Решения тестовых задач

к 01 сентября 2009 г.

1 сентября 2009 г.

1. Пусть $I \subset \mathbf{R}^1$ - единичный отрезок. Построить гладкую класса C^∞ вещественнозначную функцию f, такую, что $I = f^{-1}(0)$.

   Решение:
$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t < 0, \\ 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-\frac{1}{(t-1)^2}}, & 1 < t. \end{cases}$$

2. Пусть $I^2 \subset \mathbf{R}^2$ - квадрат на плоскости. Построить гладкую класса C^∞ вещественнозначную функцию f, такую, что $I^2 = f^{-1}(0)$.

   Решение:
$$g(x, y) = f(x)f(y).$$

3. Построить непрерывный гомеоморфизм между n-мерным кубом
$$\mathbf{I}^n = \{|x_i| \leq 1, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n\}$$
   и n-мерным шаром
$$\mathbf{D}^n = \{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}.$$

   Решение:
$$f : \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{D}^n, \quad g = f^{-1} : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{I}^n :$$
$$|x| = \sqrt{\sum x_i^2}, \quad M(x) = \max |x_i|$$
$$f(x) = \tfrac{M(x)x}{|x|},$$
$$g(y) = \tfrac{y|y|}{M(y)}.$$

4. Построить гладкий в обе стороны гомеоморфизм между открытым кубом
$$\overset{\circ}{\mathbf{I}}{}^n = \{|x_i| < 1, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n\}$$
   и пространством $\mathbf{R}^n$.

   Решение:
$$f : \overset{\circ}{\mathbf{I}}{}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

$$y_i = \mathbf{tg}(\frac{\pi}{2} x_i), \quad i = 1,\ 2, \ldots, n.$$

$$x_i = \frac{2}{\pi} \mathbf{arctg}(y_i), \quad i = 1,\ 2, \ldots, n.$$

==

5. Доказать непрерывность функции $\rho(x)$ расстояния от переменной точки в $x \in \mathbf{R}^n$ до заданного замкнутого множества $F \subset \mathbf{R}^n$,

$$\rho(x) = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Решение:

$$\inf_{y \in F} d(x, y) \leq d(x, y), \quad \forall y \in F. \quad \&$$

$$(A \leq d(x, y) \forall y \in F) \Rightarrow A \leq \inf_{y \in F} d(x, y) \quad \&$$

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y), \quad \forall y \in F. \quad \Rightarrow$$

$$\rho(x) = \inf d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y), \quad \forall y \in F. \quad \Rightarrow$$

$$\rho(x) = \inf d(x, y) \leq d(x, x_0) + \inf d(x_0, y) = d(x, x_0) + \rho(x_0). \quad \Rightarrow$$

$$\rho(x) - \rho(x_0) \leq d(x, x_0). \quad \Rightarrow$$

$$\rho(x_0) - \rho(x) \leq d(x, x_0). \quad \Rightarrow$$

$$|\rho(x) - \rho(x_0)| \leq d(x, x_0).$$

6. Выразить третью производную по натуральному параметру вектор–функции $\ddot{\mathbf{r}}\ (s)$ в репере Френе.

Решение:

$$\vec{r} = \vec{r}(s); \quad \dot{\vec{r}} = \vec{\tau}; \quad \ddot{\vec{r}} = k \cdot \vec{n}$$

$$\dddot{\vec{r}} = \dot{k} \cdot \vec{n} + k \cdot \dot{\vec{n}} = \dot{k} \cdot \vec{n} + k \cdot (-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}) = -k^2\vec{\tau} + \dot{k} \cdot \vec{n} + k\kappa\vec{\beta}.$$

7. Доказать, что если материальная точка движется в пространстве под действием центральной силы (т.е. сила в каждой точке P направлена вдоль прямой OP, где O — некоторая фиксированная точка), то ее траектория — плоская кривая.

   Решение:

$$\ddot{\vec{r}} = f(r)\vec{r}. \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}([\vec{r}, \dot{\vec{r}}]) = [\vec{r}, \ddot{\vec{r}}] = 0, \Rightarrow$$

$$\vec{a} = [\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \mathbf{const}\ . \Rightarrow$$

$$(\vec{a}, \vec{r} - \vec{r_0}) \equiv 0.$$

8. Построить гладкую параметризацию кривой, состоящей из двух сторон заданного треугольника на плоскости.

   Решение:Пусть треугольник имеет вершины $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})e^{1-\frac{1}{(2t-1)^2}}, & 0 \le t < 1/2, \\ \vec{b} + (\vec{c} - \vec{b})e^{1-\frac{1}{(2t-1)^2}}, & 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

===

9. В точке $M(1,1,2)$ цилиндра $4x^2 + y^2 - 5 = 0$ задан вектор $\vec{a}(1, -4, 3)$. Является ли вектор $\vec{a}$ касательным к цилиндру в точке M?

   Решение:

$$\frac{d}{d\vec{a}}(4x^2 + y^2 - 5)\,\big|_{M(1,1,2)} = 8x \cdot 1 - 2y \cdot 4 = 8 - 8 = 0$$

   Является.

10. В точке $M(1,1,2)$ конуса $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ задан вектор $\vec{a}(1, 0, 1)$. Является ли вектор $\vec{a}$ касательным к конусу в точке M?

    Решение:

$$\frac{d}{d\vec{a}}(2x^2 + 2y^2 - z^2)\,\big|_{M(1,1,2)} = 4x \cdot 1 + 4y \cdot 0 - 2z \cdot 1 = 4 + 0 - 4 = 0.$$

    Является.

11. В точке $M(1,1,2)$ цилиндра $4x^2+y^2-5=0$ задан вектор $\vec{a}(2,-4,3)$. Является ли вектор $\vec{a}$ касательным к цилиндру в точке M?

Решение:

$$\frac{d}{d\vec{a}}(4x^2+y^2-5)\left|_{M(1,1,2)}\right. = 8x\cdot 2-2y\cdot 4 = 16-8\neq 0$$

Не является.

12. В точке $M(1,1,2)$ конуса $2x^2+2y^2-z^2=0$ задан вектор $\vec{a}(1,1,1)$. Является ли вектор $\vec{a}$ касательным к конусу в точке M?

Решение:

$$\frac{d}{d\vec{a}}(2x^2+2y^2-z^2)\left|_{M(1,1,2)}\right. = 4x\cdot 1+4y\cdot 1-2z\cdot 1 = 4+4-4\neq 0.$$

Не является.

==

13. На эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ взята точка $M(0,0,c)$. Найти в точке M главные кривизны и главные направления.

Решение:В качестве локальных координат в окрестности точки $M(0,0,c)$ берем координаты (x,y). Поверхность задается вектор–функцией

$$\vec{r}(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

$$z(x,y)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\approx c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)+O((x^2+y^2)^2).$$

При вычислении первых и вторых производных в нулевой точке членом $O((x^2+y^2)^2)$ можно пренебречь. Тогда

$$\vec{r}_x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{c}{a^2}x \end{pmatrix}, \vec{r}_y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{c}{b^2}y \end{pmatrix}, \vec{m}=\begin{pmatrix} \frac{c}{a^2}x \\ \frac{c}{b^2}y \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{xx}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{c}{a^2} \end{pmatrix}, \vec{r}_{xy}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{yy}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{c}{b^2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{c}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{c}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Главные кривизны равны $-\frac{c}{a^2}, -\frac{c}{b^2}$. Главные направления равны $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

14. На параболоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z + 1 = 0$ взята точка $M(0,0,1)$. Найти в точке M главные кривизны и главные направления.

Решение:В качестве локальных координат в окрестности точки $M(0,0,1)$ берем координаты (x,y). Поверхность задается вектор–функцией

$$\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

$$z(x,y) = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{a^2}x \end{pmatrix}, \vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{b^2}y \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a^2}x \\ -\frac{2}{b^2}y \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{a^2} \end{pmatrix}, \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{yy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Главные кривизны равны $\frac{2}{a^2}, \frac{2}{b^2}$. Главные направления равны $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

15. На гиперболоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ взята точка $M(a,0,0)$. Найти в точке M первую и вторую квадратичные формы.

Решение:В качестве локальных координат в окрестности точки $M(a,0,0)$ берем координаты (y,z). Поверхность задается вектор–функцией

$$\vec{r}(y,z) = \begin{pmatrix} x(y,z) \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$x(y,z) = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \approx a\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)\right) + O((y^2+z^2)^2).$$

При вычислении первых и вторых производных в нулевой точке членом $O((x^2+y^2)^2)$ можно пренебречь. Тогда

$$\vec{r}_y = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b^2}y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_z = \begin{pmatrix} \frac{a}{c^2}z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a}{b^2}y \\ -\frac{a}{c^2}z \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{yy} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{yz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{zz} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{c^2} \end{pmatrix}.$$

16. На гиперболоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ взята точка $M(0,0,c)$. Найти в точке M первую и вторую квадратичные формы.

    Решение:В качестве локальных координат в окрестности точки $M(0,0,c)$ берем координаты (x,y). Поверхность задается вектор–функцией

$$\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

$$z(x,y) = c\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \approx c\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) + O((x^2+y^2)^2).$$

    При вычислении первых и вторых производных в нулевой точке членом $O((x^2+y^2)^2)$ можно пренебречь. Тогда

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c}{a^2}x \end{pmatrix}, \vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c}{b^2}y \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a^2}x \\ -\frac{c}{b^2}y \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c}{a^2} \end{pmatrix}, \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{yy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c}{b^2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{c}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{c}{b^2} \end{pmatrix}.$$

==

17. Точка M движется по лучу с постоянной скоростью v, который вращается вокруг своего начала O на плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Найти длину траектории точки M, получающейся при одном обороте луча (в начальный момент $OM = a$).

Решение:В полярных координатах (ρ, φ) траектория описывается параметрически

$$\begin{aligned}\rho &= v \cdot t + a,\\ \varphi &= \omega \cdot t.\end{aligned}$$

Один оборот луча происходит за время $t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ $(t_0 = 0)$. Длина траектории вычисляется как интеграл

$$l = \int\limits_{t=0}^{t_1} |\vec{r'}(t)|dt = \int\limits_{t=0}^{t_1} \sqrt{(\vec{r'}, \vec{r'})(t)}dt$$

Скалярный квадрат радиус–вектора $\vec{r'}(t)$ в полярных координатах вычисляется через первую квадратичную форму $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$:

$$(\vec{r'}, \vec{r'}) = v^2 + (vt + a)^2\omega^2.$$

$$l = \int\limits_{t=0}^{t_1} \sqrt{v^2 + (vt + a)^2\omega^2}dt.$$

Полагаем $\tau = \omega(vt + a)$, $\tau_0 = \omega a$, $\tau_1 = 2\pi v + \omega a$. Тогда

$$l = \frac{1}{\omega v}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{v^2 + \tau^2}d\tau = \frac{1}{2\omega v}\left(\tau\sqrt{v^2 + \tau^2} + v^2 \ln(\tau + \sqrt{v^2 + \tau^2})\right)\Big|_{\tau_0}^{\tau_1} =$$

$$= \frac{1}{2\omega v}\left((2\pi v + \omega a)\sqrt{v^2 + (2\pi v + \omega a)^2} - \omega a\sqrt{v^2 + (\omega a)^2}\right) +$$
$$+ \frac{v^2}{2\omega v}\left(\ln((2\pi v + \omega a) + \sqrt{v^2 + (2\pi v + \omega a)^2}) - \ln(\omega a + \sqrt{v^2 + (\omega a)^2})\right) =$$

$$= \frac{v}{2\omega}\left((2\pi + \frac{a\omega}{v})\sqrt{1 + (2\pi + \frac{a\omega}{v})^2} - \frac{a\omega}{v}\sqrt{1 + (\frac{a\omega}{v})^2}\right) +$$
$$+ \frac{v}{2\omega}\left(\ln((2\pi v + \omega a) + \sqrt{v^2 + (2\pi v + \omega a)^2}) - \ln(\omega a + \sqrt{v^2 + (\omega a)^2})\right) =$$

$$= \frac{v}{2\omega}\left((2\pi + \frac{a\omega}{v})\sqrt{1 + (2\pi + \frac{a\omega}{v})^2} + \ln((2\pi + \frac{a\omega}{v}) + \sqrt{1 + (2\pi + \frac{a\omega}{v})^2}) -\right.$$
$$\left. - \frac{a\omega}{v}\sqrt{1 + (\frac{a\omega}{v})^2} - \ln(\frac{a\omega}{v} + \sqrt{1 + (\frac{a\omega}{v})^2})\right) =$$

18. Окружность радиуса r катится без скольжения по прямой. В начальный момент точка M окружности находится на прямой. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на прямую.

    Решение:Пусть прямая — это ось Ox. Центр окружности движется по прямой $(y = r)$. В начальный момент центр окружности имеет координаты $(0, r)$, а потом в текущий момент t имеет координаты (t, r), при этом окружность повернется на угол, равный $\varphi = \frac{t}{r}$. Координаты фиксированной точки на окружности при этом приобретут следующие значения:

$$(x = t - r\sin\varphi, y = r(1-\cos\varphi)),$$
$$\vec{u}(\varphi) = (r(\varphi - \sin\varphi), r(1-\cos\varphi))$$

Точка снова попадет на прямую при $\varphi = 2\pi$. Длина траектории равна

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{d\vec{u}}{d\varphi}\right| d\varphi = r\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} d\varphi =$$
$$= r\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\varphi)} d\varphi = 2r\int\limits_0^{2\pi} \sin\tfrac{\varphi}{2} d\varphi =$$
$$= 4r(-\cos\tfrac{\varphi}{2})|_0^{2\pi} = 8r.$$

19. Окружность радиуса r катится без скольжения по внешней стороне неподвижной окружности радиуса R. В начальный момент точка M окружности находится на неподвижной окружности. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на неподвижную окружность.

    Решение:Пусть O центр неподвижной окружности, c центр окружности подвижной, τ точка касания окружностей. Пусть центр c повернулся на угол t (вокруг точки O). На тот же угол повернется и точка касания τ. При этом точка τ пройдет траекторию длиной Rt. Значит подвижная окружность должна повернуться на угол φ относительно луча Oc таким образом, чтобы длина дуги, соединяющая фиксированную точку M с точкой касания τ, равная $r\varphi$, совпала с Rt, т.е.

    $$rT = r\varphi.$$

    Конечная точка соответствует значению $\varphi_1 = 2\pi$. Координаты точки c равны

    $$(x = (R+r)\sin t, y = (R+r)\cos t).$$
    $$(x = (R+r)\sin t - r\sin(\varphi + t), y = (R+r)\cos t - r\cos(\varphi + t)),$$

    т.е.

    $$\vec{M} = ((R+r)\sin\frac{r}{R}\varphi - r\sin(1+\frac{r}{R})\varphi, (R+r)\cos\frac{r}{R}\varphi - r\cos(1+\frac{r}{R})\varphi).$$

    $$\vec{M}' = \frac{(R+r)r}{R}\left(\cos\frac{r}{R}\varphi - \cos\frac{R+r}{R}\varphi, -\sin\frac{r}{R}\varphi + \sin\frac{R+r}{R}\varphi\right).$$

    $$|\vec{M}'| = \tfrac{(R+r)r}{R}\sqrt{(\cos\tfrac{r}{R}\varphi - \cos\tfrac{R+r}{R}\varphi)^2 + (-\sin\tfrac{r}{R}\varphi + \sin\tfrac{R+r}{R}\varphi)^2} =$$
    $$= \tfrac{(R+r)r}{R}\sqrt{2 - 2\cos\varphi}$$

    Следовательно,

    $$l = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(R+r)r}{R}\sqrt{2-2\cos\varphi} d\varphi = 8\frac{(R+r)r}{R}.$$

20. Окружность радиуса r катится без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса $R > r$. В начальный момент точка M окружности находится на неподвижной окружности. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на неподвижную окружность.

Решение:Решение аналогично предыдущей задаче с заменой $(R+r)$ на $(R-r)$.

Ответ:

$$8\frac{(R-r)r}{R}$$

В самом деле, пусть O центр неподвижной окружности, c центр окружности подвижной, τ точка касания окружностей. Пусть центр c повернулся на угол t (вокруг точки O). На тот же угол повернется и точка касания τ. При этом точка τ пройдет траекторию длиной Rt. Значит подвижная окружность должна повернуться на угол φ относительно луча Oc таким образом, чтобы длина дуги, соединяющая фиксированную точку M с точкой касания τ, равная $r\varphi$, совпала с Rt, т.е.

$$rT = r\varphi.$$

Конечная точка соответствует значению $\varphi_1 = 2\pi$. Координаты точки c равны

$$(x = (R-r)\sin t, y = (R-r)\cos t).$$

$$(x = (R-r)\sin t - r\sin(\varphi - t), y = (R-r)\cos t - r\cos(\varphi - t)),$$

т.е.

$$\vec{M} = ((R-r)\sin\frac{r}{R}\varphi - r\sin(1-\frac{r}{R})\varphi, (R-r)\cos\frac{r}{R}\varphi + r\cos(1-\frac{r}{R})\varphi).$$

$$\vec{M}' = \frac{(R-r)r}{R}\left(\cos\frac{r}{R}\varphi - \cos\frac{R-r}{R}\varphi, -\sin\frac{r}{R}\varphi - \sin\frac{R-r}{R}\varphi\right).$$

$$|\vec{M}'| = \tfrac{(R-r)r}{R}\sqrt{(\cos\tfrac{r}{R}\varphi - \cos\tfrac{R-r}{R}\varphi)^2 + (-\sin\tfrac{r}{R}\varphi + \sin\tfrac{R-r}{R}\varphi)^2} =$$
$$= \tfrac{(R-r)r}{R}\sqrt{2-2\cos\varphi}$$

Следовательно,

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(R-r)r}{R}\sqrt{2-2\cos\varphi}d\varphi = 8\frac{(R-r)r}{R}.$$