Московский Государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Механико–математический факультет

Контрольная работа по дифференциальной геометрии и топологии
(математики, 3-й курс; осенний семестр 2007/08 уч. г.)

Вариант №: **1**

1. Доказать, что шар $B_\varepsilon(x)$ радиуса ε с центром в точке x некоторого метрического пространства является открытым множеством.

2. Доказать, что куб $\{|x_i| \le 1,\ i = 1,\ 2, \dots, n\}$ и шар $\{\sum_{i=1}^n x_i^2 \le 1\}$ гомеоморфны. Доказать, что открытый куб и открытый шар диффеоморфны.

3. Доказать, что матричная группа $\mathbf{SL}(n, \mathbf{R})$ является многообразием и допускает структуру гладкого (аналитического) многообразия. Вычислить размерность многообразия и построить атлас карт на нем.

4. Описать конфигурационное пространство для двузвенного плоского маятника в $\mathbf{R}^2$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

5. Показать, что тензор типа $(1, 1)$, инвариантный относительно ортогональных замен координат, пропорционален тензору δ^i_j.

6. Описать операцию параллельного перенесения по треугольнику на сфере, образованному двумя меридианами и экватором.

7. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: тора $\mathbf{T}^2$, вложенного в $\mathbf{C}^2$, задаваемого уравнениями

$$\begin{aligned} |z|^2 + |w|^2 &= 1, \\ |z| &= |w|; \end{aligned} \tag{1}$$

8. Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p \in V^*$; $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$. Доказать, что

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_p)\,(v_1, v_2, \dots, v_p) = \frac{1}{n!} \det \|\omega_i(v_j)\|_{i,j=1}^n. \tag{2}$$

9. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y) dx \wedge dz$;

10. Доказать, что ограничение замкнутой формы на подмногообразие является замкнутой формой.

Московский Государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Механико–математический факультет

Контрольная работа по дифференциальной геометрии и топологии
(математики, 3-й курс; осенний семестр 2007/08 уч. г.)

Вариант №: **2**

1. Пусть $Y_1 \subset X$ и $Y_2 \subset X$ — открытые плотные подмножества. Тогда $Y = Y_1 \cap Y_2$ — открытое плотное подмножество. Показать, что от свойства открытости в задаче нельзя отказаться.

2. Гомеоморфны ли диск $\mathbf{D}^2$ и сфера $\mathbf{S}^2$?

3. Доказать, что матричная группа $\mathbf{O}(n)$ является многообразием и допускает структуру гладкого (аналитического) многообразия. Вычислить размерность многообразия и построить атлас карт на нем.

4. Описать конфигурационное пространство для двузвенного маятника в $\mathbf{R}^3$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

5. Показать, что тензор третьей валентности, инвариантный относительно произвольных замен координат, равен нулю.

6. Установить зависимость между углом поворота касательного вектора на сфере в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой и площадью области, ограниченной этой кривой.

7. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: прямого кругового конуса;

8. Пусть метрический тензор на ориентированном многообразии задан своими компонентами g_{ij} в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Показать, что выражение вида

$$\sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge x^n \tag{3}$$

корректно определяет дифференциальную форму на многообразии.

9. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $13xdx + y^2dy + xyzdz$;

10. Доказать, что ограничение точной формы на подмногообразие является точной формой.

Московский Государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Механико–математический факультет

Контрольная работа по дифференциальной геометрии и топологии
(математики, 3-й курс; осенний семестр 2007/08 уч. г.)

Вариант №: **3**

1. Пусть пространства E и F метрические, и E компактно. Пусть отображение $f : E \to F$ является непрерывным отображением "на". Доказать, что F компактно.

2. Доказать, что двумерный тор $\mathbf{T}^2$, заданный как поверхность вращения вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости Oxy и не пересекающейся с осью Oz, является гладким многообразием. Построить атлас карт.

3. Доказать, что матричная группа $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ является многообразием и допускает структуру гладкого (аналитического) многообразия. Вычислить размерность многообразия и построить атлас карт на нем.

4. Описать конфигурационное пространство пары материальных точек в $\mathbf{R}^3$, соединенных твердым стержнем.

5. Доказать, что если Γ^i_{jk} — коэффициенты связности, то $\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ является тензором.

6. Показать, что геодезическая линия на двумерной поверхности в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ вполне характеризуется свойством: в каждой точке, где ее кривизна отлична от нуля, нормаль к поверхности коллинеарна с нормалью к кривой.

7. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: цилиндра;

8. Записать дифференциальную форму $\omega = \sqrt{x^2 + y^2}(dx \wedge dy)$ в полярных координатах.

9. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$;

10. Описать нульмерные когомологии де Рама произвольного гладкого компактного многообразия.

Московский Государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Механико–математический факультет

Контрольная работа по дифференциальной геометрии и топологии
(математики, 3-й курс; осенний семестр 2007/08 уч. г.)

Вариант №: **4**

1. Верно ли, что расстояние между двумя непересекающимися, замкнутыми множествами на плоскости (на прямой) всегда больше 0?

2. Доказать, что n–мерное проективное пространство $\mathbf{RP}^n$ является гладким (и вещественно-аналитическим) многообразием.

3. Доказать, что матричная группа $\mathbf{U}(n)$ является многообразием и допускает структуру гладкого (аналитического) многообразия. Вычислить размерность многообразия и построить атлас карт на нем.

4. Описать конфигурационное пространство для твердого тела в $\mathbf{R}^3$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

5. Доказать, что если Γ^i_{jk}, $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}$ — коэффициенты двух связностей, то $\Gamma^i_{jk} - \widetilde{\Gamma}^i_{jk}$ является тензором.

6. Пусть прямая линия лежит на поверхности в $\mathbf{R}^3$. Доказать, что эта прямая является геодезической линией на поверхности.

7. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: сферы $\S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

8. Записать дифференциальную форму $\omega = xdx + ydy + zdz$ в сферических координатах.

9. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$;

10. Пусть многообразие M разлагается в несвязное объединение двух многообразий одинаковой размерности, $M = M_1 \sqcup M_2$. Доказать, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

Московский Государственный университет
им. М.В.Ломоносова
Механико–математический факультет
Контрольная работа по дифференциальной геометрии и топологии
(математики, 3-й курс; осенний семестр 2007/08 уч. г.)

Вариант №: **5**

1. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция f, такая, что $K = f^{-1}(0)$.

2. Доказать, что n–мерное комплексное проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ является гладким (и комплексно-аналитическим) многообразием.

3. Описать конфигурационное пространство для твердого стержня в $\mathbf{R}^2$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

4. Доказать, что на любом связном гладком многообразии X для любых двух точек $x, y \in X$ существует такой диффеоморфизм $\varphi : X \longrightarrow X$, что $\varphi(x) = y$.

5. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на прямом круговом конусе в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой. Установить зависимость от способа расположения кривой на конусе.

6. Пусть две поверхности соприкасаются по некоторой линии, которая являются геодезической на одной поверхности. Показать, что эта линия является геодезической и на другой поверхности.

7. Доказать, что если дифференциальная форма ω имеет порядок p, т.е. $\omega \in \Lambda^p(V^*)$, а вектора $v_1, v_2, \ldots, v_p$ линейно зависимы, то

$$\omega(v_1, v_2, \ldots, v_p) = 0. \tag{4}$$

8. Записать дифференциальную форму

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

в сферических координатах.

9. Доказать, что многообразие M, $\dim M = n$, ориентируемо тогда и только тогда, когда на M существует дифференциальная форма ω ранга n, невырожденная в каждой точке.

10. Вычислить когомологии де Рама многообразий окружности $\mathbf{S}^1$.

Московский Государственный университет
им. М.В.Ломоносова
Механико–математический факультет
Контрольная работа по дифференциальной геометрии и топологии
(математики, 3-й курс; осенний семестр 2007/08 уч. г.)

Вариант №: **6**

1. Пусть $G \subset I^1$ — открытое множество на отрезке. Доказать, что G — объединение непересекающихся интервалов.

2. Доказать гомеоморфность многообразий $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{CP}^1$.

3. Описать конфигурационное пространство для твердого стержня в $\mathbf{R}^3$, соединенного шарниром с неподвижной опорой.

4. Доказать, что пространство всех касательных векторов к гладкому многообразию образует гладкое многообразие удвоенной размерности.

5. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате параллельного перенесения вдоль параллели.

6. Пусть две поверхности трансверсально пересекаются по линии,которая является геодезической на каждой из этих поверхностей. Доказать, что эта линия является прямой.

7. Доказать, что если формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0. \tag{5}$$

8. Записать дифференциальную форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ в сферических координатах.

9. Пусть ω — дифференциальная форма ранга 1, нигде не обращающаяся в ноль, а Ω —произвольная форма ранга $p > 0$. Доказать, что форма Ω допускает представление $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

10. Вычислить когомологии де Рама плоскости $\mathbf{R}^2$ с двумя выколотыми точками.