

ПРОГРАММА
курса "Дифференциальная геометрия и
ТОПОЛОГИЯ

(математики, 3-й курс, 2-й поток, лектор - А.С.Мищенко)
Осенний семестр 2009/10 уч. года

16 августа 2009 г.

1 Теория многообразий

1. Топологические пространства. Хаусдорфовость. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. Связность. Компактность.
2. Общее определение многообразия. Атлас, карты, координатные отображения. Функции перехода (склейки). Топологические и гладкие многообразия.
3. Гладкие отображения многообразий. Дифференциал гладкого отображения. Диффеоморфизм многообразий. Погружения и вложения. Подмногообразия. Ориентируемость и неориентируемость многообразий. Многообразия с краем и без края.
4. Примеры: Область в евклидовом пространстве, график гладкой функции, неособая поверхность уровня гладкой функции, - как гладкие многообразия. Связь теоремы о неявной функции с гладкими подмногообразиями.
5. Касательный вектор. Три его определения. Касательное пространство к гладкому многообразию. Касательное расслоение.
6. Слабая теорема Уитни о вложении многообразий в конечномерное евклидово пространство (с доказательством).

2 Тензорная алгебра

1. Тензоры, валентность тензоров, сумма, свертка.
2. Альтернирование и симметрирование тензоров.

3. Классические примеры тензоров: касательный вектор, градиент функции, функционал на касательном пространстве, скалярное произведение, линейный оператор.
4. Тензорный вид коэффициентов линейной зависимости между тензорами.
5. Тензорное произведение, тензорная интерпретация следа и детерминанта матрицы.
6. Поднятие и опускание индексов у тензора.
7. Теорема о представлении тензора в виде суммы тензорных произведений простейших тензоров.

3 Тензорный анализ

1. Ковариантный градиент векторного поля. Закон изменения коэффициентов связности при замене координат.
2. Ковариантный градиент тензорных полей произвольной валентности.
3. Формулы ковариантной производной по направлению и вдоль кривой.
4. Формула закона преобразования коэффициентов связности при замене координат.
5. Операция параллельного перенесения. Геометрическая интерпретация ковариантной производной.
6. Связность, индуцированная на поверхности в евклидовом пространстве.

4 Геодезические

1. Симметрическая связность, ассоциированная с римановой метрикой.
2. Сохранение длины угла между векторами при параллельном перенесении.
3. Геодезические линии, уравнение геодезической.
4. Изометрия. Теорема о сохранении геодезических при изометрии.
5. Геодезические на плоскости и сфере. Группы движений прямой, плоскости и сферы.
6. Псевдосфера. Геодезические на псевдосфере.
7. Теорема о том, что достаточно близкие точки соединяются единственной геодезической.

5 Риманова геометрия

1. Тензор кривизны риманового многообразия, формулы тензора кривизны.
2. Свойства симметрии и косой симметрии тензора кривизны.
3. Тензор Риччи и скалярная кривизна. Связь с Гауссовой кривизной поверхности.
4. Теорема о независимости параллельного перенесения от кривой при нулевом тензоре кривизны.
5. Теорема о приведении метрического тензора к единичной матрице в случае нулевого тензора кривизны поверхности.

6 Дифференциальные формы и когомологии де Рама

1. Дифференциальные формы и алгебраические операции над ними.
2. Внешний дифференциал и его свойства.
3. Представление дифференциальных форм в локальных координатах.
4. Прообраз дифференциальной формы при гладком отображении.
5. Понятие когомологий де Рама гладкого многообразия. Связь с решениями уравнения $dT = S$.
6. Вычисление когомологий окружности.
7. Независимость прообраза класса когомологий от деформации отображения.
8. Лемма Пуанкаре.
9. Группы когомологий эвклидова пространства.

7 Интегрирование дифференциальных форм

1. Понятие интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию. Независимость интеграла от выбора локальной системы координат.
2. Общая формула Стокса.
3. Формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского.
4. Интегралы первого и второго рода в векторном анализе.
5. Объем риманового ориентированного компактного многообразия.

8 Степень отображения

1. Регулярные точки отображений. Лемма Сарда.
2. Теорема Уитни о вложении компактного многообразия в евклидово пространство.
3. Степень отображения и ее свойства.
4. Основная теорема алгебры.
5. Группа гомеоморфизмов, порожденная векторным полем
6. Выражение интеграла дифференциальной формы через степень отображения.
7. Гауссово сферическое отображение.
8. Теорема Гаусса-Боне.

9 Вариационные задачи в геометрии

1. Уравнение Эйлера для вариационной задачи.
2. Уравнение экстремалей для функционала действия на римановом многообразии.
3. Уравнение экстремалей для функционала длины.

Всего 56 вопросов на 16 лекций === по 3–4 вопроса на лекцию