Лекции
по курсу "Дифференциальная геометрия и топология

(математики, 3-й курс, лектор - А.С.Мищенко)
Осенний семестр 2007/08 уч. года

9 сентября 2007 г.

1 Лекция 07 сентября 2007 г.

Теория многообразий

1. Метрические пространства. Примеры: числовая прямая, n-мерное евклидово пространство, дискретное пространство, пространство непрерывных функций, пространство измеримых с интегрируемым квадратом функций.

2. Топологические пространства. Подпространства. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. T_0-пространства (колмогоровские пространства). T_1-пространства. T_2-пространства (хаусдорфовы пространства). T_3-пространства (регулярные пространства). $T_{31/2}$-пространства (вполне регулярные пространства, Тихоновские пространства). T_4-пространства (нормальные пространства).

3. Лемма Урысона, Теорема Титце-Урысона. Нормальность метрического пространства.

4. Связность. Связность непрерывного образа связного пространства.

5. Компактность. Компактность непрерывного образа компактного пространства. Компактность декартового произведения компактного пространства. Критерий компактности множества в евклидовом пространстве.

6. Общее определение многообразия. Атлас, карты, координатные отображения. Функции перехода (склейки). Топологические и гладкие многообразия. Класс гладкости. Аналитические многообразия. Комплексно аналитические многообразия.

2 Лекция 21 сентября 2007 г.

7. Диффеоморфизм многообразий. Многообразия с краем и без края.

8. Гладкие отображения многообразий. Дифференциал гладкого отображения. Погружения и вложения. Подмногообразия. Ориентируемость и неориентируемость.

9. Область в евклидовом пространстве, график гладкой функции, неособая поверхность уровня гладкой функции, - как гладкое многообразие. Связь теоремы о неявной функции с гладкими подмногообразиями.

10. Касательный вектор. Три его определения. Касательное пространство к гладкому многообразию.

11. Слабая теорема Уитни о вложении многообразий в конечномерное евклидово пространство (с доказательством).

Тензорная алгебра

1. Тензоры, валентность тензоров, сумма, свертка.

2. Альтернирование и симметрирование тензоров.

3. Классические примеры тензоров: касательный вектор, градиент функции, функционал на касательном пространстве, скалярное произведение, линейный оператор.

4. Тензорный вид коэффициентов линейной зависимости между тензорами.

5. Тензорное произведение, тензорная интерпретация следа и детерминанта матрицы.

6. Поднятие и опускание индексов у тензора.

7. Теорема о представлении тензора в виде суммы тензорных произведений простейших тензоров.

Тензорный анализ

1. Ковариантный градиент векторного поля. Закон изменения коэффициентов связности при замене координат.

2. Ковариантный градиент тензорных полей произвольной валентности.

3. Формулы ковариантной производной по направлению и вдоль кривой.

4. Формула закона преобразования коэффициентов связности при замене координат.

5. Операция параллельного перенесения. Геометрическая интерпретация ковариатной производной.

6. Связность, индуцированная на поверхности в евклидовом пространстве.

Геодезические

1. Симметрическая связность, ассоциированная с римановой метрикой.

2. Сохранение длины угла между векторами при параллельном перенесении.

3. Геодезические линии, уравнение геодезической.

4. Изометрия. Теорема о сохранении геодезических при изометрии.

5. Геодезические на плоскости и сфере. Группы движений прямой, плоскости и сферы.

6. Псевдосфера. Геодезические на псевдосфере.

7. Теорема о том, что достаточно близкие точки соединяются единственной геодезической.

Риманова геометрия

1. Тензор кривизны риманового многообразия, формулы тензора кривизны.

2. Свойства симметрии и косой симметрии тензора кривизны.

3. Тензор Риччи и скалярная кривизна. Связь с Гауссовой кривизной поверхности.

4. Теорема о независимости параллельного перенесения от кривой при нулевом тензоре кривизны.

5. Теорема о приведении метрического тензора к единичной матрице в случае нулевого тензора кривизны поверхности.

Дифференциальные формы и когомологии де Рама

1. Дифференциальный формы и алгебраические операции над ними.

2. Внешний дифференциал и его свойства.

3. Представление дифференциальных форм в локальных координатах.

4. Прообраз дифференциальной формы при гладком отображении.

5. Понятие когомологий гладкого многообразия. Связь с решениями уравнения $dT = S$.
6. Вычисление когомологий окружности.
7. Независимость прообраза класса когомологий от деформации отображения.
8. Лемма Пуанкаре.
9. Группы когомологий евклидового пространства.

Интегрирование дифференциальных форм

1. Понятие интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию. Независимость интеграла от выбора локальной системы координат.
2. Общая формула Стокса.
3. Формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского.
4. Интегралы первого и второго рода в векторном анализе.
5. Объем риманового ориентированного компактного многообразия.

Степень отображения

1. Регулярные точки отображений. Лемма Сарда.
2. Теорема Уитни о вложении компактного многообразия в евклидово пространство.
3. Степень отображения и ее свойства.
4. Основная теорема алгебры.
5. Группа гомеоморфизмов, порожденная векторным полем
6. Выражение интеграла дифференциальной формы через степень отображения.
7. Гауссово сферическое отображение.
8. Теорема Гаусса-Боне.

Вариационные задачи в геометрии

1. Уравнение Эйлера для вариационной задачи.
2. Уравнение экстремалей для функционала действия на римановом многообразии.
3. Уравнение экстремалей для функционала длины.

Всего 56 вопросов на 16 лекций === по 3–4 вопроса на лекцию