Задачи к лекциям "Дифференциальная геометрия и топология"

(математики, 3-й курс, лектор - А.С.Мищенко)
Осенний семестр 2007/08 уч. года

5 октября 2007 г.

Задачи

1. Пусть X — метрическое пространство. Тогда $Y \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $X \setminus Y$ замкнуто.

2. Показать, что от конечности в свойствах пересечений открытых множеств нельзя отказаться.

3. Доказать, что шар $B_\varepsilon(x)$ радиуса ε с центром в точке x некоторого метрического пространства является открытым множеством.

4. Привести пример топологического пространства (X, τ), не индуцированного ни какой метрикой (говорят: топология не метризуема)

5. Пусть $Y_1 \subset X$ и $Y_2 \subset X$ — открытые плотные подмножества. Тогда $Y = Y_1 \cap Y_2$ — открытое плотное подмножество.

6. Доказать, что $X \times Y$ и $Y \times X$ гомеоморфны.

7. Пусть отображение $f : E \to F$ является непрерывным отображением "на" и пусть E компактно. Доказать, что F компактно.

8. Декартово произведение компактных пространств является компактным.

9. Пусть X — метрическое пространство. Доказать, что каждое одноточечное множество замкнуто.

10. Привести пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

11. Верно ли, что расстояние между двумя непересекающимися, замкнутыми множествами на плоскости (на прямой) всегда больше 0?

12. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства непрерывно.

13. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция f, такая, что $K = f^{-1}(0)$.

14. Пусть $G \subset I^1$ — открытое множество на отрезке. Доказать, что G — объединение непересекающихся интервалов.

15. Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

16. Привести пример связного, но не линейно связного пространства.

17. Доказать, что если $f_n : X \longrightarrow Y$ — последовательность непрерывных отображений и f_n равномерно сходятся к f (Y — метрическое пространство), то f непрерывно.

18. Доказать, что открытый диск ($|x| < 1$) в евклидовом пространстве является открытым множеством.

19. Доказать, что открытый диск $x^2 + y^2 < 1$ и плоскость $\mathbf{R}^2(x, y)$ гомеоморфны. Доказать, что открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ и плоскость $\mathbf{R}^2(x, y)$ гомеоморфны. Доказать, что интервал $0 < x < 1$ и открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ не гомеоморфны.

20. Пусть $f : X \longrightarrow X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек $F_f := \{x \in X | f(x) = x\}$ замкнуто.

21. Пусть $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^1$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Тогда f ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

22. Доказать, что куб $\{|x_i| \leq 1,\ i = 1,\ 2, \ldots, n\}$ и шар $\{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ гомеоморфны. Доказать, что открытый куб и открытый шар диффеоморфны.

23. Гомеоморфны ли отрезок $0 \leq x \leq 1$ и буква T?

24. * Гомеоморфны ли диск $\mathbf{D}^2$ и сфера $\mathbf{S}^2$?

25. Показать, что группа ортогональных матриц размера 3×3 — компактное топологическое пространство.

26. Является ли многообразием интервал $y = 0,\ 0 < x < 1$, лежащий на плоскости $\mathbf{R}^2$?

27. Является ли $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ многообразием?

28. Доказать, что n–мерная сфера $\mathbf{S}^n$, задаваемая в $\mathbf{R}^n$ уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, является гладким многообразием.

    а) Построить атлас карт.

    б) Построить атлас карт из минимального числа карт.

в) Построить атлас из минимального карт при условии, что каждая карта гомеоморфна диску.

г) Построить атлас из $n+2$ карты, при условии, что все карты и всевозможные непустые пересечения карт гомеоморфны дискам.

29. Доказать, что двумерный тор $\mathbf{T}^2$, заданный как поверхность вращения вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости Oxy и не пересекающейся с осью Oz, является гладким многообразием.

    а) Построить атлас карт.

    б) Построить атлас карт из минимального числа карт.

    в) Построить атлас из 4-х карт при условии, что каждая карта гомеоморфна диску.

    г) Построить атлас из 6-ти карт, при условии, что все карты и всевозможные непустые пересечения карт гомеоморфны дискам.

30. Доказать, что n–мерное проективное пространство $\mathbf{RP}^n$ является гладким (и вещественно-аналитическим) многообразием.

31. Доказать, что n–мерное комплексное проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ является гладким (и комплексно-аналитическим) многообразием.

32. Введите структуру гладкого многообразия на множестве всех прямых в $\mathbf{R}^2$. Доказать, что полученное многообразие гомеоморфно листу Мёбиуса.

33. Доказать гомеоморфность многообразий $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{CP}^1$.

34. Допускают ли структуру гладкого многообразия граница квадрата? восьмерка? (оба как подмножества $\mathbf{R}^2$)

35. Доказать, что из гладкости функции по отношению к некоторой карте следует ее гладкость по отношению к любой другой карте на общем пересечении

36. Построить явные формулы, осуществляющие диффеоморфизм между открытым шаром $B_\varepsilon(0) \subset \mathbf{R}^n$ радиуса ε и евклидовым пространством $\mathbf{R}^n$.

37. Доказать, что матричные группы $\mathbf{SL}(n,\mathbf{R})$, $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{GL}(n,\mathbf{C})$, $\mathbf{SL}(n,\mathbf{C})$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$ являются многообразиями и допускаю структуру гладкого (аналитического) многообразия. Вычислить размерности этих многообразий и построить атлас карт на них.

38. Описать двумерный тор (поверхность вращения окружности вокруг оси в трехмерном пространстве) при помощи уравнения, удовлетворяющего теореме о неявной функции.

39. Описать конфигурационное пространство для твердого стержня в $\mathbf{R}^2$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

40. Описать конфигурационное пространство для твердого стержня в $\mathbf{R}^3$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

41. Описать конфигурационное пространство для двузвенного плоского маятника в $\mathbf{R}^2$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

42. Описать конфигурационное пространство для двузвенного маятника в $\mathbf{R}^3$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

43. Описать конфигурационное пространство пары материальных точек в $\mathbf{R}^3$, соединенных твердым стержнем

44. Описать конфигурационное пространство для твердого тела в $\mathbf{R}^3$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

45. На плоскости $\mathbf{R}^2(x,y)$ задано векторное поле

$$\xi = \left\{ \begin{array}{lcl} \xi^1 & = & y, \\ \xi^2 & = & -x \end{array} \right.$$

Описать динамический поток, как однопараметрическую группу преобразований плоскости.

46. На двумерном торе $\mathbf{T}^2$ с угловыми координатами (φ^1, φ^2) задано векторное поле

$$\xi = \left\{ \begin{array}{lcl} \xi^1 & = & p \equiv \mathbf{const}\ , \\ \xi^2 & = & q \equiv \mathbf{const}\ . \end{array} \right.$$

Описать интегральные кривые. Выяснить, когда интегральные кривые замкнуты, а когда нет.

47. Доказать, что операторы дифференцирования

$$\xi, \eta : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$$

вдоль векторных полей ξ, η обладают тем свойством, что их коммутатор $[\xi, \eta]$, т.е.

$$[\xi, \eta](f) \stackrel{def}{=} \xi\left(\eta(f)\right) - \eta\left(\xi(f)\right)$$

тоже является оператором дифференцирования вдоль некоторого векторного поля. Записать компоненты коммутатора $[\xi, \eta]$ через компоненты векторных полей ξ, η в некоторой локальной системе координат на многообразии X.

48. Доказать, что на любом связном гладком многообразии X для любых двух точек $x, y \in X$ существует такой диффеоморфизм $\varphi : X \longrightarrow X$, что $\varphi(x) = y$.

49. Доказать, что пространство всех касательных векторов к гладкому многообразию образует гладкое многообразие удвоенной размерности.

50. Описать фазовое пространство плоского маятника.

51. Доказать, что матрица Якоби композиции двух гладких отображений является композицией матриц Якоби сомножителей.

52. Доказать, что ранг матрицы Якоби не зависит от выбора локальной системы координат.

53. Вычислить ранг матрицы Якоби отображения

$$f(x,y) = (x,0) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2. \tag{1}$$

54. Доказать, что система уравнений

$$\begin{aligned} \sum z_i^2 &= 0, \\ \sum |z_i|^2 &= 2 \end{aligned} \tag{2}$$

в комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$ задает гладкое многообразие, которое диффеоморфно пространству единичных касательных векторов к сфере $\S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$.

55. Доказать, что уравнение

$$z_1^2 + z_2^2 = 1 \tag{3}$$

в комплексном пространстве $\mathbf{C}^2$ определяет многообразие, гомеоморфное цилиндру.

.

56. Показать, что при $n \neq m$ пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ не диффеоморфны.

57. Доказать, что n–мерное комплексное многообразие является гладким ориентируемым многообразием размерности $2n$.

58. Показать, что окружность $\mathbf{S}^1$, сфера $\mathbf{S}^n$, тор $\mathbf{T}^2$ являются ориентируемыми многообразиями.

59. Доказать, что лист Мёбиуса, проективная плоскость $\mathbf{RP}^2$, бутылка Клейна суть неориентируемые многообразия.

60. Определить валентность тензоров, компоненты которых выражаются следующим образом:

    (a) $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$;

    (b) $T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ в точках, где градиент функции f равен нулю;

    (c) T^i_j — компоненты матрицы линейного оператора векторного пространства;

(d) T_{ij} — компоненты матрицы билинейной формы на векторном пространстве.

61. Пусть
$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{если } i \neq j, \\ 1 & \text{если } i = j. \end{cases} \tag{4}$$
Показать, что компоненты $\{\delta^i_j\}$ образуют тензор валентности (1,1).

62. Пусть $\xi = \{\xi^{ij}\}$ — тензор валентости (2,0), а числа $\{\eta_{ij}\}$ удовлетворяют условиям
$$\xi^{ij}\eta_{jk} = \delta^i_j \tag{5}$$
для произвольных значений индексов i, j. Доказать, что компоненты $\{\eta_{ij}\}$ образуют тензор валентности (0,2).

63. Пусть тензор валентности (0,2) задается в некоторой системе координат $(x^1, ..., x^n)$ матрицей $g = \{g_{ij}(x)\}$. Допустим, что матрица g

    (a) симметрична,

    (b) невырождена и

    (c) неотрицательно определена.

    Доказать, что свойства (63a), (63b), (63c) сохраняются при любой регулярной заменене координат.

64. Привести пример, показывающий, что опреация перестановки верхнего индекса с нижним индексом не является тензорной операцией.

65. Пусть $T = \{T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}(x)\}$ — тензорное поле. Показать, что операция
$$\begin{aligned} T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} \quad &\Rightarrow \quad S^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_{q+1}} : \\ S^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_{q+1}} \quad &= \quad \tfrac{\partial}{\partial x^{j_q+1}} T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} \end{aligned} \tag{6}$$
является тензорной операцией только при $p = 0$ и $q = 0$.

    Через V^m_n будем обозначать пространство всех тензоров валентности (m,n).

66. Определить размерность тензорного пространства V^m_n.

67. Пусть $f : V^m_n \to V^p_q$ —линейное отображение тензорных пространств. Показать, что коэффициенты (относительно компонент тензоров в пространствах V^m_n и V^p_q) линейного отображения f образуют тензор. Определить его валентность.

68. Найти тип тензора, компоненты которого суть коэффициенты

    (a) векторного произведения,

    (b) смешанного произведения

векторов в $\mathbf{R}^3$. Показать, что эти тензоры получаются друг из друга путем подымания или опускания индексов.

69. Пусть $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$ Доказать, что δ_{ij} не является тензором (типа $(0,2)$).

70. Пусть $\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$ Доказать, что δ^i_j является тензором типа $(1,1)$. Что за оператор (в касательном пространстве к рассматриваемому многообразию) отвечает этому тензору?

71. Пусть f — функция на многообразии M^n. Доказать, что $v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ вектором, вообще говоря, не является.

72. Пусть u^i и v^j — вектора (в одной точке). Является ли вектором $w^i = u^i v^i$?

73. Пусть u^i $(i = 1, 2)$ — вектор в некоторой точке поверхности. Является ли вектором v^i, где $v^1 = -u^2$, $v^2 = u^1$?

74. Пусть f — функция на многообразии M^n. Доказать, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ тензором (типа $(0,2)$), вообще говоря, не является.

75. Пусть f — функция на многообразии M^n. Доказать, что в критических точках функции f (т.е. в точках, в которых $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ является тензором типа $(0,2)$.

76. Пусть $v^i = v^i(x)$ — векторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ тензором (типа $(1,1)$), вообще говоря, не является.

77. Пусть $v^i = v^i(x)$ — векторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $T^{ij} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ тензором (типа $(2,0)$), вообще говоря, не является.

78. Пусть $u^i = u^i(x)$ и $v^i = v^i(x)$ — векторные поля на многообразии M^n. Является ли векторным полем $w^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$.

79. Пусть $\alpha_i = \alpha_i(x)$ — ковекторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}$ тензором (типа $(0,2)$), вообще говоря, не является.

80. Пусть T^{ij}_{kl} — тензор типа $(2,2)$. Доказать, что $\widehat{T}^i_\ell = T^{ij}_{j\ell}$ является тензором (типа $(1,1)$).

81. Доказать существование римановой метрики на любом (компактном) гладком многообразии

    а) с помощью разбиения единицы;

    б) с помощью теоремы Уитни.

82. Показать, что тензор типа $(1,1)$, инвариантный относительно ортогональных замен координат, пропорционален тензору δ^i_j.

83. Показать, что тензор третьей валентности, инвариантный относительно произвольных замен координат, равен нулю.

84. Найти общий вид тензора четвертой валентности, инвариантного относительно произвольной замены координат.

85. Выразить след матрицы в виде результата тензорных операций.

86. Выразить детерминант матрицы в виде результата тензорных операций.

87. Пусть X имеет валентность $(1,0)$, W – $(0,1)$. Найти ранг оператора $X \otimes W$.

88. Доказать, что если Γ^i_{jk} — коэффициенты связности, то $\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ является тензором.

89. Доказать, что если Γ^i_{jk}, $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}$ — коэффициенты двух связностей, то $\Gamma^i_{jk} - \widetilde{\Gamma}^i_{jk}$ является тензором.

90. Доказать, что $\nabla_k \delta^i_j = 0$.

91. Описать все линейные связности на окружности. Написать формулу для параллельного перенесения для произвольной связности на окружности.

92. Пусть $N \subset M$ подмногообразие риманова многообразия M. Пусть ∇, ∇^0 — симметрические римановы связности на многообразии M и подмногообразии N (с индуцированной римановой метрикой на нем). Пусть ξ — векторное поле на M, касательное к подмногообразию N. Доказать формулу
$$\nabla^0_\eta \xi = \mathbf{pr}(\nabla_\eta \xi) \tag{7}$$
для любого вектора η, касательного к подмногообразию N, где $\mathbf{pr}$ — ортогональная проекция на касательное пространство к подмногообразию N.

93. Проверить правило Ньютона-Лейбница ковариантного дифференцирования произведения произвольных тензорных полей.

94. Риманова связность ∇ на римановом многообразии коммутирует с операциями поднятия и опускания индексов.

95. При параллельном перенесении вектора вдоль геодезической римановой связности угол между ним и касательным вектором остается постоянным.

96. Составить уравнение параллельного перенесения векторов на плоскости.

97. Описать операцию параллельного перенесения по основанию прямого кругового конуса.

98. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на прямом круговом конусе в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой. Установить зависимость от способа расположения кривой на конусе.

99. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате параллельного перенесения вдоль параллели.

100. Описать операцию параллельного перенесения по треугольнику на сфере, образованному двумя меридианами и экватором.

101. Установить зависимость между углом поворота касательного вектора на сфере в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой и площадью области, ограниченной этой кривой.

102. Выписать в векторной форме формулу ковариантной производной на поверхности в трехмерном пространстве.

103. Показать, что геодезическая линия на двумерной поверхности в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ вполне характеризуется свойством: в каждой точке, где ее кривизна отлична от нуля, нормаль к поверхности коллинеарна с нормалью к кривой.

104. Пусть прямая линия лежит на поверхности в $\mathbf{R}^3$. Доказать, что эта прямая является геодезической линией на поверхности.

105. Пусть две поверхности соприкасаются по некоторой линии, которая являются геодезической на одной поверхности. Показать, что эта линия является геодезической и на другой поверхности.

106. На поверхности $\mathbf{r}(u,v) \in \mathbf{R}^3$ задана кривая линия $u = u(s),\ v = v(s)$. Показать, что геодезическая линия задается уравнением

$$\left(m(u(s),v(s)), \frac{d}{ds}\mathbf{r}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}\right) = 0, \tag{8}$$

где m — вектор нормали поверхности.

107. Доказать, что в евклидовом пространстве геодезическими линиями являются прямые и только они.

108. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.

109. Доказать, что параллель поверхности вращения является геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.

110. Найти все геодезические линии двумерной сферы.

111. Показать, что геодезические линии поверхности с первой квадратичной формой
$$ds^2 = v\left(du^2 + dv^2\right) \tag{9}$$
изображаются на плоскости (u, v) параболами.

112. Пусть две поверхности трансверсально пересекаются по линии,которая является геодезической на каждой из этих поверхностей. Доказать, что эта линия является прямой.

113. Вычислить тензор кривизны на двумерной сфере $\mathbf{S}^2$ в сферических координатах.

114. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: сферы $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$,

115. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: тора $\mathbf{T}^2$, вложенного в $\mathbf{R}^3$ как поверхность вращения,

116. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: тора $\mathbf{T}^2$, вложенного в $\mathbf{C}^2$, задаваемого уравнениями
$$\begin{aligned} |z|^2 + |w|^2 &= 1, \\ |z| &= |w|; \end{aligned} \tag{10}$$

117. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: прямого кругового конуса;

118. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: цилиндра;

119. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: сферы $\S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

120. Показать, что у двумерной поверхности тензор Риччи пропорционален метрическому тензору. Найти коэффициент пропорциональности.

121. Доказать, что если дифференциальная форма ω имеет порядок p, т.е. $\omega \in \Lambda^p\left(V^*\right)$, а вектора $v_1, v_2, \ldots, v_p$ линейно зависимы, то
$$V\left(v_1, v_2, \ldots, v_p\right) = 0. \tag{11}$$

122. Доказать, что если формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то
$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0. \tag{12}$$

123. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p \in V^*$; $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$. Доказать, что
$$\left(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)\left(v_1, v_2, \ldots, v_p\right) = \frac{1}{n!} \det \left\|\omega_i(v_j)\right\|_{i,j=1}^n. \tag{13}$$

124. Пусть метрический тензор на ориентированном многообразии задан своими компонентами g_{ij} в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Показать, что выражение вида

$$\sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge x^n \tag{14}$$

корректно определяет дифференциальную форму на многообразии.

125. Записать дифференциальную форму $\omega = f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$ в полярных координатах.

126. Записать дифференциальную форму $\omega = \sqrt{x^2 + y^2}(dx \wedge dy)$ в полярных координатах.

127. Записать дифференциальную форму $\omega = xdx + ydy + zdz$ в сферических координатах.

128. Записать дифференциальную форму

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

в сферических координатах.

129. Записать дифференциальную форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ в сферических координатах.

130. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y)dx \wedge dz$;

131. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $13xdx + y^2 dy + xyzdz$;

132. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$;

133. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$;

134. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$;

135. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы fdg, где f и g — гладкие функции.

136. Доказать, что многообразие M, $\dim M = n$, ориентируемо тогда и только тогда, когда на M существует дифференциальная форма ω ранга n, невырожденная в каждой точке.

137. Пусть ω — дифференциальная форма ранга 1, нигде не обращающаяся в ноль, а Ω —произвольная форма ранга $p > 0$. Доказать, что форма Ω допускает представление $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

138. Доказать, что ограничение замкнутой формы на подмногообразие является замкнутой формой.

139. Доказать, что ограничение точной формы на подмногообразие является точной формой.

140. Доказать, что $H^0(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ и $H^i(\mathbf{R}) = 0$ при $i \neq 0$.

141. Описать нульмерные когомологии де Рама произвольного гладкого компактного многообразия.

142. Доказать, что на $\mathbf{R}^n$ любая замкнутая форма ранга $k > 0$ точна, а замкнутая форма ранга 0 есть постоянная функция.

143. Пусть многообразие M разлагается в несвязное объединение двух многообразий одинаковой размерности, $M = M_1 \sqcup M_2$. Доказать, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

144. Показать, что на окружности $\mathbf{S}^1$ форма ω ранга 1 является точной тогда и только тогда, когда $\int\limits_{\mathbf{S}^1} \omega = 0$.

145. Вычислить когомологии де Рама интервала (a, b) и евклидова пространства $\mathbf{R}^n$.

146. Вычислить когомологии де Рама многообразий окружности $\mathbf{S}^1$.

147. Вычислить когомологии де Рама сферы $\mathbf{S}^2$.

148. Вычислить когомологии де Рама плоскости $\mathbf{R}^2$ с одной выколотой точкой.

149. Вычислить когомологии де Рама плоскости $\mathbf{R}^2$ с двумя выколотыми точками.

150. Доказать *лемму Пуанкаре*: любая замкнутая форма на любом многообразии является локально точной.

151. Вычислить интеграл $\int\limits_M ((x+y)dx + (x-y)dy))$ по эллипсу

$$M = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

152. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

по сфере $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

153. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M ((y-z)dy \wedge dz + (z-x)dz \wedge dx + (x-y)dx \wedge dy)$$

по сфере $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

154. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M ((y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz)$$

по кривой

$$M = \{x = a\sin^2 t,\ y = 2a\cos t \sin t,\ z = a\cos^2 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.\}$$

155. Вывести из общей формулы Стокса формулу Грина.

156. Вывести из обще формулы Стокса формулу Гаусса–Остроградского.

157. Вывести из общей формулы Стокса трехмерную формулу Стокса.

158. Вывести из общей формулы Стокса формулу интегрирования по трехмерному объему V, ограниченного замкнутой поверхностью Σ:

$$\iiint\limits_V (\varphi\Delta\psi + (\mathbf{grad}\ \varphi, \mathbf{grad}\ \psi))\, dV = \iint\limits_\Sigma \varphi \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} d\sigma,$$

где $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ — производная вдоль нормали к поверхности Σ.

159. Вывести из общей формулы Стокса формулу интегрирования по трехмерному объему V, ограниченного замкнутой поверхностью Σ:

$$\iiint\limits_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dV = \iint\limits_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} - \psi\right) d\sigma,$$

где $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ — производная вдоль нормали к поверхности Σ.

160. Пусть $f : \mathbf{S}^2 \longrightarrow \mathbf{S}^2$ — центральная симметрия. Вычислить степень $\deg f$ отображения f.

161. Найти степень канонического отображения

$$\mathbf{S}^{2k+1} \longrightarrow \mathbf{RP}^{2k+1}$$

.

162. Привести в явном виде пример отображения $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ степени k.

163. Построить гладкое отображение тора $\mathbf{T}^2$ на сферу $\mathbf{S}^2$ степени 1.

164. Построить гладкое отображение тора $\mathbf{T}^2$ на сферу $\mathbf{S}^2$ степени k

165. Доказать, что два гладких отображения $\mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень отображения.

166. Доказать, что два гладких отображения $\mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень отображения.

167. Для стандартного вложения тора $\mathbf{T}^2$ в $\mathbf{R}^3$ пусть $f : \mathbf{T}^2 \longrightarrow \mathbf{S}^2$ сопоставляет точке $x \in \mathbf{T}^2$ ее нормаль $f(x) = \mathbf{n}$. Вычислить степень отображения f.