Двойственность Пуанкаре в когомологиях де Рама

Конспект, приготовленный для лекций по
дифференциальной геометрии и топологии
для студентов 3-го курса
2007-2008 уч. года

8 ноября 2007 г.

1 Когомологии в старшей размерности ориентированного многообразия

Пусть M - компактное ориентированное многообразие, $\dim M = n$.

Теорема 1

$$H^n(M) = \mathbf{R}.$$

Первое доказательство я обнаружил в лекциях Хитчина (Differentiable Manifolds, Part C course 2006, by Nigel Hitchin,

http://www2.maths.ox.ac.uk/ hitchin/hitchinnotes/hitchinnotes.html, Differentiable Manifolds, Chapter 3, 8.1, Lemma 8.1, page 66).

Доказательство основано на лемме 1:

Proof.

Рассмотрим гомоморфизм интегрирования

$$\int : H^n(M) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Для того, чтобы доказать теорему, достаточно доказать, что если дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n(M)$ имеет нулевой интеграл

$$\int_M \omega = 0,$$

то $\omega \in \mathbf{Im}\, d$, $\omega = d\omega'$.

Для этого достаточно доказать частный случай:

Лемма 1 *Если* $\omega \in \Omega^n_c(\mathbf{R}^n)$ *– дифференциальная форма с компактным носителем,* $\mathbf{supp}\,\omega \subset \mathbf{D}^n \subset \mathbf{R}^n$*, причем*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \omega = 0,$$

то $\omega = d\omega'$, $\mathbf{supp}\,\omega' \subset \mathbf{D}^n$

Доказательство леммы 1 у Хитчина довольно запутанное. Поэтому я предлагаю более простое и естественное доказательство.

Наивное доказательство заключается в использовании компоненты тождественного отображения группы диффеоморфизмов эвклидова пространства. Если

$$\varphi_t : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

есть непрерывное семейство диффеоморфизмов, начинающееся с тождественного диффеоморфизма, а $\omega \in \Omega^k_c(\mathbf{R}^n)$ замкнутая форма с компактным носителем, то ее образ $\varphi_t^*(\omega)$ при сдвиге на диффеоморфизм φ_t будет ей когомологичен:

$$\varphi_t^*(\omega) = \omega + d\omega', \quad \omega' \in \Omega^{k-1}_c(\mathbf{R}^n),$$

поскольку гомотопия

$$\varphi_t : \mathbf{R}^n \times I \longrightarrow \mathbf{R}^n, \quad I = [0,1],$$

является собственным отображением, т.е. прообраз компактного подмножества компактен.

Следовательно, без ограничения общности, можно считать, что носитель формы ω достаточно мал. Для этого нужно применить диффеоморфизм, сжимающий носитель формы ω в достаточно малое множество.

Далее, форма ω представляется в виде произведения

$$\omega = f(x^1, x^2, \dots, x^n)dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Тот факт, что интеграл от формы ω равен нулю означает, что интеграл от положительной части функции f равен интегралу от ее отрицательной части. Пусть $\mathbf{F}^+_\varepsilon$, $\mathbf{F}^-_\varepsilon$, соответственно, равны множествам точек, где функция f больше ε или меньше $-\varepsilon$, $\mathbf{F}^0 = \{f = 0\}$. Пусть $\mathbf{U}^+$, $\mathbf{U}^-$ - непересекающиеся окрестности множеств $\mathbf{F}^+_\varepsilon$, $\mathbf{F}^-_\varepsilon$, $f > 0$ на $\mathbf{U}^+$, $f < 0$ на $\mathbf{U}^-$. Пусть u^+, u^0, u^- — разбиение единицы, подчиненное покрытию

$$\left(\mathbf{U}^+, \mathbf{R}^n \setminus \left(\mathbf{F}^+_\varepsilon \cup \mathbf{F}^-_\varepsilon\right), \mathbf{U}^-\right)$$

Тогда с точностью до малого числа ε интегралы форм $u^+ \cdot \omega$ и $u^- \cdot \omega$ совпадают с точностью до знака. Значит достаточно найти диффеоморфизм φ открытого множества $\mathbf{U}^+$ на множество $\mathbf{U}^-$ при котором функция $u^+ \cdot f$ перейдет в $-u^- \cdot f$. Тогда форма

$$\varphi^*\left(u^+\omega\right) + u^-\omega + u^0\omega,$$

когомологичная форме ω, по норме меньше ε.

Эти соображения дают эвристический путь для доказательства леммы. Но проще честно подсчитать когомологии некоторых простых модельных примеров.

2 Вычисление когомологий де Рама для n-мерной сферы $\mathbf{S}^n$

Рассмотрим стандартное покрытие сферы $\mathbf{S}^n$ двумя картами путем выкалывания северного или южного полюса:

$$\mathbf{S}^n = \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-, \quad \mathbf{U}^{\pm} = \mathbf{U}^+ \cap \mathbf{U}^-,$$

$$\mathbf{U}^+ \approx \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{U}^+ \approx \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{U}^{\pm} \approx \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}^1.$$

Согласно теореме Майера-Виеториса имеем точную последовательность в когомологиях де Рама:

$$\cdots \longrightarrow H^k(\mathbf{S}^n) \longrightarrow H^k(\mathbf{U}^+) \oplus H^k(\mathbf{U}^-) \longrightarrow H^k(\mathbf{U}^{\pm}) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbf{S}^n) \longrightarrow \cdots$$

Заменяя в точной последовательности Майера-Виеториса многообразия на им гомотопически эквивалентные, получаем:

$$\cdots \longrightarrow H^k(\mathbf{R}^n) \oplus H^k(\mathbf{R}^n) \longrightarrow H^k(\mathbf{S}^{n-1}) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbf{S}^n) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbf{R}^n) \oplus H^{k+1}(\mathbf{R}^n) \cdots$$

Если $k > 0$, то

$$\mathbf{0} \longrightarrow H^k(\mathbf{S}^{n-1}) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbf{S}^n) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Если $k = 0$, получаем:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \longrightarrow & H^0(\mathbf{S}^n) \longrightarrow (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}) \longrightarrow & & H^0(\mathbf{S}^{n-1}) \longrightarrow & & H^1(\mathbf{S}^n) \longrightarrow \mathbf{0}. \\
& \| & & \| & & \| \\
& \mathbf{R} & & \mathbf{R} & & \mathbf{0}
\end{array}$$

Значит, по индукции имеем

$$\begin{array}{l}
H^0(\mathbf{S}^n) = \mathbf{R}, \\
H^k(\mathbf{S}^n) = \mathbf{0}, \quad 1 \le k \le n-1, \\
H^n(\mathbf{S}^n) = \mathbf{R}, \\
H^k(\mathbf{S}^n) = \mathbf{0}, \quad k \ge n+1.
\end{array}$$

3 Вычисление когомологий де Рама с компактными носителями n-мерного эвклидова пространства

Имеем два комплекса дифференциальных форм:

$$\Omega_c^*(\mathbf{R}^n) \subset \Omega^*(\mathbf{S}^n),$$

где вложение $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{S}^n$ есть результат выкалывания северного полюса $s_0 \in \mathbf{S}^n$.

Пусть $\omega \in \Omega^*(\mathbf{S}^n)$ - цикл, $d\omega = 0$. Тогда найдется другая форма ω' с компактным носителем в $\mathbf{R}^n$, $\omega' \in \Omega_c^*(\mathbf{R}^n)$ гомологичная форме ω. В самом деле, рассмотрим карту $\mathbf{U} \ni \mathbf{s}_0$, гомеоморфную эвклидовому пространству $\mathbf{R}^n$. Тогда ограничение формы ω на карту $\mathbf{U} \ni \mathbf{s}_0$ является точной формой, т.е.

$$\omega_{|\mathbf{U}} = d\rho, \quad \rho \in \Omega^*(\mathbf{U}).$$

Пусть $V \subset \bar{V} \subset U, \quad s_0 \in V$ меньшая окрестность, тоже диффеоморфная $\mathbf{R}^n$, и $\varphi : \mathbf{S}^n \longrightarrow [0,1]$ – гладкая функция, $\mathbf{supp}\,\varphi \subset U$, $\varphi_{|V} \equiv 1$. Рассмотрим форму

$$\omega' = \omega - d(\varphi \cdot \rho).$$

Легко проверить, что носитель формы ω' лежит вне V, т.е. лежит в $\mathbf{R}^n$, $\omega' \in \Omega_c^*(\mathbf{R}^n)$.

Далее, пусть цикл $\omega' \in \Omega_c^*(\mathbf{R}^n) \subset \Omega^*(\mathbf{S}^n)$ точен, т.е. существует такая форма $\rho \in \Omega^*(\mathbf{S}^n)$, что

$$\omega' = d\rho.$$

Покажем, что существует другая форма $\rho' \in \Omega_c^*(\mathbf{R}^n)$ такая, что

$$\omega' = d\rho'.$$

Действительно, поскольку в окрестности V форма ω' тривиальна, то ограничение ρ на окрестность V является циклом. Значит

$$\rho_{|V} = d\psi.$$

Так же, как и ранее, существует форма ψ' на всем многообразии $\mathbf{S}^n$ такая, что

$$\rho_{|W} = d\psi'_{|W}$$

для некоторой белее мелкой окрестности $s_0 \in W \subset \bar{W} \subset V$. Тогда полагаем

$$\rho' = \rho - d\psi'.$$

Форма ρ' имеет носитель вне окрестности W, т.е.

$$\rho' \in \Omega_c^*(\mathbf{R}^n)$$

и

$$d\rho' = d(\rho - d\psi') = d\rho = \omega'.$$

Мы доказали, что вложение

$$\Omega_c^*(\mathbf{R}^n) \subset \Omega^*(\mathbf{S}^n),$$

индуцирует изоморфизм когомологий во всех размерностях кроме $k = 0$:

$$H_c^k(\mathbf{R}^n) \approx H^k(\mathbf{S}^n), \quad k > 0.$$

Следовательно, когомологии де Рама с компактными носителями эвклидова пространства описываются следующей таблицей:

$$\begin{array}{ll} H_c^k(\mathbf{R}^n) = \mathbf{0}, & 0 \le k \le n-1, \\ H_c^n(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}, & \\ H_c^k(\mathbf{R}^n) = \mathbf{0}, & k \ge n+1. \end{array}$$

В частности, гомоморфизм интегрирования

$$\mathbf{I} : H^n(\mathbf{S}^n) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

является изоморфизмом, следовательно Лемма 1 автоматически доказана.

4 Теорема Майера–Виеториса

Пусть $\mathbf{U}$ – многообразие,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2, \quad \mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$$

открытое покрытие. Имеем точную последовательность пространств дифференциальных форм:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Omega^*(\mathbf{U}) \xrightarrow{p} \Omega^*(\mathbf{U}_1) \oplus \Omega^*(\mathbf{U}_2) \xrightarrow{q} \Omega^*(\mathbf{U}_3) \longrightarrow \mathbf{0},$$

где

$$p(\omega) = \left(\omega_{|\mathbf{U}_1}, \omega_{|\mathbf{U}_2}\right), \quad q(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1)_{|\mathbf{U}_3} - (\omega_2)_{|\mathbf{U}_3}.$$

Точность вытекает из существования гладкого разбиения единицы, подчиненного покрытию $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$. В самом деле, пусть $1 \equiv \varphi_1 + \varphi_2$, $\mathbf{supp}\, \varphi_1 \subset \mathbf{U}_1$, $\mathbf{supp}\, \varphi_2 \subset \mathbf{U}_2$. Рассмотрим форму $\omega \in \Omega^*(\mathbf{U}_3)$. Тогда форма $\varphi_1 \cdot \omega$ продолжима (нулем) до формы $\omega_2 \in \Omega^*(\mathbf{U}_2)$, а форма $-\varphi_2 \cdot \omega$ продолжима (нулем) до формы $\omega_1 \in \Omega^*(\mathbf{U}_1)$. Значит q является эпиморфизмом. И.т.д.

Теорема 2 (Теорема Майера–Виеториса) *Имеет место точная когомологическая последовательность*

$$\cdots \longrightarrow H^k(\mathbf{U}) \xrightarrow{p_*} H^k(\mathbf{U}_1) \oplus H^k(\mathbf{U}_2) \xrightarrow{q_*} H^k(\mathbf{U}_3) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

5 Конечномерность когомологий де Рама для компактных многообразий

Применим предыдущую точную последовательность:

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(\mathbf{U}_3) \xrightarrow{\delta} H^k(\mathbf{U}) \xrightarrow{p_*} H^k(\mathbf{U}_1) \oplus H^k(\mathbf{U}_2) \longrightarrow \cdots$$

Доказательство ведется индукцией по числу элементов покрытия множеств $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$ при помощи открытых множеств, диффеоморфных эвклидову пространству. Пусть $\{\mathbf{V}_i\}$ атлас выпуклых карт. Если

$$\mathbf{U}_1 = \bigcup_{i=1}^{k} \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_{k+1}, \quad M = \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathbf{V}_i,$$

то

$$\mathbf{U}_3 = \bigcup_{i=1}^{k} \left(\mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}_{k+1}\right).$$

Значит условия индукции выполнены. Следовательно

$$\dim H^k(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{Im}\, \delta + \dim \mathbf{Im}\, p_* \leq$$

$$\leq \dim H^{k-1}(\mathbf{U}_3) + \dim \left(H^k(\mathbf{U}_1) \oplus H^k(\mathbf{U}_2)\right).$$

6 Гомологии многообразия

Рассмотрим гладкое ориентированное многообразие M и комплекс дифференциальных форм

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

Дуальный комплекс

$$0 \longleftarrow \Omega'_0(M) \xleftarrow{d^*} \Omega'_1(M) \xleftarrow{d^*} \cdots \xleftarrow{d^d} \Omega'_n(M) \longleftarrow 0$$

где

$$\Omega'_k(M) \stackrel{def}{=} \mathbf{Hom}_{\mathbf{R}}\left(\Omega_k(M), \mathbf{R}\right),$$

определяет группы гомологии многообразия M:

$$H_k\left(M\right) = \mathcal{H}\left(\Omega'_*\left(M\right), d^*\right) \approx \mathbf{Hom}\left(H^k\left(M\right), \mathbf{R}\right).$$

Существует естественное отображение комплексов

$$I : \Omega^*_c(M) \longrightarrow \Omega'_*(M),$$

задаваемое формулой:

$$I(\omega)(\omega') \overset{def}{=} \int\limits_M (\omega \wedge \omega')\,, \quad \omega \in \Omega_c^*(M), \quad \omega' \in \Omega^*(M).$$

Отображение I коммутирует с дифференциалом с точностью до знака, т.е.

$$I\left(d\omega\right) = \pm d^*\left(I(\omega)\right).$$

Действительно,

$$I\left(d\omega\right)\left(\omega'\right) = \int\limits_M \left(d\omega \wedge \omega'\right) = \pm \int\limits_M \left(\omega \wedge d\omega'\right) = \pm I\left(\omega\right)\left(d\omega'\right) = \pm d^*\left(I\left(\omega\right)\right)\left(\omega'\right).$$

Значит, I индуцирует гомоморфизм гомологий:

$$\mathcal{H}(I) : H_c^*(M) \longrightarrow H_*(M).$$

Теорема 3 (Двойственность Пуанкаре) *Пусть M – гладкое компактное ориентированное многообразие. Гомоморфизм $\mathcal{H}(I)$*

$$\mathcal{H}(I) : H^*(M) \longrightarrow H_*(M)$$

является изоморфизмом.

Proof. Пусть $\mathbf{U}_\alpha$ – конечное открытое покрытие выпуклыми множествами. Множества $\mathbf{U}_\alpha$ гомеоморфны $\mathbf{R}^n$, равно как и любые конечные их пересечения. Тогда

$$\mathcal{H}(I) : H_c^*(\mathbf{U}_\alpha) \longrightarrow H_*(\mathbf{U}_\alpha).$$

является изоморфизмом по тривиальным причинам: пусть $f \in \Omega_c^0(\mathbf{U}_\alpha)$ – финитная положительная функция,

$$\omega = f(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad [\omega] \in H_c^n(\mathbf{U}_\alpha),$$

$$\int\limits_{\mathbf{U}_\alpha} \omega = 1.$$

Тогда

$$\mathcal{H}(I)([\omega]) = 1 \in H_0(\mathbf{U}_\alpha).$$

Далее, по индукции применяем точную последовательность Майера–Виеториса:

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \longleftarrow H_{n-k-1}(\mathbf{U}_1) \oplus H_{n-k-1}(\mathbf{U}_2) & \xleftarrow{q_*} H_{n-k-1}(\mathbf{U}_3) \xleftarrow{\delta} & H_{n-k}(\mathbf{U}) \xleftarrow{p_*} \\
\Big\uparrow \mathcal{H}(I) & \Big\uparrow \mathcal{H}(I) & \Big\uparrow \mathcal{H}(I) \\
\cdots \longleftarrow H_c^{k+1}(\mathbf{U}_1) \oplus H_c^{k+1}(\mathbf{U}_2) & \xleftarrow{q_*} H_c^{k+1}(\mathbf{U}_3) \xleftarrow{\delta} & H_c^{k}(\mathbf{U}) \xleftarrow{p_*}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\xleftarrow{p_*} \; H_{n-k}(\mathbf{U}_1) \oplus H_{n-k}(\mathbf{U}_2) \xleftarrow{q_*} & H_{n-k}(\mathbf{U}_3) \xleftarrow{\delta} \cdots \\
\Big\uparrow \mathcal{H}(I) & \Big\uparrow \mathcal{H}(I) \\
\xleftarrow{p_*} \; H_c^{k}(\mathbf{U}_1) \oplus H_c^{k}(\mathbf{U}_2) \xleftarrow{q_*} & H_c^{k}(\mathbf{U}_3) \xleftarrow{\delta} \cdots
\end{array}$$

и теорему о пяти изоморфизмах.

7 Выпуклые окрестности риманова многообразия

Существование выпуклых окрестностей было доказано Уайтхедом [1] (см. также Кобаяси и Номидзу [2], стр. 146).

Пусть в точке $\mathbf{p}_0$ риманова многообразия M, $p_0 \in M$, рассматривается локальная система координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, причем координаты точки p_0 равны

$$\begin{array}{c}
x^1(p_0) = x_0^1 = 0, \\
x^2(p_0) = x_0^2 = 0, \\
\vdots \\
x^n(p_0) = x_0^n = 0.
\end{array}$$

Допустим, что координаты подобраны таким образом, что в точке p_0 символы Кристоффеля римановой метрики равны нулю,

$$\Gamma^i_{jk}(p_0) = 0.$$

Тогда окрестность $\mathbf{U}(p_0, \varepsilon)$ точки p_0, задаваемая неравенствами

$$\mathbf{U}(p_0, \varepsilon) = \left\{ (x^1, x^2, \ldots, x^n) : \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 < \varepsilon \right\}$$

выпукла для достаточно малого положительного числа $\varepsilon > 0$.

Положим

$$\mathbf{S}(p_0, \varepsilon) = \left\{ (x^1, x^2, \ldots, x^n) : \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 = \varepsilon \right\}$$

и пусть $q(0) = (x^1(0), x^2(0), \ldots, x^n(0)) \in \mathbf{S}(p_0, \varepsilon)$ – некоторая точка на границе окрестности $\mathbf{U}(p_0, \varepsilon)$. Пусть $q(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ – геодезическая, проходящая через точку $q(0) = (x^1(0), x^2(0), \ldots, x^n(0))$ и касающаяся границы $\mathbf{S}(p_0)$. Условие касания вектора $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ к границе $\mathbf{S}(p_0, \varepsilon)$ в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \xi^k = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} (x^k(t))^2.$$

Тогда

$$\begin{cases} F(0) = \varepsilon, \\ \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)_{|t=0} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} (x^k(0)) \left(\frac{x^k(t)}{dt}\right)_{|t=0} = 0. \\ \left(\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{dx^k(t)}{dt}\right)^2 + x^k(t)\frac{d^2x^k(t)}{dt^2}\right). \end{cases}$$

Поскольку уравнение геодезической линии имеет вид:

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{dx^i}{dt} = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

третье равенство приобретает вид:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right) = \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{dx^k}{dt}\right)^2 - x^k(t)\Gamma^k_{ji}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}\right) = \\ &= 2\sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \sum_k x^k(t)\Gamma^k_{ji}\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}. \end{aligned}$$

Следовательно, при достаточно малом значении ε квадратичная форма с матрицей $\left(\delta_{ij} - \sum\limits_k x^k(t)\Gamma^k_{ji}\right)$ положительно определена. Значит

$$F(t) > \varepsilon$$

при $t \neq 0$, т.е. $q(t) \notin \mathbf{U}(p_0, \varepsilon)$ при $t \neq 0$.

В частности, если геодезическая $q(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$, $0 \geq t \geq 1$, соединяет две точки в окрестности $\mathbf{U}(p_0, \varepsilon)$, то и вся геодезическая лежит в этой окрестности. Если это не так, то тогда для некоторого промежуточного значения параметра t_0, $0 \geq t_0 \geq 1$, функция $F(t) = \sum\limits_{k=1}^{n}(x^k(t))^2$ принимает наибольшее значение

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n}(x^k(t_0))^2 = \varepsilon_0 > \varepsilon,$$

т.е. $q(t_0) \in \mathbf{S}(p_0, \varepsilon_0)$. Значит кривая $q(t)$ касается многообразия $\mathbf{S}(p_0, \varepsilon_0)$ в точке $q(t_0)$, но сама лежит внутри окрестности $\mathbf{U}(p_0, \varepsilon_0)$, что противоречит выше доказанному.

Таким образом имеем следующую теорему:

Теорема 4 *Компактное риманово многообразие имеет конечный атлас карт $\{\mathbf{U}_\alpha\}$, все карты которого и все их конечные пересечения*

$$\mathbf{U}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = \bigcap_{j=1}^{k} \mathbf{U}_{\alpha_j}$$

диффеоморфны эвклидовому пространству $\mathbf{R}^n$.

8 Нормальная система координат

Нормальная система координат – это система, которая получается при геодезическом отображении касательного пространства в точке $p_0 \in M$. Это значит, что каждая линия, задаваемая равенствами

$$\begin{cases} x^1 = \xi^1 t, \\ x^2 = \xi^2 t, \\ \quad \vdots \\ x^n = \xi^n t, \end{cases}$$

является геодезической линией. Значит

$$\frac{\nabla}{dt}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = 0,$$

т.е.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

или

$$\Gamma^i_{jk}(\xi^1 t, \xi^2 t, \ldots, \xi^n t)\xi^j\xi^k = 0.$$

При $t = 0$ и произвольных значениях $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ получаем

$$\Gamma^i_{jk}(0, 0, \ldots, 0)\xi^j\xi^k = 0.$$

Следовательно,

$$\Gamma^i_{jk}(p_0) = \Gamma^i_{jk}(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Список литературы

[1] Whitehead J.H.C. Convex regions in the geometry of paths. *Quart. J. Math.*, 3:33–42, 226–227, 1932.

[2] Ш. Кобаяси and К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии, том 1.* Наука, М., 1981.