Предварительный тест

к 01 сентября 2009 г.

28 августа 2009 г.

вариант №1

1. Пусть $I \subset \mathbf{R}^1$ - единичный отрезок. Построить гладкую класса C^∞ вещественнозначную функцию f, такую, что $I = f^{-1}(0)$.
2. Доказать непрерывность функции $\rho(x)$ расстояния от переменной точки в $x \in \mathbf{R}^n$ до заданного замкнутого множества $F \subset \mathbf{R}^n$,
$$\rho(x) = \inf_{y \in F} d(x, y).$$
3. В точке $M(1,1,2)$ цилиндра $4x^2+y^2-5=0$ задан вектор $\vec{a}(1,-4,3)$. Является ли вектор $\vec{a}$ касательным к цилиндру в точке M?
4. На эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ взята точка $M(0,0,c)$. Найти в точке M главные кривизны и главные направления.
5. Точка M движется по лучу с постоянной скоростью v, который вращается вокруг своего начала O на плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Найти длину траектории точки M, получающейся при одном обороте луча (в начальный момент $OM = a$).

вариант №2

1. Пусть $I^2 \subset \mathbf{R}^2$ - квадрат на плоскости. Построить гладкую класса C^∞ вещественнозначную функцию f, такую, что $I^2 = f^{-1}(0)$.
2. Выразить третью производную по натуральному параметру вектор–функции $\dddot{\mathbf{r}}\,(s)$ в репере Френе.
3. В точке $M(1,1,2)$ конуса $2x^2+2y^2-z^2=0$ задан вектор $\vec{a}(1,0,1)$. Является ли вектор $\vec{a}$ касательным к конусу в точке M?
4. На параболоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z-1=0$ взята точка $M(0,0,1)$. Найти в точке M главные кривизны и главные направления.
5. Окружность радиуса r катится без скольжения по прямой. В начальный момент точка M окружности находится на прямой. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на прямую.

вариант №3

1. Построить непрерывный гомеоморфизм между n-мерным кубом
$$\mathbf{I}^n = \{|x_i| \le 1, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n\}$$
и n-мерным шаром
$$\mathbf{D}^n = \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1\}.$$
2. Доказать, что если материальная точка движется в пространстве под действием центральной силы (т.е. сила в каждой точке P направлена вдоль прямой OP, где O — некоторая фиксированная точка), то ее траектория — плоская кривая.
3. В точке $M(1,1,2)$ цилиндра $4x^2+y^2-5=0$ задан вектор $\vec{a}(2,-4,3)$. Является ли вектор $\vec{a}$ касательным к цилиндру в точке M?
4. На гиперболоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ взята точка $M(a,0,0)$. Найти в точке M первую и вторую квадратичные формы.
5. Окружность радиуса r катится без скольжения по внешней стороне неподвижной окружности радиуса R. В начальный момент точка M окружности находится на неподвижной окружности. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на неподвижную окружность.

вариант №4

1. Построить гладкий в обе стороны гомеоморфизм между открытым кубом
$$\mathring{\mathbf{I}}^n = \{|x_i| < 1, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n\}$$
и пространством $\mathbf{R}^n$.
2. Построить гладкую параметризацию кривой, состоящей из двух сторон заданного треугольника на плоскости.
3. В точке $M(1,1,2)$ конуса $2x^2+2y^2-z^2=0$ задан вектор $\vec{a}(1,1,1)$. Является ли вектор $\vec{a}$ касательным к конусу в точке M?
4. На гиперболоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ взята точка $M(0,0,c)$. Найти в точке M первую и вторую квадратичные формы.
5. Окружность радиуса r катится без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса $R>r$. В начальный момент точка M окружности находится на неподвижной окружности. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на неподвижную окружность.