Дифференциальная геометрия и топология. Конспект лекций Осень, 2009-2010 учебный год

26 августа 2009 г.

1 Теория многообразий

1.1 Метрические и топологические пространства

1.1.1 Метрические пространства

1. *Метрикой* на произвольном абстрактном множестве X называется числовая неотрицательная функция $\rho(x,y)$, зависящая от пары элементов $x, y \in X$,
$$\rho : X \times X \longrightarrow (0, \infty),$$
для которой выполнены следующие аксиомы:
   (a) $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);
   (b) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксиома симметрии);
   (c) для любых трех элементов $x, y, z \in X$ имеет место неравенство $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

2. Множество X, снабженное некоторой метрикой ρ, называется *метрическим пространством*. Другими словами, метрическое пространство — эта пара (X,ρ). Элементы множества X называются его *точками*. Значение метрики $\rho(x,y)$ называется *расстоянием между точками* x и y.

3. Любое подмножество $Y \subset X$ метрического пространства X является метрическим пространством по отношению к ограничению ρ_Y метрики ρ на подмножество Y, $\rho_Y = \rho\,|_{Y\times Y}$. Подмножество Y при этом называется подпространством пространства X. Другими словами метрическое подпространство — это пара (Y, ρ_Y)

4. *Шаровой окрестностью с центром* $x \in X$ *радиуса* ϵ называется множество $O_\epsilon(x)$ всех точек $y \in X$, для которых $\rho(x,y) < \epsilon$.

5. *Расстоянием* $\rho(Y_1, Y_2)$ *между двумя множествами* $Y_1, Y_2 \subset X$, называется нижняя грань множества чисел вида $\rho(x, y)$, когда x пробегает множество Y_1, а y пробегает множество Y_2. Если множества Y_1 и Y_2 имеют общую точку, то $\rho(Y_1, Y_2) = 0$.

6. *Шаровой окрестностью подмножества* $Y \subset X$ *радиуса* ϵ называется множество $O_\epsilon(Y)$ всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, Y) < \epsilon$.

7. *Точкой прикосновения* подмножества $Y \subset X$ называется всякая точка $x \in X$, для которой $\rho(x, Y) = 0$.

8. *Замыканием* подмножества $Y \subset X$ называется множество всех его точек прикосновения. Замыкание подмножества Y обозначается через $\overline{Y}$.

9. Подмножество $Y \subset X$ метрического пространства называется *замкнутым подмножеством* (в пространстве X), если его замыкание $\overline{Y}$ совпадает с Y т.е. $Y = \overline{Y}$.

10. Подмножество $Y \subset X$ называется *открытым* подмножеством (в пространстве X), если его дополнение $X \setminus Y$ замкнуто.

11. Объединение любого семейства открытых множеств, а также пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами. Пересечение любого семейства и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

12. *Внутренностью* $\mathbf{Int}\, Y$ произвольного подмножества $Y \subset X$ называется множество всех точек $x \in Y$, для которых существует шаровая окрестность $O_\epsilon(x) \subset Y$. В частности, $\mathbf{Int}\, Y \subset Y$.

13. Внутренность $\mathbf{Int}\, Y$ произвольного подмножества Y является открытым множеством.

14. Шаровая окрестность $O_\epsilon(x)$ является открытым множеством.

15. Замыкание $\overline{Y}$ произвольного подмножества Y является замкнутым множеством.

1.1.2 Топологические пространства.

1. Скажем, что на множестве X задана *топология*, если задано некоторое семейство $\mathcal{T}$ подмножеств множества X, называемых *открытыми* множествами, для которого выполнены следующие условия топологии:

   (a) все множество X, а также пустое множество являются открытыми множествами;

   (b) объединение любого семейства и пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.

2. Множество X с заданной на нем топологией $\mathcal{T}$ называют *топологическим пространством*, элементы множества X называются *точками* пространства X. Другими словами, топологическое пространство — это пара $(X, \mathcal{T})$. Дополнения к открытым множествам называются *замкнутыми множествами.* В топологическом пространстве X выполнены двойственные условия для замкнутых множеств:

   (a) все множество X, а также пустое множество являются замкнутыми множествами,

   (b) пересечение любого семейства и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

3. В топологических пространствах воспроизводятся многие понятия метрических пространств.

   (a) *Окрестностью точки* x топологического пространства X называется любое открытое множество, содержащее точку x.

   (b) Открытое множество, содержащее подмножество Y, называется *окрестностью* множества Y.

   (c) *Точкой прикосновения* множества $Y \subset X$ называется такая точка x, для которой каждая ее окрестность имеет непустое пересечение с множеством Y.

   (d) Множество всех точек прикосновения множества Y называется *замыканием* множества Y и обозначается через $\overline{Y}$.

   (e) *Внутренней точкой* множества Y называется такая точка $x \in Y$, которая лежит в Y вместе с некоторой своей окрестностью. Множество всех внутренних точек множества Y называется *внутренностью* и обозначается через $\mathbf{Int}\, Y$.

4. Множество $Y \subset X$ замкнуто (т. е. является дополнением к открытому множеству) тогда и только тогда, когда $Y = \overline{Y}$.

   Замыкание $\overline{Y}$ произвольного множества Y топологического пространства X является замкнутым множеством, т.е. $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$.

5. Пусть X — топологическое пространство (с топологией $\mathcal{T}$), $Y \subset X$ — его подмножество. Тогда на Y также можно задать топологию $\mathcal{T}_Y$, объявив открытым всякое множество вида $Y \cap U$, где U — открытое в X множество. Другими словами

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}\,.$$

   Тогда топологическое пространство Y называется *подпространством* топологического пространства X, а топология $\mathcal{T}_Y$ в Y — *индуцированной топологией.*

6. Метрическое пространство (X, ρ) автоматически снабжается структурой топологического пространства, поскольку открытые подмножества в пространстве X удовлетворяют условиям (a) и (b) топологии.

7. Если X — метрическое пространство, а Y — его подпространство, то топология в Y задается независимо от порядка операций: ограничения метрики и перехода к топологии, или перехода к топологии и индуцирования топологии.

8. Пусть $Y \subset X$ — подмножество в топологическом пространстве X. Множество Y называется *плотным* (*всюду плотным*), если $\overline{Y} = X$.

9. **Теорема** thr1 Если Y_1 и Y_2 — два открытых плотных множества в пространстве X, то их пересечение $Y = Y_1 \cap Y_2$ открыто и плотно в X.

1.1.3 Непрерывные отображения.

1. **Определение (по Коши).** Отображение $f \colon X \longrightarrow Y$ топологических пространств называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V(f(x_0))$ точки $f(x_0) \in Y$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$, что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение f называется *непрерывным отображением*, если оно непрерывно в каждой точке пространства X.

2. **Теорема .** Отображение $f \colon X \longrightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

   (a) прообраз любого открытого множества является открытым множеством;

   (b) прообраз любого замкнутого множества является замкнутым множеством.

3. Если отображения $f \colon X \longrightarrow Y$ и $g \colon Y \longrightarrow Z$ непрерывные отображения топологических пространств. Тогда композиция отображений, $gf \colon X \longrightarrow Z$, тоже непрерывна.

4. Пусть топологическое пространство X представлено в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств: $X = F_1 \cup F_2$, и пусть $f \colon X \longrightarrow Y$ — отображение пространства X в топологическое пространство Y. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны ограничения $f|_{F_1}$ и $f|_{F_2}$ отображения f на подмножества F_1 и F_2.

5. Рассмотрим непрерывное отображение $f \colon X \longrightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y. Если отображение f взаимно однозначно, а обратное отображение f^{-1} непрерывно,

то отображение f называется *гомеоморфизмом.* При этом топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными топологическими пространствами.* При гомеоморфизме устанавливается не только взаимно однозначное соответствие между точками топологических пространств X и Y, но и взаимно однозначное соответствие между самими топологиями, т. е. между семействами открытых множеств (семействами замкнутых множеств).

6. Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение метрических пространств, ρ_1 и ρ_2 — метрики на пространствах X и Y соответственно. Тогда условие непрерывности отображения f можно сформулировать следующим образом: *для любого $x_0 \in X$ и $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, что из неравенства $\rho_1(x, x_0) < \delta$ следует неравенство $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.*

7. Скажем, что последовательность точек $\{x_n\}$ *сходится к точке* x_0, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0$.

8. В терминах сходящихся последовательностей метрического пространства формулируются многие свойства пространств и отображений.

   (a) Подмножество $Y \subset X$ метрического пространства является замкнутым, если для любой сходящейся последовательности точек $\{x_n\} \subset Y$ предел $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ также принадлежит множеству Y.

   (b) **Определение (по Гейне).** Отображение f метрических пространств непрерывно в точке x_0, если из равенства $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ следует равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

9. Рассмотрим два топологических пространства X и Y. Образуем новое топологическое пространство $X\times Y$. Множество $X\times Y$ есть множество всех пар вида (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, и называется *декартовым произведением множеств* X и Y. Множество $U \subset X \times Y$ назовем открытым, если U представимо в виде объединения $U = \bigcup_\alpha (V_\alpha \times W_\alpha)$, где $V_\alpha \subset X$, $W_\alpha \subset Y$ — открытые множества. Множество $X \times Y$ с определенной выше топологией называется *декартовым произведением топологических пространств X и Y.* При этом топологические пространства X и Y называются *сомножителями* декартова произведения $X \times Y$.

10. Пусть Z, X_1 и X_2 — топологические пространства. Для любых двух отображений $f_1\colon Z \to X_1$ и $f_2\colon Z \to X_2$ отображение $F\colon Z \to X_1 \times X_2$, $F(z) = (f_1(z), f_2(z))$, непрерывно в том и только том случае, если f_1 и f_2 непрерывны.

11. Пусть (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) — метрические пространства; тогда декартово произведение $X \times Y$ допускает метрику, согласованную с топологией

декартова произведения. Метрику ρ в декартовом произведении $X \times Y$ зададим по формуле

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\}.$$

Другой способ задавать метрику в декартовом произведении использует аналогию между между сомножителями X и Y декартова произведения с осями координат на плоскости. Метрика задается по формуле

$$\rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{\rho_1(x_1, x_2)^2 + \rho_2(y_1, y_2)^2}.$$

Топология, задаваемая первой метрикой, совпадает с топологией, задаваемой второй метрикой, для чего достаточно найти две такие константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что

$$C_1\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq C_2\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

1.1.4 Связность. Аксиомы отделимости

1. Пространство X называется связным, если его нельзя разбить на два непустых открыто замкнутых подмножества.

2. **Теорема .** Пусть $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, каждое X_α связно и пересечение $\bigcap_\alpha X_\alpha$ непусто. Тогда пространство X связно.

3. **Теорема .** Образ при непрерывном отображении связного пространства связен.

4. **Теорема .** Отрезок вещественных чисел $[0, 1]$ является связным топологическим пространством.

5. **Теорема .** Всякая непрерывная вещественная функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$ вещественной прямой, принимает промежуточные значения.

1.1.5 Аксиомы отделимости.

1. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым пространством*, если для любых точек x, $y \in X$, $x \neq y$, найдутся непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(y)$, т.е. $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

2. В хаусдорфовом пространстве каждая точка $x \in X$ является замкнутым множеством.

3. Дискретное топологическое пространство X является хаусдорфовым пространством.

4. Если X и Y — хаусдорфовы пространства, то их декартово произведение, несвязная и связная суммы являются хаусдорфовыми топологическими пространствами.

5. Всякое метрическое пространство хаусдорфово. Более того, если два замкнутых подмножества F_1 и F_2 метрического пространства не пересекаются, то существуют непересекающиеся их окрестности $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$.

6. Система открытых множеств $\{U_\alpha\}$ топологического пространства X называется *открытым покрытием*, если $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

7. Если в каждом множестве U_α покрытия задана непрерывная функция f_α, а на каждом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ функции f_α и f_β совпадают, то существует одна непрерывная функция f на пространстве X, совпадающая с f_α в каждом открытом множестве U_α.

8. Пусть задано два открытых покрытия $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$ топологического пространства X. Скажем, что покрытие $\{V_\beta\}$ *измельчает покрытие* $\{U_\alpha\}$ или *является более мелким, чем покрытие* $\{U_\alpha\}$, если каждое множество V_β лежит в некотором множестве U_α, $\alpha = \alpha(\beta)$.

9. **Теорема .** Пусть X — метрическое пространство, $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ — конечное открытое покрытие. Тогда существует более мелкое покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, причем $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

1.1.6 Компактные пространства.

1. **Определение .** Хаусдорфово топологическое пространство X называется *компактным*, если из его всякого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выделить конечную часть $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$, покрывающую X.

2. Конечный отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}^1$ вещественной оси $\mathbf{R}$ является компактным пространством.

3. **Теорема .** Пусть $F \subset X$ — компактное подпространство в хаусдорфовом топологическом пространстве X. Тогда F — замкнутое множество в пространстве X.

4. **Теорема .** Пусть $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение компактного пространства X в пространство Y. Тогда образ $f(X)$ является компактным пространством.

5. **Теорема .** Пусть $f \colon X \to \mathbf{R}^1$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Тогда функция f ограничена и принимает максимальное и минимальное значения.

6. **Теорема .** Пусть X — метрическое пространство. Пространство X является компактным тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных свойств:

   (a) всякая последовательность $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность;

(b) всякая последовательность вложенных непустых замкнутых подмножеств $\{F_n\}$, $F_n \supset F_{n+1}$, имеет непустое пересечение.

7. Если хаусдорфово пространство X является объединением конечного числа своих компактных подмножеств, то X является компактным пространством.

8. **Теорема .** Декартово произведение $X \times Y$ метрических компактных пространств X и Y является компактным пространством.

9. **Теорема .** Равномерный предел последовательности непрерывных функций на топологическом пространстве X является непрерывной функцией.

10. **Теорема (лемма Урысона).** Пусть X — нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 — два замкнутых непересекающихся множества. Тогда существует такая непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, что $f|_{F_0} \equiv 0$, $f|_{F_1} \equiv 1$.

11. **Теорема (Брауэр-Титц-Урысон).** Пусть X — нормальное топологическое пространство, $F \subset X$ — замкнутое множество, $f\colon F \to \mathbf{R}^1$ — непрерывная функция на множестве F. Тогда функция f продолжается до непрерывной функции $g : X \to \mathbf{R}^1$ на всем пространстве X. Если функция f ограничена, $|f(x)| \leq A$, то и функцию g можно выбрать ограниченной той же константой, $|g(x)| \leq A$.

12. *Носителем* непрерывной функции f на топологическом пространстве X называется замыкание множества тех точек $x \in X$, где $f(x) \neq 0$. Носитель функции f обозначается через $\mathbf{supp}\, f$.

13. **Теорема .** Пусть X — метрическое пространство, $\{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие функции $\varphi_\alpha\colon X \to \mathbf{R}^1$, $\quad 0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, что: а) $\mathbf{supp}\, \varphi_\alpha \subset U_\alpha$, б) $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$.

14. Система функций $\{\varphi_\alpha\}$, указанных в теореме, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha\}$.