$(\vec{r}''_{vv}, \vec{n}) = a^2c\cos^3 u\cos^2 v - a^2c\cos^3 u\sin^2 v =$

$= a^2c\cos^3 u\cos 2v$

$$Q = \frac{-a^2c}{\sqrt{a^2c^2\cos^4 u + a^4\sin^2 u\cos^2 u}}\begin{pmatrix}\cos^3 u\cos 2v - \sin^2 u\cos u & 2\cos^2 u\sin u\sin v\cos v\\ 2\cos^2 u\sin u\sin v\cos v & -\cos^3 u\cos 2v\end{pmatrix}$$

$\ominus$

Галухин А

207 Г

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

Группа 207	Фамилия Галухин

$- \mid \mp \mid + \mid - \mid 4$

1а). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi \quad \text{(лемниската)};$$

2а). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

3а). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec\rho(s) + \lambda\vec e(s) \quad (|\vec e(s)| = 1) \text{(линейчатая поверхность)};$$

4а). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, q\sin u) \text{ (эллипсоид вращения)}.$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \lambda\vec\rho(s) \text{ (коническая поверхность)};$$

№1.

$r^2 = a^2\cos 2\varphi$

$r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$

$r' = \mp a\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$

$r'' = \mp a\dfrac{2\cos 2\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} + \dfrac{\sin^2 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}{\cos 2\varphi} = \mp a\dfrac{\cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi}{\cos^{3/2} 2\varphi}$

$-$

$k(\varphi) = \dfrac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$

$k(\varphi) = \dfrac{\left|a^2\cos 2\varphi + 2a^2\dfrac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + a^2\dfrac{\cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right|}{\left(a^2\cos 2\varphi + a^2\dfrac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)^{3/2}} = \dfrac{1}{a}\left|\dfrac{\dfrac{2\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}{\left(\dfrac{1}{\cos 2\varphi}\right)^{3/2}}\right| =$

$= \dfrac{(2\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi)\sqrt{\cos 2\varphi}}{a}$

№2.

$r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$

$\dot r = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$

$\ddot r = (e^t, e^{-t}, 0)$

$k = \dfrac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

$\dddot r = (e^t, -e^{-t}, 0)$

$[\dot r \times \ddot r] = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)$ $\quad |[\dot r \times \ddot r]| = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} =$

$|\dot r| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = e^t + e^{-t}$ $\quad = \sqrt{2}e^{-t} + \sqrt{2}e^t$

$$\varkappa(t) = \frac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{|[\dot r, \ddot r]|^2}$$

$$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = \cancel{\ldots} - \sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\varkappa(t) = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})} = -\frac{2}{(e^t + e^{-t})^2}$$ ∓

№4.

$r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$

$r_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u)$ $\quad |r_u| = \sqrt{a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u} = a$

$r_v = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)$ $\quad |r_v| = a\cos u$

?

$[r_u \times r_v] = (-a^2\cos^2 u\cos v, -a^2\cos^2 u\sin v, -a^2\cos u\sin u)$

$m = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$

$r_{uv} = (a\sin u\sin v, -a\sin u\cos v, 0)$

$r_{uu} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, -a\sin u)$

$r_{vv} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, 0)$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\cos^2 u \end{pmatrix}$$

−

№3

$\bar r = \bar\rho(s) + \lambda\bar e(s)$ $\quad |\bar e(s)| = 1$. $\quad$ $\bar e(s) = (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ в базисе $\{\bar n, \bar\beta, \bar\tau\}$

$\dot r_s = \bar\tau(s) + \lambda\dot{\bar e}(s)$

$\lambda\bar e(s) = \lambda\lambda_1\bar n(s) + \lambda\lambda_2\bar\beta(s) + \lambda\lambda_3\bar\rho(s)$

$\bar r_\lambda = \bar e(s)$

$\cancel{\dot r = \dot{\bar\rho}(s)(1 + \lambda\lambda_3) + \lambda\lambda_1\dot{\bar n}(s) + \lambda\lambda_2\dot{\bar\beta}(s) = \bar\tau(1+\lambda\lambda_3) - \lambda\lambda_1 k\bar\tau + \lambda\lambda_1\varkappa\bar\beta(s) - \lambda\lambda_2\varkappa\bar\beta(s)}$

$(r_\lambda, r_\lambda) = 1$

$\cancel{\mathrm{I} = (\ldots)}$

$\dot{\bar e}(s) = \lambda_1\dot{\bar n} + \lambda_2\dot{\bar\beta} + \lambda_3\dot{\bar\tau} = \lambda_3 k\bar n - \lambda_1 k\bar\tau + \lambda_1\varkappa\bar\beta - \lambda_2\varkappa\bar n$

$\bar r_s = \bar\tau(s)(1 - \lambda\lambda_1 k) + \bar n(\lambda\lambda_3 k - \lambda\lambda_2\varkappa) + \lambda\lambda_1\varkappa\bar\beta$

$(r_s, r_s) = (1 - \lambda\lambda_1 k)^2 + (\lambda\lambda_3 k - \lambda\lambda_2\varkappa)^2 + \lambda^2\lambda_1^2\varkappa^2$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} (1-\lambda\lambda_1 k)^2 + (\lambda\lambda_3 k - \lambda\lambda_2\varkappa)^2 + \lambda^2\lambda_1^2\varkappa^2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$(r_\lambda, r_\lambda) = 1$

$(r_s, r_\lambda) = \cancel{(\lambda\lambda_1\lambda_3 k - \lambda\lambda_1\lambda_2\varkappa)} + \lambda\lambda_1\lambda_2\varkappa + \lambda_3 - \lambda\lambda_1\lambda_3 k = \lambda_3$

+

–	–	–	–	–

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ В.

Группа 207	Фамилия Гарин

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1+\cos\phi) \text{ (кардиоида)};$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{v}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (каналовая поверхность)};$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор)};$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей)}.$$

1) $r = a(1+\cos\varphi)$, $\dot r = -a\sin\varphi$, $\ddot r = -a\cos\varphi$

$\dot r^2$

$$\vec\rho(\varphi) = r(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(1+\cos\varphi)\cos\varphi\\ a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec\rho}(\varphi) = \dot r(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + r(\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec\rho}(\varphi) = \ddot r(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + \dot r(\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} + \dot r(\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} + r(\varphi)\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$|[\dot{\vec\rho}, \ddot{\vec\rho}]| = (2\dot r^2 - \ddot r r + r^2)(\varphi)$$

$$|\dot{\vec\rho}| = (\dot r^2 + r^2)(\varphi)$$

$$k = \frac{2\cdot(-a\sin\varphi)^2 - (-a\cos\varphi)(a(1+\cos\varphi)) + a^2(1+\cos\varphi)^2}{(a^2\sin^2\varphi + (a+a\cos\varphi)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi + a^2 + a^2\cos^2\varphi + 2a^2\cos\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + a + a\cos\varphi)^3} =$$

$$= \frac{2a^2 + a^2\cos\varphi + a^2 + 2a^2\cos\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + a + a\cos\varphi)^3}$$

–

2) $r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} e^t(\sin t + \cos t) \\ e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t \end{pmatrix} \quad \vec{r}'' = \begin{pmatrix} e^t(2\cos t) \\ e^t(-2\sin t) \\ e^t \end{pmatrix} \quad \vec{r}''' = \begin{pmatrix} e^t(-2\sin t) \\ e^t(-2\cos t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$|[\dot r, \ddot r]| = \cancel{\left[e^t\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, e^t\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix} \right]}$$

$$= \left[e^t\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, e^t\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left| e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 2e^{2t}$$

$$(\dot r \ddot r \dddot r) = -\cancel{4}\,2\, e^{3t}$$

$= 2e^{3t}$

$$\varkappa = \frac{-4e^{3t}}{2e^{2t}} = -2e^{t}$$

$-$

$$k = \frac{2e^{2t}}{(\sqrt{3}e^t)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} e^{-t}$$

3) ~~$\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{\nu}(s)\cos\varphi + \vec{b}(s)\sin\varphi$~~

φ, s — параметры

$$\vec{r}'_s = \vec{\rho}'_s(s) + \vec{\nu}'(s)\cos\varphi + \vec{b}'(s)\sin\varphi$$

~~$\vec{r}'_\varphi = -\vec{\nu}(s)\sin\varphi + \vec{b}(s)\cos\varphi$~~

~~$(\vec{r}'_s, \vec{r}'_s) = |\vec{\rho}'(s)|^2 + |\vec{\nu}'(s)|^2\cos^2\varphi + |\vec{b}'(s)|^2\sin^2\varphi +$~~

~~$+ 2|\vec{\rho}'(s)||\vec{\nu}'(s)|\cos\varphi + 2|\vec{\nu}'(s)||\vec{b}'(s)|\sin\varphi\cos\varphi +$~~

~~$+ 2|\vec{\rho}'(s)||\vec{b}'(s)|\sin\varphi$~~

~~$(\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_\varphi) = |\vec{\nu}(s)\sin\varphi|^2 + |\vec{b}(s)\cos\varphi|^2 - 2|\vec{\nu}(s)\sin\varphi||\vec{b}(s)\cos\varphi|$~~

~~$(\vec{r}'_s, \vec{r}'_\varphi) = -|\vec{\rho}'(s)||\vec{\nu}(s)\sin\varphi|$~~

~~4) $r = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$~~ ~~207, Гарин~~

207, Гарин

$$I = \begin{pmatrix} (r'_s, r'_s), & (r'_s, r'_\varphi) \\ (r'_s, r'_\varphi), & (r'_\varphi, r'_\varphi) \end{pmatrix}$$

4) $r = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$

$$r'_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$$

$$r''_{uu} = (-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u)$$

$$r''_{uv} = (b\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0)$$

$$r'_v = (-a\sin v - b\cos u\sin v, a\cos v + b\cos u\cos v, 0)$$

$$r''_{vv} = (-a\cos v - b\cos u\cos v, -a\sin v - b\cos u\sin v, 0)$$

$$[r'_u, r'_v] = (a+b\cos u)\begin{pmatrix} -b\cos u\cos v \\ -b\cos u\sin v \\ -b\sin u\sin^2 v - b\cos u\cos^2 v \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{-(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u\sin^2 v + \cos u\cos^2 v)}{\sqrt{\cos^2 u(1+\cos^4 v) + \sin^2 u\sin^4 v + \cos^2 u\sin^4 v + \ldots + 2\sin u\cos u\sin^2 v\cos^2 v}}$$

$$II = \begin{pmatrix} (r''_{uu}, \vec{n}), & (r''_{uv}, \vec{n}) \\ (r''_{uv}, \vec{n}), & (r''_{vv}, \vec{n}) \end{pmatrix}$$

3) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{\nu}(s)\cos\varphi + \vec{b}(s)\sin\varphi$

$\vec{\tau}(s)$

$r'_s = \vec{\rho}'(s) + \vec{\nu}'(s)\cos\varphi + \vec{b}'(s)\sin\varphi = \vec{\rho}'(s) - k(s)\cancel{\vec{\tau}}\cos\varphi + \varkappa(s)\vec{b}(s) +$

$- \varkappa(s)\vec{\nu}(s)\sin\varphi = \vec{\rho}'(s)\left(1 - \frac{k(s)\cos\varphi}{|\vec{\rho}'(s)|}\right) + \varkappa(s)\vec{b}(s)\cos\varphi - \varkappa(s)\nu(s)\sin\varphi$

$r'_\varphi = \vec{\rho}(s) - \vec{\nu}'(s)\sin\varphi + \vec{b}(s)\cos\varphi$

$\boxed{\text{Гарин, 297}}$

$(\vec{r}'_s, \vec{r}'_s) = |\vec{\rho}'(s)|^2\left(1 - \frac{k(s)\cos\varphi}{|\vec{\rho}'(s)|}\right)^2 + \varkappa^2(s)\cancel{\cos^2\varphi + \varkappa^2(s)\sin^2\varphi}$

$(\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_\varphi) = |\vec{\rho}(s)|^2 + \cancel{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\ 1 - (\vec{\rho}(s), \vec{\nu}(s))\sin\varphi + (\vec{\rho}'(s), \vec{b}(s))\cos\varphi$

$(\vec{r}'_s, \vec{r}'_\varphi) = (\rho(s), \vec{\rho}'(s))\left(1 - \frac{k(s)}{|\vec{\rho}'(s)|}\cos\varphi\right) + \varkappa(s)(\vec{b}(s), \vec{\rho}(s))\cos\varphi +$

$\cancel{\cos^2\varphi\,\varkappa(s)} - \varkappa(s)(\vec{\nu}(s), \vec{\rho}(s))\sin\varphi + \cancel{\varkappa(s)\sin^2\varphi} + \varkappa(s)$

5) H, K?

$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s)$

$\dot{r}_s = \dot{\vec{\rho}}(s) - \lambda\varkappa(s)\vec{\nu}(s)$

$\ddot{r}_{ss} = \ddot{\vec{\rho}}(s) - \lambda\dot{\varkappa}(s)\vec{\nu}(s) - \lambda\varkappa(s)\left(-k\vec{\tau}(s) + \varkappa(s)\vec{b}(s)\right)$

$\dot{r}_\lambda = \vec{b}(s)$

$\ddot{r}_{\lambda\lambda} = 0$

$\ddot{r}_{\lambda s} = -\varkappa(s)\vec{\nu}(s)$

I: $(\dot{r}_s, \dot{r}_s) = (\lambda\varkappa(s))^2 + (|\dot{\vec{\rho}}(s)|)^2$

$(\dot{r}_s, \dot{r}_\lambda) = 0$

$(\dot{r}_\lambda, \dot{r}_\lambda) = 1$

$\mathrm{II}: \quad \vec{n} = [\vec{r}_s(s), \vec{r}_\lambda] =$ [illegible] 207, Гарин

$$\vec{n} = \frac{-\lambda \varkappa(s)\vec{\tau} - |\vec{\rho}'(s)|\vec{\nu}}{\lambda^2\varkappa^2(s) + |\vec{\rho}'(s)|^2}$$

$$(n, \vec{r}_{ss}) = \frac{(\dot{\vec{\rho}}'(s), -\lambda\varkappa(s)\vec{\tau}(s) - |\vec{\rho}'(s)|\vec{\nu}) - \lambda\dot{\varkappa}(s) - \lambda^2\varkappa^2(s)k(s)}{\lambda^2\varkappa^2(s) + |\vec{\rho}'(s)|^2}$$

$$(n, \vec{r}_{s\lambda}) = \frac{-|\vec{\rho}'(s)|\varkappa(s)}{\lambda^2\varkappa^2(s) + |\dot{\vec{\rho}}(s)|^2}$$

$$(n, \vec{r}_{\lambda\lambda}) = 0,$$

$$\det \mathrm{I} = \lambda^2\varkappa^2(s) + |\dot{\vec{\rho}}(s)|^2$$

$$\det \mathrm{II} = \frac{-|\vec{\rho}'(s)|^2\varkappa^2(s)}{(\lambda^2\varkappa^2(s) + |\dot{\vec{\rho}}(s)|^2)^2}$$

$+ \mid + \mid - \mid + \mid -$

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ B.

Группа 207	Фамилия Маслова

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1+\cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \vec{v}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (каналовая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

№1

$r = a(1+\cos\varphi)$

$$\boxed{k = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} \qquad æ = \frac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{|[\dot r, \ddot r]|^2}}$$

$\dot r = -a\sin\varphi$

$\ddot r = -a\cos\varphi$

$$k = \frac{|a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2(a^2\sin^2\varphi) + a(1+\cos\varphi)a\cos\varphi|}{(a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|a^2 + 3a^2\cos\varphi + 2a^2|}{a^3(1+1+2\cos\varphi)^{3/2}} = \frac{3a^2(1+\cos\varphi)}{2^{3/2}a^3(1+\cos\varphi)^{3/2}} = \frac{3}{4a|(\cos\frac{\varphi}{2})|} \quad +$$

Ответ: $\boxed{k = \frac{3}{4a|\cos\varphi/2|}}$

№2

$r = (e^t\sin t, e^t\cos t, e^t)$

$\dot r = (e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t)$

$\ddot r = (2e^t\cos t,\ -2e^t\sin t,\ e^t)$

$\dddot r = (2(-e^t\sin t + e^t\cos t),\ -2(e^t\cos t + e^t\sin t),\ e^t)$

$[\dot r, \ddot r] = \cancel{(-\sin 2t - 2\sin^2 t}\ ((\sin t+\cos t), (\sin t - \cos t), 2)e^{2t}$

$|[\dot r, \ddot r]| = \sqrt{6}\,e^{2t}$. $\quad |\dot r| = e^t\sqrt{3}$

$$(\dot r, \ddot r, \dddot r) = e^{3t}\begin{vmatrix} \cos t+\sin t & \cos t - \sin t & 1 \\ 2\cos t & -2\sin t & 1 \\ 2\cos t - 2\sin t & -2\cos t - 2\sin t & 1 \end{vmatrix} = e^{3t}(-2+4-4) = -2e^{3t}$$

Отв: $\boxed{\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t} \\ æ &= -\frac{1}{3e^t} = -\frac{1}{3}e^{-t} \end{aligned}}$ $\quad +$

№3

$$r = \vec{\rho}(s) + \vec{\nu}(s)\cos\varphi + \vec{b}(s)\sin\varphi$$

$$r_s = \vec{\tau} + (-k\vec{\tau} + æ\vec{b})\cos\varphi + \sin\varphi(-æ\vec{n})$$

$$r_\varphi = 0 + \vec{n}\sin\varphi + \vec{b}\cos\varphi$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2\varphi(æ\vec{b} - k\vec{\tau})^2 + \sin^2\varphi æ^2 ? & æ\cos^2\varphi + æ\sin^2\varphi \\ æ & 1 \end{pmatrix} =$$

Не следует!

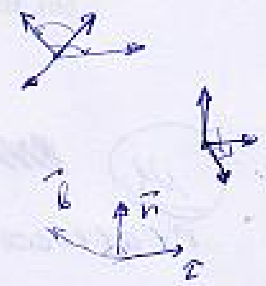
—

Ответ: $= \begin{pmatrix} (1 - k\cos\varphi)^2 + æ^2 & æ \\ æ & 1 \end{pmatrix}$

$\cancel{1 + \cos^2\varphi(æ^2 + k^2) + \sin^2\varphi æ^2}$

$$\boxed{G = ((1 - k\cos\varphi)^2 + æ^2)ds^2 + 2æ\, ds\, d\varphi + d\varphi^2}$$

~~№4. r = ((a+b cos u) cos v, (a+b cos u) …, b sin u)~~



№5. $r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s)$.

$$K = \frac{\det Q}{\det G} \qquad H = tr(QG^{-1})$$

$$r_s = \vec{\tau} + \lambda(-æ\vec{n})$$

$$r_\lambda = \vec{b}$$

$$r_{ss} = k\vec{n} - \lambda æ(-k\vec{\tau} + æ\vec{b}) - \lambda æ'_s \vec{n}$$

$$r_{s\lambda} = -æ\vec{n}$$

$$r_{\lambda\lambda} = 0$$

$$m = [r_\lambda, r_s] = \vec{n} + æ\lambda\vec{\tau}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 æ^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} k + æ^2\lambda^2 k & -æ \\ -æ & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda^2 æ^2 \end{pmatrix} \frac{1}{1 + \lambda^2 æ^2}$$

Ответ $K = \frac{-æ^2}{1 + \lambda^2 æ^2}$, $H = \frac{k + æ^2\lambda^2 k}{1 + \lambda^2 æ^2} = \frac{k(1 + æ^2\lambda^2)}{1 + \lambda^2 æ^2} = k$

~~$[\vec{n}, \vec{b}] = \vec{\tau}$ иначе, если $[\vec{n}, \vec{b}] = -\vec{\tau}$~~

$$\frac{1}{1 + \lambda^2 æ^2}\begin{pmatrix} k + æ^2\lambda^2 k & -æ \\ -æ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda^2 æ^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \lambda^2 æ^2}\begin{pmatrix} k + æ^2\lambda^2 k & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

—

Лист 2 Вар В. Маловой В. 207гр.

№4

$r = \left((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u \right)$

$\dot r_u = \left(-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u \right)$

$\dot r_{uu} = \left(-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u \right)$

$\dot r_v = \left(-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0 \right)$

$\dot r_{vv} = \left(-(a+b\cos u)\cos v, -(a+b\cos u)\sin v, 0 \right)$

$\dot r_{uv} = \left(b\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0 \right)$

$[\dot r_u, \dot r_v] = \Big(-b\cos u\cos v(a+b\cos u), -b\cos u\sin v(a+b\cos u),$

$-b\sin u\cos^2 v(a+b\cos u) - b\sin u\sin^2 v(a+b\cos u) \Big) =$

$= b(a+b\cos u)\underbrace{\left(-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u \right)}_{=m}$

$|[\dot r_u, \dot r_v]| = b(a+b\cos u)\sqrt{\cos^2 u\cos^2 v + \cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u} = b(a+b\cos u)$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{b\cos^2 u\cos^2 v + b\cos^2 u\sin^2 v + b\sin^2 u}{b} & -b\sin u\sin v\cos u\cos v + b\cos u\cos v\sin \ldots = 0 \\ 0 & \frac{(a+b\cos u)(\cos u\cos^2 v + \cos u\sin^2 v)}{\cos u} \end{pmatrix}$$

Отв $Q = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)\cos u \end{pmatrix}$ или $\boxed{Q = b\,du^2 + (a+b\cos u)\cos u\,dv^2}$

+

+	+	−	−	−

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ В.

Группа 207	Фамилия Саркисян А

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1 + \cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{v}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (каналовая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

2. $r = (e^t\sin t, e^t\cos t, e^t)$

$r' = (e^t\sin t + e^t\cos t; e^t\cos t - e^t\sin t, e^t)$

$r'' = (e^t\sin t + e^t\cos t + e^t\cos t - e^t\sin t; e^t\cos t - e^t\sin t - e^t\sin t - e^t\cos t; e^t)$

$$[\dot r; \ddot r] = \left(\begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t \\ -2e^t\sin t & e^t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} e^t & e^t(\sin t + \cos t) \\ e^t & 2e^t\cos t \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} e^t(\sin t + \cos t) & e^t(\cos t - \sin t) \\ 2e^t\cos t & -2e^t\sin t \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left(e^{2t}(\cos t - \sin t + 2\sin t); e^{2t}(2\cos t - \sin t - \cos t); e^{2t}(\sin^2 t - \sin t\cos t - 2\cos^2 t + 2\sin^2 t \right) =$$

$$= \left(e^{2t}(\cos t + \sin t); e^{2t}(-\sin t); e^{2t}(\sin t\cos t - 2) \right)$$

$\dddot r\,(2e^t\cos t - 2e^t\sin t; -2e^t\sin t - 2e^t\cos t, e^t)$

$\cancel{(\dot r; \ddot r; \dddot r) = e^{3t}(\sin t + \cos t) 2\cos t\, 2(\cos t - \sin t)}$

$$K(t) = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3} \qquad \varkappa = \frac{\langle [\dot r, \ddot r], \dddot r \rangle}{|[\dot r, \ddot r]|^2}$$

$$K(t) = \frac{\sqrt{e^{4t}(2\cos t\sin t + 1 + \sin^2 t + \sin^2 t\cos^2 t + 4 - 4\sin t\cos t)}}{\left(e^{2t}(1 + 2\sin t\cos t + 1 - 2\sin t\cos t + 1)\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{5 - 2\sin t\cos t + \sin^2 t(1 + \cos^2 t)}}{e^t\sqrt{27}}$$

$$\varkappa(t) = \frac{e^{3t}2(\cos^2 t - \sin^2 t) + e^{3t}\sin t(\sin t + \cos t) + e^{3t}(\sin t\cos t - 2)}{e^{4t}(5 - 2\sin t\cos t + \sin^2 t(1 + \cos^2 t))} =$$

$$= \frac{2\cos^2 t - \sin^2 t + 2\cos t\sin t - 2}{e^t(5 - 2\sin t\cos t + \sin^2 t(1 + \cos^2 t)}$$

1) $r = a(1+\cos\varphi)$

$$K(s) = \frac{r''_{\varphi\varphi} s'_\varphi - r'_\varphi s''_{\varphi\varphi}}{(s'_\varphi)^3}$$

$r'_\varphi = -a\sin\varphi$, $r''_{\varphi\varphi} = -a\cos\varphi$

$s'_\varphi = \sqrt{r'^2_\varphi + r^2} = \cancel{\ldots}$

$$s''_{\varphi\varphi} = \frac{r'_\varphi r''_{\varphi\varphi} + r r'_\varphi}{\sqrt{r'^2_\varphi + r^2}}$$

Ответ. $$K(\varphi) = \frac{|a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)\cos\varphi|}{(a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = \frac{3}{4a|\cos\frac{\varphi}{2}|}$$ +

3) $r = \vec{p}(s) + \vec{n}(s)\cos\varphi + \vec{b}(s)\sin\varphi$

$\dot{r}_s = \vec{p}'(s) + \vec{n}'(s)\cos\varphi + \vec{b}'(s)\sin\varphi$

$\dot{r}_\varphi = -\vec{n}(s)\sin\varphi + \vec{b}(s)\cos\varphi$? −

~~Ответ~~ $\cancel{G = \begin{pmatrix} (\dot{r}_s, \dot{r}_s) & (\dot{r}_\varphi, \dot{r}_s) \\ (\dot{r}_s, \dot{r}_\varphi) & (\dot{r}_\varphi, \dot{r}_\varphi) \end{pmatrix}}$

$$dr^2 = \underbrace{\dot{r}^2_{ss}}_{\langle r_s, r_s\rangle} ds^2 + 2\langle \dot{r}_s, \dot{r}_\varphi\rangle ds\,d\varphi + \underbrace{\dot{r}^2_{\varphi\varphi}}_{\langle r_\varphi, r_\varphi\rangle} d\varphi^2$$

4. $r = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin v)$

$\dot{r}_v = (-(a+b\cos u)\sin v; (a+b\cos u)\cos v; b\cos v)$, $\ddot{r}_{vv} = (-(a+b\cos u)\cos v; -(a+b\cos u)\sin v, -b\sin v)$

$\dot{r}_u = (-b\cos v\sin u, -b\sin v\sin u, 0)$, $\ddot{r}_{uu} = (-b\cos v\cos u, -b\sin v\cos u, 0)$

$\ddot{r}_{uv} = (b\sin v\sin u, -b\cos v\sin u, 0)$

$\vec{m}$ – нормаль $$\vec{m} = \frac{[r'_u \times r'_v]}{|r'_u \times r'_v|} = \cancel{\frac{((a+b\cos u)b\cos v\sin v\sin u; -(a+b\cos u)b\sin u\sin v\cos v, 0)}{\sqrt{(a+b\cos u)^2 b^2 \sin^2 u \sin^2 v \cos^2 v \cdot 2}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) = \frac{(b^2\cos v\sin v\sin u; -b^2\cos^2 v\sin u; b(a+b\cos u)\sin u)}{\sqrt{b^4(\cos^2 v\sin^2 v\sin^2 u - b^2 + b^2\cos^4 v\sin^2 u + (a+b\cos u)^2\sin^2 u)}}$$ −

$$\cancel{Q = (\vec{n}, \ddot{r}_{uv}) = \ldots} \frac{b\sin v\sin u}{\sqrt{2}} + \frac{b\cos v\sin u}{\sqrt{2}}$$

Ответ. $Q = \frac{b\sin u}{\sqrt{2}}(-\sin v + \cos v)$

$$\bar{n} = \frac{(b\cos v\sin v, -b\cos^2 v, (a+b\cos u))}{\sqrt{b^2\cos^2 v + (a+b\cos u)^2}}$$

Ответ. $$Q = \begin{pmatrix} (\bar{n}, r_{uu}) & (\bar{n}, r_{uv}) \\ (\bar{n}, r_{uv}) & (\bar{n}, r_{vv}) \end{pmatrix}$$ −

Это не ответ. Это определение 2-й квадратичной формы!

Вар В Саркисян А 207

5) $r=\vec{p}(s)+\lambda\vec{b}(s)$

$K-?$

$H-?$

$\dot{r}_{\lambda}=\vec{b}(s)$

$\ddot{r}_{\lambda\lambda}=0$

$\dot{r}_{s}=\vec{p}'(s)+\lambda\vec{b}'(s)$

$\ddot{r}_{ss}=\vec{p}''(s)+\lambda\vec{b}''(s)$

$\vec{n}=\dfrac{[\vec{b}(s)\times(\vec{p}'(s)+\lambda\vec{b}'(s))]}{|[\vec{b}(s)\times(\vec{p}'(s)+\lambda\vec{b}'(s))]|}$

$\ddot{r}_{s\lambda}=\vec{b}'(s)$

$$G=\begin{pmatrix}(\vec{b}(s),\vec{b}(s)) & (\vec{b}(s),\vec{p}'(s)+\lambda\vec{b}'(s))\\ (\vec{b}(s),\vec{p}'(s)+\lambda\vec{b}'(s)) & (\vec{p}'(s)+\lambda\vec{b}'(s),\vec{p}'(s)+\lambda\vec{b}'(s))\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}0 & (\vec{n},\vec{b}'(s))\\ (\vec{n},\vec{b}'(s)) & (\vec{n},\vec{p}''(s)+\lambda\vec{b}''(s))\end{pmatrix}$$

$$K=\frac{\det Q}{\det G}$$

$-$

$$H=\operatorname{tr}(QG^{-1})$$

+ | ± | ± | + | −

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ В.

Группа 207	Фамилия Наместников

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1+\cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \vec{v}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (канaловая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$r = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

$\boxed{1b.}$

$r = a(1+\cos\varphi)$

$x(\varphi) = r\cos\varphi = a\cos\varphi(1+\cos\varphi)$

$y(\varphi) = r\sin\varphi = a\sin\varphi(1+\cos\varphi)$

$\gamma(\varphi) = (a\cos\varphi(1+\cos\varphi), a\sin\varphi(1+\cos\varphi))$

$\dot\gamma(\varphi) = (-a\sin\varphi - 2a\cos\varphi\sin\varphi, a\cos\varphi + a\cos^2\varphi - a\sin^2\varphi) =$

$= (-a\sin\varphi - a\sin 2\varphi, a\cos\varphi + a\cos 2\varphi)$

$\ddot\gamma(\varphi) = (-a\cos\varphi - 2a\cos 2\varphi, -a\sin\varphi - 2a\sin 2\varphi)$

$|[\dot\gamma(\varphi), \ddot\gamma(\varphi)]| = a^2(\sin\varphi + \sin 2\varphi)(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi) + a^2(\cos\varphi + \cos 2\varphi)(\cos\varphi + 2\cos 2\varphi) =$

$= a^2(\sin^2\varphi + \underline{3\sin 2\varphi\sin\varphi} + 2\sin^2 2\varphi + \cos^2\varphi + \cos^2 2\varphi + \underline{3\cos 2\varphi\cos\varphi}) =$

$= a^2(3 + 3\cos\varphi) = 3a^2(1+\cos\varphi)$

$|\dot\gamma(\varphi)| = \sqrt{a^2(\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\sin 2\varphi + \sin^2 2\varphi) + a^2(\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)} =$

$= a\sqrt{2 + 2\cos\varphi} = \sqrt{2}a(1+\cos\varphi)^{1/2}$

$k(\varphi) = \dfrac{3a^2(1+\cos\varphi)}{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{3/2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}a(\cos\varphi+1)^{1/2}}$ $\qquad \left(k(\varphi) = \dfrac{|[\dot\gamma, \ddot\gamma]|}{|\dot\gamma|^3} \right.$

+

2.6.

$r(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$

$$r(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1) = e^t(\bar{e} + \bar{k}).$$

$\bar{e} = (\cos t, \sin t, 0)$

$\bar{k} = (0, 0, 1)$

$$\dot{r}(t) = e^t(\bar{e} + \bar{k}) + e^t\bar{g} = e^t(\bar{e} + \bar{k} + \bar{g}); \quad \underline{|\dot{r}(t)| = e^t\sqrt{3}}$$

$\dot{\bar{e}} = (-\sin t, \cos t, 0) = \bar{g}$

$$\ddot{r}(t) = e^t(\bar{e} + \bar{g} + \bar{k}) + e^t(\bar{g} - \bar{e}) = e^t(2\bar{g} + \bar{k})$$

$$[\dot{r}(t), \ddot{r}(t)] = e^{2t}[\bar{e} + \bar{k} + \bar{g}; 2\bar{g} + \bar{k}] = \cancel{e^{2t}([2\bar{e}, \bar{g}] + }$$

$$= e^{2t}\left([\bar{e}, 2\bar{g} + \bar{k}] + [\bar{k}, 2\bar{g} + \bar{k}] + [\bar{g}, 2\bar{g} + \bar{k}]\right) =$$

$$= e^{2t}\left(2[\bar{e}, \bar{g}] + [\bar{e}, \bar{k}] + 2[\bar{k}, \bar{g}] + [\bar{g}, \bar{k}]\right) =$$

$$= e^{2t}(2\bar{k} - \bar{g} - \bar{e})$$

$$|[\dot{r}(t), \ddot{r}(t)]| = e^{2t}\sqrt{6}.$$

$$k(t) = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{e^{3t}\, 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3e^{t}}$$

$+$

$$\dddot{r}(t) = e^t(2\bar{g} + \bar{k}) + e^t(-2\bar{e}) = e^t(2\bar{g} - 2\bar{e} + \bar{k})$$

$$(\dddot{r}, \ddot{r}, \dot{r}) = e^{3t}\begin{vmatrix} \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2\sin t & 2\cos t & 1 \\ -2\sin t - 2\cos t & 2\cos t - 2\sin t & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3t}(2\cos t - 2\cos t + 2\sin t)(\cos t - \sin t) -$$

$$- e^{3t}(-2\sin t + 2\sin t + 2\cos t)(\sin t + \cos t) +$$

$$+ e^{3t}(-2\sin t(2\cos t - 2\sin t) + 2\cos t(2\sin t + 2\cos t))$$

$$= e^{3t}(2\sin t\cos t - 2\sin^2 t - 2\cos t\sin t - 2\cos^2 t + 4) =$$

$$= 2e^{3t}$$

$$\boxed{\varkappa(t) = \frac{2e^{3t}}{6e^{6t}} = \frac{1}{3e^t}}$$

$\boxed{5в.}$ Колесников 207

~~r = γ(s)+λb(s)~~

$$r(s,\lambda)=\bar{\gamma}(s)+\lambda\bar{b}(s)$$

$$r_s=\dot{\bar{\gamma}}(s)+\lambda\dot{\bar{b}}(s)$$

$$r_\lambda=\bar{b}(s)$$

$$\langle r_s,r_s\rangle=\langle\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s)\rangle+2\lambda\cancelto{0}{\langle\dot{\gamma}(s),\dot{b}(s)\rangle}+\lambda^2\langle\dot{\bar{b}}(s),\dot{\bar{b}}(s)\rangle=$$

$$=1+\lambda^2\varkappa^2$$

$$\langle r_s,r_\lambda\rangle=\cancelto{0}{\langle\dot{\gamma}(s),b(s)\rangle}+\lambda\cancelto{0}{\langle\dot{b}(s),b(s)\rangle}=0$$

$$\langle r_\lambda r_\lambda\rangle=1$$

$$G=\begin{pmatrix}1+\lambda^2\varkappa^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad G^{-1}=\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

−

38. Наместников Н. 207

$r(s,\varphi) = \bar\rho(s) + \bar\nu(s)\cos\varphi + \bar b(s)\sin\varphi$

$r_s = \dot{\bar\rho}(s) + \dot{\bar\nu}(s)\cos\varphi + \dot{\bar b}(s)\sin\varphi$

$r_\varphi = -\bar\nu(s)\sin\varphi + \bar b(s)\cos\varphi$

$\langle r_s, r_s\rangle = \langle\dot{\bar\rho}(s), \dot{\bar\rho}(s)\rangle + 2\langle\dot{\bar\rho}(s), \dot{\bar\nu}(s)\rangle\cos\varphi + 2\langle\dot{\bar\rho}(s), \dot{\bar b}(s)\rangle\sin\varphi +$

$+ 2\langle\dot{\bar\nu}(s), \dot{\bar b}(s)\rangle\cos\varphi\sin\varphi + \langle\dot{\bar\nu}(s), \dot{\bar\nu}(s)\rangle\cos^2\varphi +$

$+ \langle\dot{\bar b}(s), \dot{\bar b}(s)\rangle\sin^2\varphi =$

$= 1 + 2k\varkappa\langle\bar\nu(s), \bar\nu(s)\rangle^{\sin\varphi} + \langle -k\rho + \varkappa b, -k\rho + \varkappa b\rangle\cos^2\varphi +$

$+ \varkappa^2\sin^2\varphi = 1 - 2k\varkappa^{\sin\varphi} + k^2\cos^2\varphi - 2k\varkappa\langle\rho, b\rangle^{\cos\varphi} + \varkappa^2\cos^2\varphi +$

$+ \varkappa^2\sin^2\varphi = 1 - 2k\varkappa^{\sin\varphi} + \varkappa^2 + k^2\cos^2\varphi$

$\langle r_\varphi, r_\varphi\rangle = \langle\bar\nu(s), \bar\nu(s)\rangle\sin^2\varphi - 2\langle\bar\nu(s), \bar b(s)\rangle\sin\varphi\cos\varphi + \langle b(s), b(s)\rangle\cos^2\varphi$

$= 1$

$\langle r_\varphi, r_s\rangle = \langle\dot{\bar\rho}(s), -\bar\nu(s)\rangle\sin\varphi + \langle\dot\rho(s), b(s)\rangle\cos\varphi + \langle\dot{\bar\nu}(s), -\bar\nu(s)\rangle\sin\varphi\cos\varphi +$

$+ \langle\dot{\bar\nu}(s), \bar b(s)\rangle\cos^2\varphi + \langle\dot b(s), -\bar\nu(s)\rangle\sin^2\varphi + \langle\dot{\bar b}(s), b(s)\rangle\sin\varphi\cos\varphi =$

$= -k\sin\varphi + \varkappa\cos^2\varphi + \varkappa\sin^2\varphi = -k\sin\varphi + \varkappa$

$$dl^2 = \boxed{(1 - 2k\varkappa\sin\varphi + \varkappa^2 + k^2\cos^2\varphi)\,ds^2 + 2(\varkappa - k\sin\varphi)\,ds\,d\varphi + d\varphi^2}$$

$\boxed{4c}$

$\cancel{r = }$

$r = \left((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u\right)$

$r_u' = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$ $\quad r_{uv} = (b\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0)$

$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$ $\quad r_{uu} = (-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u)$

$r_{vv} = (-(a+b\cos u)\cos v, -(a+b\cos u)\sin v, 0)$

$[r_u, r_v] = \left(-b\cos u\cos v(a+b\cos u), -b\cos u\sin v(a+b\cos u), -b\sin u(a+b\cos u)(\sin^2 v+\cos^2 v)\right)$

$[r_u, r_v] = \left(-b\cos u\cos v(a+b\cos u), -b\cos u\sin v(a+b\cos u), -b\sin u(a+b\cos u)\right)$

$|[r_u, r_v]| = b(a+b\cos u)\sqrt{\cos^2 u\cos^2 v+\cos^2 u\sin^2 v+\sin^2 u} =$

$= b(a+b\cos u)$

$m = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, \sin u)$.

$$L = \begin{pmatrix} \langle r_{uu}, m\rangle & \langle r_{uv}, m\rangle \\ \langle r_{uv}, m\rangle & \langle r_{vv}, m\rangle \end{pmatrix} = \cancel{\left(b\cos^2 u\cos^2 v + b\cos^2 u\sin^2 v + b\sin^2 u \right.}$$

$\langle r_{uu}, m\rangle = b\cos^2 u\cos^2 v + b\cos^2 u\sin^2 v + b\sin^2 u = b$

$\langle r_{uv}, m\rangle = -b\sin u\sin v\cos u\cos v + b\sin u\sin v\cos u\cos v = 0$

$\langle r_{vv}, m\rangle = (a+b\cos u)\cdot(\cos^2 v\cos u + \sin^2 v\cos u) = (a+b\cos u)\cos u$

$$L = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

+

$\boxed{36}$ Наметников. 207

$r(s,\varphi) = \rho(s) + v(s)\cos\varphi + b(s)\sin\varphi$

$r_s = \dot\rho(s) + \dot v(s)\cos\varphi + \dot b(s)\sin\varphi$

$r_\varphi = -v(s)\sin\varphi + b(s)\cos\varphi$

$\langle r_s, r_s\rangle = \langle \dot\rho(s), \dot\rho(s)\rangle + 2\langle \dot\rho(s), \dot v(s)\rangle\cos\varphi + \cancelto{0}{2\langle \dot\rho(s), \dot b(s)\rangle\sin\varphi} +$

$+ \cancelto{0}{2\langle \dot v(s), \dot b(s)\rangle\cos\varphi\sin\varphi} + \langle \dot v(s), \dot v(s)\rangle\cos^2\varphi + \langle \dot b(s), \dot b(s)\rangle\sin^2\varphi$

$= 1 + 2k\cos\varphi + \overset{\cos^2\varphi}{k^2} - \cancelto{0}{2k\varkappa\langle \dot\rho, b\rangle} + \varkappa^2\cos^2\varphi + \varkappa^2\sin^2\varphi =$

$= 1 - 2k\cos\varphi + \overset{\cos^2\varphi}{k^2} + \varkappa^2$

$\langle r_\varphi, r_\varphi\rangle = \langle v(s), v(s)\rangle\sin^2\varphi - 2\langle v(s), b(s)\rangle\sin\varphi\cos\varphi +$

$+ \langle b(s), b(s)\rangle\cos^2\varphi = 1.$

$\langle r_\varphi, r_s\rangle = \cancelto{0}{\langle \dot\rho(s), -v(s)\rangle\sin\varphi} + \cancelto{0}{\langle \dot\rho(s), b(s)\rangle\cos\varphi} +$

$+ \cancelto{0}{\langle \dot v(s), -v(s)\rangle\sin\varphi\cos\varphi} + \langle \dot v(s), b(s)\rangle\cos^2\varphi +$

$+ \langle \dot b(s), -v(s)\rangle\sin^2\varphi + \cancelto{0}{\langle \dot b(s), b(s)\rangle\sin\varphi\cos\varphi} =$

$= \varkappa\cos^2\varphi + \varkappa\sin^2\varphi = \varkappa.$

$$\boxed{(1 - 2k\cos\varphi + \overset{\cos^2\varphi}{k^2} + \varkappa^2)\,ds^2 + 2\varkappa\,ds\,d\varphi + d\varphi^2}$$

±

-	+	-	0	0

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ B.

Группа 207	Фамилия Фадеев А.

1b). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r = a(1 + \cos\phi) \text{ (кардиоида);}$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$\mathbf{r} = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{n}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi \text{ (каналовая поверхность);}$$

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор);}$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

✓2b

$\cancel{\dot r = (e^t \sin t + e^t \cos t, e^t c}$

$r = e^t(\sin t; \cos t; 1)$

$[\dot r; \ddot r] = e^{2t}(\cos t + \sin t; \cos t - \sin t; -2)$

$\dot r = e^t(\sin t; \cos t; 1) + e^t(\cos t; -\sin t; 0)$

$\ddot r = e^t(\sin t; \cos t; 1) + 2e^t(\cos t; -\sin t; 0) + e^t(-\sin t; -\cos t; 0)$

$= e^t(2\cos t; -2\sin t; 1)$

$\dddot r = e^t(2\cos t; -2\sin t; 1) + e^t(-2\sin t; -2\cos t; 0)$

$|\dot r| = e^t\sqrt{1 + 2\sin t\cos t + 1 - 2\sin t\cos t + 1} = \sqrt{3}e^t$

$|\ddot r| = e^t\sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 1} = \sqrt{5}e^t$

$|[\dot r; \ddot r]| = e^{2t}\sqrt{6}$

$(\dot r; \ddot r)$

$\boxed{\varkappa = -\frac{1}{3e^t}}$ $\boxed{k = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}}$

+

✓1b

$$k = \frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}} = \frac{2(\dot r)^2 - \ddot r r + r^2}{((\dot r)^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi) + a^2(1+2\cos\varphi + \dots)}{a\sin^2\varphi + a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2\cos\dots}$$

$$= \frac{a^2 + a^2\cos\varphi + a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi}{a^2 + a^2 + 2a^2\cos\varphi} = \frac{2 + 3\cos\varphi + \cos^2\varphi}{2 + 2\cos\varphi} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi + 2)(\cos\varphi + 1)}{2(\cos\varphi + 1)} = \boxed{\frac{\cos\varphi}{2} + 1}$$

—

u_3

$$G = \begin{pmatrix} (1-k\cos u)^2 + \varkappa^2 & \varkappa \\ \varkappa & 1 \end{pmatrix}$$

v_4

$e^t \sin t + e^t \cos t \quad e^t(\cos t - \sin t)$

$2e^t \cos t \qquad -2e^t \sin t$

$e^{2t}(\sin t \cos t + \cos^2 t - \sin \cos t + \sin^2 t) =$

$\boxed{e^{2t}}$

$-e^{2t}\sin t, \quad , e^{2t}$

$e^t \sin t \qquad e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin & 1 \\ 2\cos t & 1 \end{pmatrix}$

$\cos t - \sin t - \cos t$

$-e^{2t}\sin t$

$1 \quad \cos t + \sin t$

$1 \quad \sin t \qquad -\cos t(\cos + \sin t)$

$-\sin(\cos - \sin) + 1$

$\cancel{\sin t} \quad -e^{2t}\cos t$

$\left(-e^{2t}\cos t; -e^{2t}\sin t; e^{2t}\right) \quad \cancel{-2\sin t\cos t} \quad -2\cos^2 t$

$e^{4t} + e^{4t} = 2e^{4t}$

$e^{2t}(-2\sin^2 t - 2\sin t\cos t - 2\cos^2 t + 2\sin t\cos t$

$-2e^{2t}$ $\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi$

$\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\sin\varphi - 2e^{2t} - r\cos\varphi$

$r\cos\varphi$

$1 \quad \sin t + \cos t$

$1 \quad 2\cos t$

$(\dot{y})^2 \quad \left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)'$

$\cos t \quad -\sin t - \cos t$

$e^{2t}(\cos t - \sin t)$

$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$

$r\sin\varphi$

$\cos t - \sin t \qquad 1 \quad \dot{r}\sin + r\cos\varphi$

$-2\sin t \qquad 1$

$\cos t - \sin t + 2\sin t$

$(\cos t + \sin t)e^{2t}$

$$\boxed{e^{2t}\left(\cos t+\sin t,\ \cos t-\sin t;\ -2\right)}$$

$$2\cos^2 t+2\sin$$

$$\cancel{2\ 2\sin t\cos t}+1-2$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)'=\cancel{\ldots}\ \frac{x'}{y}-\frac{xy'}{y^2}=$$

$$2+4=6$$

$$6e^{4t}$$

$$2+1=3$$

$$e^{t}\sqrt{3}\qquad e^{3t}3\sqrt{3}$$

$$2(\cos t-\sin t);\ -2(\cos t+\sin t);\ 2$$

$$2\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)=2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right);\ -2e^{2t}$$

$$=-2$$

$$\frac{\sqrt{6}e^{2t}}{e^{3t}3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3e^{t}}$$

Vasiela.

$$\left(\varphi;\ a\left(1+\cos\varphi\right)\right) \quad -a\sin\varphi \quad -a\cos\varphi$$

$$\left(1;\ -\sin\varphi\right)$$

$$(\dot r)^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2\dot r r\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(1+\sin^2\varphi\right)d\varphi$$

$$\left(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\right)$$

$$\ddot r\cos\varphi - 2\dot r\sin\varphi - r\cos\varphi$$

$$r\sin\varphi \quad r\cos\varphi$$

$$\ddot r\dot r\sin\varphi\cos\varphi - 2\dot r\dot r\sin^2\varphi - \dot r r\sin\varphi\cos\varphi + \ddot r r\cos^2\varphi - 2\dot r r\cos\varphi\sin - r^2\cos^2\varphi$$

$$\left(\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\right)$$

$$\left(\ddot r\sin\varphi + 2\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\right)$$

$$(\dot r)^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + 2$$

$$(\dot r)^2 + (r)^2$$

$$\ddot r\dot r\sin^2\varphi\cos\varphi + 2(\dot r)^2\cos^2\varphi - \dot r\sin\varphi\cos\varphi - \ddot r r\sin\varphi - 2\dot r\dot r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi$$

$$\boxed{2(\dot r)^2 - \ddot r r + r^2}$$

$$2\ddot r\dot r\sin\varphi\cos\varphi - 2\dot r\dot r\sin^2\cos\varphi$$

Фадеев

$$r_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$$

$$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$$

$$-ab\sin u\cos v - b^2\cos^2 v\sin u\cos u + ab\sin u\sin v$$

$$-b^2\sin u\cos u\sin^2 v =$$

$$= -ab\sin u(\cos v + \sin v) - b^2\sin u\cos u$$

$$-ab\cos u - b^2\cos^2 u\sin v$$

$$-ab\cos u - b^2\cos^2 u\cos v$$

$$a^2b^2\sin^2 u(\cos v + \sin^2 v)^2 + b^4\sin^2 u\cos^2 u +$$

$$+ 2ab^3\sin^2 u$$

$$b^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2\cos^2 u$$

$$= b^2 \qquad (a+b\cos u)^2$$

$$ab\sin u\cos v \quad b^2$$

$$\cancel{+b^2\sin u\cos \ldots - b^4}$$

$$-ab\sin u\sin v$$

$$ab\sin u(\cos v - \sin v)$$

$$b^2 \qquad ab\sin u(\cos v - \sin v) \qquad (a+b\cos u)^2$$

$$a^2b^2 + 2ab^3\cos u + b^4\cos^2 u -$$

$$- a^2b^2\sin^2 u(\cos^2 v - 2\cos v\sin v + \sin^2 v)$$

№3 Фадеев А.

$$\overset{\circ}{\rho}(s) + \overset{\circ}{\nu}(s)\cos\varphi + \overset{\circ}{b}(s)\sin\varphi$$

$$-\nu(s)\sin\varphi + b(s)\cos\varphi \quad \nu$$

$$(\overset{\circ}{\rho}(s))^2 + (\overset{\circ}{\nu})^2\cos^2\varphi + \overset{\circ}{b}(s)^2\sin^2\varphi$$

$$\langle \overset{\circ}{\rho}(s), \overset{\circ}{\rho}(s)\rangle + \langle \overset{\circ}{\rho}(s), \overset{\circ}{\nu}(s)\rangle\cos\varphi +$$

$$+\langle \overset{\circ}{\rho}(s), b(s)\rangle\sin\varphi + \langle \overset{\circ}{\nu}(s), \overset{\circ}{\nu}(s)\rangle\cos^2\varphi$$

$$+\langle \overset{\circ}{\nu}(s), \overset{\circ}{b}(s)\rangle\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\dot{n}(s) = k(\bar{u}) - \varkappa b$$

$$\nu(s) + k\bar{u}\cos\varphi + \varkappa b\cos\varphi - \varkappa\bar{n}\sin\varphi$$

$$(1 - k\cos\varphi)u + \varkappa b\cos\varphi - \varkappa\bar{n}\sin\varphi$$

$$\varkappa^2\cos^2\varphi + \varkappa^2\sin^2\varphi$$

$$(1 - k\cos\varphi)^2 + \bar{n}(s)\sin\varphi + b(s)\cos\varphi \quad \varkappa\sin^2\varphi + \varkappa\cos^2\varphi$$

$$\varkappa^2 \qquad 1 - 2k\cos\varphi + k^2\cos^2\varphi$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$

−

+	−	±	+	∓

①

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ с.

Группа 207	Фамилия Бобло

- 1с). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида)};$$

2с). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

- 3с). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathrm{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность главных нормалей)};$$

4с). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

- 5с). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{r}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями)}.$$

1) $r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$

$$k(t) = \frac{|(\dot{r}, \ddot{r})|}{|\dot{r}|^3} = \frac{|x''y' - x'y''|}{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3}$$

$$\dot{r} = (a\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t), 3a\sin^2 t\cos t) = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\cos t\sin^2 t)$$

$$\ddot{r} = (-6a\cos t(-\sin t)\sin t - 3a\cos^2 t\cos t, -3a\sin t\sin^2 t + 3a\cos t\cdot 2\sin t\cos t)$$

$$\ddot{r} = (6a\cos t\sin^2 t + 3a\cos^3 t, -3a\sin^3 t + 6a\cos^2 t\sin t)$$

$x = a\cos^3 t$ $\quad x' = -3a\cos^2 t\sin t$ $\quad x'' = 6a\cos t\sin^2 t \cancel{+} 3a\cos^3 t$

$y = a\sin^3 t$ $\quad y' = 3a\cos t\sin^2 t$ $\quad y'' = 6a\cos^2 t\sin t - 3a\sin^3 t$

$\Downarrow$

$$x''y' - x'y'' = (6a\cos t\sin^2 t \cancel{+} 3a\cos^3 t)(-3a\cos^2 t\sin t) - (6a\cos^2 t\sin t - 3a\sin^3 t)3a\cos t\sin^2 t =$$

$$= -18a^2\cos^3 t\sin^3 t + 9a^2\cos^5 t\sin t - 18a\cos^3 t\sin^3 t + 9a\sin^5 t\cos t =$$

$$= -9a^2$$

$$|x''y' - x'y''| = (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t)3a\cos t\sin^2 t + (6a\cos^2 t\sin t - 3a\sin^3 t)3a\cos^2 t\sin$$

$$= 18a^2\cos^2 t\sin^4 t - 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 18a^2\cos^4 t\sin^2 t - 9a^2\sin^4 t\cos^2 t =$$

$$= 9a^2(\cos^2 t\sin^4 t + \sin^2 t\cos^4 t) = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t = 9a^2\sin^2 t\cos^4 t$$

$\Downarrow$

$$k = \frac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}{(9a^2\sin^2 t\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{3a|\sin t\cos t|}$$

+

Ответ: $\dfrac{1}{|3a\sin t\cos t|}$

2. $r=(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

$\dot r=(-3\cos^2 t\sin t,\ 3\sin^2 t\cos t,\ -2\sin 2t)$

$\ddot r=(-6\cos t(-\sin t)\sin t-3\cos^2 t\cos t,\ 6\sin t\cos^2 t-\sin^2 t\cdot 3,\ -4\cos 2t)$

$\ddot r=(6\cos t\sin^2 t-3\cos^3 t,\ 6\sin t\cos^2 t-3\sin^3 t,\ -4\cos 2t)$

$\dddot r=(-6\sin^3 t+12\sin t\cos^2 t+27\cos^2 t\sin t,\ 6\cos^3 t-18\cos t\sin^2 t-27\sin^2 t\cos t,\ 8\sin 2t)$

$\dddot r=(-6\sin^3 t+45\cos^2 t\sin t,\ 6\cos^3 t-45\cos t\sin^2 t,\ 8\sin 2t)$

$[\dot r,\ddot r]=$

$$\begin{vmatrix} -3\cos^2 t\sin t & 3\cos t\sin^2 t & -2\sin 2t \\ 6\cos t\sin^2 t-3\cos^3 t & 6\sin t\cos^2 t-3\sin^3 t & -4\cos 2t \end{vmatrix}$$

$3\cos t\sin^2 t(-4\cos 2t)-(-2\sin 2t)(6\sin t\cos^2 t-3\sin^3 t)=$

$=-12\cos t\sin^2 t\cos 2t+12\sin t\cos^2 t\sin 2t-6\sin 2t\sin^3 t$

$x'=-3\cos^2 t\sin t$

$y'=3\sin^2 t\cos t$

$z'=-2\sin 2t$

$\begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix}$

$x''=6\cos t\sin^2 t-3\cos^3 t$

$y''=+6\sin t\cos^2 t-3\sin^3 t$

$z''=-4\cos 2t$

$-12\sin^2 t\cos t\cos 2t+2\sin 2t(6\sin t\cos^2 t-3\sin^3 t)=$

$$1)=\boxed{-12\sin^2 t\cos t\cos 2t+12\sin 2t\sin t\cos^2 t-6\sin^3 t\sin 2t}$$

2) $12\cos^2 t\sin t\cos 2t+12\cos t\sin^2 t\sin 2t-6\cos^3 t\sin 2t$

3) $-3\cos^2 t\sin t(6\sin t\cos^2 t-3\sin^3 t)-3\cos t\sin^2 t(6\cos t\cdot\sin^2 t-3\cos^3 t)=$

$=-18\sin^2 t\cos^4 t+9\sin^4 t\cos^2 t-18\cos^2 t\sin^4 t+9\cos^4 t\sin^2 t=$

$=-9\cos^4 t\sin^2 t-9\cos^2 t\sin^4 t=\underline{-9\sin^2 t\cos^2 t}$

$(-12\sin^2 t\cos t\cos 2t+12\sin 2t\sin t\cos^2 t-6\sin^3 t\sin 2t)(-6\sin^3 t+45\cos^2 t\sin t)=$

$=6\cdot 12\sin^5 t\cos t\cos 2t-6\cdot 12\sin 2t\sin^4 t\cos^2 t+36\sin^6 t\sin 2t-45\cdot 12\cos^3 t\sin^3 t\cos 2t+$

$+45\cdot 12\sin 2t\sin^2 t\cos^4 t-6\cdot 45\sin^4 t\cos^2 t\sin 2t.$

Бобина, 20 ж. $\boxed{2}$

(3) $r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{b}(s)$ $\quad \overset{\parallel}{\tau(s)}$

$r'_s = \dot{\vec{\rho}}(s) + \lambda \dot{\vec{b}}(s) = \dot{\rho}(s) - \lambda æ n(s)$

$r'_\lambda = \vec{b}(s)$

$$G = \begin{pmatrix} (r'_s, r'_s) & (r'_s, r'_\lambda) \\ (r'_\lambda, r'_s) & (r'_\lambda, r'_\lambda) \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 æ^2(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1+\lambda^2 æ^2(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{\tau}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{\vec{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & æ \\ 0 & -æ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

$\dot{\vec{b}} =$

$(\tau - \lambda æ n)^2 = \tau^2 - 2\lambda æ n \tau + \lambda^2 æ^2 n^2 = 1 + \lambda^2 æ^2$

$b^2 = 1$

$(\tau - \lambda æ n) b = \tau b - \lambda æ n b = 0$

не та задача (+)

(4) $xyz = a^3$

$z = \dfrac{a^3}{xy}$

$x = u$ $\quad r = \left(u, v, \dfrac{a^3}{uv}\right)$

$y = v$

$z = \dfrac{a^3}{\cancel{xy}\, uv}$

$r'_u = \left(1, 0, -\dfrac{a^3}{u^2 v}\right)$

$r'_v = \left(0, 1, -\dfrac{a^3}{u v^2}\right)$ $\quad -2$

$r''_{uu} = \left(0, 0, 2\dfrac{a^3}{u^3 v}\right)$ $\quad -3$

$r''_{uv} = \left(0, 0, \dfrac{a^3}{u^2 v^2}\right)$

$r''_{vv} = \left(0, 0, 2\dfrac{a^3}{v^3 u}\right)$

$[r'_u, r'_v] = \left(\dfrac{a^3}{u^2 v}, \dfrac{a^3}{u v^2}, 1\right)$

$|[r'_u, r'_v]| = \sqrt{\dfrac{a^6}{u^4 v^2} + \dfrac{a^6}{u^2 v^4} + 1}$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2a^3}{u^3 v} & \dfrac{a^3}{u^2 v^2} \\ \dfrac{a^3}{u^2 v^2} & \dfrac{2a^3}{v^3 u} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{a^6}{u^4 v^2} + \dfrac{a^6}{u^2 v^4} + 1}}$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a^6}{x^4 y^2} + \dfrac{a^6}{x^2 y^4} + 1}} \begin{pmatrix} \dfrac{2a^3}{x^3 y} & \dfrac{a^3}{x^2 y^2} \\ \dfrac{a^3}{x^2 y^2} & \dfrac{2a^3}{y^3 x} \end{pmatrix}$

(+)

(5) $r = \vec{\rho}(s) + \lambda \tau(s)$

$r'_s = \dot{\rho}(s) + \lambda \dot{\tau}(s) = \tau(s) + \lambda k n(s)$

$\tau^2 + 2\lambda k n \tau + \lambda^2 k^2 n^2 = 1 + \lambda^2 k^2$

$r'_\lambda = \tau(s)$

$1 + \tau \lambda k n = 1$

$G = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 k^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det G = 1 + \lambda^2 k^2 - 1 = \boxed{\lambda^2 k^2}$

$r''_{ss} = \dot{\tau} + \lambda \dot{k} n + \dot{n} k \lambda = kn + \lambda \dot{k} n + k\lambda(-\tau k + æ b) =$

$= kn - k^2 \lambda \tau + k \lambda æ b + \lambda n \dot{k}$

$r''_{\lambda\lambda} = 0$

$r''_{s\lambda} = -k^2 \tau + k æ b + n \dot{k}$ $= (\tau(s))'_s = \dot{\tau} = k\vec{n}$

$\vec{m} = \dfrac{[r'_s, r'_\lambda]}{|[r'_s, r'_\lambda]|} = \dfrac{[\tau + \lambda k n, \tau]}{|[\tau + \lambda k n, \tau]|} = \dfrac{\lambda k b}{\lambda k} = b$

и т.д.

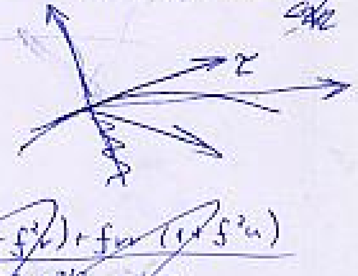
$$\boxed{\begin{gathered} k = \frac{\det Q}{\det G} \\ H = \operatorname{tr}(G^{-1} Q) \end{gathered}}$$

$Q = \begin{pmatrix} k \lambda æ & k \\ k æ & 0 \end{pmatrix}$

$\tau \perp n$

$\tau \perp b$

$\det Q = -k^2 æ^2$



$\cancel{r = r(u, v, f(u,v))}$

$\cancel{k = \dfrac{f_{uu} f_{vv} - f^2_{uv}}{1 + f^2_v + f^2_u}}$

$\cancel{H = \dfrac{-2 f_{uv} f_u f_v + f_{uu}(1 + f^2_v) + f_{vv}(1 + f^2_u)}{(1 + f^2_u + f^2_v)^{3/2}}}$

$\cancel{k = (kn - k^2 \lambda \tau + k \lambda æ b + \lambda n \dot{k}) \ldots = 0 - \dfrac{(-k^2\tau + k æ b + n\dot{k})^2}{1 + (\tau + \lambda k n)^2 + \tau^2}}$

$\cancel{\tau^2 + \lambda^2 k^2 n^2 + 2\tau n k \lambda + \tau^2 = 3 + \lambda^2 k^2}$

$K = \dfrac{-k^2 æ^2}{\lambda^2 k^2} = -\dfrac{æ^2}{\lambda^2}$

см далее

③ Бобин, 207.

⑤ продолжение. $G^{-1} = [illegible] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+\lambda^2 k^2 \end{pmatrix}$

$$G^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+\lambda^2 k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k\lambda x & kx \\ kx & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\lambda x - kx & kx \\ -k\lambda x + kx + k^2\lambda^2 x & -kx \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(G^{-1}Q) = k\lambda x - 2kx.$$

Ответ. $k = \frac{-x^2}{\sqrt{2}}$

$H = k\lambda x - 2kx.$

F

Острашко А.

−	−	−	+	−

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ c.

Группа	Фамилия

1c). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида);}$$

2c). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

3c). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathrm{b}}(s) \text{ (поверхность главных нормалей);}$$

4c). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

5c). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\tau}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями).}$$

1 $\dot{r}(t) = (3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cdot\cos t)$

$\ddot{r}(t) = (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t, 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t)$

$|\dot{r}(t)|^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t$ $\cos^2 t\sin^4 t$

$(\dot{r};\ddot{r}) = \left(\cancel{-18a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t} + 9a^2\cos^5 t + \cancel{18a^2\sin^3 t\cos^3 t} - 9a^2\sin^5 t\right) =$

$= 9a^2(\cos^5 t + \sin^5 t)$

$|\dot{r}|^2\cdot\ddot{r} = (54a^3\cos^3\sin^4 t - 27a^3\cos^5 t\sin^2 t; 54a^3\sin^3 t\cos^2 t - 27a^3\cos^2 t\sin^5 t)$

$(\dot{r};\ddot{r})\cdot\dot{r} = (-27a^3\cos^7 t\sin t - 27a^3\cos^2 t\sin^6 t;$

−

(3) $r_s = \bar{p}'(s) + \lambda \cdot \bar{b}'(s)$

$r_\lambda = \bar{b}(s)$

$$I = \begin{pmatrix} (\bar{p}' + \lambda \bar{b}'; \bar{p}' + \lambda \bar{b}') & (\bar{p}' + \lambda \bar{b}'; \bar{b}) \\ (\bar{p}' + \lambda \bar{b}', \bar{b}) & (\bar{b}; \bar{b}) \end{pmatrix}$$

(4) $z = \frac{a^3}{xy}$

$z_x = \frac{a^3}{y} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-a^3}{yx^2}$

$z_y = \frac{-a^3}{xy^2}$

$z_{xy} = \frac{-a^3}{x^2} \cdot -\frac{1}{y^2} = \frac{a^3}{x^2 y^2}$

$\bar{n} = \| \bar{r}'$

(5) $$I = \begin{pmatrix} (\dot{\bar{p}} + \lambda \dot{\bar{r}}; \dot{\bar{p}} + \lambda \dot{\bar{r}}) & (\bar{p} + \lambda \bar{r}; \bar{r}) \\ (\dot{\bar{p}} + \lambda \bar{r}, \bar{r}) & (\bar{r}; \bar{r}) \end{pmatrix}$$

② $\dot r = (-3\cos^2 t\sin t,\ 3\sin^2 t\cos t,\ -2\sin 2t)$

$\ddot r = (6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t,\ 6\cos^2 t\sin t - 3\sin^3 t,\ -4\cos 2t)$

$\dddot r = (-6\sin^3 t + 12\cos^2 t\sin t + 9\cos^2 t\sin t,\ -12\cos t\sin^2 t + 6\cos^3 t - 9\sin^2 t\cos$

$8\sin 2t)$

$$[\dot r;\ddot r] = \left(\begin{vmatrix} 3\sin^2 t\cos t & -2\sin 2t \\ 6\cos^2 t\sin t - 3\sin^3 t & -4\cos 2t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2\sin 2t & -3\cos^2 t\sin \\ -4\cos 2t & 6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} -3\cos^2 t\sin t & 3\sin^2 t\cos t \\ 6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t & 6\cos^2 t\sin t - 3\sin^3 t \end{vmatrix} \right) =$$

$= (-24\cos^2 t\sin^3 t + 24\cos^3 t\sin^2 t - 12\sin^4 t\cos t,\ -24\sin^3 t\cos^2 t$

$+ 12\sin t\cos^4 t - 24\cos^3 t\sin^2 t;\ -9\cos^4 t\sin^2 t - 9\cos^2 t\sin^4 t)$

$|\dot r| = \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 4\sin^2 2t} = \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t + 16}$

$= 5\cos t\sin t = \frac{3}{2}\sin 2t$

$|[\dot r,\ddot r]| = \sqrt{}$

$(\dot r;\ddot r;\dddot r) = ($

9) $r=\left(u, v, \frac{a^3}{uv}\right)$ $\quad r''_{uu}=\left(0,0,\frac{1}{2}\frac{a^3}{vu^3}\right)$ $\quad r''_{vv}=\left(0,0,\frac{1}{2}\frac{a^3}{v^3u}\right)$

$r''_{uv}=\left(0,0,\frac{a^3}{v^2u^2}\right)$

$r'_u=\left(1,0,\frac{-a^3}{vu^2}\right)$ $\quad r'_v=\left(0,1,\frac{-a^3}{uv^2}\right)$

$r'_u\times r'_v=\left(\frac{a^3}{vu^2},\frac{a^3}{uv^2},1\right)$ $\quad |r'_u\times r'_v|=\sqrt{1+\frac{a^6}{v^2u^4}+\frac{a^6}{u^2v^4}}=\sqrt{1+\frac{a^6}{u^2v^2}\left(\frac{1}{v^2}+\frac{1}{u^2}\right)}$

$$\mathrm{II}=\begin{pmatrix}\left(\left(0,0,\frac{1}{2}\frac{a^3}{vu^3}\right),\left(\frac{a^3}{vu^2},\frac{a^3}{uv^2},1\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\ }} & (\ ,\ ) \\ (\ ,\ ) & (\ ,\ )\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\ }}\frac{a^3}{vu^3} & \frac{a^3}{\sqrt{\ }\,v^2u^2} \\ \frac{a^3}{v^2u^2\sqrt{\ }} & \frac{1}{2\sqrt{\ }}\frac{a^3}{u^3v}\end{pmatrix}, \text{ где } \sqrt{\ }=\sqrt{1+\frac{a^6}{u^2v^2}\left(\frac{1}{v^2}+\frac{1}{u^2}\right)}$$

+

+	+	±	+	+

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ с.

Группа 207	Фамилия Распопова Е.

1с). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида)};$$

2с). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

3с). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность главных нормалей)};$$

4с). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

5с). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\tau}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями)}.$$

① $r'_t = (3a\cos^2 t\cdot(-\sin t),\ 3a\sin^2 t\cdot\cos t)$

$r''_t = (-3a(\cos^3 t + \sin t\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t)),\ 3a(2\sin t\cos^2 t + \sin^2 t\cdot(-\sin t)) =$

$= (-3a(\cos^3 t - 2\sin^2 t\cos t),\ 3a(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)),$

$s'_t = |r'| = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t} = 3a\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t} = 3a|\sin t||\cos t|,$

$s''_t = 3a(\cos^2 t - \sin^2 t) = 3a\cos 2t,$

$k(s) = |r''_{ss}| = \left|\dfrac{r''_{tt}s'_t - r'_t s''_{tt}}{(s'_t)^3}\right|,$

$r''_{tt}\cdot s'_t = \begin{pmatrix} -3a\cos^3 t + 6a\sin^2 t\cos t \\ 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t\end{pmatrix}\cdot 3a\sin t\cos t = \begin{pmatrix} -9a^2\cos^4 t\sin t + 18a^2\sin^2 t\cos^2 t \\ 18a^2\sin^2 t\cos^3 t - 9a^2\sin^4 t\cos t\end{pmatrix} =$

$= 9a^2\cdot\begin{pmatrix} -\cos^4 t\sin t + 2\sin^3 t\cos^2 t \\ 2\sin^2 t\cos^3 t - \sin^4 t\cos t\end{pmatrix},$

$r'_t\cdot s''_{tt} = \begin{pmatrix} -3a\sin t\cos^2 t \\ 3a\sin^2 t\cos t\end{pmatrix}\cdot(3a\cos^2 t - 3a\sin^2 t) = \begin{pmatrix} -9a^2\sin t\cos^4 t + 9a^2\sin^3 t\cos^2 t \\ 9a^2\sin^2 t\cos^3 t - 9a^2\sin^4 t\cos t\end{pmatrix} =$

$= 9a^2\cdot\begin{pmatrix} -\sin t\cos^4 t + \sin^3 t\cos^2 t \\ \sin^2 t\cos^3 t - \sin^4 t\cos t\end{pmatrix}$

$r''_{tt}s'_t - r'_t s''_{tt} = 9a^2\cdot\begin{pmatrix} -\sin t\cos^4 t + 2\sin^3 t\cos^2 t + \sin t\cos^4 t - \sin^3 t\cos^2 t \\ 2\sin^2 t\cos^3 t - \sin^4 t\cos t - \sin^2 t\cos^3 t + \sin^4 t\cos t\end{pmatrix} = 9a^2\begin{pmatrix}\sin^3 t\cos^2 t \\ \sin^2 t\cos^3 t\end{pmatrix}$

$k(s) = \left|\dfrac{9a^2\begin{pmatrix}\sin^3 t\cos^2 t \\ \sin^2 t\cos^3 t\end{pmatrix}}{27a^3\sin^3 t\cos^3 t}\right| = \dfrac{1}{3a}\left|\dfrac{\sin^2 t\cos^2 t\cdot\begin{pmatrix}\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}}{\sin^3 t\cos^3 t}\right| = \dfrac{1}{3a|\sin t\cos t|}$ ⊕

② $\dot r = (3\cos^2 t(-\sin t),\ 3\sin^2 t\cos t,\ -2\sin 2t),$

$\ddot r = (-3\cos t\cos^2 t - 3\sin t\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t),\ 3\cdot 2\sin t\cdot\cos^2 t + 3\sin^2 t\cdot(-\sin t),\ -4\cos 2t) =$

$= (-3\cos^3 t + 6\sin^2 t\cos t,\ 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t,\ -4\cos 2t),$

$\dddot{r} = (-9\cos^2 t\cdot(-\sin t) + 12\sin t\cdot(\cos^2 t) + 6\sin^2 t(-\sin t),\ 6\cos^3 t + 12\sin t(-\sin t)\cos t -$
$-9\sin^2 t\cos t,\ 8\sin 2t) = (9\cos^2 t\sin t + 12\sin t\cos^2 t - 6\sin^3 t,\ 6\cos^3 t - 12\sin^2 t\cos t - 9\sin^2 t\cos t,$
$8\sin 2t) = (21\sin t\cos^2 t - 6\sin^3 t,\ 6\cos^3 t - 21\sin^2 t\cos t,\ 8\sin 2t),$

$[\dot{r},\ddot{r}] = \left(\begin{vmatrix} 3\sin^2 t\cos t & -4\sin t\cos t \\ 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t & -4(\cos^2 t - \sin^2 t) \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -4\sin t\cos t & -3\sin t\cos^2 t \\ 4\sin^2 t - 4\cos^2 t & -3\cos^3 t + 6\sin^2 t\cos t \end{vmatrix},\right.$
$\left.\begin{vmatrix} -3\sin t\cos^2 t & 3\sin^2 t\cos t \\ -3\cos^3 t + 6\sin^2 t\cos t & 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t \end{vmatrix}\right) = (-12\sin^2 t\cos^3 t + 12\sin^4 t\cos t + 24\sin^2 t\cdot$
$\cdot\cos^3 t - 12\sin^4 t\cos t,\ 12\sin t\cos^4 t - 24\sin^3 t\cos^2 t + 12\sin^3 t\cos^2 t - 12\sin t\cos^4 t,\ -18\sin^2 t\cos^4 t$
$+ 9\sin^4 t\cos^2 t + 9\sin^2 t\cos^4 t - 18\sin^4 t\cos^2 t) = (12\sin^2 t\cos^3 t,\ -12\sin^3 t\cos^2 t,\ -9\sin^2 t\cos^4 t$
$-9\sin^4 t\cos^2 t) = (12\sin^2 t\cos^3 t,\ -12\sin^3 t\cos^2 t,\ -9\sin^2 t\cos^2 t),$

$|\dot{r}| = \sqrt{9\sin^4 t\cos^2 t + 9\cos^4 t\sin^2 t + 16\sin^2 t\cos^2 t} = \sin t\cos t\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5\sin t\cdot$
$\cdot\cos t;$

$(\dot{r},\ddot{r},\dddot{r}) = 12\sin^2 t\cos^3 t\cdot(21\sin t\cos^2 t - 6\sin^3 t) - 12\sin^3 t\cos^2 t\cdot(6\cos^3 t -$
$-21\sin^2 t\cos t) - 9\sin^2 t\cos^2 t\cdot 16\sin t\cos t = 12\cdot 21\sin^3 t\cos^5 t - 72\sin^5 t\cos^3 t - 72\sin^3 t\cdot$
$\cdot\cos^5 t + 12\cdot 21\sin^5 t\cos^3 t - 9\cdot 16\sin^3 t\cos^3 t = 180\sin^3 t\cos^5 t + 180\sin^5 t\cos^3 t - 144\sin^3 t\cos^3 t$
$= \sin^3 t\cos^3 t\cdot(180 - 144) = 36\sin^3 t\cos^3 t,$

$k = \dfrac{|[\dot{r},\ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3},\quad \varkappa = \dfrac{(\dot{r},\ddot{r},\dddot{r})}{|[\dot{r},\ddot{r}]|^2}$

$k = \dfrac{\sqrt{144\sin^4 t\cos^6 t + 144\sin^6 t\cos^4 t + 81\sin^4 t\cos^4 t}}{125\sin^3 t\cos^3 t} = \dfrac{3\sin^2 t\cos^2 t\sqrt{16+9}}{125\sin^3 t\cos^3 t} = \dfrac{3}{25\sin t\cos t}$

$\varkappa = \dfrac{36\sin^3 t\cos^3 t}{144\sin^4 t\cos^6 t + 144\sin^6 t\cos^4 t + 81\sin^4 t\cos^4 t} = \dfrac{36\sin^3 t\cos^3 t}{225\sin^4 t\cos^4 t} = \dfrac{4}{25\sin t\cos t}$ □

(5) $r = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s)$, $\quad \vec{\tau}(s) = \vec{\rho}_s$

$r_s = \vec{\tau}(s) + \lambda\vec{b}_s = \vec{\tau}(s) + \lambda\cdot(-\varkappa\vec{n}(s)),\quad r_\lambda = \vec{b}(s),$
$(r_s, r_s) = (\vec{\tau}(s) - \lambda\varkappa\vec{n}(s),\ \vec{\tau}(s) - \lambda\varkappa\vec{n}(s)) = 1 + \lambda^2\varkappa^2,$
$(r_s, r_\lambda) = 0,\quad (r_\lambda, r_\lambda) = 1$

$G = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2\varkappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ □

+

Не зачтено

±

④ $xyz=a^3$, при $a\neq 0$; $xy\neq 0$;

$r=\left(x,y,\frac{a^3}{xy}\right)$, $r_x=\left(1,0,\frac{a^3}{y}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$, $r_y=\left(0,1,\frac{a^3}{x}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)$,

$r_{xx}=\left(0,0,-\frac{a^3}{y}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right)$, $r_{xy}=\left(0,0,-\frac{a^3}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)$, $r_{yy}=\left(0,0,-\frac{a^3}{y^3}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)\right)$,

$n=\frac{r_x\times r_y}{|r_x\times r_y|}$, $r_x\times r_y=\left(\frac{a^3}{yx^2},\frac{a^3}{xy^2},1\right)$,

$$n=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^6}{y^2x^4}+\frac{a^6}{x^2y^4}+1}}\cdot\left(\frac{a^3}{x^2y},\frac{a^3}{xy^2},1\right),$$

$$L=\langle r_{xx},n\rangle=\frac{2a^3}{x^3y}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{a^6}{x^4y^2}+\frac{a^6}{x^2y^4}+1}},\quad M=\langle r_{xy},n\rangle=\frac{a^3}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{a^6}{x^4y^2}+\frac{a^6}{x^2y^4}+1}},$$

$$N=\langle r_{yy},n\rangle=\frac{2a^3}{xy^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{a^6}{x^4y^2}+\frac{a^6}{x^2y^4}+1}},$$

$$\mathrm{II}=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^6}{x^4y^2}+\frac{a^6}{x^2y^4}+1}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2a^3}{x^3y}&\frac{a^3}{x^2y^2}\\\frac{a^3}{x^2y^2}&\frac{2a^3}{xy^3}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{a^3}{xy\sqrt{\frac{a^6y^2+a^6x^2+x^4y^4}{x^4y^4}}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{x^2}&\frac{1}{xy}\\\frac{1}{xy}&\frac{2}{y^2}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{a^3xy}{\sqrt{a^6y^2+a^6x^2+x^4y^4}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{x^2}&\frac{1}{xy}\\\frac{1}{xy}&\frac{2}{y^2}\end{pmatrix}=\frac{a^3}{\sqrt{a^6x^2+a^6y^2+x^4y^4}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2y}{x}&1\\1&\frac{2x}{y}\end{pmatrix}\ \square$$

+

⑤ $r=\vec\rho(s)+\lambda\vec\tau(s)$, $\vec\rho_s=\vec\tau$; $\begin{pmatrix}\tau'\\n'\\b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0\\-k&0&æ\\0&-æ&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\n\\b\end{pmatrix}$

$r_s=\vec\tau(s)+\lambda\cdot k\vec n(s)$,

$r_\lambda=\vec\tau(s)$,

$E=\langle r_s,r_s\rangle=\langle\vec\tau(s)+\lambda k\vec n(s),\vec\tau(s)+\lambda k\vec n(s)\rangle=1+\lambda^2k^2$,

$F=\langle r_s,r_\lambda\rangle=1$, $G=\langle r_\lambda,r_\lambda\rangle=1$,

$r_s\times r_\lambda=[\vec\tau(s)+\lambda k\vec n(s);\ \vec\tau(s)]=\lambda k\vec b(s)$, $|r_s\times r_\lambda|=\lambda k$, $\vec m=\frac{\lambda k\vec b(s)}{\lambda k}=\vec b(s)$,

$r_{ss}=k\vec n(s)+\lambda k\cdot(-k\vec\tau(s)+æ\vec b(s))+\lambda k_s\vec n(s)=-\lambda k^2\vec\tau(s)+k\vec n(s)+\lambda kæ\vec b(s)+\lambda k_s\vec n(s)$,

$r_{s\lambda}=k\vec n(s)$, $r_{\lambda\lambda}=0$;

$L=\langle r_{ss},m\rangle=\langle-\lambda k^2\vec\tau(s)+k\vec n(s)+\lambda kæ\vec b(s)+\lambda k_s\vec n(s),\vec b(s)\rangle=\lambda kæ$,

$M=\langle r_{s\lambda},m\rangle=\langle k\vec n(s),\vec b(s)\rangle=0$, $N=\langle r_{\lambda\lambda},m\rangle=0$,

см. дальше →

Распопова 3 из 3

⑤ $\underset{\text{гаус. кр.}}{K} = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = \dfrac{\lambda k \varkappa \cdot 0 - 0}{1 + \lambda^2 k^2 - 1} = 0,$

$\underset{\text{ср. кр.}}{H} = \dfrac{EN + GL - 2MF}{EG - F^2} = \dfrac{0 + \lambda k \varkappa \cdot 1 - 0}{\lambda^2 k^2} = \dfrac{\varkappa}{\lambda k}.$

+

—	—	—	—	0

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ c.

Группа 207	Фамилия Немниченко

1c). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида);}$$

2c). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

3c). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность главных нормалей);}$$

4c). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

5c). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\tau}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями).}$$

на другой стр.

1c) $r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$

$\frac{dr}{dt} = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t)$

$\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t} = \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t} \; (= 3a|\cos t\sin t|)$

$\frac{(3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t)}{3a(\cos t\sin t)} = (\cos t, \sin t)$

$\left|\frac{d^2 r(t)}{dt^2}\right| =$

—

2c) $r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

$\dot r = (3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t, 2\cos 2t\sin 2t)$

$\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 4\cos^2 2t\sin^2 2t} = \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t + 8(\cos^2 t - \sin^2 t)^2\sin^2 t\cos^2 t} =$

$= |\sin t\cos t|\sqrt{9 + 8(2\cos^2 t - 1)^2} = |\sin t\cos t|\sqrt{17 + 32\cos^4 t - 32\cos^2 t}$

$[0; \frac{\pi}{4}]$

$\left(\frac{3\cos t}{\sqrt{17 - 32\cos^2 t + \ldots}}, \frac{3\sin t}{\sqrt{17 - 32\cos^2 t + \ldots}}, \frac{\cos 4t \ldots \sin^2 t}{(\sin t\cos t)\sqrt{17 - 32\cos^2 t \ldots}}\right)$

—

Кр.:

—

4c) $xyz = a^3$

$x = t_1$
$y = t_2$
$z = \frac{a^3}{t_1 t_2}$

$(t_1, t_2, \frac{a^3}{t_1 t_2})$

3c) $r = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{B}(s)$

1c) $= \left|\left(3a\cos^2 t\sin t,\ 3a\sin^2 t\cos t\right)'_t\right| =$

$= 3a\left|\left(2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t\right), \left(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t\right)\right| =$

$= 3a\sqrt{4\cos^2 t\sin^4 t + \cos^6 t - 4\sin^2 t\cos^4 t + 4\sin^2 t\cos^4 t + \sin^6 t - 4\sin^4 t\cos^2 t} =$

$3a\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}$.

$- \mid - \mid \pm \mid + \mid \pm$

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ с.

Группа 204	Фамилия Лисовский Дм.

1c). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида)};$$

2c). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

3c). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s) \text{ (поверхность главных нормалей)};$$

4c). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

5c). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\tau}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями)}.$$

① $r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$

$k = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3}$ $\quad \dot r(t) = (-3a\cos^2 t\cdot\sin t,\ 3a\sin^2 t\cdot\cos t)$

$\ddot r(t) = (+3\cdot 2\cdot a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t,\ 6a\sin t\cdot\cos^2 t - 3a\sin^3 t)$

$[\dot r, \ddot r] = (\ ?\ )$

$k(t) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - r\cdot r''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$ $\quad x = (a\cos^2 t)\cdot\cos t$, $y = (a\sin^2 t)\sin t$. для полярных координат.

$r(t) = |\vec r(t)| = \sqrt{a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t} = a\sqrt{\cos^4 t - \cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t} =$

$= a\sqrt{1 - 3\cos^2 t\sin^2 t} = a\cdot\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2t}$

$\dot r = a\cdot\frac{1}{2r}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2\sin 2t\cdot\cos 2t\cdot 2 = -3a\,\frac{\sin 2t\cos 2t}{2r} = -\frac{3}{4}a\frac{\sin 4t}{r}$

$\ddot r = -\frac{3}{4}a\cdot\left(\frac{\sin 4t}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2t}}\right)' = -\frac{3}{4}a\cdot\frac{4\cos 4t\cdot r - \sin 4t\cdot \dot r}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2t} =$

$= -\frac{3}{4}a\cdot\frac{4\cos 4t\cdot r + \frac{3}{4}a\frac{\sin^2 4t}{r}}{r^2} = \frac{16r^2\cos 4t + 3a\sin^2 4t}{4r^3}\cdot\left(-\frac{3}{4}a\right)$

Ответ: $k(t) = \frac{\left|\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2t\right)a^2 + 2\cdot\left(-\frac{3}{4}a\cdot\frac{\sin 4t}{\sqrt{1 - 3/4\sin^2 2t}}\right)^3 - a\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2t}\cdot\left(-\frac{3}{4}a\cdot\frac{16r^2\cos 4t}{4r^3}\right.\right.}{\left(r^2 + (\dot r)^2\right)^{3/2}}$ $\left.\left. + 3a\sin^2 4t\right)\right|$

t – не угловой параметр

$-$

$r = a\sqrt{1 - 3/4\sin^2 2t}$

$r' = -\frac{3}{4}a\,\frac{\sin 4t}{r}$ □

② $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

$$k(t) = \frac{|[\dot r, \ddot r]|}{|\dot r|^3}$$

$$\varkappa(t) = \frac{\langle [\dot r, \ddot r], \dddot r \rangle}{|[\dot r, \ddot r]|^2}$$

$\dot r = (-3\cos^2 t \cdot \sin t, 3\sin^2 t \cdot \cos t, -2\sin 2t)$.

$\ddot r = (6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t, 6\sin t \cdot \cos^2 t - 3\sin^3 t, -4\cos 2t)$

$|\dot r| = \sqrt{9\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t + 4\sin^2 2t} =$

$= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t + 4(\sin t \cdot \cos t \cdot 2)^2} =$

$= 5\sqrt{\cos^2 t \cdot \sin^2 t} = |5\cos t \sin t|$.

$[\dot r, \ddot r] = (12\sin^2 t \cdot \cos^3 t, -12\cos^2 t \sin^3 t, -9\sin^2 t \cos^2 t)$.

$|[\dot r, \ddot r]| = \sqrt{12^2 \sin^4 t \cos^6 t + 12^2 \cos^4 t \sin^6 t + 9^2 \cdot \sin^4 t \cos^4 t} =$

$= \sqrt{3^2 \sin^4 t \cdot \cos^4 t (4^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 3^2)} = 3\sin^2 t \cos^2 t \sqrt{16(\cos^2 t + \sin^2 t) + 9} =$

$\cancel{\langle [\dot r, \ddot r], \dddot r \rangle = }$

$\dddot r = (-6\sin^3 t + 12\cos^2 t \sin t + 9\cos^2 t \sin t, 6\cos^3 t - 12\sin^2 t \cos t - 9\sin^2 t \cos t,$

$8\sin 2t) = (21\cos^2 t \sin t - 6\sin^3 t, 6\cos^3 t - 21\sin^2 t \cos t, 8\sin 2t)$

$\langle [\dot r, \ddot r], \dddot r \rangle = \{12\sin^2 t \cos^3 t (21\cos^2 t \sin t - 6\sin^3 t) - 12\cos^2 t \sin^3 t \cdot (6\cos^3 t -$

$- 21\sin^2 t \cos t) - 9\sin^2 t \cos^2 t \cdot 8 \cdot 2\sin t \cos t = 15 \cdot 12\cos^5 t \sin^3 t +$

$+ 15 \cdot 12 \cdot \cos^3 t \sin^5 t - 16 \cdot 9\sin^3 t \cos^3 t = 15 \cdot 12\sin^3 t \cos^3 t - 16 \cdot 9\cos^3 t \sin^3 t$

$= 36\sin^3 t \cos^3 t$.

$$k(t) = \frac{3\sin^2 t \cos^2 t \sqrt{16(\cos^2 t + \sin^2 t) + 9}}{5|\cos t \sin t|}$$

$$\varkappa(t) = \frac{36\sin^3 t \cos^3 t}{9\sin^4 t \cos^4 t (16(\cos^2 t + \sin^2 t) + 9)}$$

Ответ: $k(t) = \frac{3}{5}|\cos t \sin t| \sqrt{16(\cos^2 t + \sin^2 t) + 9}$

$\varkappa(t) = 4 \cdot \frac{1}{\sin t \cos t \cdot (16(\cos^2 t + \sin^2 t) + 9)}$ □

№3 $\vec r = \vec \rho(s) + \lambda \cdot \vec b(s)$. , т.е. $\vec r(s, \lambda)$.

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ \nu' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \\ b \end{pmatrix}$$

$\tau = \dot r(s)$.

ф-лы Френе

s – натур. параметр.

(3) продолжение.

Лисовский Ден.
гр. 207.

Не та задача

+

$\overline{r}'_s = \overline{\tau} + \lambda \overline{b}'_s = \overline{\tau} + \lambda(-\varkappa \overline{n})$.

$\overline{r}'_\lambda = \overline{b}$

$$\left.\begin{aligned} \langle r'_s, r'_s \rangle &= 1 + (\lambda\varkappa)^2 \\ \langle r'_s, r'_\lambda \rangle &= 0 \\ \langle r'_\lambda, r'_\lambda \rangle &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1+(\lambda\varkappa)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $G = \begin{pmatrix} 1+(\lambda\varkappa(s))^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Д

(4) $\underline{xyz = a^3}$ $\quad Q - ?$ $\quad$ пов-ть задана неявно.

$z = \frac{a^3}{x \cdot y}$

$\vec{r}(x,y) = \left(x, y, \frac{a^3}{x y}\right)$.

$r_x = \left(1, 0, -\frac{a^3}{y x^2}\right)$ $\qquad \vec{n} = \frac{[r_x, r_y]}{|[r_x, r_y]|} = ?$

$r_y = \left(0, 1, -\frac{a^3}{x y^2}\right)$ $\qquad [r_x, r_y] = \left(\frac{a^3}{y x^2}, \frac{a^3}{x y^2}, 1\right)$.

$r_{xx} = \left(0, 0, 2 \cdot \frac{a^3}{y x^3}\right)$ $\qquad |[r_x, r_y]| = \sqrt{1 + \frac{a^6}{y^2 x^4} + \frac{a^6}{x^2 y^4}} =$

$r_{xy} = \left(0, 0, \frac{a^3}{x^2 y^2}\right) = r_{yx}$

$r_{yy} = \left(0, 0, 2\frac{a^3}{x y^3}\right)$ $\qquad = \sqrt{1 + \frac{y^2 + x^2}{x^4 y^4} a^6}$

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^6 \frac{y^2 + x^2}{x^4 y^4}}} \cdot \left(\frac{a^3}{y x^2}, \frac{a^3}{x y^2}, 1\right)$.

Ответ: $Q = \begin{pmatrix} \frac{2a^3}{y x^3} & \frac{a^3}{x^2 y^2} \\ \frac{a^3}{x^2 y^2} & \frac{2a^3}{x y^3} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + a^6 \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^4 y^4}}}$

+

Д

(5) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \cdot \vec{a}(s)$. $\quad \underline{K, H - ?}$ $\quad K(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$H(P) = \lambda_1 + \lambda_2$.

Где λ_1 и λ_2 – собств. знач. матрицы $\underline{G^{-1} Q}$.

$K = \det(G^{-1} Q)$, $\quad H = tr(G^{-1} Q)$.

⑤ продолжение.

Лисовский Дм
гр. 207

$$G = \begin{pmatrix} 1+(\lambda k)^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{\tau}(s)$ $r(\lambda, s)$

$r'_s = \bar{\tau} + \lambda \tau' = \bar{\tau} + \lambda \cdot k \bar{\nu}$

$r'_\lambda = \bar{\tau}$

$\langle r_s, r_s \rangle = 1 + (\lambda k)^2$

$\langle r_s, r_\lambda \rangle = 1$

$\langle r_\lambda, r_\lambda \rangle = 1$

$\det G = (\lambda k)^2$

$\det G^{-1} = \frac{1}{(\lambda k)^2}$

$r_{ss} = \tau' + \lambda k' \nu + \lambda k \nu' = k\bar{\nu} + \lambda k' \bar{\nu} + \lambda k(-k\bar{\tau} + æ \bar{b}) = (k + \lambda k')\bar{\nu} -$
$- \lambda k^2 \bar{\tau} + \lambda k æ \bar{b}$

$r_{s\lambda} = k\bar{\nu}$

$r_{\lambda\lambda} = 0$

$\vec{n} = \frac{[r_s, r_\lambda]}{|[r_s, r_\lambda]|} = -\lambda k \cdot \bar{b} \cdot \frac{1}{(\lambda k)^2} = -\frac{\bar{b}}{\lambda k} = -\bar{b}$

$$Q = \begin{pmatrix} \overset{\lambda k}{\cancel{-æ}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \frac{1}{(\lambda k)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+(\lambda k)^2 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} Q = \begin{pmatrix} \frac{-æ}{(\lambda k)^2} & \frac{æ}{(\lambda k)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $K = 0$, $H = \frac{-æ}{(\lambda k)^2}$ □

±