Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ А.

1а). Вычислить кривизну плоской кривой (заданной в полярных координатах):

$$r^2 = a^2 \cos 2\phi \quad \text{(лемниската)};$$

Решение

В декартовых координатах имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi) = \begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\phi}\cos\phi, \\ y = a\sqrt{\cos 2\phi}\sin\phi. \end{cases}$$

Вектор скорости

$$\mathbf{r}' = \begin{cases} x' = a\frac{-\sin 2\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}\cos\phi - a\sqrt{\cos 2\phi}\sin\phi, \\ y' = a\frac{-\sin 2\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}\sin\phi + a\sqrt{\cos 2\phi}\cos\phi, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x' = a\frac{-\sin 2\phi\cos\phi - \cos 2\phi\sin\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}, \\ y' = a\frac{-\sin 2\phi\sin\phi + \cos 2\phi\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x' = a\frac{-\sin 3\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}, \\ y' = a\frac{\cos 3\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}. \end{cases}$$

Модуль вектора скорости

$$s' = \frac{ds}{d\phi} = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\phi}}.$$

Касательный вектор

$$\vec{\tau} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \begin{cases} -\sin 3\phi, \\ \cos 3\phi. \end{cases}$$

Кривизна

$$k = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \frac{|\vec{\tau}\,'|}{s'} = \frac{\sqrt{9\cos^2(3\phi) + 9\sin^2(3\phi)}\sqrt{\cos 2\phi}}{a} = \frac{3}{a}\sqrt{\cos 2\phi}.$$

Ответ:

$k = \frac{3}{a}\sqrt{\cos 2\phi}$.

Решение - 2-й вариант

Пусть $\rho = \rho(\phi)$ кривая в полярных координатах. Тогда

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{\sqrt{(\rho'^2 + \rho^2)^3}};$$

Считаем производные ρ:

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\phi};$$

$$\rho' = -a\frac{\sin 2\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}};$$

$$\rho'' = -2a\frac{\cos 2\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} - a\frac{\sin^2 2\phi}{\sqrt{\cos^3 2\phi}} = -a\frac{1+\cos^2 2\phi}{\sqrt{\cos^3 2\phi}}.$$

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = a^2\cos 2\phi + 2a^2\frac{\sin^2 2\phi}{\cos 2\phi} + a^2\frac{1+\cos^2 2\phi}{\cos 2\phi} =$$

$$= a^2\frac{\cos^2 2\phi + 2\sin^2 2\phi + 1 + \cos^2 2\phi}{\cos 2\phi} = a^2\frac{3}{\cos 2\phi}.$$

$$\rho'^2 + \rho^2 = a^2\frac{\sin^2 2\phi}{\cos 2\phi} + a^2\cos 2\phi = \frac{a^2}{\cos 2\phi}$$

$$k = \left|\frac{3\sqrt{\cos^3 2\phi}}{a\cos 2\phi}\right| = \frac{3}{a}\sqrt{\cos 2\phi}.$$

2a). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$\vec{\mathbf{r}} = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$$

Решение

Считаем производные:

$\vec{\mathbf{r}}\,' = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2});$
$\vec{\mathbf{r}}\,'' = (e^t, e^{-t}, 0);$
$\vec{\mathbf{r}}\,''' = (e^t, -e^{-t}, 0).$

$$[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{pmatrix} = (-e^{-t}\sqrt{2}, e^t\sqrt{2}, 2)$$

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = \det \begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{pmatrix} = -2\sqrt{2}.$$

$|\mathbf{r}'| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = e^t + e^{-t};$
$|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']| = \sqrt{2}\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{2}(e^t + e^{-t});$
$k = \frac{|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t}+e^{-2t}+2} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2};$
$\kappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']|^2} = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}.$

Ответ:
$k = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2};$
$\kappa = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}.$

3a). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{e}}(s) \quad (|\vec{\mathbf{e}}(s)| = 1)(\text{линейчатая поверхность});$$

Решение

Первая квадратичная форма в локальных координатах (λ, s) задается матрицей

$$G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_\lambda) & (\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s) \\ (\vec{\mathbf{r}}_s, \vec{\mathbf{r}}_\lambda) & (\vec{\mathbf{r}}_s, \vec{\mathbf{r}}_s) \end{pmatrix}$$

Считаем частные производные:

$\vec{\mathbf{r}}_\lambda = \vec{\mathbf{e}}(s);$
$\vec{\mathbf{r}}_s = \vec{\rho}_s + \lambda\vec{\mathbf{e}}_s.$

При этом

$(\vec{\mathbf{e}}(s), \vec{\mathbf{e}}(s)_s) \equiv 0.$

Ответ:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & (\vec{\rho}_s, \vec{\mathbf{e}}) \\ (\vec{\rho}_s, \vec{\mathbf{e}}) & (\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_s) + 2\lambda(\vec{\rho}_s, \vec{\mathbf{e}}_s) + \lambda^2(\vec{\mathbf{e}}_s, \vec{\mathbf{e}}_s) \end{pmatrix}$$

4a). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}} = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u) \text{ (эллипсоид вращения).}$$

Решение

Вычислим последовательно вектора $\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v, [\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v], \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{r}}_{uu}, \vec{\mathbf{r}}_{uv}, \vec{\mathbf{r}}_{vv}$.
Вторая квадратичная форма пишется по формуле

$$Q = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\mathbf{r}}_{uu}, \vec{\mathbf{m}}) & (\vec{\mathbf{r}}_{uv}, \vec{\mathbf{m}}) \\ (\vec{\mathbf{r}}_{vu}, \vec{\mathbf{m}}) & (\vec{\mathbf{r}}_{vv}, \vec{\mathbf{m}}) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем:

$$\vec{\mathbf{r}}_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, c\cos u);$$

$$\vec{\mathbf{r}}_v = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0);$$

$$[\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin u\cos v & -a\sin u\sin v & c\cos u \\ -a\cos u\sin v & a\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-ac\cos^2 u\cos v, -ac\cos^2 u\sin v, -a^2\sin u\cos u);$$

$$|[\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v]| = \sqrt{a^2c^2\cos^4 u + a^4\sin^2 u\cos^2 u} = a\cos u\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u};$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{uu} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, -c\sin u);$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{uv} = (a\sin u\sin v, -a\sin u\cos v, 0);$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{vv} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, 0);$$

$$L = \frac{a^2c\cos^3 u + a^2c\sin^2 u\cos u}{a\cos u\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}} = \frac{ac}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}};$$

$$M = 0;$$

$$N = \frac{a^2c\cos^3 u}{a\cos u\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}} = \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}}$$

Ответ:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{ac}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}} & 0 \\ 0 & \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}} \end{pmatrix}.$$

5а). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}} = \lambda\vec{\rho}(s) \quad (|\vec{\rho}| = 1,\ \lambda > 0) \text{ (коническая поверхность);}$$

Решение

Без ограничения общности можно считать, что s есть натуральный параметр кривой $\vec{\rho}(s)$.

Тогда $|\vec{\rho}_s| \equiv 1$, $(\vec{\rho}, \vec{\rho}_s) = 0$, $(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_{ss}) = 0$, кривизна кривой $\vec{\rho}(s)$ равна $k = |\vec{\rho}_{ss}|$:

Вычислим последовательно вектора $\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s, [\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s], \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{r}}_{\lambda\lambda}, \vec{\mathbf{r}}_{\lambda s}, \vec{\mathbf{r}}_{ss}$.

$\vec{\mathbf{r}}_\lambda = \vec{\rho}$;

$\vec{\mathbf{r}}_s = \lambda\vec{\rho}_s$;

$[\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s] = \lambda[\vec{\rho}, \vec{\rho}_s]$

$|[\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s]| = \lambda \cdot |[\vec{\rho}, \vec{\rho}_s]| = \lambda$;

$\vec{\mathbf{m}} = \frac{[\vec{\rho}, \vec{\rho}_s]}{|[\vec{\rho}, \vec{\rho}_s]|} = [\vec{\rho}, \vec{\rho}_s]$;

$\vec{\mathbf{r}}_{\lambda\lambda} = 0$;

$\vec{\mathbf{r}}_{\lambda s} = \vec{\rho}_s$;

$\vec{\mathbf{r}}_{ss} = \lambda\vec{\rho}_{ss}$;

Первая квадратичная форма G:

$E = |\vec{\rho}|^2 = 1$;

$F = 0$;

$G = \lambda^2$;

Вторая квадратичная форма Q:

$L = 0$;

$M = 0$;

$N = \lambda(\vec{\rho}, \vec{\rho}_s, \vec{\rho}_{ss})$.

Имеем две квадратичные формы: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$; $\quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\vec{\rho}, \vec{\rho}_s, \vec{\rho}_{ss}) \end{pmatrix}$;

Ответ:

Средняя кривизна:

$H = \frac{(\vec{\rho}, \vec{\rho}_s, \vec{\rho}_{ss})}{\lambda}$;

Гауссова кривизна:

$K = 0$.

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ B.

1b). Вычислить кривизну плоской кривой (заданной в полярных координатах):

$$r = a(1+\cos\phi) \text{ (кардиоида)};$$

Решение

В декартовых координатах имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi) = \begin{cases} x = a(1+\cos\phi)\cos\phi, \\ y = a(1+\cos\phi)\sin\phi. \end{cases}$$

Вектор скорости

$$\mathbf{r}' = \begin{cases} x' = -a(2\sin\phi\cos\phi + \sin\phi) = -a(\sin\phi + \sin 2\phi), \\ y' = a(\cos\phi(1+\cos\phi) - \sin^2\phi) = a(\cos\phi + \cos 2\phi). \end{cases}$$

Модуль вектора скорости

$$s' = \frac{ds}{d\phi} = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2} =$$
$$= a\sqrt{(\sin\phi + \sin 2\phi)^2 + (\cos\phi + \cos 2\phi)^2} =$$
$$= a\sqrt{1 + 1 + 2\cos\phi} = a\sqrt{2(1+\cos\phi)}.$$

Вторая производная

$$\vec{\mathbf{r}}'' = \begin{cases} -a(\cos\phi + 2\cos 2\phi), \\ -a(\sin\phi + 2\sin 2\phi). \end{cases}$$

Векторное произведение

$$|[\vec{\mathbf{r}}', \vec{\mathbf{r}}'']| = a^2((\sin\phi + \sin 2\phi)(\sin\phi + 2\sin 2\phi) + (\cos\phi + \cos 2\phi)(\cos\phi + 2\cos 2\phi) =$$
$$= a^2(1 + 2 + 3\sin\phi\sin 2\phi + 3\cos\phi\cos 2\phi) = 3a^2(1+\cos\phi).$$

Кривизна:

$$k = \frac{|[\vec{\mathbf{r}}', \vec{\mathbf{r}}'']|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{3a^2(1+\cos\phi)}{(a\sqrt{2(1+\cos\phi)})^3} = \frac{3}{2a\sqrt{2(1+\cos\phi)}} = \frac{3}{4a\left|\cos\frac{\phi}{2}\right|}.$$

Ответ:

$$k = \frac{3}{4a\left|\cos\frac{\phi}{2}\right|}.$$

Решение - 2-й вариант

Пусть $\rho = \rho(\phi)$ кривая в полярных координатах. Тогда

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{\sqrt{(\rho'^2 + \rho^2)^3}};$$

Считаем производные ρ:

$$\rho = a(1+\cos\phi);$$
$$\rho' = -a\sin\phi;$$
$$\rho'' = -a\cos\phi.$$
$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = a^2(1+\cos\phi)^2 + 2a^2\sin^2\phi + a^2(1+\cos\phi)\cos\phi =$$
$$= a^2(1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi + 2\sin^2\phi + \cos\phi + \cos^2\phi) =$$
$$= 3a^2(1+\cos\phi).$$
$$\rho'^2 + \rho^2 = a^2((1+\cos\phi)^2 + \sin^2\phi) = 2a^2(1+\cos\phi).$$
$$k = \frac{3a^2(1+\cos\phi)}{\sqrt{(2a^2(1+\cos\phi))^3}} = \frac{3}{4a\left|\cos\frac{\phi}{2}\right|}.$$

2b). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$\vec{\mathbf{r}} = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$$

Решение

Считаем производные:

$\vec{\mathbf{r}}\,' = (e^t \sin t + e^t \cos t, e^t \cos t - e^t \sin t, e^t);$

$\vec{\mathbf{r}}\,'' = (2e^t \cos t, -2e^t \sin t, e^t);$

$\vec{\mathbf{r}}\,''' = (2e^t \cos t - 2e^t \sin t, -2e^t \sin t - 2e^t \cos t, e^t).$

$$[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^t \sin t + e^t \cos t & -e^t \sin t + e^t \cos t & e^t \\ 2e^t \cos t & -2e^t \sin t & e^t \end{pmatrix} =$$

$$= (e^{2t}(\cos t + \sin t), e^{2t}(\cos t - \sin t), -2e^{2t})$$

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = \det \begin{pmatrix} e^t(\sin t + \cos t) & e^t(\cos t - \sin t) & e^t \\ 2e^t \cos t & -2e^t \sin t & e^t \\ 2e^t(\cos t - \sin t) & -2e^t(\sin t + \cos t) & e^t \end{pmatrix} =$$

$$= e^{3t} \det \begin{pmatrix} (\sin t + \cos t) & (\cos t - \sin t) & 1 \\ 2\cos t & -2\sin t & 1 \\ 2(\cos t - \sin t) & -2(\sin t + \cos t) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{3t}(4(-\cos t \sin t - \cos^2 t + \sin t \cos t - \sin^2 t)+$$

$$+2((\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2)-$$

$$-2(\sin t(\sin t + \cos t) + \cos t(\cos t - \sin t))) =$$

$$= e^{3t}(-4 + 4 - 2) = -2e^{3t}$$

$|\mathbf{r}'| = e^t \sqrt{(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 1)} = \sqrt{3}e^t;$

$|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']| = e^{2t} \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 4} = e^{2t}\sqrt{6};$

$k = \frac{|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{(\sqrt{3}e^t)^3} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t};$

$\kappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']|^2} = -\frac{1}{3e^t}.$

Ответ:

$k = \frac{\sqrt{2}}{3e^t};$

$\kappa = -\frac{1}{3e^t}.$

3b). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\rho}(s) + \vec{\mathbf{n}}(s)\cos\phi + \vec{\mathbf{b}}(s)\sin\phi \text{ ($\vec{\mathbf{n}}$ – нормаль, $\vec{\mathbf{b}}$ – бинормаль) (каналовая поверхность);}$$

Решение

Считаем частные производные:
$\vec{\mathbf{r}}_\phi = -\vec{\mathbf{n}}\sin\phi + \vec{\mathbf{b}}\cos\phi$;
$\vec{\mathbf{r}}_s = \vec{\tau} + \vec{\mathbf{n}}'\cos\phi + \vec{\mathbf{b}}'\sin\phi = (1 - k\cos\phi)\vec{\tau} - \kappa\vec{\mathbf{n}}\sin\phi + \kappa\vec{\mathbf{b}}\cos\phi$.

Ответ:
$G = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & (1 - k\cos\phi)^2 + \kappa^2 \end{pmatrix}$.

4b). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}} = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \text{ (тор)};$$

Решение

Вычислим последовательно вектора $\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v, [\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v], \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{r}}_{uu}, \vec{\mathbf{r}}_{uv}, \vec{\mathbf{r}}_{vv}$.
Таким образом, имеем:

$\vec{\mathbf{r}}_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$;

$\vec{\mathbf{r}}_v = (-(a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, 0)$;

$$[\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -b\sin u\cos v & -b\sin u\sin v & b\cos u \\ -(a + b\cos u)\sin v & (a + b\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-b\cos v\cos u(a + b\cos u), -b\sin v\cos u(a + b\cos u), -b\sin u(a + b\cos u)) =$$

$$= (-\cos v\cos u, -\sin v\cos u, -\sin u)b(a + b\cos u);$$

$|[\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v]| = b(a + b\cos u)$;

$\vec{\mathbf{m}} = (-\cos v\cos u, -\sin v\cos u, -\sin u)$;

$\vec{\mathbf{r}}_{uu} = (-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u)$

$\vec{\mathbf{r}}_{uv} = (b\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0)$;

$\vec{\mathbf{r}}_{vv} = (-(a + b\cos u)\cos v, -(a + b\cos u)\sin v, 0)$;

$L = b$

$M = 0$;

$N = (a + b\cos u)\cos u$

Ответ:

$$Q = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a + b\cos u)\cos u \end{pmatrix}.$$

5b). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\mathbf{b}}(s) \text{ (поверхность бинормалей).}$$

Решение

Без ограничения общности можно считать, что s есть натуральный параметр кривой $\vec{\rho}(s)$.
Тогда $|\vec{\rho}_s| \equiv 1$, $(\vec{\rho}, \vec{\rho}_s) = 0$, $(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_{ss}) = 0$, кривизна кривой $\vec{\rho}(s)$ равна $k = |\vec{\rho}_{ss}|$.
Вычислим последовательно вектора $\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s, [\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s], \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{r}}_{\lambda\lambda}, \vec{\mathbf{r}}_{\lambda s}, \vec{\mathbf{r}}_{ss}$:

$\vec{\mathbf{r}}_\lambda = \vec{\mathbf{b}}$;
$\vec{\mathbf{r}}_s = \vec{\tau} - \lambda\kappa\vec{\mathbf{n}}$;
$[\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s] = [\vec{\mathbf{b}}, \vec{\tau} - \lambda\kappa\vec{\mathbf{n}}] = \vec{\mathbf{n}} + \lambda\kappa\vec{\tau}$
$|[\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s]| = \sqrt{1 + \lambda^2\kappa^2}$;
$\vec{\mathbf{m}} = \frac{\vec{\mathbf{n}} + \lambda\kappa\vec{\tau}}{\sqrt{1+\lambda^2\kappa^2}}$;
$\vec{\mathbf{r}}_{\lambda\lambda} = 0$;
$\vec{\mathbf{r}}_{\lambda s} = -\kappa\vec{\mathbf{n}}$;
$\vec{\mathbf{r}}_{ss} = \lambda k\kappa\vec{\tau} + (k - \lambda\kappa')\vec{\mathbf{n}} - \lambda\kappa^2\vec{\mathbf{b}}$;

Первая квадратичная форма G:

$E = |\vec{\mathbf{b}}|^2 = 1$;
$F = 0$;
$G = 1 + \lambda^2\kappa^2$;

Вторая квадратичная форма Q:

$L = 0$;
$M = -\frac{\kappa}{\sqrt{1+\lambda^2\kappa^2}}$;
$N = \frac{\lambda^2 k\kappa^2 + (k - \lambda\kappa')}{\sqrt{1+\lambda^2\kappa^2}}$.

Имеем две квадратичные формы:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda^2\kappa^2 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\kappa}{\sqrt{1+\lambda^2\kappa^2}} \\ -\frac{\kappa}{\sqrt{1+\lambda^2\kappa^2}} & \frac{\lambda^2 k\kappa^2 + (k-\lambda\kappa')}{\sqrt{1+\lambda^2\kappa^2}} \end{pmatrix};$$

Ответ:

Средняя кривизна:

$H = \frac{\lambda^2 k\kappa^2 + (k-\lambda\kappa')}{(1+\lambda^2\kappa^2)^{3/2}}$

Гауссова кривизна:

$K = -\frac{\kappa^2}{(1+\lambda^2\kappa^2)^2}$.

Контрольная работа (май 2011 г.) ВАРИАНТ С.

1c). Вычислить кривизну плоской кривой:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \text{ (астроида);}$$

Решение

$\vec{\mathbf{r}}' = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t);$

$|\vec{\mathbf{r}}'| = 3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t} = 3a|\sin t\cos t|;$

$\vec{\mathbf{r}}'' = (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t, 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t);$

$|[\vec{\mathbf{r}}', \vec{\mathbf{r}}'']| =$

$= 9a^2|-\cos^2 t\sin t(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t) - \sin^2 t\cos t(2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t)| =$

$= 9a^2|-2\sin^2 t\cos^4 t + \sin^4 t\cos^2 t - 2\sin^4 t\cos^2 t + \sin^2 t\cos^4 t| =$

$= 9a^2|\sin^2 t\cos^4 t + \sin^4 t\cos^2 t| = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t.$

$k = \frac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}{(3a|\sin t\cos t|)^3} = \frac{1}{3a|\sin t\cos t|}$

Ответ:

$k = \frac{1}{3a|\sin t\cos t|}.$

2c). Найти кривизну и кручение пространственной кривой:

$$\vec{\mathbf{r}} = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t);$$

Решение

Считаем производные:

$$\vec{\mathbf{r}}\,' = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \\ -4\sin t \cos t \end{pmatrix};$$

$$\vec{\mathbf{r}}\,'' = \begin{pmatrix} 6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t \\ 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t \\ -4\cos^2 t + 4\sin^2 t \end{pmatrix};$$

$$\vec{\mathbf{r}}\,''' = \begin{pmatrix} -6\sin^3 t + 21\sin t \cos^2 t \\ 6\cos^3 t - 21\sin^2 t \cos t \\ 16\sin t \cos t \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] &= \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\cos^2 t \sin t & 3\sin^2 t \cos t & -4\sin t \cos t \\ 6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t & 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t & -4\cos^2 t + 4\sin^2 t \end{pmatrix} = \\
&= (3\sin^2 t \cos t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t) + 4\sin t \cos t(6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t), \\
&\quad 3\cos^2 t \sin t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t) - 4\sin t \cos t(6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t), \\
&\quad -3\cos^2 t \sin t(6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t) - 3\sin^2 t \cos t(6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t)) = \\
&= (12\sin^2 t \cos^3 t, -12\sin^3 t \cos^2 t, -9\sin^2 t \cos^2 t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') &= \det\begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t & 3\sin^2 t \cos t & -4\sin t \cos t \\ 6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t & 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t & -4\cos^2 t + 4\sin^2 t \\ -6\sin^3 t + 21\sin t \cos^2 t & 6\cos^3 t - 21\sin^2 t \cos t & 16\sin t \cos t \end{pmatrix} = \\
&= -3\cos^2 t \sin t(6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t)(16\sin t \cos t) + \\
&\quad +3\sin^2 t \cos t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)(-6\sin^3 t + 21\sin t \cos^2 t) - \\
&\quad -4\sin t \cos t(6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t)(6\cos^3 t - 21\sin^2 t \cos t) + \\
&\quad +4\sin t \cos t(6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t)(-6\sin^3 t + 21\sin t \cos^2 t) - \\
&\quad -3\sin^2 t \cos t(6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t)16\sin t \cos t + \\
&\quad +3\cos^2 t \sin t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)(6\cos^3 t - 21\sin^2 t \cos t) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') &= -48\sin^3 t\cos^3 t(6\cos^2 t - 3\sin^2 t)+\\
&+3\sin^3 t\cos t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t)-\\
&-4\sin t\cos^3 t(6\sin^2 t - 3\cos^2 t)(6\cos^2 t - 21\sin^2 t)+\\
&+4\sin^3 t\cos t(6\cos^2 t - 3\sin^3 t)(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t)-\\
&-48\sin^3 t\cos^3 t(6\sin^2 t - 3\cos^2 t)+\\
&+3\sin t\cos^3 t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)(6\cos^2 t - 21\sin^2 t) =\\
&= -(48)(3)\sin^3 t\cos^3 t+\\
&+3\sin^3 t\cos t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t)-\\
&-4\sin t\cos^3 t(6\sin^2 t - 3\cos^2 t)(6\cos^2 t - 21\sin^2 t)+\\
&+4\sin^3 t\cos t(6\cos^2 t - 3\sin^3 t)(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t)-\\
&+3\sin t\cos^3 t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)(6\cos^2 t - 21\sin^2 t) =\\
&= -(48)(3)\sin^3 t\cos^3 t+\\
&+3\sin^3 t\cos t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t)\\
&+4\sin^3 t\cos t(6\cos^2 t - 3\sin^3 t)(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t)-\\
&+3\sin t\cos^3 t(-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)(6\cos^2 t - 21\sin^2 t)\\
&-4\sin t\cos^3 t(6\sin^2 t - 3\cos^2 t)(6\cos^2 t - 21\sin^2 t) =\\
&= -(48)(3)\sin^3 t\cos^3 t+\\
&+\sin^3 t\cos t(12\cos^2 t)(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t)\\
&+\sin t\cos^3 t(-12\sin^2 t)(6\cos^2 t - 21\sin^2 t) =\\
&= -(48)(3)\sin^3 t\cos^3 t+\\
&+12\sin^3 t\cos^3 t(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t)\\
&-12\sin^3 t\cos^3 t(6\cos^2 t - 21\sin^2 t) =\\
&= \sin^3 t\cos^3 t(-(48)(3) + 12(-6\sin^2 t + 21\cos^2 t) - 12(6\cos^2 t - 21\sin^2 t)) =\\
&= \sin^3 t\cos^3 t(-(48)(3) + 12(15\sin^2 t + 15\cos^2 t)) =\\
&= \sin^3 t\cos^3 t(-(48)(3) + 12(15)) =\\
&= 36\sin^3 t\cos^3 t.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{r}'| &= \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2 + (-4\sin t\cos t)^2} =\\
&= \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 16\sin^2 t\cos^2 t} =\\
&= \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t + 16\sin^2 t\cos^2 t} =\\
&= 5|\sin t\cos t|;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']|^2 &=\\
&= (12\sin^2 t\cos^3 t)^2 + (12\sin^3 t\cos^2 t)^2+\\
&+ (9\sin^2 t\cos^2 t)^2 =\\
&= 144\sin^4 t\cos^6 t+\\
&+ 144\sin^6 t\cos^4 +\\
&+ 81\sin^4 t\cos^4 t =\\
&= \sin^4 t\cos^4 t(144\cos^2 t + 144\sin^4 t + 81) =\\
&= 225\sin^4 t\cos^4 t;
\end{aligned}
$$

$|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']| = 15\sin^2 t\cos^2 t;$
$k = \frac{15\sin^2 t\cos^2 t}{5^3|\sin t\cos t|^3} = \frac{3}{25|\sin t\cos t|};$
$\kappa = \frac{36\sin^3 t\cos^3 t}{225\sin^4 t\cos^4 t} = \frac{4}{25\sin t\cos t}.$

Ответ:
$k = \frac{3}{25|\sin t\cos t|};$
$\kappa = \frac{4}{25\sin t\cos t}.$

3c). Вычислить первую квадратичную форму поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{\mathbf{n}}(s) \text{ (поверхность главных нормалей);}$$

Решение

Считаем частные производные:
$\vec{\mathbf{r}}_\lambda = \vec{\mathbf{n}}$;
$\vec{\mathbf{r}}_s = (1 - \lambda k)\vec{\tau} + \lambda \kappa \vec{\mathbf{b}}$.

Ответ:
$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda k)^2 + \lambda^2 \kappa^2 \end{pmatrix}$.

4c). Вычислить вторую квадратичную форму поверхности:

$$xyz = a^3;$$

Решение

Пусть
$\mathbf{r} = (u, v, \frac{a^3}{uv})$;
Вычислим последовательно вектора $\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v, [\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v], \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{r}}_{uu}, \vec{\mathbf{r}}_{uv}, \vec{\mathbf{r}}_{vv}$.
Таким образом, имеем:
$\vec{\mathbf{r}}_u = (1, 0, -\frac{a^3}{u^2 v})$;
$\vec{\mathbf{r}}_v = (0, 1, -\frac{a^3}{uv^2})$;
$[\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\frac{a^3}{u^2 v} \\ 0 & 1 & -\frac{a^3}{uv^2} \end{vmatrix} =$

$= (\frac{a^3}{u^2 v}, \frac{a^3}{uv^2}, 1)$;
$|[\vec{\mathbf{r}}_u, \vec{\mathbf{r}}_v]| = \sqrt{1 + (\frac{a^3}{u^2 v})^2 + (\frac{a^3}{uv^2})^2} = \sqrt{1 + \frac{a^6}{u^4 v^4}(u^2 + v^2)} =$

$= \frac{1}{u^2 v^2}\sqrt{u^4 v^4 + a^6(u^2 + v^2)}$.
$\vec{\mathbf{r}}_{uu} = (0, 0, 2\frac{a^3}{u^3 v})$;
$\vec{\mathbf{r}}_{uv} = (0, 0, \frac{a^3}{u^2 v^2})$;
$\vec{\mathbf{r}}_{vv} = (0, 0, 2\frac{a^3}{uv^3})$;
$L = \frac{2a^3 u}{v\sqrt{u^4 v^4 + a^6(u^2+v^2)}}$;
$M = \frac{a^3}{\sqrt{u^4 v^4 + a^6(u^2+v^2)}}$;
$N = \frac{2a^3 v}{u\sqrt{u^4 v^4 + a^6(u^2+v^2)}}$;

Ответ:
$Q = \frac{a^3}{uv\sqrt{u^4 v^4 + a^6(u^2+v^2)}} \begin{pmatrix} 2u^2 & uv \\ uv & 2v^2 \end{pmatrix}$.

5c). Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\tau}(s), \text{ (поверхность, образованная касательными линиями).}$$

Решение

Без ограничения общности можно считать, что s есть натуральный параметр кривой $\vec{\rho}(s)$.
Тогда $|\vec{\rho}_s| \equiv 1$, $(\vec{\rho}, \vec{\rho}_s) = 0$, $(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_{ss}) = 0$, кривизна кривой $\vec{\rho}(s)$ равна $k = |\vec{\rho}_{ss}|$.
Вычислим последовательно вектора $\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s, [\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s], \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{r}}_{\lambda\lambda}, \vec{\mathbf{r}}_{\lambda s}, \vec{\mathbf{r}}_{ss}$:

$\vec{\mathbf{r}}_\lambda = \vec{\tau}$;
$\vec{\mathbf{r}}_s = \vec{\tau} + \lambda k\vec{\mathbf{n}}$;
$[\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s] = [\vec{\tau}, \vec{\tau} + \lambda k\vec{\mathbf{n}}] = \lambda k\vec{\mathbf{b}}$;
$|[\vec{\mathbf{r}}_\lambda, \vec{\mathbf{r}}_s]| = \lambda k$;
$\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{b}}$;
$\vec{\mathbf{r}}_{\lambda\lambda} = 0$;
$\vec{\mathbf{r}}_{\lambda s} = k\vec{\mathbf{n}}$;
$\vec{\mathbf{r}}_{ss} = -\lambda k^2\vec{\tau} + (k + \lambda k')\vec{\mathbf{n}} + \lambda k\kappa\vec{\mathbf{b}}$;

Первая квадратичная форма G:

$E = |\vec{\tau}|^2 = 1$;
$F = (\vec{\tau}, \vec{\tau} + \lambda k\vec{\mathbf{n}}) = 1$;
$G = 1 + \lambda^2 k^2$;

Вторая квадратичная форма Q:

$L = 0$;
$M = 0$;
$N = \lambda k\kappa$.

Имеем две квадратичные формы:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \lambda^2 k^2 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda k\kappa \end{pmatrix};$$

Ответ:

Средняя кривизна:

$H = tr(QG^{-1}) = \frac{\kappa}{\lambda k}$;

Гауссова кривизна:

$K = 0$.