

Решения тестовых задач

к 01 сентября 2009 г.

5 сентября 2009 г.

Вариант № 1

1. Пусть $I \subset \mathbf{R}^1$ - единичный отрезок. Построить гладкую класса C^∞ вещественнозначную функцию f , такую, что $I = f^{-1}(0)$.

Решение:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t < 0, \\ 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-\frac{1}{(t-1)^2}}, & 1 < t. \end{cases}$$

2. Доказать непрерывность функции $\rho(x)$ расстояния от переменной точки в $x \in \mathbf{R}^n$ до заданного замкнутого множества $F \subset \mathbf{R}^n$,

$$\rho(x) = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Решение:

$$\inf_{y \in F} d(x, y) \leq d(x, y), \quad \forall y \in F. \quad \&$$

$$(A \leq d(x, y) \forall y \in F) \Rightarrow A \leq \inf_{y \in F} d(x, y) \quad \&$$

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y), \quad \forall y \in F. \quad \Rightarrow$$

$$\rho(x) = \inf d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y), \quad \forall y \in F. \quad \Rightarrow$$

$$\rho(x) = \inf d(x, y) \leq d(x, x_0) + \inf d(x_0, y) = d(x, x_0) + \rho(x_0). \quad \Rightarrow$$

$$\rho(x) - \rho(x_0) \leq d(x, x_0). \quad \Rightarrow$$

$$\rho(x_0) - \rho(x) \leq d(x, x_0). \quad \Rightarrow$$

$$|\rho(x) - \rho(x_0)| \leq d(x, x_0).$$

3. В точке $M(1, 1, 2)$ цилиндра $4x^2 + y^2 - 5 = 0$ задан вектор $\vec{a}(1, -4, 3)$. Является ли вектор \vec{a} касательным к цилиндру в точке M ?

Решение:

$$\frac{d}{d\vec{a}}(4x^2 + y^2 - 5) \Big|_{M(1,1,2)} = 8x \cdot 1 - 2y \cdot 4 = 8 - 8 = 0$$

Является.

4. На эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ взята точка $M(0, 0, c)$. Найти в точке M главные кривизны и главные направления.

Решение: В качестве локальных координат в окрестности точки $M(0, 0, c)$ берем координаты (x, y) . Поверхность задается вектор-функцией

$$\vec{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix},$$

$$z(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \approx c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) + O((x^2 + y^2)^2).$$

При вычислении первых и вторых производных в нулевой точке членом $O((x^2 + y^2)^2)$ можно пренебречь. Тогда

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{c}{a^2}x \end{pmatrix}, \vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{c}{b^2}y \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} \frac{c}{a^2}x \\ \frac{c}{b^2}y \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{c}{a^2} \end{pmatrix}, \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{yy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{c}{b^2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{c}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Главные кривизны равны $-\frac{c}{a^2}, -\frac{c}{b^2}$. Главные направления равны

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Точка M движется по лучу с постоянной скоростью v , который вращается вокруг своего начала O на плоскости с постоянной угловой скоростью ω . Найти длину траектории точки M , получающейся при одном обороте луча (в начальный момент $OM = a$).

Решение: В полярных координатах (ρ, φ) траектория описывается параметрически

$$\begin{aligned} \rho &= v \cdot t + a, \\ \varphi &= \omega \cdot t. \end{aligned}$$

Один оборот луча происходит за время $t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ ($t_0 = 0$). Длина траектории вычисляется как интеграл

$$l = \int_{t=0}^{t_1} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_{t=0}^{t_1} \sqrt{(\dot{r}^{\vec{r}}, \dot{r}^{\vec{r}})(t)} dt$$

Скалярный квадрат радиус-вектора $\vec{r}^{\vec{r}}(t)$ в полярных координатах вычисляется через первую квадратичную форму $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$:

$$(\dot{\vec{r}}^{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}^{\vec{r}}) = v^2 + (v t + a)^2 \omega^2.$$

$$l = \int_{t=0}^{t_1} \sqrt{v^2 + (vt + a)^2} \omega^2 dt.$$

Полагаем $\tau = \omega(vt + a)$, $\tau_0 = \omega a$, $\tau_1 = 2\pi v + \omega a$. Тогда

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\omega v} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{v^2 + \tau^2} d\tau = \frac{1}{2\omega v} (\tau \sqrt{v^2 + \tau^2} + v^2 \ln(\tau + \sqrt{v^2 + \tau^2})) \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} = \\ &= \frac{1}{2\omega v} \left((2\pi v + \omega a) \sqrt{v^2 + (2\pi v + \omega a)^2} - \omega a \sqrt{v^2 + (\omega a)^2} \right) + \\ &+ \frac{v^2}{2\omega v} \left(\ln((2\pi v + \omega a) + \sqrt{v^2 + (2\pi v + \omega a)^2}) - \ln(\omega a + \sqrt{v^2 + (\omega a)^2}) \right) = \\ &= \frac{v}{2\omega} \left((2\pi + \frac{a\omega}{v}) \sqrt{1 + (2\pi + \frac{a\omega}{v})^2} - \frac{a\omega}{v} \sqrt{1 + (\frac{a\omega}{v})^2} \right) + \\ &+ \frac{v}{2\omega} \left(\ln((2\pi v + \omega a) + \sqrt{v^2 + (2\pi v + \omega a)^2}) - \ln(\omega a + \sqrt{v^2 + (\omega a)^2}) \right) = \\ &= \frac{v}{2\omega} \left((2\pi + \frac{a\omega}{v}) \sqrt{1 + (2\pi + \frac{a\omega}{v})^2} + \ln((2\pi + \frac{a\omega}{v}) + \sqrt{1 + (2\pi + \frac{a\omega}{v})^2}) - \right. \\ &\left. - \frac{a\omega}{v} \sqrt{1 + (\frac{a\omega}{v})^2} - \ln(\frac{a\omega}{v} + \sqrt{1 + (\frac{a\omega}{v})^2}) \right) = \end{aligned}$$

Вариант № 2

1. Пусть $I^2 \subset \mathbf{R}^2$ - квадрат на плоскости. Построить гладкую класса C^∞ вещественнозначную функцию f , такую, что $I^2 = f^{-1}(0)$.

Решение:

$$g(x, y) = f(x) + f(y).$$

2. Выразить третью производную по натуральному параметру вектор-функции $\vec{r}(s)$ в репере Френе.

Решение:

$$\vec{r}' = \vec{r}'(s); \quad \vec{r}'' = \vec{\tau}; \quad \vec{r}''' = k \cdot \vec{n}$$

$$\vec{r}''' = k \cdot \dot{\vec{n}} + k \cdot \dot{\vec{n}} = k \cdot \dot{\vec{n}} + k \cdot (-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}) = -k^2\vec{\tau} + k \cdot \dot{\vec{n}} + k\kappa\vec{\beta}.$$

3. В точке $M(1, 1, 2)$ конуса $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ задан вектор $\vec{a}(1, 0, 1)$. Является ли вектор \vec{a} касательным к конусу в точке M ?

Решение:

$$\frac{d}{d\vec{a}}(2x^2 + 2y^2 - z^2) \Big|_{M(1,1,2)} = 4x \cdot 1 + 4y \cdot 0 - 2z \cdot 1 = 4 + 0 - 4 = 0.$$

Является.

4. На параболоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z + 1 = 0$ взята точка $M(0, 0, 1)$. Найти в точке M главные кривизны и главные направления.

Решение: В качестве локальных координат в окрестности точки $M(0, 0, 1)$ берем координаты (x, y) . Поверхность задается вектор-функцией

$$\vec{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix},$$

$$z(x, y) = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{a^2}x \end{pmatrix}, \vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{b^2}y \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a^2}x \\ -\frac{2}{b^2}y \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{a^2} \end{pmatrix}, \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{yy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Главные кривизны равны $\frac{2}{a^2}, \frac{2}{b^2}$. Главные направления равны $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Окружность радиуса r катится без скольжения по прямой. В начальный момент точка M окружности находится на прямой. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на прямую.

Решение: Пусть прямая — это ось Ox . Центр окружности движется по прямой ($y = r$). В начальный момент центр окружности имеет координаты $(0, r)$, а потом в текущий момент t имеет координаты (t, r) , при этом окружность повернется на угол, равный $\varphi = \frac{t}{r}$. Координаты фиксированной точки на окружности при этом приобретут следующие значения:

$$(x = t - r \sin \varphi, y = r(1 - \cos \varphi)),$$

$$\vec{u}(\varphi) = (r(\varphi - \sin \varphi), r(1 - \cos \varphi))$$

Точка снова попадет на прямую при $\varphi = 2\pi$. Длина траектории равна

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\vec{u}}{d\varphi} \right| d\varphi = r \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \varphi} d\varphi = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 4r(-\cos \frac{\varphi}{2}) \Big|_0^{2\pi} = 8r. \end{aligned}$$

Вариант № 3

1. Построить непрерывный гомеоморфизм между n -мерным кубом

$$\mathbf{I}^n = \{|x_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

и n -мерным шаром

$$\mathbf{D}^n = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Решение:

$$f : \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{D}^n, \quad g = f^{-1} : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{I}^n :$$

$$|x| = \sqrt{\sum x_i^2}, \quad M(x) = \max |x_i|$$

$$f(x) = \frac{M(x)x}{|x|},$$

$$g(y) = \frac{y|y|}{M(y)}.$$

2. Построить гладкую параметризацию кривой, состоящей из двух сторон заданного треугольника на плоскости.

Решение: Пусть треугольник имеет вершины $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})e^{1 - \frac{1}{(2t-1)^2}}, & 0 \leq t < 1/2, \\ \vec{b} + (\vec{c} - \vec{b})e^{1 - \frac{1}{(2t-1)^2}}, & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

3. В точке $M(1, 1, 2)$ цилиндра $4x^2 + y^2 - 5 = 0$ задан вектор $\vec{a}(2, -4, 3)$. Является ли вектор \vec{a} касательным к цилиндру в точке M ?

Решение:

$$\frac{d}{d\vec{a}}(4x^2 + y^2 - 5) \Big|_{M(1,1,2)} = 8x \cdot 2 - 2y \cdot 4 = 16 - 8 \neq 0$$

Не является.

4. На гиперboloиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ взята точка $M(a, 0, 0)$. Найти в точке M первую и вторую квадратичные формы.

Решение: В качестве локальных координат в окрестности точки $M(a, 0, 0)$ берем координаты (y, z) . Поверхность задается вектор-функцией

$$\vec{r}(y, z) = \begin{pmatrix} x(y, z) \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$x(y, z) = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \approx a \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right) + O((y^2 + z^2)^2).$$

При вычислении первых и вторых производных в нулевой точке членом $O((x^2 + y^2)^2)$ можно пренебречь. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{r}_y &= \begin{pmatrix} -\frac{a}{b^2}y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_z = \begin{pmatrix} \frac{a}{c^2}z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a}{b^2}y \\ -\frac{a}{c^2}z \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_{yy} &= \begin{pmatrix} -\frac{a}{b^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{yz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{zz} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{c^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. Окружность радиуса r катится без скольжения по внешней стороне неподвижной окружности радиуса R . В начальный момент точка M окружности находится на неподвижной окружности. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на неподвижную окружность.

Решение: Пусть O центр неподвижной окружности, c центр окружности подвижной, τ точка касания окружностей. Пусть центр c повернулся на угол t (вокруг точки O). На тот же угол повернется и точка касания τ . При этом точка τ пройдет траекторию длиной Rt . Значит подвижная окружность должна повернуться на угол φ относительно луча Oc таким образом, чтобы дуга, соединяющая фиксированную точку M с точкой касания τ , равная $r\varphi$, совпала с Rt , т.е.

$$Rt = r\varphi.$$

Конечная точка соответствует значению $\varphi_1 = 2\pi$. Координаты точки c равны

$$(x = (R+r)\sin t, y = (R+r)\cos t).$$

$$(x = (R+r)\sin t - r\sin(\varphi+t), y = (R+r)\cos t - r\cos(\varphi+t)),$$

т.е.

$$\vec{M} = \left((R+r)\sin\frac{r}{R}\varphi - r\sin\left(1+\frac{r}{R}\right)\varphi, (R+r)\cos\frac{r}{R}\varphi - r\cos\left(1+\frac{r}{R}\right)\varphi \right).$$

$$\vec{M}' = \frac{(R+r)r}{R} \left(\cos\frac{r}{R}\varphi - \cos\frac{R+r}{R}\varphi, -\sin\frac{r}{R}\varphi + \sin\frac{R+r}{R}\varphi \right).$$

$$\begin{aligned}|\vec{M}'| &= \frac{(R+r)r}{R} \sqrt{\left(\cos\frac{r}{R}\varphi - \cos\frac{R+r}{R}\varphi\right)^2 + \left(-\sin\frac{r}{R}\varphi + \sin\frac{R+r}{R}\varphi\right)^2} = \\ &= \frac{(R+r)r}{R} \sqrt{2-2\cos\varphi}\end{aligned}$$

Следовательно,

$$l = \int_0^{2\pi} \frac{(R+r)r}{R} \sqrt{2-2\cos\varphi} d\varphi = 8 \frac{(R+r)r}{R}.$$

Вариант № 4

1. Построить гладкий в обе стороны гомеоморфизм между открытым кубом

$$\overset{\circ}{\mathbf{I}}^n = \{|x_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

и пространством \mathbf{R}^n .

Решение:

$$f: \overset{\circ}{\mathbf{I}}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

$$y_i = \mathbf{tg}\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$x_i = \frac{2}{\pi} \mathbf{arctg}(y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2. Доказать, что если материальная точка движется в пространстве под действием центральной силы (т.е. сила в каждой точке P направлена вдоль прямой OP , где O — некоторая фиксированная точка), то ее траектория — плоская кривая.

Решение:

$$\ddot{\vec{r}} = f(r)\vec{r}. \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}([\vec{r}, \dot{\vec{r}}]) = [\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}] = 0, \Rightarrow$$

$$\vec{a} = [\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \mathbf{const} . \Rightarrow$$

$$(\vec{a}, \vec{r} - \vec{r}_0) \equiv 0.$$

3. В точке $M(1, 1, 2)$ конуса $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ задан вектор $\vec{a}(1, 1, 1)$. Является ли вектор \vec{a} касательным к конусу в точке M ?

Решение:

$$\frac{d}{d\vec{a}}(2x^2 + 2y^2 - z^2) \Big|_{M(1,1,2)} = 4x \cdot 1 + 4y \cdot 1 - 2z \cdot 1 = 4 + 4 - 4 \neq 0.$$

Не является.

4. На гиперboloиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ взята точка $M(0, 0, c)$. Найти в точке M первую и вторую квадратичные формы.

Решение: В качестве локальных координат в окрестности точки $M(0, 0, c)$ берем координаты (x, y) . Поверхность задается вектор-функцией

$$\vec{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix},$$

$$z(x, y) = c\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \approx c\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) + O((x^2 + y^2)^2).$$

При вычислении первых и вторых производных в нулевой точке членом $O((x^2 + y^2)^2)$ можно пренебречь. Тогда

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c}{a^2}x \end{pmatrix}, \vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c}{b^2}y \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a^2}x \\ -\frac{c}{b^2}y \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c}{a^2} \end{pmatrix}, \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{yy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c}{b^2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{c}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{c}{b^2} \end{pmatrix}.$$

5. Окружность радиуса r катится без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса $R > r$. В начальный момент точка M окружности находится на неподвижной окружности. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на неподвижную окружность.

Решение: Решение аналогично предыдущей задаче с заменой $(R+r)$ на $(R-r)$.

Ответ:

$$8\frac{(R-r)r}{R}$$

В самом деле, пусть O центр неподвижной окружности, c центр окружности подвижной, τ точка касания окружностей. Пусть центр c повернулся на угол t (вокруг точки O). На тот же угол повернется и точка касания τ . При этом точка τ пройдет траекторию длиной Rt . Значит подвижная окружность должна повернуться на угол φ относительно луча Oc таким образом, чтобы длина дуги, соединяющая фиксированную точку M с точкой касания τ , равная $r\varphi$, совпала с Rt , т.е.

$$Rt = r\varphi.$$

Конечная точка соответствует значению $\varphi_1 = 2\pi$. Координаты точки c равны

$$(x = (R-r)\sin t, y = (R-r)\cos t).$$

$$(x = (R-r)\sin t - r\sin(\varphi - t), y = (R-r)\cos t - r\cos(\varphi - t)),$$

т.е.

$$\vec{M} = \left((R-r) \sin \frac{r}{R} \varphi - r \sin \left(1 - \frac{r}{R}\right) \varphi, (R-r) \cos \frac{r}{R} \varphi + r \cos \left(1 - \frac{r}{R}\right) \varphi \right).$$

$$\vec{M}' = \frac{(R-r)r}{R} \left(\cos \frac{r}{R} \varphi - \cos \frac{R-r}{R} \varphi, -\sin \frac{r}{R} \varphi - \sin \frac{R-r}{R} \varphi \right).$$

$$\begin{aligned} |\vec{M}'| &= \frac{(R-r)r}{R} \sqrt{\left(\cos \frac{r}{R} \varphi - \cos \frac{R-r}{R} \varphi\right)^2 + \left(-\sin \frac{r}{R} \varphi - \sin \frac{R-r}{R} \varphi\right)^2} = \\ &= \frac{(R-r)r}{R} \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$l = \int_0^{2\pi} \frac{(R-r)r}{R} \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} d\varphi = 8 \frac{(R-r)r}{R}.$$