П. С. АЛЕКСАНДРОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ И ОБЩУЮ ТОПОЛОГИЮ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов математических специальностей
высших учебных заведений*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

топологией есть T_1-пространство. Это пространство не удовлетворяет хаусдорфовой аксиоме отделимости: какова бы ни была точка $x \in X$, $x \neq \xi$, любые две окрестности $U(\xi)$ и $U(x)$ пересекаются (так как $U(\xi)$ содержит все действительные числа, кроме, быть может, некоторого конечного их множества, тогда как $U(x)$ есть открытое множество на числовой прямой и, значит, содержит целый интервал).

Назовем *регулярным пространством* такое T_1-пространство, в котором для любой точки x и любого не содержащего эту точку замкнутого множества F существуют дизъюнктные окрестности Ox и OF. Всякое регулярное пространство, очевидно, хаусдорфово.

Для получения примера нерегулярного хаусдорфова пространства рассмотрим множество R всех действительных чисел и определим в R топологию при помощи системы окрестностей (см. § 4) следующим образом: окрестности всех точек $x \neq 0$ те же, что и на числовой прямой; окрестности точки $x = 0$ получаются вычитанием из любого содержащего эту точку интервала всех попавших в этот интервал точек вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Пространство R хаусдорфово; множество всех точек вида $\frac{1}{n}$ замкнуто в R; всякая окрестность этого замкнутого множества пересекается со всякой окрестностью точки 0.

Дальнейшее сужение класса пространств получим, если будем рассматривать так называемые нормальные пространства: *нормальным пространством* называется такое T_1-пространство X, в котором всякие два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности.

Пример регулярного ненормального пространства можно построить следующим образом. Назовем *произведением двух топологических пространств* X и Y произведение двух множеств X и Y (т. е. множество всех пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$), в котором открытыми множествами являются произведения любого открытого $A \subseteq X$ на любое открытое $B \subseteq Y$ и всевозможные суммы таких произведений. Легко доказывается, что произведение двух регулярных пространств есть регулярное пространство. В частности, регулярным пространством является произведение S пространства всех порядковых чисел $\alpha \leqslant \omega_1$ на пространство всех порядковых чисел $\beta \leqslant \omega$. Пространство S, впрочем, есть не только регулярное, но даже нормальное пространство (читателю рекомендуется доказать это утверждение в качестве упражнения). Однако, вычитая из пространства S одну лишь точку (ω_1, ω), получим ненормальное пространство S^*. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим множество X', состоящее из всех точек вида (α, ω), где α — любое порядковое число $< \omega_1$, и множество Y', состоящее из всех точек вида (ω_1, n), где n — любое натуральное число, X' и Y' суть замкнутые в S^* множества без общих точек, любые две окрестности $U(X')$ и $U(Y')$ которых в пространстве S' пересекаются (последнее утверждение читатель также должен сам доказать, опираясь на простые свойства трансфинитных чисел второго класса). Пространство S^*, не будучи нормальным, является регулярным, поскольку всякое подпространство регулярного пространства регулярно.

Теорема 3 § 1 может теперь быть сформулирована так:

Всякое метрическое пространство нормально.

Так как всякое множество, лежащее в каком-нибудь метрическом пространстве, само является метрическим пространством, то метрические пространства могут служить примером так называемых *наследственно нормальных пространств*, понимая под наследственно нормальным такое нормальное пространство, всякое подмножество которого нормально; наоборот, пространство S, будучи нормальным, не является наследственно нормальным, так как содержит в качестве подмножества ненормальное пространство S^*.

Важнейшим подклассом класса наследственно нормальных пространств являются так называемые совершенно нормальные пространства.

Определение 10. Нормальное пространство X называется *совершенно нормальным*, если всякое замкнутое его подмножество есть G_δ-множество.

Доказательство наследственной нормальности совершенно нормальных пространств можно найти в книге Александрова — Пасынкова [1], гл. 1, § 5.

Теоремы 3 и 4 § 1 могут быть теперь объединены следующим образом:

Теорема 35. *Всякое метрическое пространство совершенно нормально.*

Теорема 36. *Всякое упорядоченное пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — дизъюнктные замкнутые подмножества упорядоченного пространства X. Рассмотрим открытое множество $W = X \setminus B$. По теореме 13 § 5 гл. 1 множество W распадается в дизъюнктную сумму порядковых компонент W_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, которые в данном случае, очевидно, открыты. Покажем, что для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такое открытое множество U_α, что

$$A \cap W_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq [U_\alpha] \subseteq W_\alpha. \qquad (2)$$

Если $A \cap W_\alpha = \Lambda$, то положим $U_\alpha = \Lambda$. Пусть теперь $A \cap W_\alpha \neq \Lambda$. Множество $X \setminus W_\alpha$ распадается в сумму двух порядково выпуклых компонент C и D (при этом $x < y$ для $x \in C$ и $y \in D$). Построим