Классификация одномерных многообразий

1. Компактное связное одномерное многообразие X есть окружность. Доказательство. Фиксируем на X некоторую метрику ρ. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ - конечный атлас карт на многообразии X. Без ограничения общности можно считать, что каждая карта U_α гомеоморфна интервалу вещественной оси:
$$U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} (0,1).$$
Пусть λ — число Лебега этого покрытия, т.е такое число, что для любой точки $x \in X$ найдется такая карта U_α, что $O_\lambda(x) \subset U_\alpha$. Рассмотрим другой, более мелкий атлас карт $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$, $\mathbf{diam} V_\beta < \frac{\lambda}{3}$, тоже составленный из связных карт. Будем считать что атлас $\mathcal{V}$ конечен и минимален. Рассмотрим некоторую карту V_β и ее звезду
$$\mathbf{star}\ V_\beta = \bigcup \{V_\gamma : V_\gamma \cap V_\beta \neq \emptyset\}.$$
Диаметр $\mathbf{star}\ V_\beta$ не превосходит λ, значит найдется такой номер $\alpha = \alpha(\beta)$, что
$$\mathbf{star}\ V_\beta \subset U_\alpha,$$
$$\varphi_\alpha(\mathbf{star}\ V_\beta) \subset (0,1).$$
Поскольку все карты V_γ связны, то каждое множество $\varphi_\alpha(V_\gamma)$ есть интервал, лежащий в $(0,1)$. Отсюда следует, что число карт в звезде $\mathbf{star}\ V_\beta$ равно три: карта V_β, карта V_{β_+}, образ $\varphi_\alpha(V_{\beta_+})$ которой лежит правее $\varphi_\alpha(V_\beta)$, и карта V_{β_-}, образ $\varphi_\alpha(V_{\beta_-})$ которой лежит левее $\varphi_\alpha(V_\beta)$. Всякая бы четвертая карта V_γ, пресекаясь с картой V_β, либо лежала бы внутри объединения $V_{\beta_-} \cup V_\beta \cup V_{\beta_+}$, либо вылезала за пределы этого объединения: в обеих случаях атлас был бы не минимальным. Более того, два пересечения $V_{\beta_-} \cap V_\beta$ и $V_\beta \cap V_{\beta_+}$ по тем же причинам не пересекаются, а сами эти пересечения образуют крайние интервалы в карте V_β.

Все карты можно перенумеровать по следующему правилу: пусть карты V_1 и V_2 пересекаются, $V_1 \cap V_2 = V_{12} \neq \emptyset$. Тогда карта V_2 имеет непустое пересечение с еще одной картой $V_3 \neq V_1$. Если бы $V_3 = V_1$, то многообразие имело бы по крайней мере две компоненты связности, что противоречило бы предположению. По индукции строим последовательность всех карт

$$V_1, V_2, \dots, V_n; \quad V_k \cap V_{k+1} \neq \emptyset, \quad 1 \leq k < n.$$

Тогда очевидно, что

$$V_1 \cap V_n \neq \emptyset$$

за не имением иных возможностей.

На каждом пересечении

$$V_1 \cap V_2, V_2 \cap V_3, \dots, V_{n-1} \cap V_n, V_n \cap V_1$$

выберем по одной точке

$$x_2 \in V_1 \cap V_2, x_3 \in V_2 \cap V_3, \dots, x_n \in V_{n-1} \cap V_n, x_1 \in V_n \cap V_1.$$

Тогда отрезки

$$\begin{aligned}
&W_1 = \varphi_{\alpha(1)}^{-1}[\varphi_{\alpha(1)}(x_1), \varphi_{\alpha(1)}(x_2)] \subset V_1,\\
&W_2 = \varphi_{\alpha(2)}^{-1}[\varphi_{\alpha(2)}(x_2), \varphi_{\alpha(2)}(x_3)] \subset V_2,\\
&\vdots\\
&W_{n-1} = \varphi_{\alpha(n-1)}^{-1}[\varphi_{\alpha(n-1)}(x_{n-1}), \varphi_{\alpha(n-1)}(x_n)] \subset V_{n-1},\\
&W_n = \varphi_{\alpha(n)}^{-1}[\varphi_{\alpha(n)}(x_n), \varphi_{\alpha(n)}(x_1)] \subset V_n,
\end{aligned}$$

покрывают все многообразие, $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} W_k$. Соседние отрезки пересекаются ровно по одной точке:

$$\begin{aligned}
&W_1 \cap W_2 = \{x_2\};\\
&W_2 \cap W_3 = \{x_3\};\\
&\vdots\\
&W_{n-1} \cap W_n = \{x_n\};\\
&W_n \cap W_1 = \{x_1\}.
\end{aligned}$$

Их объединение является многоугольником, гомеоморфным окружности.