ЗАДАЧИ (2-е продолжение)

А.В. ЧЕРНАВСКИЙ (2011-весна)

3 мая 2011 г.

Координаты

1. **Контрольный вопрос.** Как для неявно заданной плоскости получить ее параметрическое задание и, наоборот, по параметрическому получить неявное задание?

2. Как построить базисы в пространствах $im\, L$ и $ker\, L$ для данного линейного отображения L?

3. В каких случаях композиция линейных отображений максимального ранга имеет максимальный ранг? [Если оба отображения мономорфизмы (ядра нулевые) или оба эпиморфизмы (отображения на весь образ), это, очевидно, верно. Какие могут быть случаи, если одно отображение мономорфизм, а другой эпиморфизм?]

4. Представим $\mathbb{R}^n$ как прямое произведение двух координатных пространств $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, и пусть $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ отображение области $U \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$. Покажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда график f гомеоморфно проектируется на U.

5. На прямой связными являются *интервалы*

6. *Открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ связно, если и только если любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в U.*

7. *Пример* графика $\sin \frac{1}{x}$ с присоединенным вертикальным отрезком $[-1, 1]$ оси ординат

8. Компактность и связность сохраняются при непрерывном отображении

9. **Задача.** Построить гомеоморфизм канторова множества, меняющий местами две данные его точки (конец выкинутого отрезка и двусторонне предельную точку)

10. Компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ характеризуются выполнением двух свойств: ограниченности и замкнутости.

11. Теоремы Больцано и Вейерштрасса.

12. Чему равна матрица Якоби линейного отображения?

13. Показать, что линейной заменой координат в окрестности точки можно привести матрицу Якоби в данной точке к простейшему виду: в левом верхнем углу.

14. Единичная $r \times r$-матрица, а остальные элементы нули, где r – ранг матрицы.

15. Покажите, что правила дифференцирования смешанного произведения и детерминанта согласованы.

16. Покажите, что дифференцирование матричного произведения подчиняется правилу Лейбница, т.е. что $(UV)^{\cdot} = U^{\cdot}V + UV^{\cdot}$.

17. Если длина вектора $\mathbf{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной: $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = 0$. **Упражнение**. Докажите обратное.

18. **Задача**. Векторная функция, не обращающаяся в нуль, сохраняет направление (конец вектора все время лежит на одной и той же прямой, проходящей через $\mathbb{O}$), если и только если она коллинеарна своей производной: $\mathbf{r}(t) = a(t)\dot{\mathbf{r}}(t)$ для скалярной функции $a(t)$.

19. Если вектор $\mathbf{r}(t)$ и его первые $k-1$ производные линейно независимы для некоторого интервала переменной t, а k-ая производная линейно выражается через них, то вектор остается параллельным постоянной плоскости P размерности k.

20. Построить C^1-параметризацию границы квадрата.

21. Следующие три способа задания гладкой дуги $\gamma \subset \mathbb{R}$ эквивалентны:

    (a) Каждая точка $x \in \gamma$ имеет в дуге окрестность $U(x)$, которая представляется прообразом точки при регулярном отображении окрестности $V(x) = U(x)\gamma$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^{n-1}$;

    (b) Каждая точка $x \in \gamma$ имеет в дуге окрестность $U(x)$, служащей образом регулярного отображения некоторого интервала числовой оси в пространство $\mathbb{R}^n$ (задающего регулярную параметризацию $U(x)$);

    (c) Каждая точка $x \in \gamma$ имеет в дуге окрестность $U(x)$, которая служит графиком отображения интервала некоторой координатной прямой в дополнительное $n-1$-мерное координатное пространство.

22. **Задача.** *Окрестность простой дуги.* Пусть простая дуга γ в $\mathbb{R}^2$ представлена как график функции $f(x)$, где x пробегает интервал $I_1 = (a, b)$. Рассмотрим для интервала $I_2 = (-1, 1)$ графики функций $f(x)+c$, $c \in I_2$. Покажите, что эти графики не пересекаются, и их объединение есть открытая окрестность U графика $f(x)$. При этом каждая точка U однозначно определяется парой (c, x), т.е. мы имеем взаимно однозначное отображение прямого произведения $I_1 \times I_2$ на U. Покажите, что это есть диффеоморфизм.

23. Постройте такую же окрестность графика, исходя из двух других способов задания простой дуги.

24. Опишите координатные линии и поверхности, и подсчитайте якобианы основных координатных систем.

25. Нарисуйте график прямой в полярных координатах.

26. Регулярная дуга (по крайней мере локально) может быть гладкой заменой координат переведена в интервал прямой.

27. Если все производные обращаются в нуль, определение с помощью дифференциала не применимо.

28. **Упражнение.** В этом случае допустим, что l – первое целое число такое, что все производные меньшего, чем l, порядка нулевые, но имеется производная порядка l отличная от нуля. Тогда в качестве направляющего вектора касательной служит вектор, координаты которого равны l-ым производным координат кривой в данной точке.

29. Показать, что касательная есть образ прямой при отображении дифференциала регулярной параметризации, а при неявном задании – ядро дифференциала.

Кривые

30. Написать формулы длины кривой в различных координатах объемлющего пространство.

Вычислить кривизну следующих кривых:

31. $y = \sin x$ в вершине (синусоида);

32. $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ (цепная линия);

33. $r^2 = a^2 \cos 2\phi$ (лемниската);

34. $r = a(1 + \cos\phi)$ (кардиоида);

35. $r = a\phi$ (спираль Архимеда);

36. $r(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ (астроида);

37. $r(t) = (a(1-\sin t), a(1-\cos t))$ (циклоида).

38. Показать, что если участок кривой прямолинеен, то кривизна на этом участке тождественно равна нулю.

39. Показать, что если кривизна в точке ненулевая, то в окрестности кривая лежит по одну сторону от касательной прямой.

40. Вычислить кривизну кривой, заданной неявной функцией $F(x, y) = 0$.

41. Показать, что для замкнутой кривой γ интеграл по всей кривой

    кривизны $k(s)$ по натуральному параметру s кратен 2π:

$$\int_\gamma k(s)ds = 2\pi n.$$

    (В частности, это число не зависит от деформации кривой в классе регулярных параметризаций.)

42. Доказать, что в предыдущей задаче любое число n реализуется на некоторой замкнутой регулярной кривой.

43. Найти кривизну эллипса с полуосями a и b в его вершинах.

44. Найти кривизну кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

45. Кривые заданы своим дифференциальным уравнением $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Найти их кривизну.

46. Вывести формулу для кривизны плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\phi)$.

Трехмерные кривые:

47. Заменить параметр t на винтовой линии

$$r(t) = (a\cos t\ ,\ a\sin t\ ,\ bt)\ , \qquad b > 0\ ,$$

    на натуральный параметр s.

48. Заменить параметр t на кривой

$$r(t) = (e^t \cos t\ ,\ e^t \sin t\ ,\ e^t)$$

    на натуральный.

49. Заменить параметр t на кривой

$$r(t) = (\operatorname{ch} t\ ,\ \operatorname{sh} t\ ,\ t)$$

    на натуральный.

Найти кривизну и кручение в произвольной точке следующих линий:

50. $r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$;

51. $r = (2t, \ln t, t^2)$;

52. $r = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$;

53. $r = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$;

54. $r = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

55. Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями

$$\begin{array}{rcl} x^2+z^2-y^2 & = & 1 \\ y^2-2x+z & = & 0, \end{array}$$

в точке $M(1,1,1)$.

56. Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями

$$\begin{array}{rcl} x+\operatorname{sh} x & = & \sin y + y \\ z+e^z & = & x+\ln(1+x)+1 \end{array}$$

в точке $M(0,0,0)$.

57. Показать, что при изменении обхода кривой вектор нормали не меняет направления, вектор бинормали меняет.

58. Показать, что если пориздводная вектора бинормали равна нулю в интервале параметра, то кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости.

59. Вывести формулы для вычисления кривизны и кручения кривой, заданной уравнениями $y=y(x)$, $z=z(x)$, и найти репер Френе этой кривой.

60. Дана кривая

$$\mathbf{r}=(t^2\ ,\ 1-t\ ,\ t^3)\ .$$

Найти репер Френе. Вычислить кривизну и кручение этой кривой.

61. Доказать, что кривизна и кручение винтовой линии постоянны. И обратно, описать кривые у которых кривизна и кручение постоянны.

62. Определить, при каком значении h винтовая линия

$$x=a\cos t, y=a\sin t, z=ht$$

имеет наибольшее кручение.

63. Найти репер Френе для винтовой линии

$$\mathbf{r}=(a\cos t,\ a\sin t,\ ht).$$

Составить натуральные уравнения кривых:

64. $x=a\cos^3 t\ ,\quad y=a\sin^3 t\,;$

65. $y=x^{3/2}\,;$

66. $y=x^2\,;$

67. $y=\ln x\,;$

68. $y=a\operatorname{ch}(x/a)\,;$

69. $y=e^x\,;$

70. $x=a\left((\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t)\right)\ ,\quad y=a\sin t\,;$

71. $r=a(1+\cos\phi)\,;$

72. $x=a(\cos t+t\sin t)\ ,\quad y=a(\sin t-t\cos t)\,.$

73. $r=a(1+\cos\phi)$

74. $r=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$

Найти параметрические уравнения кривых, зная их натуральные уравнения (здесь $R=1/k$):

75. $R = as$;

76. $\frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1$;

77. $Rs = a^2$;

78. $R = a + s^2/a$;

79. $R^2 = 2as$;

80. $R = \frac{1}{s}$

81. В каких случаях кривая имеет следующее параметрическое уравнение: $x = s, y = y(s), z = z(s)$, где s – натуральный параметр?

82. Найти плоскую кривую, у которой касательная образует постоянный угол α с радиус-вектором кривой.

83. Пусть p — расстояние от начала радиус-векторов до касательной к кривой γ в точке M, а l — расстояние от точки O до точки M. Доказать, что

$$k = \left| \frac{dp}{l\,dl} \right| .$$

84. Доказать, что линия

$$x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz$$

является плоской.

85. Доказать, что если в некоторой точке M кривой C кручение отлично от нуля, то части кривой, близкие к точке M лежат по разные стороны от соприкасающейся плоскости.

86. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой проходят через одну и ту же точку, то кривая плоская.

87. Написать выражение третьей и 4-ой производных по натуральному параметру в репере Френе.

88. Выразить $\frac{d}{ds}\mathbf{r}$, $\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}$, $\frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r}$ через τ, ν, $\mathbf{b}$, k и κ.

89. Доказать, что $(\tau, \mathbf{b}, \frac{d}{ds}\mathbf{b}) = \kappa$, где $(\cdot,\cdot,\cdot)$ обозначает смешанное произведение трех векторов.

90. Вычислить $(\frac{d}{ds}\mathbf{b}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{b}, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{b})$.

91. Доказать, что $(\frac{d}{ds}\tau, \frac{d^2}{ds^2}\tau, \frac{d^3}{ds^3}\tau) = k^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{k}\right)$.

92. Доказать, что если кривая бирегулярна (т.е. $k(s) \neq 0$ при всех s) и все нормальные плоскости линии содержат вектор $\mathbf{e}$, то данная линия или прямая, или плоская.

93. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой γ, не являющейся прямой линией, содержат один и тот же вектор, то кривая плоская.

94. Доказать, что если кривая регулярна и $k = 0$, то это — прямая линия.

95. Доказать, что если $\mathbf{b} = const$, то кривая плоская.

96. Доказать, что если кривая бирегулярна и $\kappa = 0$, то кривая плоская.

97. Доказать, что если соприкасающиеся плоскости кривой имеют один и тот же наклон, то кривая плоская.

Поверхности

Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей:

98. $\mathbf{r} = (a\cos u\cos v, a\sin u\cos v, a\sin v)$ (сфера);
99. $\mathbf{r} = (a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v)$ (эллипсоид);
100. $\mathbf{r} = (av\cos u, bv\sin u, cv)$ (конус);
101. $\mathbf{r} = (a\cos u, b\sin u, cv)$ (цилиндр).

Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей:

102. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{e}}$, $\mathbf{e} = const$ (цилиндрическая поверхность);
103. $\mathbf{r} = v\vec{\rho}(s)$ (коническая поверхность);
104. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{e}}(s)$ $(|\vec{\mathbf{e}}(s)| = 1)$ (линейчатая поверхность);
105. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{v}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi$ (каналовая поверхность);
106. $\mathbf{r} = (\phi(v)\cos u, \phi(v)\sin u, \psi(v))$ (поверхность вращения);
107. $\mathbf{r} = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$ (тор);
108. $\mathbf{r} = (v\cos u, v\sin u, ku)$ (геликоид);
109. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{b}}(s)$ (поверхность главных нормалей);
110. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s)$ (поверхность бинормалей);
111. $\mathbf{r} = (a\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{a}\cos\phi, a\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{a}\sin\phi, z)$ (катеноид).
112. Найдите первую квадратичную форму поверхности (псевдосферы Бельтрами)
$$\begin{aligned} x &= a\sin u\cos v, \\ y &= a\sin u\sin v, \\ z &= c(\ln\mathrm{tg}\,\tfrac{u}{2} + \cos u), \end{aligned}$$
где $u \neq \pi/2, a = const$.
113. Найдите угол между линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности
$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2.$$
114. На плоскости с координатами (u, v) дана метрика $ds^2 = du^2 + 2dv^2$, найдите угол между линиями $v = 2u$ и $v = -2u$.
115. На поверхности
$$(u\cos v, u\sin v, av)$$
найти угол между пересекающимися кривыми
$$u + v = 0,\ u - v = 0.$$
116. Найдите угол между линиями $v = 2u + 1$ и $v = -2u + 1$ на плоскости с координатами (u, v), если метрика задается матрично-значной функцией
$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить вторую квадратичную форму следующих поверхностей:

117. $r = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$ (сфера),

118. $r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u)$ (эллипсоид вращения),

119. $r = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$ (тор),

120. $r = (a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}\ cosv, a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}\sin v, u)$ (катеноид),

121. $r = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a(\ln \mathrm{tg}\,\frac{u}{2} + \cos u))$;

122. $r = (u\cos v, u\sin v, av)$ (прямой геликоид),

123. $xyz = a^3$.

124. Доказать, что при каждой параметризации плоскости ее вторая квадратичная форма равна нулю.

125. Доказать, что при любой параметризации сферы ее первая квадратичная форма пропорциональна второй.

126. Доказать, что если у поверхности тождественно равны нулю гауссова и средняя кривизны, то это поверхность является плоскостью или ее частью.

127. Дана кривая $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$ с натуральным параметром s, кривизной $k = k(s) \neq 0$ и кручением $\kappa = \kappa(s) \neq 0$. Пусть $\vec{\tau} = \vec{\tau}(u)$ — орт касательной к этой кривой. Для поверхности, образованной касательными к данной кривой, т. е.

$$\vec{\mathbf{r}}(s,u) = \vec{\rho}(s) + u\,\vec{\tau}(s), \quad u > 0$$

найти кривизны K и H.

128. Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности $z = f(x, y)$.

129. Найти гауссову и среднюю кривизну поверхности, заданной уравнением

$$F(x, y, z) = 0$$

130. Найти главные радиусы кривизны поверхности $y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{a}$.

131. Найти главные радиусы кривизны поверхности

$$\begin{aligned} x &= \cos v - u\sin v, \\ y &= \sin v + u\cos v, \\ z &= u + v. \end{aligned}$$

132. Вычислить гауссову и среднюю кривизны винтовой поверхности

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v.$$

133. Вычислить гауссову и среднюю кривизны поверхности

$$\begin{aligned} x &= 3u + 3uv^2 - u^3, \\ y &= v^3 - 3v - 3u^2v, \\ z &= 3(u^2 - v^2). \end{aligned}$$

next

134. Доказать, что $H^2 \geq 4K$. Когда достигается равенство?

Найти гауссову и среднюю кривизны следующих поверхностей:

135. Плоская кривая γ задана уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$, где s — натуральный параметр; $k = k(s)$ - ее кривизна, $0 < k < 1/a$; $\vec{\mathbf{n}}(s)$ — орт главной нормали к γ, $\vec{\mathbf{b}}$ — орт нормали к плоскости кривой γ. Поверхность S задана уравнением

$$\vec{\mathbf{r}}(s, \varphi) = \vec{\rho}(s) + a\vec{\mathbf{n}}(s)\cos\varphi + a\vec{\mathbf{e}}\sin\varphi.$$

136. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{e}}$, $\mathbf{e} = const$ (цилиндрическая поверхность);

137. $\mathbf{r} = \lambda\vec{\rho}(s)$ (коническая поверхность);

138. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{e}}(s)$ $(|\vec{\mathbf{e}}(s)| = 1)$ (линейчатая поверхность);

139. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \vec{\tau}(s)\cos\phi + \vec{\mathbf{b}}(s)\sin\phi$ (каналовая поверхность);

140. $\mathbf{r} = (\phi(v)\cos u, \phi(v)\sin u, \psi(v))$ (поверхность вращения);

141. $\mathbf{r} = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$ (тор);

142. $\mathbf{r} = (v\cos u, v\sin u, ku)$ (геликоид);

143. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{b}}(s)$ (поверхность главных нормалей);

144. $\mathbf{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{b}(s)$ (поверхность бинормалей);

145. $\mathbf{r} = (a \operatorname{ch}\frac{z}{a}\cos\phi, a \operatorname{ch}\frac{z}{a}\sin\phi, z)$ (катеноид).

146. Доказать, что на сфере неплоская регулярная гладкая кривая не может иметь постоянную кривизну.

147. Доказать, что радиус кривизны кривой на сфере радиуса R не больше, чем R.

148. Кривая на сфере определяется заданием своей или кривизны или кручения как функции длины дуги.

149. Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$ — регулярная кривая, и пусть существует точка $\vec{\mathbf{a}}$, лежащая во всех нормальных плоскостях кривой $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$. Доказать, что $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$ лежит на некоторой сфере.

150. Определить тип точек тора.

151. Определить тип точек на поверхностях

а) $z = a^2x^4 + b^2y^4$;

б) $z = x^4 + y^4 + x^2y^2$;

в) $y = x^4$.

152. Доказать, что гладкая замкнутая поверхность отрицательной гауссовой кривизны не погружается в R^3.