Дифференциальная геометрия и топология.
Конспект лекций
Осень, 2009-2010 учебный год

Добавление к пункту 1.1.5.5

9 сентября 2009 г.

1 Теория многообразий

1.1 Метрические и топологические пространства

1.1.1 Аксиомы отделимости.

5. Всякое метрическое пространство хаусдорфово. Более того, если два замкнутых подмножества F_1 и F_2 метрического пространства не пересекаются, то существуют непересекающиеся их окрестности $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$.

   Если для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств F_1 и F_2 топологического пространства существуют непересекающиеся их окрестности $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$, то такое топологическое пространство называется *нормальным* пространством. Другими словами метрическое пространство является нормальным.

   Доказательство. Если $x \neq y$, то $\rho(x, y) = \varepsilon > 0$. Рассмотрим шаровые окрестности точек x и y радиуса $\varepsilon/2$, $O_{\varepsilon/2}(x)$ и $O_{\varepsilon/2}(y)$. Они не пересекаются. Действительно, если бы имелась общая точка $z \in O_{\varepsilon/2}(x) \cap O_{\varepsilon/2}(y)$, то в этом бы случае выполнялись неравенства

   $$\rho(x, z) < \varepsilon/2, \quad \rho(z, y) < \varepsilon/2,$$

   В силу неравенства треугольника получаем противоречие:

   $$\varepsilon = \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   Теперь рассмотрим два непересекающихся замкнутых подмножества F_1 и F_2 и две функции расстояния до этих множеств:

   $$d_1(x) = \inf_{y \in F_2} \rho(x, y),\ x \in F_1; \quad d_2(y) = \inf_{x \in F_1} \rho(y, x),\ y \in F_2.$$

Поскольку множества F_1 и F_2 замкнуты, то обе функции положительны:

$$d_1(x) > 0,\, x \in F_1; \quad d_2(y) > 0\, y \in F_2$$

Тогда рассмотрим открытые окрестности множеств F_1 и F_2:

$$U_1 = \bigcup_{x \in F_1} O_{d_1(x)/2}(x); \quad U_2 = \bigcup_{y \in F_2} O_{d_2(y)/2}(y).$$

Открытые множества U_1 и U_2 не пересекаются. В самом деле, если бы нашлась некоторая точка $z \in U_1 \cap U_2$, то тогда бы для некоторых точек $x \in F_1$ и $y \in F_2$ выполнялось бы включение:

$$z \in O_{d_1(x)/2}(x) \cap O_{d_2(y)/2},$$

т.е.

$$\rho(x,z) < d_1(x)/2, \quad \rho(z,y) < d_2(y)/2.$$

Пусть, на пример $d_1(x)/2 \geq d_2(y)/2$. Тогда из неравенства треугольника получаем

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) < d_1(x)/2 + d_2(y)/2 \leq d_1(x) = \inf_{y \in F_2} \rho(x,y),$$

что противоречит определению точной нижней грани.