Описание G-расслоений на пространствах с квази-свободным собственным действием дискретной группы G

Мищенко, А.С. Моралес Мелендес, К.

Аннотация

В работе дается описание эквивариантных векторных расслоений с действием дискретной группы G для случая, когда это действие на базе является квази-свободным собственным действием, т.е. у всех точек базы стационарной подгруппой является конечная подгруппа или ей сопряженная подгруппа. Описание дается в терминах некоторого классифицирующего пространства.

1 Введение

Эта задача естественно возникает из метода Коннера-Флойда ([2]) описания бордизмов с действием группы G при помощи так называемой фикспоинт-конструкции. Конструкция Коннера-Флойда сводит задачу описания бордизмов к двум задачам: а) описания множества неподвижных (или, более общим образом, стационарных) точек, которые образуют подмногообразия, оснащенные структурой нормального расслоения тоже с действием группы G, однако это действие имеет уже стационарные точки более низкого ранга, б) описания бордизмов с действием группы G более низкого ранга. Предполагается, что группа G является дискретной.

Действительно, рассмотрим некоторую конечную подгруппу $H < G$ и множество всех точек M^H, неподвижных относительно действия подгруппы H. Если подгруппа H является максимальной среди тех конечных подгрупп $K < G$, для которых $M^K \neq \emptyset$, то сопряженный подгруппы $H' = gHg^{-1}$ приводят либо к тому же множеству неподвижных точек, т.е. $M^H = M^{H'}$, либо эти множества не пересекаются $M^H \cap M^{H'} = \emptyset$. В любом случае объединение

$$M' = \bigcup_{g \in G} M^{gHg^{-1}}$$

является подмногообразием, регулярная трубчатая окрестность которого эквивариантно гомеоморфна векторному G-расслоению ξ, действие группы G на тотальном пространстве уже не имеет в качестве стационарных подгрупп H или ей сопряженные подгруппы. Тогда подмногообразие M' распадается на компоненты

$$M' = \coprod_{[[g] \in G/N(H)]} g(M^H),$$

где $N(H)$ — нормализатор подгруппы H, причем на M^H действует фактор группа $N(H)/H$. Это все показывает, что для задачи описания структуры неподвижных точек методом Коннера-Флойда достаточно искать описания эквивариантных векторных расслоений только со специальным типом действия группы G (или нормализатора $N(H)$) на базе расслоения – так называемых квази-свободных действий. Ранее различными авторами (см., например [3]) были рассмотрены только свободные действия и тривиальные действия группы G. Случай произвольного действия тоже был рассмотрен в работе ([4, 7.2]), но не для расслоений, а для порожденного ими K-функтора, да и то, только для компактных групп. Все это позволяет считать, что проблема описания эквивариантных векторных расслоений для квази-свободных собственных действий дискретных групп представляет существенный интерес.

Краткое изложение и различные предварительные изложения были опубликованы в ([8],[7],[11],[9],[10]). Первый автор был частично поддержан грантами РФФИ №08-01-00034-а, № 10-01-92601-КО-а и проектом Минобразования РФ № 2.1.1/5031

2 Формулировка задачи

Рассмотрим G-эквивариантное векторное расслоение ξ над базой M:

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[d] \\ M \end{tikzcd} \tag{1}$$

Пусть $H \lhd G$ — конечная нормальная подгруппа, которая тривиальным образом действует на базе M. Тогда действие группы G на базе M редуцируется к фактор группе $G_0 = G/H$:

$$\begin{tikzcd} G \times M \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & M. \\ G_0 \times M \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Предположим, что действие $G_0 \times M \longrightarrow M$ свободно, и других неподвижных точек действия подгруппы H на тотальном пространстве расслоения ξ нет.

Тогда мы получаем следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G\times\xi & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_0\times M & \longrightarrow & M \end{array} \tag{3}$$

Определение 1 *В соответствии с [5, p. 210], будем говорить, что действие группы G является квази-свободным над базой и имеет нормальную стационарную подгруппу H.*

Ограничивая действие на подгруппу H, получаем более простую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H\times\xi & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array} \tag{4}$$

Пусть $\rho_k : H\longrightarrow\mathbf{U}(V_k)$ серия всех неприводимых (унитарных) представлений конечной группы H. Тогда H-расслоение ξ представляется в виде конечной прямой суммы:

$$\xi\approx\bigoplus_k\left(\xi_k\bigotimes V_k\right), \tag{5}$$

причем действие группы H на расслоениях ξ_k тривиально, а V_k обозначает тривиальное расслоение со слоем V_k и с послойным действием группы H при помощи представления ρ_k.

Лемма 1 *На каждом слагаемом суммы (5) группа G действует независимо, т.е. каждое слагаемое $\xi_k\bigotimes V_k$ инвариантно относительно действия группы G.*

Доказательство. Рассмотрим действие группы G в тотальном пространстве расслоения ξ. Фиксируем точку $x\in M$. Действие элемента $g\in G$ послойно, и отображает слой ξ_x в слой ξ_{gx}:

$$\Phi(x,g):\xi_x\longrightarrow\xi_{gx}.$$

При этом для двух элементов $g_1,g_2\in G$ имеем:

$$\Phi(x,g_1g_2)=\Phi\left(g_2x,g_1\right)\circ\Phi\left(x,g_2\right), \tag{6}$$

$$\Phi(x,g_1g_2):\xi_x\quad\xrightarrow{\Phi(x,g_2)}\quad\xi_{g_2x}\quad\xrightarrow{\Phi(g_2x,g_1)}\quad\xi_{g_1g_2x}.$$

В частности, если $g_2=h\in H\lhd G$, то $g_2x=hx=x$. Значит

$$\Phi(x,gh):\xi_x\quad\xrightarrow{\Phi(x,h)}\quad\xi_x\quad\xrightarrow{\Phi(x,g)}\quad\xi_{gx}.$$

Аналогично, если $g_1 = h \in H \lhd G$, то $g_1 gx = hgx = gx$. Значит

$$\Phi(x, hg) : \xi_x \quad \overset{\Phi(x,g)}{\longrightarrow} \quad \xi_{gx} \quad \overset{\Phi(gx,h)}{\longrightarrow} \xi_{gx}.$$

Оператор $\Phi\,(x, h)$ не зависит от точки $x \in M$,

$$\Phi(x, h) = \Psi(h) : \bigoplus_k \left(\xi_{k,x} \bigotimes V_k\right) \longrightarrow \bigoplus_k \left(\xi_{k,x} \bigotimes V_k\right),$$

причем, поскольку действие группы H задается на каждом пространстве V_k попарно различными неприводимыми представлениями ρ_k, то

$$\Psi(h) = \bigoplus_k \left(\mathbf{Id} \bigotimes \rho_k(h)\right).$$

Таким образом, получается следующее соотношение:

$$\Phi(x, gh) = \Phi(x, g) \circ \Psi(h) = \Phi(x, ghg^{-1}g) = \Psi(ghg^{-1}) \circ \Phi(x, g). \tag{7}$$

Пусть оператор $\Phi(x, g)$ записывается при помощи матрицы для разложения пространства ξ_x в виде прямой суммы

$$\xi_x = \bigoplus_k \left(\xi_{k,x} \bigotimes V_k\right) :$$

$$\Phi(x, g) = \begin{pmatrix} \Phi(x,g)_{1,1} & \cdots & \Phi(x,g)_{k,1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \Phi(x,g)_{1,k} & \cdots & \Phi(x,g)_{k,k} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{8}$$

При $k \neq l$ $\Phi(x, g)_{k,l} = 0$, т.е. матрица $\Phi(x, g)$ диагональна,

$$\Phi(x, g) = \bigoplus_k \Phi(x, g)_{k,k} : \bigoplus_k \left(\xi_{k,x} \bigotimes V_k\right) \longrightarrow \bigoplus_k \left(\xi_{k,gx} \bigotimes V_k\right),$$

$$\Phi(x, g)_{k,k} : \left(\xi_{k,x} \bigotimes V_k\right) \longrightarrow \left(\xi_{k,gx} \bigotimes V_k\right),$$

3 Описание частного случая $\xi \bigotimes V$

Рассмотрим G-векторное расслоение $\xi = \xi_0 \otimes V$ над базой M.

$$\begin{array}{c} \xi_0 \otimes V \\ \big\downarrow \\ M \end{array}$$

с квази-свободным действием группы G над базой и с конечной нормальной стационарной подгруппой $H \lhd G$. Обозначим через F слой расслоения ξ_0.

Группа H на расслоении ξ действует тривиально, V обозначает тривиальное расслоение со слоем V и послойным действием группы H при помощи неприводимого представления ρ.

Определение 2 *Канонической моделью слоя в G-расслоении $\xi = \xi_0 \bigotimes V$ с со слоем $F \otimes V$ называется расслоение над одной орбитой, гомеоморфной G_0, и слоем $(F \otimes V)$, т.е. декартово произведение произведение $\mathcal{W} = G_0 \times (F \otimes V)$ с естественное проекцией*

$$\mathcal{W} = G_0 \times (F \otimes V) \longrightarrow G_0$$

и с послойным действием группы G

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{W} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{W} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G_0 & \xrightarrow{\mu} & G_0 \end{array}$$

т.е.

$$\begin{array}{ccc} G \times (G_0 \times (F \otimes V)) & \xrightarrow{\phi} & G_0 \times (F \otimes V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G_0 & \xrightarrow{\mu} & G_0 \end{array}$$

где μ обозначает левое действие группы G на фактор-группе G_0, а послойное действие

$$\phi(g_1, [g]) : [g] \times (F \otimes V) \to [g_1 g] \times (F \otimes V)\,, \quad g_1 \in G, [g] \in G_0,$$

задается по формуле

$$\phi(g_1, [g]) = \mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_1 g) u^{-1}(g)). \tag{9}$$

где

$$u : G \longrightarrow H$$

фиксированный гомоморфизм правых H-модулей по умножению, который удовлетворяет условиям

$$u(gh) = u(g)h, \quad u(1) = 1, \quad g \in G, h \in H.$$

Лемма 2 *Определение (9) действия группы G корректно.*

Доказательство. Достаточно доказать, что

а) формула (9) задает ассоциативное действие, т.е.

$$\phi(g_2 g_1, [g]) = \phi(g_2, [g_1 g]) \circ \phi(g_1, [g]),$$

для любых $g \in G$, $g_1 \in G$, $g_2 \in G$ и б) формула (9) не зависит от выбора представителя $gh \in [g]$:

$$\phi(g_1, [g]) = \phi(g_1, [gh]),$$

т.е.

$$\mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_1 g)u^{-1}(g)) = \mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_1 gh)u^{-1}(gh))$$

для любых $g \in G$, $g_1 \in G$ и $h \in H$.

В самом деле,

$$\begin{aligned}
&\phi(g_2 g_1, [g]) = \mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_2 g_1 g)u^{-1}(g)) = \\
&\mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_2 g_1 g)u(g_1 g)u^{-1}(g_1 g)u^{-1}(g)) = \\
&= \mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_2 g_1 g)u(g_1 g)) \circ \mathbf{Id} \otimes \rho(u^{-1}(g_1 g)u^{-1}(g)) = \\
&= \phi(g_2, [g_1 g]) \circ \phi(g_1, [g]),
\end{aligned}$$

что доказывает а). Из уравнения $u(gh) = u(g)h$ для любых $g \in G$ и $h \in H$ ясно, что

$$u(g_1 gh)u^{-1}(gh) = u(g_1 g)hh^{-1}u^{-1}(g) = u(g_1 g)u^{-1}(g),$$

откуда и следует б). ∎

Каноническая модель, вообще говоря, зависит от выбора гомоморфизма $u : G \longrightarrow H$, но при этом канонические модели оказываются изоморфными, как показывает следующая лемма.

Лемма 3 *Для различного выбора гомоморфизмов $u : G \longrightarrow H$ и $u' : G \longrightarrow H$ соответствующие канонические модели $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}'$ эквивариантно изоморфны, т.е. имеется послойный эквивариантный изоморфизм*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{W} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{W}' \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_0 & = & G_0
\end{array}$$

Доказательство. Требуется посроить послойно эквивариантный изоморфизм

$$\begin{array}{ccc}
G_0 \times (F \otimes V) & \xrightarrow{\psi} & G_0 \times (F \otimes V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_0 & = & G_0
\end{array}$$

Зададим ψ формулой

$$\psi([g]) : [g] \times (F \otimes V) \longrightarrow [g] \times (F \otimes V)$$

$$\psi([g]) = \mathbf{Id} \otimes \rho\left(u'(g)u^{-1}(g)\right) \tag{10}$$

Формула (10) корректна, поскольку а) не зависит от выбора представителя в классе смежности $g \in [g]$, и задает эквивариантное отображение канонических моделей, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [g] \times (F \otimes V) & \stackrel{\phi(g_1,[g])}{\longrightarrow} & [g_1 g] \times (F \otimes V) \\ \Big\downarrow \psi([g]) & & \Big\downarrow \psi([g_1 g]) \\ [g] \times (F \otimes V) & \stackrel{\phi'(g_1,[g])}{\longrightarrow} & [g_1 g] \times (F \otimes V) \end{array}$$

коммутативна. ∎

Рассмотрим на базе M атлас эквивариантных карт $\{O_\alpha\}$,

$$M = \bigcup_\alpha O_\alpha,$$

$$[g]O_\alpha = O_\alpha, \qquad [g] \in G_0.$$

Лемма 4 *Существует достаточно мелкий атлас $\{O_\alpha\}$ такой, что каждая карта O_α представляется в виде несвязного объединения своих подкарт:*

$$O_\alpha = \bigsqcup_{[g]\in G_0} [g]U_\alpha,$$

причем сдвиги карты U_α попарно не пересекаются, т.е.

$$[g]U_\alpha \cap [g']U_\alpha = \emptyset \text{ для } [g] \neq [g'],$$

и для различных индексов $\alpha \neq \beta$, непустое пересечение $U_\alpha \cap [g_{\alpha\beta}]U_\beta \neq \emptyset$, может быть только для единственного элемента $[g_{\alpha\beta}] \in G_0$.

Другими словами, если $[g] \neq [g_{\alpha\beta}]$, то $U_\alpha \cap [g]U_\beta = \emptyset$.

Это все означает, что каждая инвариантная карта O_α гомеоморфна декартовому произведению

$$O_\alpha \approx U_\alpha \times G_0,$$

а пересечение двух карт $O_\alpha \cap O_\beta$ тоже представляется в виде декартового произведения

$$O_\alpha \cap O_\beta \approx (U_\alpha \cap [g_{\alpha\beta}]U_\beta) \times G_0.$$

В рамках приведенных обозначений следующая теорема является аналогом утверждения о локально тривиальных расслоениях (см., например, ([1])).

Теорема 1 *Расслоение $\xi = \xi_0 \bigotimes V$ локально эквивариантно гомеоморфно декартовому произведению некоторой карты U_α на каноническую модель. Другими словами, для достаточно мелкого атласа существуют G-эквивариантные тривиализации*

$$\psi_\alpha : O_\alpha \times (F \otimes V) \to \xi|_{O_\alpha}, \tag{11}$$

причем

$$O_\alpha \times (F \otimes V) \approx U_\alpha \times (G_0 \times (F \otimes V))$$

и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \xi|_{O_\alpha} & \xrightarrow{g} & \xi|_{O_\alpha} \\ \uparrow \psi_\alpha & & \uparrow \psi_\alpha \\ U_\alpha \times (G_0 \times (F \otimes V)) & \xrightarrow{\mathbf{Id} \times \phi(g)} & U_\alpha \times (G_0 \times (F \otimes V)) \end{array} \tag{12}$$

коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим достаточно мелкий атлас карт $\{O_\alpha\}$, удовлетворяющий свойствам леммы 4. Построим тривиализацию (11), используя произвольную H-эквивариантную тривиализацию

$$\psi_{\alpha,1} : U_\alpha \times (F \otimes V) \to \xi|_{U_\alpha}$$

таким образом, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \xi|_{U_\alpha} & \xrightarrow{g} & \xi|_{[g]U_\alpha} \\ \uparrow \psi_{\alpha,1} & & \uparrow \psi_{\alpha,[g]} \\ U_\alpha \times (F \otimes V) & \xrightarrow{\mathbf{Id} \times \phi(g,[1])} & [g]U_\alpha \times (F \otimes V) \end{array} \tag{13}$$

коммутировала для любой $g \in [g]$, где левая, верхняя и нижние стрелки заданы, а правая стрелка определяется из условия коммутативности диаграммы. Достаточно проверить корректность определения отображения $\psi_{\alpha,[g]}$, т.е его независимость от представителя класса смежности $[g]$,

$$\psi_{\alpha,[g]} = \psi_{\alpha,[hg]}, \quad h \in H.$$

Действительно, поскольку изоморфизм $\psi_{\alpha,1}$ является H-эквивариантным, то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \xi|_{U_\alpha} & \xrightarrow{h} & \xi|_{[g]U_\alpha} \\ \uparrow \psi_{\alpha,1} & & \uparrow \psi_{\alpha,1} \\ U_\alpha \times (F \otimes V) & \xrightarrow{\mathbf{Id} \times \phi(h,[1])} & U_\alpha \times (F \otimes V) \end{array} \tag{14}$$

Соединим диаграммы (13,14) вместе

$$\begin{array}{ccccc} \xi|_{U_\alpha} & \xrightarrow{h} & \xi|_{[g]U_\alpha} & \xrightarrow{g} & \xi|_{[g]U_\alpha} \\ \uparrow \psi_{\alpha,1} & & \uparrow \psi_{\alpha,1} & & \uparrow \psi_{\alpha,[g]} \\ U_\alpha \times (F \otimes V) & \xrightarrow{\mathbf{Id} \times \phi(h,[1])} & U_\alpha \times (F \otimes V) & \xrightarrow{\mathbf{Id} \times \phi(g,[1])} & [g]U_\alpha \times (F \otimes V) \end{array} \tag{15}$$

получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \xi|_{U_\alpha} & \xrightarrow{gh} & \xi|_{[g]U_\alpha} \\ \uparrow \psi_{\alpha,1} & & \uparrow \psi_{\alpha,[g]} \\ U_\alpha \times (F \otimes V) & \xrightarrow{\mathbf{Id} \times \phi(gh,[1])} & [g]U_\alpha \times (F \otimes V) \end{array} \tag{16}$$

поскольку

$$\phi(g,[1])\cdot\phi(h,[1])=\phi(gh,[1]),$$

что и означает корректность определения отображения $\psi_{\alpha,[g]}$.

Теорема доказана. ∎

Через $\mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V))$ обозначим группу эквивариантных автоморфизмов пространства $G_0\times(F\otimes V)$ как векторного G-расслоения над базой G_0 с слоем $F\otimes V$ и каноническим действием группы G.

Следствие 1 *Функции склейки на пересечении* $(U_\alpha\times G_0)\cap(U_\beta\times G_0)=(U_\alpha\cap[g_{\alpha\beta}]U_\beta)\times G_0$ *т.е. гомеоморфизмы* $\Psi_{\alpha\beta}=\psi_\beta^{-1}\psi_\alpha$ *в диаграмме*

$$\begin{array}{ccc}
(U_\alpha\cap[g_{\alpha\beta}]U_\beta)\times(G_0\times(F\otimes V)) & \stackrel{\Psi_{\alpha\beta}}{\longrightarrow} & (U_\alpha\cap[g_{\alpha\beta}]U_\beta)\times(G_0\times(F\otimes V)) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
(U_\alpha\cap[g_{\alpha\beta}]U_\beta)\times G_0 & \stackrel{\mathbf{Id}}{\longrightarrow} & (U_\alpha\cap g_{\alpha\beta}U_\beta)\times G_0
\end{array} \tag{17}$$

эквивариантны по отношению к каноническому действию группы G на базе на канонической модели, т.е.

$$\Psi_{\alpha\beta}(x)\circ\phi(g_1,[g])=\phi(g_1,[g])\circ\Psi_{\alpha\beta}(x),$$

$x\in U_\alpha\cap[g_{\alpha\beta}]U_\beta,\ g_1\in G,\ [g]\in G_0$. *Другими словами*

$$\Psi_{\alpha\beta}(x)\in\mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V))$$

Изучим группу $\mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V))$. По определению элемент группы $\mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V))$ - это эквивариантное отображение $\mathbf{A}^a$ такое, что пара отображений $(\mathbf{A}^a,a)$ определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
(G_0\times(F\otimes V)) & \stackrel{\mathbf{A}^a}{\longrightarrow} & G_0\times(F\otimes V) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
G_0 & \stackrel{a}{\longrightarrow} & G_0,
\end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки коммутирует с каноническим действием, т.е. отображение a принадлежит группе $\mathrm{Aut}_G(G_0)\approx G_0$, т.е.

$$a[g]=[ga],\ [g]\in G_0, a\in G_0.$$

Отображение $\mathbf{A}^a=\{A^a[g]\}_{[g]\in G_0}$,

$$A^a[g]:[g]\times(F\otimes V)\to[ga]\times(F\otimes V)$$

удовлетворяет условие коммутирования с действием группы G:

$$\begin{array}{ccc}
[g]\times(F\otimes V) & \stackrel{A^a[g]}{\longrightarrow} & [ga]\times(F\otimes V) \\
\Big\downarrow \phi(g_1,[g]) & & \Big\downarrow \phi(g_1,[ga]) \\
[g_1g]\times(F\otimes V) & \stackrel{A^a[g_1g]}{\longrightarrow} & [g_1ga]\times(F\otimes V)
\end{array}\ ,$$

$$\phi(g_1,[ga])\circ A^a[g]=A^a[g_1g]\circ\phi(g_1,[g]) \tag{18}$$

т.е.

$$(\mathbf{Id}\otimes\rho(u(g_1ga)u^{-1}(ga)))A^a[g]=A^a[g_1g](\mathbf{Id}\otimes\rho(u(g_1g)u^{-1}(g))) \tag{19}$$

где $[g]\in G_0,\quad g_1\in G.$

Лемма 5 *Имеет место точная последовательность групп*

$$1\to GL(F)\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Aut}_G\left(G_0\times(F\otimes V)\right)\xrightarrow{pr}G_0\to 1 \tag{20}$$

Доказательство. Гомоморфизм

$$pr:\mathrm{Aut}_G\left(G_0\times(F\otimes V)\right)\longrightarrow G_0$$

сопоставляет отображению

$$\mathbf{A}^a:G_0\times(F\otimes V)\longrightarrow G_0\times(F\otimes V)$$

его ограничение на базу $a:G_0\to G_0$, т.е. $a\in\mathrm{Aut}_G(G_0)\approx G_0$.

Проверим, что pr является эпиморфизмом, ядро которого изоморфно группе $GL(F)$. Сначала вычислим ядро, т.е. множество всех отображений вида A^1. Условие (19) в этом случае дает

$$(\mathbf{Id}\otimes\rho(u(g_1g)u^{-1}(g)))\mathrm{A}^1[g]=\mathrm{A}^1[g_1g](\mathbf{Id}\otimes\rho(u(g_1g)u^{-1}(g))) \tag{21}$$

Если $g_1=h\in H$, то

$$(\mathbf{Id}\otimes\rho(u(hg)u^{-1}(g)))\mathrm{A}^1[g]=\mathrm{A}^1[g](\mathbf{Id}\otimes\rho(u(hg)u^{-1}(g)))$$

Поскольку представление ρ неприводимо, то

$$A^1[g]=B^1[g]\otimes\mathbf{Id}.$$

С другой стороны, полагая в (21) $g=1$, получаем

$$(\mathbf{Id}\otimes\rho(u(g)))\mathrm{A}^1[1]=\mathrm{A}^1[g](\mathbf{Id}\otimes\rho(u(g))),$$

т.е.

$$(\mathbf{Id}\otimes\rho(u(g)))(B^1[1]\otimes\mathbf{Id})=(B^1[g]\otimes\mathbf{Id})(\mathbf{Id}\otimes\rho(u(g))),$$

или

$$(B^1[g]\otimes\mathbf{Id})=(B^1[1]\otimes\mathbf{Id}).$$

Значит, ядро $\ker pr$ изоморфно группе $GL(F)$.

В общем случае, когда $[a] \neq 1$ вычисление оператора $A^a[g]$ в терминах его значения на единице производится из формулы (19): полагая $g = 1$, получаем (заменяя g_1 на g):

$$(\mathbf{Id} \otimes \rho(u(ga)u^{-1}(a)))\mathrm{A}^a[1] = \mathrm{A}^a[g](\mathbf{Id} \otimes \rho(u(g))), \tag{22}$$

т.е.

$$\mathrm{A}^a[g] = (\mathbf{Id} \otimes \rho(u(ga)u^{-1}(a)))\mathrm{A}^a[1](\mathbf{Id} \otimes \rho(u^{-1}(g))), \tag{23}$$

Следовательно, оператор определяется только по его значению

$$\mathrm{A}^a[1] : [1] \times (F \otimes V) \to [a] \times (F \otimes V)$$

на единице $g = 1$.

Теперь, опишем оператор $A^a[1]$ в терминах представления ρ и его свойства.

Имеется условие коммутирования с действием подгруппы H:

$$\begin{array}{ccc} [1] \times (F \otimes V) & \xrightarrow{A^a[1]} & [a] \times (F \otimes V) \\ \Big\downarrow \phi(h,[1]) & & \Big\downarrow \phi(h,[a]) \\ [1] \times (F \otimes V) & \xrightarrow{A^a[1]} & [a] \times (F \otimes V) \end{array},$$

Значит,

$$A^a[1] \circ \phi(h,[1]) = \phi(h,[a]) \circ A^a[1],$$

т.е.

$$A^a[1] \circ (\mathbf{Id} \otimes \rho(h)) = (\mathbf{Id} \otimes \rho(g'^{-1}(a)hg'(a))) \circ A^a[1],$$

т.е.

$$A^a[1] \circ (\mathbf{Id} \otimes \rho(h)) = (\mathbf{Id} \otimes \rho_{g'(a)}(h)) \circ A^a[1],$$

Последнее равенство означает, что оператор $A^a[1]$ переставляет эти представления, а это только возможно тогда, когда представления ρ и $\rho_{g'(a)}$ оказываются эквивалентными. На основе условия коммутирования (7) мы будем предполагать, что представления ρ и $\rho_{g'(a)}$ эквивалентны.

Итак, если представления ρ и ρ_g эквивалентны, то имеется (обратимый) сплетающий оператор $C(g)$, для которого выполнено равенство

$$\rho_g(h) = \rho\left(g^{-1}hg\right) = C(g)\rho(h)C^{-1}(g). \tag{24}$$

Оператор $C(g)$ задается с точностью до умножения на скалярный оператор $\mu_g \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}^1$.

Значит

$$A^a[1] \circ (\mathbf{Id} \otimes \rho(h)) = (\mathbf{Id} \otimes C(g'(a)) \circ \rho(h) \circ C^{-1}(g'(a))) \circ A^a[1],$$

или

$$(\mathbf{Id} \otimes C^{-1}(g'(a))) \circ A^a[1] \circ (\mathbf{Id} \otimes \rho(h)) = (\mathbf{Id} \otimes \rho(h)) \circ (\mathbf{Id} \otimes C^{-1}(g'(a))) \circ A^a[1],$$

Значит,

$$(\mathbf{Id} \otimes C^{-1}(g'(a))) \circ A^a[1] = B^a[1] \otimes \mathbf{Id},$$

т.е.

$$A^a[1] = B^a[1] \otimes C(g'(a)),$$

Используя формулу (23), получаем

$$\mathrm{A}^a[g] = (\mathbf{Id} \otimes \rho(u(ga)u^{-1}(a)))(B^a[1] \otimes C(g'(a)))(\mathbf{Id} \otimes \rho(u^{-1}(g))),$$

т.е.

$$\mathrm{A}^a[g] = B^a[1] \otimes (\rho(u(ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g))). \qquad (25)$$

Это значит, что задав только матрицу $B^a[1]$, получаем все операторы $\mathrm{A}^a[g]$, которые удовлетворяют условию коммутирования (23).

Осталось проверить общий закон коммутирования (19), т.е. в формулу

$$(\mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_1ga)u^{-1}(ga)))\mathrm{A}^a[g] = \mathrm{A}^a[g_1g](\mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_1g)u^{-1}(g)))$$

подставляем выражение из (25):

$$(\mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_1ga)u^{-1}(ga))) \circ (B^a[1] \otimes (\rho(u(ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g)))) =$$

$$= (B^a[1] \otimes (\rho(u(g_1ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g_1g)))) \circ (\mathbf{Id} \otimes \rho(u(g_1g)u^{-1}(g)))$$

т.е.

$$B^a[1] \otimes \rho(u(g_1ga)u^{-1}(ga))) \circ (\rho(u(ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g)))) =$$

$$= B^a[1] \otimes (\rho(u(g_1ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g_1g)))) \circ (\rho(u(g_1g)u^{-1}(g)))$$

В частности это тождество не зависит от выбора матрицы $B^a[1]$, значит нужно проверить только тождество для произвольных элементов a, g и g_1:

$$\rho(u(g_1ga)u^{-1}(ga))) \circ (\rho(u(ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g)))) =$$

$$= (\rho(u(g_1ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g_1g)))) \circ (\rho(u(g_1g)u^{-1}(g))),$$

что очевидно после естественного упрощения

$$\rho(u(g_1ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g)))) =$$

$$= (\rho(u(g_1ga)u^{-1}(a)) \circ C(g'(a)) \circ \rho(u^{-1}(g))),$$

Итак, отсюда следует, что для любого элемента $[a] \in G_0$ существует элемент $(A^a, a) \in \mathrm{Aut}_G\,(G_0 \times (F \otimes V))$. Это значит, что гомоморфизм

$$\mathrm{Aut}_G\,(G_0 \times (F \otimes V)) \xrightarrow{pr} G_0$$

является эпиморфизмом. $\blacksquare$

Существует взаимно однозначное соответствие между векторными G-расслоениями со слоем $G_0 \times (F \otimes V)$ на (компактной) базе X, где G действует тривиально на базе и канонически на слоях, и гомотопическими классами отображений X в пространство $B\mathrm{Aut}_G\,(G_0 \times (F \otimes V))$.

Обозначим через $\mathrm{Vect}_G(M, \rho)$ категорию G-эквивариантных векторных расслоений $\xi = \xi_0 \otimes V$ на базе M, с квази-свободным действием группы G с конечной стационарной подгруппой $H < G$, где группа H действует тривиально над расслоением ξ_0, V одновременно обозначает тривиальное расслоение со слоем V и послойным действием группы H при помощи неприводимого представления ρ. Здесь мы требуем, чтобы представления $\rho_g(h) = \rho(g^{-1}hg)$ были эквивалентны для любого $g \in G$, иначе, учитывая условие коммутирования (7), категория могла бы оказаться пустой.

Объекты категории $\mathrm{Vect}_G(M, \rho)$ являются обычными векторными расслоениями на базе M, тензорно умноженными на фиксированное тривиальное расслоение V. Действие группы G определяется над этими пространствами после тензорного умножения и вложение

$$GL(F) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_G\,(G_0 \times (F \otimes V))$$

из леммы 5 обеспечивает единицами этой категории.

Следствие 2 *Имеется взаимно однозначное соответствие*

$$\mathrm{Vect}_G(M, \rho) \approx [M, U(F)] \tag{26}$$

$\blacksquare$

Обозначим через $\mathrm{Bundle}(X, L)$ категорию главных L-расслоения на базе X.

Теорема 2 *Существует вложение*

$$\mathrm{Vect}_G(M,\rho) \longrightarrow \mathrm{Bundle}(M/G_0, \mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V))). \qquad (27)$$

Доказательство. Согласно следствию 1, объекты $\xi \in \mathrm{Vect}_G(M,\rho)$ определяются функциями склейками

$$\Psi_{\alpha\beta}:\ (U_\alpha \cap [g_{\alpha\beta}]U_\beta) \to \mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V))$$

где по построению, если $[g]\neq[g_{\alpha\beta}]$, то имеем $U_\alpha\cap[g]U_\beta=\emptyset$, а если $[g]\neq 1$, тогда $U_\alpha\cap[g]U_\alpha=\emptyset$ и $U_\beta\cap[g]U_\beta=\emptyset$. Это значит, что множества U_α и U_β отображаются гомеоморфно на открытие множества через естественную проекцию $M\to M/G_0$. Поэтому, эти функции склейки корректно определены на атласе факторпространства M/G_0 и, таким образом, они образуют G-расслоение со слоем $G_0\times(F\otimes V)$ на этом факторпространстве.

По тем же аргументам очевидно, что любое G-эквивариантное отображение

$$h_\alpha: O_\alpha\times(F\otimes V)\to O_\alpha\times(F\otimes V) \qquad (28)$$

можно интерпретировать как отображение

$$h_\alpha: U_\alpha\times(G_0\times(F\otimes V))\to U_\alpha\times(G_0\times(F\otimes V)) \qquad (29)$$

при помощи гомеоморфизма $O_\alpha\approx U_\alpha\times G_0$, где множество U_α можно считать открытым множеством пространства M/G_0. Эквивалентно,

$$h_\alpha: U_\alpha\to\mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V)) \qquad (30)$$

где U_α гомеоморфно открытому множеству пространства M/G_0. Следовательно, отображение (27) определено корректно.

Обратно, заданы отображения вида (30), где множества U_α открыты в M/G_0, измельчив атлас по необходимости, мы всегда можем считать, что прообразы множеств U_α под фактороотображением $M\to M/G_0$ гомеоморфны произведению $U_\alpha\times G_0$ и, таким образом, получить отображения вида (28). Следовательно, отображение (27) является мономорфизмом. ∎

Отображение (27), вообще говоря, не является эпиморфизмом , поскольку для определения категории $\mathrm{Vect}_G(M,\rho)$ мы фиксируем расслоение $M\to M/G_0$ или, эквивалентно, класс гомотопии в $[M/G_0, BG_0]$.

Теорема 3 *Если пространство X компактно, тогда*

$$\mathrm{Bundle}(X,\mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V)))\approx \coprod_{M\in\mathrm{Bundle}(X,G_0)}\mathrm{Vect}_G(M,\rho). \qquad (31)$$

Доказательство. По теореме 5, имеется отображение

$$\bigcup_{M\in\mathrm{Bundle}(X,G_0)}\mathrm{Vect}_G(M,\rho)\longrightarrow\mathrm{Bundle}(X,\mathrm{Aut}_G\,(G_0\times(F\otimes V))). \qquad (32)$$

Построим обратное отображение на (32). Пусть

$$\Psi_{\alpha\beta}:\ (U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathrm{Aut}_G\,(G_0 \times (F \otimes V))$$

— функции склейки расслоения $\xi \in \mathrm{Bundle}(X, \mathrm{Aut}_G\,(G_0 \times (F \otimes V)))$. По лемме 5, существует непрерывная проекция групп $pr : \mathrm{Aut}_G\,(G_0 \times (F \otimes V)) \to G_0$. Тогда композиция с pr дает расслоение с дискретной слоем G_0 и, как хорошо известно, G_0 действует послойно и свободно на тотальном пространстве M этого расслоения и $M/G_0 = X$.

Кроме того, для достаточно мелкого атласа существует гомеоморфизм

$$M \approx \bigcup_\alpha (U_\alpha \times G_0) \approx \bigcup_\alpha \left(\bigsqcup_{[g]\in G_0} [g]U_\alpha \right)$$

где пересечения определяются по правилу

$$[1]U_\alpha \cap [g_{\alpha\beta}]U_\beta \approx U_\alpha \cap U_\beta$$

где $[g_{\alpha\beta}] = pr \circ \Psi_{\alpha\beta}$.

С другой стороны, имеем

$$\xi \approx \bigcup_\alpha (U_\alpha \times (G_0 \times (F \otimes V)))$$

где $U_\alpha \times (G_0 \times (F \otimes V))$ пересекает $U_\beta \times (G_0 \times (F \otimes V))$ в точках $(x, g, f \otimes v) = (x, \Psi_{\alpha\beta}([g], f \otimes v)) = (x, [g_{\alpha\beta} g], A_{\alpha\beta}[g](f \otimes v))$, где $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ здесь, мы опять применили лемму 5 и описание в ее доказательстве операторов $\Psi_{\alpha\beta}$.

Учитывая гомеоморфизм

$$U_\alpha \times G_0 \approx \bigsqcup_{[g]\in G_0} [g]U_\alpha$$

можно записать

$$([g]x, f \otimes v) = ([g g_{\alpha\beta}]x, A_{\alpha\beta}[g](f \otimes v))$$

.

Следовательно, проекция

$$(U_\alpha \times G_0) \times (F \otimes V) \to U_\alpha \times G_0$$

обобщается до корректно определенной проекции

$$\xi \to M.$$

Из предыдущих формул ясно, что полученная проекция будет G-эквивариантной, если G действует канонически на слоях и левыми сдвигами на своем факторе G_0. Значит, $\xi \in \mathrm{Vect}_G(M, \rho)$.

Чтобы совершить доказательство, напомним, что по теории главных G_0-расслоений, пространство M строится с точности до эквивариантного гомеоморфизма. Это значит, что обратное отображение на (32) определено корректно. $\blacksquare$

Следствие 3 *Если пространство X компактно, тогда*

$$[X, B(\mathrm{Aut}_G(G_0 \times (F \otimes V)))] \approx \bigsqcup_{M \in [X, BG_0]} [M, U(F)]. \tag{33}$$

Доказательство. Это следствие вытекает из общей теории. Необходимо только доказать, что $\mathrm{Vect}_G(M, \rho) \neq \emptyset$, для любого $M \in Bundle(X, BG_0)$. Например,

$$M \times F \otimes V \in \mathrm{Vect}_G(M, \rho).$$

∎

4 Случай, когда подгруппа $H < G$ не является нормальной

Рассмотрим эквивариантное G-векторное расслоение ξ над базой M.

$$\begin{array}{c} \xi \\ \downarrow p \\ M. \end{array}$$

Пусть $H < G$ — конечная подгруппа. Предположим, что M является множеством неподвижных точек класса сопряженности этой подгруппы, точнее

$$M = \bigcup_{[g] \in G/N(H)} M^{gHg^{-1}}, \tag{34}$$

и других неподвижных точек действия подгрупп в классе сопряженности H на тотальном пространстве расслоения ξ нет. Здесь, M^H обозначает множество неподвижных точек действия подгруппы H на многообразии M, $N(H)$ нормализатор группы H в G. Мы применили равенство $gM^H = M^{gHg^{-1}}$ и тот факт, что $lHl^{-1} = gHg^{-1}$ тогда, и только тогда, когда $g^{-1}l \in N(H)$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_\xi$ семейство подгрупп группы G с нетривиальными неподвижными точками в тотальном пространстве расслоения ξ, т.е.

$$\mathfrak{F}_\xi = \{K < G | \xi^K \neq \emptyset\}.$$

Это — частично упорядоченное множество, которое замкнуто по отношению действия группы G при помощи сопряжения [1]. Действие

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{F}_\xi & \longrightarrow & \mathfrak{F}_\xi, \\ (g, K) & \mapsto & gKg^{-1} \end{array}$$

тоже сохраняет порядок.

[1] Если $\xi^K \neq \emptyset$, то $\xi^{gKg^{-1}} = g\xi^K \neq \emptyset$.

Определение 3 *Скажем, что $H < G$ является единственной с точностью до сопряжения максимальной подгруппой для G-расслоения ξ, если каждая сопряженная подгруппа gHg^{-1} максимальна в $\mathfrak{F}_\xi$ и других максимальных элементов в этом семействе нет.*

Будем предполагать, что $H < G$ единственна с точностью до сопряжения максимальная подгруппа.

Лемма 6 *Если $H \neq gHg^{-1}$, то $M^H \cap M^{gHg^{-1}} = \emptyset$*

Доказательство. Если найдется $x \in M^H \cap M^{gHg^{-1}}$ то, точка x неподвижна под действием подгруппы, порожденной H и gHg^{-1}, но эта группа не содержится ни в какой подгруппе вида $lH^{-1}l$, $l \in G$. ∎

Лемма 7 *Если выполнено условие (34), то G-расслоение ξ является несвязным объединением попарно изоморфных расслоений с квази-свободным действием на базе. Точнее*

$$\xi = \bigsqcup_{[g] \in G/N(H)} \xi_{[g]},$$

где

$$\xi_{[g]} = p^{-1}(M^{gHg^{-1}})$$

— расслоение с квази-свободным действием на базе группы $N(gHg^{-1})$ и для любого элемента $g \in G$ отображение

$$g : \xi^{[1]} \longrightarrow g\xi^{[1]} = \xi^{[g]}$$

определяет эквивариантный изоморфизм этих расслоений, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N(H) \times \xi_{[1]} & \longrightarrow & \xi_{[1]} \\ \Big\downarrow s_g \times g & & \Big\downarrow g \\ N(gHg^{-1}) \times \xi_{[g]} & \longrightarrow & \xi_{[g]} \end{array} \tag{35}$$

коммутативна, где

$$s_g : N(H) \longrightarrow N(gHg^{-1}) = gN(H)g^{-1}, \quad (g, n) \mapsto gng^{-1}.$$

Доказательство. Из леммы 6 следует, что

$$M = \bigsqcup_{[g] \in G/N(H)} M^{gHg^{-1}}$$

и, значит,

$$\xi = \bigsqcup_{[g] \in G/N(H)} \xi_{[g]}.$$

Так как G действует послойно, то $g\cdot\xi_{[1]}=\xi_{[g]}$ для любого $g\in G$. Ограничивая на пространства $\xi_{[g]}$ проекции $\xi\longrightarrow M$ получим расслоения

$$\begin{array}{c}\xi_{[g]}\\ \downarrow p\\ M^{gHg^{-1}}.\end{array}$$

На расслоении $\xi_{[g]}$ действует нормализатор $N(gHg^{-1})$:

$$N(gHg^{-1})\times\xi_{[g]}\longrightarrow\xi_{[g]},$$

и имеется равенство $N(gHg^{-1})=gN(H)g^{-1}$, т.е. $\xi_{[g]}$ является $N(gHg^{-1})$-расслоением для любого $g\in G$.

Заметим, что групповое сопряжение $s_g: N(H)\longrightarrow N(gHg^{-1})$ определяет изоморфизм этих групп, который можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}N(H)\times\xi_{[1]} & \longrightarrow & \xi_{[1]}\\ \downarrow & & \downarrow\\ N(gHg^{-1})\times\xi_{[g]} & \longrightarrow & \xi_{[g]}.\end{array}$$

т.е. $gng^{-1}\cdot gx=g\cdot nx$. Это значит, что расслоения $\xi_{[1]}$ и $\xi_{[g]}$ естественным образом эквивариантно изоморфны.

Отображения в диаграмме (35), очевидно, не зависят от элемента $n\in N(H)$, но они зависят от элемента $g\in G$.

Действие группы $N(H)$ на базе M^H редуцируется к фактор группе $N(H)/H$:

$$\begin{array}{ccc}N(H)\times\xi_{[1]} & \longrightarrow & \xi_{[1]}\\ \downarrow & & \downarrow\\ N(H)/H\times M^H & \longrightarrow & M^H\end{array}$$

причем, ввиду максимальности группы H, действие $N(H)/H\times M\longrightarrow M$ свободно, и по предположению других неподвижных точек действия подгруппы H на тотальном пространстве расслоения ξ нет, т.е. $N(H)$ действует квази-свободно над базой и имеет нормальную стационарную подгруппу H.

■

Определение 4 *В описанном выше случае, будем говорит, что на расслоение ξ группа G действует квази-свободно с (не нормальной) стационарной подгруппой H.*

Пусть $X(\rho)$ каноническая модель для представления $\rho: H\longrightarrow GL(F)$ с действием группы $N(H)$. Определим каноническую модель $X(\rho_g)$ для представления

$$\rho_g: gHg^{-1}\xrightarrow{s_{g^{-1}}}H\xrightarrow{\rho}GL(F),$$

$s_g(n)=gng^{-1}$. Действие группы $N(gHg^{-1})$ на $X(\rho_g)$ задается с помощью гомоморфизма правых gHg^{-1}-модулей

$$u_g: gHg^{-1}\xrightarrow{s_{g^{-1}}}H\xrightarrow{u}N(H)\xrightarrow{s_g}N(gHg^{-1})$$

по формуле
$$\phi([g],g_1)=\bigoplus\nolimits_k \left(\mathbf{Id}\otimes\rho_k(u(g_1g)u^{-1}(g))\right)=\rho(u(g_1g)u^{-1}(g)). \tag{36}$$

Пусть
$$GX(\rho):=\coprod_{[g]\in G/N(H)} X(\rho_g)$$
т.е. если $lHl^{-1}=gHg^{-1}$, то пространства $X(\rho_g)$ и $X(\rho_l)$ совпадают. Предыдущее обозначение оправдывается следующей леммой.

Лемма 8 *На пространстве $GX(\rho)$ группа G действует квази-свободно с (не нормальной) стационарной подгруппой H, пространство $GX(\rho)$ совпадает с орбитой пространства $X(\rho)$. В частности, имеют место соотношения*
$$N(H)\,(X(\rho))=X(\rho)$$
и
$$(GX(\rho))^{gHg^{-1}}=N(gHg^{-1})/gHg^{-1}.$$

Доказательство. Действие $G\times GX(\rho)\to GX(\rho)$ определяется следующим образом: для фиксированного $g\in G$ определим отображение
$$g:X(\rho)\longrightarrow X(\rho_g)$$
как
$$s_g\times\mathbf{Id}:N(H)_0\times F\longrightarrow N(gHg^{-1})_0\times F,$$
$(N(H)_0=N(H)/H)$, причем , если $lHl^{-1}=gHg^{-1}$, то отображение $l:X(\rho)\longrightarrow X(\rho_l)$ выбирается таким образом, чтобы диаграмма
$$\begin{array}{ccc} X(\rho_g) & \xrightarrow{s_g^{-1}\times\mathbf{Id}} & X(\rho)\\ \| & & \big\downarrow l^{-1}g\\ X(\rho_l) & \xrightarrow{l^{-1}} & X(\rho). \end{array} \tag{37}$$
была коммутативна, т.е.
$$l=(s_g\times\mathbf{Id})\circ(g^{-1}l),$$
где отображение
$$g^{-1}l:X(\rho)\longrightarrow X(\rho)=X(\rho_{g^{-1}l}) \tag{38}$$
— это канонический левый сдвиг на элемент $g^{-1}l\in N(H)$. ∎

Следствие 4 *Существует изоморфизм*
$$g:\mathrm{Aut}_{N(H)}\left(X(\rho)\right)\xrightarrow{\approx}\mathrm{Aut}_{N(gHg^{-1})}\left(X(\rho_g)\right), \tag{39}$$
который зависит только от класса $[g]\in G/N(H)$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (35) для $\xi = GX(\rho)$. Диаграмма такого вида всегда индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{Aut}_{N(H)}\left(X(\rho)\right) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Aut}_{N(gHg^{-1})}\left(X(\rho_g)\right)$$

по правилу

$$\mathbf{A} \mapsto g\mathbf{A}g^{-1},$$

причем, если $l \in [g] \in G/N(H)$, то элемент $l^{-1}g \in N(H)$ коммутирует с элементом $\mathbf{A} \in \mathrm{Aut}_{N(H)}\left(X(\rho)\right)$. Следовательно,

$$g\mathbf{A}g^{-1} = g(g^{-1}l)(l^{-1}g)\mathbf{A}g^{-1} = g(g^{-1}l)\mathbf{A}(l^{-1}g)g^{-1} = l\mathbf{A}l^{-1}.$$

∎

Определение 5 *Пространство $GX(\rho)$ называется канонической моделью для случая, когда стационарная подгруппа $H < G$ не является нормальной.*

Лемма 9 *Имеется изоморфизм групп*

$$\mathrm{Aut}_G\left(GX(\rho)\right) \approx \mathrm{Aut}_{N(H)}\left(X(\rho)\right). \tag{40}$$

Доказательство. По определению элемент группы $\mathrm{Aut}_G(X)$ — это такое эквивариантное отображение $\mathbf{A}^a$, что пара $(\mathbf{A}^a, a)$ определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathbf{A}^a} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \xrightarrow{a} & G/H, \end{array}$$

где отображение $a \in \mathrm{Aut}_G(G/H)$ удовлетворяет условию

$$a \in \mathrm{Aut}_G(G/H) \approx N(H)/H, \quad a[g] = [ga],\ [g] \in N(H)/H.$$

Следовательно $\mathbf{A}^a = (A^a[g])_{[g]\in N(H)/H} \in \mathrm{Aut}_{N(H)}(X(\rho))$.

Значение операторов $(A^a[g])_{[g]\in G/H}$ вычисляются в терминах оператора $A^a[1]$, как и в лемме 5 (формула (23)). ∎

Обозначим через $\widetilde{\mathrm{Vect}}_G(M,\rho)$ категорию векторных расслоений с квазисвободным действием группы G на базе и не нормальной стационарной подгруппой.

Теорема 4 *Имеет место изоморфизм $\widetilde{\mathrm{Vect}}_G(M,\rho) \approx \mathrm{Vect}_{N(H)}(M^H,\rho)$.*

Доказательство. Из леммы 7 следует, что расслоения $\xi^{N(H)}$ и $\xi^{N(gHg^{-1})}$ эквивариантно изоморфны и задаются отображениями

$$M^{gHg^{-1}}/N(gHg^{-1})_0 \longrightarrow B\mathrm{Aut}_{N(gHg^{-1})}\left(X(\rho_g)\right),$$

и

$$M^H/N(H)_0 \longrightarrow B\mathrm{Aut}_{N(H)}\left(X(\rho)\right),$$

которые можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
M^H/N(H)_0 & \longrightarrow & B\mathrm{Aut}_{N(H)}\left(X(\rho)\right) \\
\Big\downarrow \bar{g} & & \Big\downarrow \bar{g} \\
M^{gHg^{-1}}/N(gHg^{-1})_0 & \longrightarrow & B\mathrm{Aut}_{N(gHg^{-1})}\left(X(\rho_g)\right).
\end{array}$$

Здесь, $g : \xi^H \longrightarrow \xi^{gHg^{-1}}$ — это действие на расслоении ξ, а стрелка справа индуцируется изоморфизмом (39) и не зависит от элемента $g \in [g] \in G/N(H)$. $\blacksquare$

Список литературы

[1] Luke G., Mishchenko A. S., *Vector Bundles And Their Applications.* Kluwer Academic Publishers Group (Netherlands), 1998, ISBN: 9780792351542

[2] P. Conner, E. Floyd. *Differentiable periodic maps.* Berlin, Springer-Verlag 1964.

[3] Atiyah M.F., *K-theory.* Benjamin, New York, (1967).

[4] Atiyah, M.F., Segal, G.B., *Equivariant K-theory Lecture Notes* Oxford, (1965).

[5] Levine M., Serpé C.,*On a spectral sequence for equivariant K-theory* K-Theory (2008) 38, No.2, pp. 177–222, arXiv:math/0511394v3 [math.KT] 19 Nov 2005.

[6] Mishchenko , A.S. and Morales Melendez, Q. *Description of the vector G-bundles over G-spaces with quasi-free proper action of discrete group G.* arXiv:0901.3308v1 [math.AT] 21 Jan 2009

[7] Morales Melendez, Q. *Description of G-bundles over G-spaces with quasi-free proper action of discrete group II.* arXiv:0912.5047v1 [math.KT] 27 Dec 2009

[8] Мищенко А.С., Моралес Мелендес К. *Описание G-расслоений на G-пространствах с квази-свободным собственным действием дискретной группы G.* Деп. в ВИНИТИ № 716-В2009 от 24.11.2009, 15 с.

[9] Моралес Мелендес К. *Описание G-расслоений на G-пространствах с квази-свободным действием дискретной группы II.* деп. в ВИНИТИ № 717-В2009 от 24.11.2009, 11 стр.

[10] Моралес Мелендес К. *Бордизмы многообразий с собственным действием дискретной группы.* деп. в ВИНИТИ № 718-В2009 от 24.11.2009, 13 стр.

[11] Моралес Мелендес К. *Бордизмы многообразий с собственным действием дискретной группы.* Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, Матем., Механ., 2010, No. 2, с. 57–59.