Бордизмы многообразий с собственным действием дискретных групп

А.С. Мищенко
(Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова)

20 октября 2010 г.

1 Введение

1.1 От А.Пуанкаре до настоящего времени. Немного истории

Пусть β_k обозначает $k-$ число Бетти замкнутого ориентированного компактного многообразия M, $\dim M = n$.

Теорема 1 (А. Пуанкаре)

$$\beta_k = \beta_{n-k}.$$

А.Пуанкаре не представил строгого понятия чисел Бетти. Потребовалось появление работ Э.Неттер (1926), Дж.Александера и А.Н.Колмогорова (1935), в которых были определены группы гомологий и когомологий. После этого двойственность Пуанкаре приобрела более точный и ясный смысл:

$$H_k(M) \approx H^{n-k}(M)$$

1.2 Алгебраический комплекс Пуанкаре

Двойственность Пуанкаре имеет чисто алгебраическое построение в виде абстрактных алгебраических комплексов Пуанкаре (АКП) в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
C_0 & C_1 \arrow[l, "d_1"'] & C_2 \arrow[l, "d_1"'] & \cdots \arrow[l, "d_1"'] & C_{n-1} \arrow[l, "d_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \\
C^n \arrow[u, "D_0"] & C^{n-1} \arrow[l, "d_n^*"] \arrow[u, "D_1"] & C^{n-2} \arrow[l, "d_{n-1}^*"] \arrow[u, "D_2"] & \cdots \arrow[l, "d_{n-2}^*"] & C^1 \arrow[l, "d_2^*"] \arrow[u, "D_{n-1}"] & C^0 \arrow[l, "d_1^*"] \arrow[u, "D_n"]
\end{tikzcd}$$

где $C^k \overset{def}{=} \mathbf{Hom}(C_k, \mathcal{K})$ обозначает двойственные группы, $\mathcal{K}$ – кольцо скаляров, причем для диаграммы выполняются естественные свойства

1. $d_{k-1}d_k = 0$,

2. $d_k D_k + (-1)^{k+1} D_{k-1} d^*_{n-k+1} = 0$,

3. $D_k = (-1)^{k(n-k)} D^*_{n-k}$.

4. $H(D_k) : H(C^{n-k}) \longrightarrow H(C_k)$ является изоморфизмом в гомологиях.

1.3 Алгебраический комплекс Пуанкаре ориентируемого многообразия

Рассмотрим замкнутое ориентированное многообразие M, $\dim M = n$. Если на многообразии M фиксирована некоторая симплициальная структура, то алгебраический комплекс Пуанкаре строится по следующему правилу:

- $C_k \overset{def}{=} C_k(M)$, - группа симплициальных цепей на M,
- $C^k \overset{def}{=} C^k(M) = \mathbf{Hom}(C_k(M), \mathcal{K})$
- $d_k : C_k \longrightarrow C_{k-1}$ - граничный гомоморфизм,
- $D_k = D^{[M]} : C^{n-k} = \mathbf{Hom}(C_{n-k}(M), \mathcal{K}) \longrightarrow C_k = C_k(M)$, – операция пересечения с фундаментальным циклом многообразия M.

Если $u \in C^{n-k}$, то операция $D_k(u) \overset{def}{=} [M] \cap u$ определяется при помощи естественной формулы

$$D_k(u) \overset{def}{=} \\ = \sum_{\sigma(a_0 < \cdots < a_n)} (-1)^{\varepsilon(a_0 < \cdots < a_n)} u(a_0 < \cdots < a_{n-k}) \sigma(a_{n-k} < \cdots < a_n),$$

где $\sigma(a_0 < a_1 < \cdots < a_k)$ является симплексом, порожденным упорядоченным семейством вершин $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$, а $\varepsilon(a_0 < \cdots < a_n)$ обозначает ориентацию симплекса $\sigma(a_0 < a_1 < \cdots < a_k)$, соответствующую ориентации на многообразии M.

Теорема 2 (Пуанкаре) *Теорема Пуанкаре утверждает, что гомоморфизм $D = \{D_k\}$ индуцирует изоморфизм групп гомологий:*

$$\begin{tikzcd}
H_0(M) & H_1(M) & \cdots & H_{n-1}(M) & H_n(M) \\
H^n(M) \arrow[u, "\approx"', "D_0"] & H^{n-1}(M) \arrow[u, "\approx"', "D_1"] & \cdots & H^1(M) \arrow[u, "\approx"', "D_{n-1}"] & H^0(M) \arrow[u, "\approx"', "D_n"]
\end{tikzcd}$$

Для компактных многообразий имеет место изоморфизм

$$H^i(M) \approx \mathbf{Hom}(H_i(M), \mathcal{K}).$$

Следовательно,

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots & & H_k(M) & & H_{k+1}(M) & & \cdots \\
& & \approx \uparrow D_k & & \approx \uparrow D_{k+1} & & \\
\cdots & & \mathbf{Hom}(H_{n-k}(M), \mathcal{K}) & & \mathbf{Hom}(H_{n-k-1}(M), \mathcal{K}) & & \cdots
\end{array}
$$

В случае, когда многообразие M четномерно, dim M= n=2m, то

- $$D_m : \mathbf{Hom}(H_m(M), \mathcal{K}) \xrightarrow{\approx} H_m(M)$$

  является изоморфизмом, и

- $$D_m = (-1)^{m(n-m)} D^*_{n-m} = (-1)^m D^*_m.$$

В случае $\dim M = n = 4l$ получаем более специальное соотношение:

- $$D_{2l} : \mathbf{Hom}(H_{2l}(M), \mathcal{K}) \xrightarrow{\approx} H_{2l}(M)$$

  является самосопряженным изоморфизмом :

- $$D_{2l} = D^*_{2l}.$$

1.4 Сигнатура многообразий

Определение 1 *Рассмотрим симплициальное ориентированное многообразие M, $\dim M = 4l$. Согласно определению, сигнатурой многообразия называется число*

$$\mathbf{sign}\, M \stackrel{def}{=} \mathbf{sign}\, D_{2l}$$

как сигнатура конечномерного самосопряженного оператора D_{2l} .

Замечание

Строго говоря, сигнатура многообразия M, возможно, зависит от выбора симплициальной структуры на M. Но, в действительности, группы гомологий и когомологий являются гомотопическими инвариантами, включая все гомологические операции, в частности, операцию пересечения гомологий с когомологиями.

Следовательно, сигнатура $\mathbf{sign}\, M$ является гомотопическим инвариантом, т.е. не зависит от выбора симплициальной структуры на многообразии.

1.5 Инвариантность сигнатуры по отношению к бордизмам

Более существенным является инвариантность сигнатуры по отношению к ориентированным бордизмам.

Теорема 3 *Пусть* M *есть ориентируемое многообразие,* $\dim M = 4k$. *Предположим, что имеется ориентируемое многообразие* W *с границей,* $\dim W = 4k+1$, *и*

$$M \approx \partial W.$$

Тогда

$$\mathbf{sign}\, M = 0.$$

Доказательство. Нужно рассмотреть точную гомологическую последовательность пары $(W, \partial W = M)$:

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(W,M) \longrightarrow H_i(M) \longrightarrow H_i(W) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_i(W,M) \longrightarrow H_{i-1}(M) \longrightarrow H_i(M) \longrightarrow \cdots$$

и соответствующую когомологическую последовательность

$$\cdots \longrightarrow H^{n-i}(W) \longrightarrow H^{n-i}(M) \longrightarrow H^{n+1-i}(W,M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{n+1-i}(W) \longrightarrow H^{n-(i-1)}(M) \longrightarrow H^{n+2-i}(W,M) \longrightarrow \cdots$$

Применяя операцию пересечения с фундаментальными классами гомологий $[W] \in H^{n+1}(W, M)$ и $[M] \in H^n(M)$, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{i+1}(W,M) \arrow[r] & H_i(M) \arrow[r] & H_i(W) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{n-i}(W) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"', "D^W"] & H^{n-i}(M) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"', "D^M"] & H^{n+1-i}(W,M) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"', "D^W"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

В средней размерности получается симметрическая картина

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{2k+1}(W,M) \arrow[r, "\partial"] & H_{2k}(M) \arrow[r, "i_*"] & H_{2k}(W) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{2k}(W) \arrow[r, "i^*"'] \arrow[u, "\approx"', "D^W"] & H^{2k}(M) \arrow[r, "\partial^*"'] \arrow[u, "\approx"', "D^M"] & H^{2k+1}(W,M) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"', "D^W"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Значит, в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Im}\,\partial \arrow[r] & H_{2k}(M) \arrow[r] & \mathbf{Im}\,i_* \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Im}\,i^* \arrow[r] \arrow[u, "\approx"', "D^W"] & H^{2k}(M) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"', "D^M"] & \mathbf{Im}\,\partial^* \arrow[r] \arrow[u, "\approx"', "D^W"] & 0
\end{tikzcd}$$

все вертикальные гомоморфизмы являются изоморфизмами.

Можно произвести расщепление

$$\begin{tikzcd}
H_{2k}(M) \arrow[r] & \mathbf{Im}\,\partial \oplus \mathbf{Im}\,i_* \\
H^{2k}(M) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"', "D^M"] & \mathbf{Im}\,i^* \oplus \mathbf{Im}\,\partial^* \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

таким образом, что оператор D^M представляется матрицей

$$D^M = \begin{pmatrix} 0 & D^W \\ D^W & * \end{pmatrix}, \quad \mathbf{sign}\, D^M = 0.$$

$\blacksquare$

1.6 Двойственность Пуанкаре для открытых многообразий

Для некомпактных (ориентированных) многообразий полагаем

- $C_k \stackrel{def}{=} C_k(M)$, – пространство цепей многообразия M с коэффициентами в поле скаляров $\mathcal{K}$.
- $C^k \stackrel{def}{=} C_0^k(M) = \mathbf{Hom}_0(C_k(M), \mathcal{K})$ – пространство линейных функционалом с конечными носителями по отношению к естественному базису в группе C_k.

Заметим, что пространство C^k тоже имеет естественный базис, в котором гомоморфизм

$$q : C_k \stackrel{\approx}{\longrightarrow} \mathbf{Hom}_0(C^k, \mathcal{K}), \quad q(u)(\varphi) = \varphi(u),$$

является взаимно-однозначным соответствием.

Тогда операция пересечения $D_k = [M]\cap$,

$$D_k : C^{n-k} = \mathbf{Hom}_0(C_{n-k}(M), \mathcal{K}) \longrightarrow C_k = C_k(M),$$

задается естественным образом:

$$\begin{aligned} & D_k(u) \stackrel{def}{=} \\ & = \sum_{\sigma(a_0 < \cdots < a_n)} (-1)^{\varepsilon(a_0 < \cdots < a_n)} u(a_0 < \cdots < a_{n-k}) \sigma(a_{n-k} < \cdots < a_n), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma(a_0 < a_1 < \cdots < a_k)$ есть симплекс, порожденный упорядоченным множеством вершин $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$, а $\varepsilon(a_0 < \cdots < a_n)$ есть ориентация симплекса $\sigma(a_0 < a_1 < \cdots < a_k)$ (соответствующая ориентации на многообразии M). Заметим, что сумма в формуле (1) определена корректно, поскольку коцикл u имеет конечный носитель.

Получается коммутативная диаграмма, подобная диаграмме для алгебраических комплексов Пуанкаре:

$$\begin{tikzcd}
C_0 & C_1 \arrow[l, "d_1"'] & C_2 \arrow[l, "d_1"'] & \cdots \arrow[l, "d_1"'] & C_{n-1} \arrow[l, "d_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \\
C^n \arrow[u, "D_0"'] & C^{n-1} \arrow[l, "d_n^*"] \arrow[u, "D_1"'] & C^{n-2} \arrow[l, "d_{n-1}^*"] \arrow[u, "D_2"'] & \cdots \arrow[l, "d_{n-2}^*"] & C^1 \arrow[l, "d_2^*"] \arrow[u, "D_{n-1}"'] & C^0 \arrow[l, "d_1^*"] \arrow[u, "D_n"']
\end{tikzcd}$$

которая удовлетворяет естественным свойствам

1. $d_{k-1}d_k = 0$,

2. $d_k D_k + (-1)^{k+1} D_{k-1} d^*_{n-k+1} = 0$,

3. $q \circ D_k = (-1)^{k(n-k)} D^*_{n-k}$.

4. $H(D_k) : H(C^{n-k}) \longrightarrow H(C_k)$ есть изоморфное отображение , т.е.

$$H(D_k) : H_0^{n-k}(M) \longrightarrow H_k(M).$$

Существенное отличие от случая компактных многообразий заключается в том, что группы когомологий $H_0^{n-k}(M)$ с конечными носителями не имеют подходящего выражения в терминах групп гомологий $H_k(M)$ как это получается в компактном случае.

1.7 Свободное действие фундаментальной группы G

Пусть $G \stackrel{def}{=} \pi_1(M)$ есть фундаментальная группа компактного многообразия M. Тогда группа G свободно действует на универсальном накрытии $\widetilde{M}$, задавая коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{M} & & G \times \widetilde{M} & \longrightarrow & \widetilde{M} \\ \Big\downarrow p & : & \Big\downarrow \mathbf{Id} \times p & & \Big\downarrow p \\ M & & G \times M & \xrightarrow{\mathbf{Id}} & M \end{array}$$

Полагаем $C_k \stackrel{def}{=} C_k(\widetilde{M})$, $C^k \stackrel{def}{=} C_0^k(\widetilde{M})$. Ключевая идея заключается в следующем утверждении:

Предложение 1 *Пространства C_k и C^k являются конечно порожденными свободными модулями над групповым кольцом $\mathcal{K}[G]$, и поэтому группа коцепей имеет простое выражение в терминах группы цепей:*

$$C^k = \mathbf{Hom}_0(C_k, \mathcal{K}) \approx \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}[G]}(C_k, \mathcal{K}[G]).$$

Следовательно, кограничный гомоморфизм $d_k^* : C^{k-1} \longrightarrow C^k$ сопряжен к граничному гомоморфизму d_k над групповым кольцом $\mathcal{K}[G]$:

$$\begin{array}{ccc} C^{k-1} & \xrightarrow{d_k^*} & C^k \\ \| & & \| \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}[G]}(C_{k-1}, \mathcal{K}[G]) & \xrightarrow{d_k^*} & \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}[G]}(C_k, \mathcal{K}[G]) \end{array}$$

1.8 АКП для не односвязного многообразия

Таким образом получаем похожую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
C_0 & C_1 \arrow[l, "d_1"'] & C_2 \arrow[l, "d_2"'] & \cdots \arrow[l, "d_3"'] & C_{n-1} \arrow[l, "d_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \\
C^n \arrow[u, "D_0"'] & C^{n-1} \arrow[l, "d_n^*"] \arrow[u, "D_1"'] & C^{n-2} \arrow[l, "d_{n-1}^*"] \arrow[u, "D_{n-2}"'] & \cdots \arrow[l, "d_{n-2}^*"] & C^1 \arrow[l, "d_2^*"] \arrow[u, "D_{n-1}"'] & C^0 \arrow[l, "d_1^*"] \arrow[u, "D_n"']
\end{tikzcd}$$

1. $d_{k-1}d_k = 0$,
2. $d_kD_k + (-1)^{k+1}D_{k-1}d^*_{n-k+1} = 0$,
3. $D_k = (-1)^{k(n-k)}D^*_{n-k}$.
4. $H(D_k) : H(C^{n-k}) \longrightarrow H(C_k)$ есть изоморфизм.

Для упрощения обозначений положим

$$F_k = i^{k(k-1)}D_k.$$

Модифицированная диаграмма имеет следующий вид:

$$\begin{tikzcd}
C_0 & C_1 \arrow[l, "d_1"'] & C_2 \arrow[l, "d_2"'] & \cdots \arrow[l, "d_3"'] & C_{n-1} \arrow[l, "d_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \\
C^n \arrow[u, "F_0"'] & C^{n-1} \arrow[l, "\delta_n"] \arrow[u, "F_1"'] & C^{n-2} \arrow[l, "\delta_{n-1}"] \arrow[u, "F_{n-2}"'] & \cdots \arrow[l, "\delta_{n-2}"] & C^1 \arrow[l, "\delta_2"] \arrow[u, "F_{n-1}"'] & C^0 \arrow[l, "\delta_1"] \arrow[u, "F_n"']
\end{tikzcd}$$

Новый гомоморфизм F_kудовлетворяет более простым соотношениям:

1. $d_kF_k + F_{k-1}d^*_{n-k+1} = 0$,
2. $F_k = F^*_{n-k}$.
3. $H(F_k) : H(C^{n-k}) \longrightarrow H(C_k)$ тоже изоморфизм.

Дело в том, что как модуль $H(C_k) = H_k(\widetilde{M})$, так и модуль $H(C^k) = H^k_0(\widetilde{M})$ не являются ни свободными, ни даже проективными модулями. Поэтому удобней рассмотреть так называемый цилиндр диаграммы

$$0 \longleftarrow C_0 \xleftarrow{H_1} \begin{array}{c} C_1 \\ \oplus \\ C^n \end{array} \xleftarrow{H_2} \begin{array}{c} C_2 \\ \oplus \\ C^{n-1} \end{array} \longleftarrow \cdots$$

$$\cdots \xleftarrow{H_{2k}} \begin{array}{c} C_{2k} \\ \oplus \\ C^{2k+1} \end{array} \xleftarrow{H_{2k+1}} \begin{array}{c} C_{2k+1} \\ \oplus \\ C^{2k} \end{array} \xleftarrow{H_{2k+2}} \cdots$$

$$\cdots \xleftarrow{H_{n-1}} \begin{array}{c} C_{n-1} \\ \oplus \\ C^{2} \end{array} \xleftarrow{H_{n}} \begin{array}{c} C_{n} \\ \oplus \\ C^{1} \end{array} \xleftarrow{H_{n+1}} C^0 \longleftarrow 0$$

Гомоморфизмы H_k имеют следующую матричную форму:

$$H_k = \left(\begin{array}{cc} d_k & F_{k-1} \\ 0 & d^*_{n-k+2} \end{array} \right).$$

Теперь предположим для простоты, что алгебра $\mathcal{K}[G]$ заменена ее пополнение $\mathcal{A} = C^*[G]$ (пополнение по отношению к регулярному представлению группы G). Соответственно, пространства цепей (коцепей) заменятся на модули над алгеброй $\mathcal{A}$,

$$\overline{C}_k \stackrel{def}{=} C_k \otimes_{\mathcal{K}[G]} \mathcal{A},$$
$$\overline{C}^k \stackrel{def}{=} C^k \otimes_{\mathcal{K}[G]} \mathcal{A},$$

В этом случае $\mathcal{A}$–модули C_k (C^k) имеют естественную структуру гильбертовых C^*–модулей, и значит они изоморфны при помощи изометрии

$$\phi_k : \overline{C}^k \longrightarrow \overline{C}_k.$$

Граничные операторы d^*_k можно отождествить с сопряженными операторами по отношении к этой гильбертовой структуре C^*–модулей.

Полагаем

$$A_i = \overline{C}_i \oplus \overline{C}^{n-i+1}$$

и

$$A_{ev} = \bigoplus_{k=0}^{2l} A_{2k}, \quad A_{odd} = \bigoplus_{k=0}^{2l} A_{2k+1}.$$

Тогда несложными вычислениями показывается, что гомоморфизм

$$G_{ev} = d + d^* + F \stackrel{def}{=} G_{|A_{ev}} : A_{ev} \longrightarrow A_{ev}$$

является самосопряженным и обратимым.

Определение 2 *Рассмотрим разложение оператора G_{ev} в прямую сумму положительного и отрицательного оператора*

$$G_{ev} = \begin{pmatrix} G^+_{ev} & 0 \\ 0 & G^-_{ev} \end{pmatrix} : A^+_{ev} \oplus A^-_{ev} \longrightarrow A^+_{ev} \oplus A^-_{ev}.$$

Тогда по определению обозначим формальную разность через

$$\mathbf{sign}\, G_{ev} = \mathbf{sign}\,(d + d^* + F) \stackrel{def}{=} [A^+_{ev}] - [A^-_{ev}] \in \mathbf{K}(\mathcal{A}).$$

В классическом случае это определение совпадает с классической сигнатурой:

$$\mathbf{sign}\,(d + d^* + F) = \mathbf{sign}\,(H(F)) = \mathbf{sign}\, M.$$

2 Собственное действие дискретной группы на некомпактном многообразии

2.1 Определения

Определение 3 *Пусть G дискретная (счетная) группа , а M гладкое ориентированное многообразие. Действие группы G на M*

$$G \times M \longrightarrow M$$

называется собственным, если для каждой точки $x \in M$ стационарная подгруппа $G_x \subset G$, $G_x \stackrel{def}{=} \{g \in G : gx = x\}$ конечна. Действие называется ко-компактным, если фактор-пространство M/G компактно. Действие называется гладким, если каждые элемент $g \in G$ действует на M при помощи диффеоморфизма.

Эквивалентное определение заключается в следующем:

Определение 4 *Действие группы G на M является собственным,если отображение*

$$G \times M \longrightarrow M \times M, \quad (g, x) \longmapsto (gx, x), \quad g \in G, x \in M,$$

является собственным.

2.2 Симплициальные и гладкие действия

Пусть $H \lhd G$ - конечная подгруппа. Обозначим через M^H подмножество неподвижных точек

$$M^H \stackrel{def}{=} \{x \in M : \forall g \in H : gx = x\}.$$

Это подмножество M^H является гладким подмногообразием (см., на пример, ([**?**], p.79) а также Теорему о слоях [**?**], Thm. (5.6) на стр. 40, [**?**] Thm. 4.10 на стр. 184, [**?**] стр. 171 и следствие 2.4 на стр. 308).

Пусть $\mathcal{H}(G)$ - семейство всех (конечных) подгрупп $H \subset G$, для которых $M^H \neq \emptyset$. Семейство $\mathcal{H}(G)$ образует категорию по отношению к включениям подгрупп друг в друга. Пусть $\mathcal{H}(H) \subset \mathcal{H}(G)$ есть множество подгрупп $H' \in \mathcal{H}(G)$, таких что $H' \supset H, \quad H' \neq H$.

Ясно, что, если $H_1 \subset H_2 \subset G$, то $M^{H_2} \subset M^{H_1}$.

Множество

$$V^H \stackrel{def}{=} M^H \setminus \left(\bigcup_{H' \in \mathcal{H}(H)} M^{H'} \right).$$

образует гладкую стратификацию на многообразии M.

2.3 Симплициальное собственное действие

С.Иллман ([**?**]) и Т.Корппи ([**?**]) доказали, что гладкое собственное действие является симплициальным по отношению к некоторой симплициальной структуре на многообразии M.

Для многообразия с собственным действие получаем диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
C_0 & C_1 \arrow[l, "d_1"'] & \cdots \arrow[l, "d_2"'] & C_{n-1} \arrow[l, "d_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \\
C^n \arrow[u, "D_0"'] & C^{n-1} \arrow[l, "\delta_n"] \arrow[u, "D_1"'] & \cdots \arrow[l, "\delta_{n-1}"] & C^1 \arrow[l, "\delta_2"] \arrow[u, "D_{n-1}"'] & C^0 \arrow[l, "\delta_1"] \arrow[u, "D_n"']
\end{tikzcd}$$

Отличие от неодносвязного многообразия заключается в том, что в отличие от свободного действия все модули

$$C_0 \stackrel{def}{=} C_0(M)$$

и

$$C^0 \stackrel{def}{=} \mathbf{Hom}_0(C_0(M), \mathcal{K})$$

не являются ни свободными ни проективными модулями, однако они конечно порождены над групповым кольцом $\mathcal{K}[G]$ в случае $\mathcal{K} \approx \mathbf{Z}$.

Ключевым моментом является тот факт, что в случае, когда $\mathcal{K}$ является полем характеристики ноль, (на пример, $\mathcal{K} \approx \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$) получается

Теорема 4 *Все модули C_k над полем $\mathcal{K}$ нулевой характеристики явдя.тся конечно порожденными проективными модулями.*

$$C^k \approx \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(C_k, \mathcal{K}).$$

Следствие 1 *Фактор пространство $X = M/G$ удовлетворяет условию двойственности Пуанкаре в гомологиях с рациональными коэффициентами:*

$$D : H^k(X; \mathbf{Q}) \xrightarrow{\approx} H_{n-k}(X; \mathbf{Q})$$

Пусть $\mathbf{K}_p(\mathcal{A})$ обозначает аналогичные группы эрмитовой $\mathbf{K}$–теории, основанной на проективных конечно порожденных модулях

$$\mathbf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{K}_p(\mathcal{A}).$$

Теорема 5 *Если $\mathcal{A}$ - C^*–алгебра, то естественное отображение является изоморфизмом*

$$\mathbf{K}(\mathcal{A}) \approx \mathbf{K}_p(\mathcal{A}).$$

Поэтому можно определить некоммутативную сигнатуру для многообразий с собственным действием дискретной группы, принимающей значения аналогично классическому случаю:

$$\mathbf{sign}\ M \stackrel{def}{=} \mathbf{sign}\ (ACP(M, G)) \in \mathbf{K}_p(\mathcal{A}).$$

2.4 Бордизмы многообразий с собственным действием

Определение 5 *Рассмотрим ориентируемое многообразие X с собственным действием группы G.*

Скажем, что многообразие X бордантно нулю, если существует такое ориентируемое многообразие W с собственным действием группы G, что

$$\partial W = X.$$

Через ${}_p\Omega_n^G$ обозначим множество всех классов бордизмов ориентируемых многообразий с собственным действием группы G.

Теорема 6 *Некоммутативная сигнатура* $\mathbf{sign}\ (ACP(M, G))$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

- *она является гомотопическим инвариантом,*
- *она является инвариантом бордизмов.*

Следовательно, получается корректное определение отображения

$$\mathbf{sign}\ :\ {}_p\Omega_n^G \longrightarrow \mathbf{K}_p(\mathcal{A}).$$

Пусть $_f\Omega_n^G$ обозначает подобную группу бордизмов для свободного кокомпактного действия группы G. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} {}_p\Omega_n^G & \stackrel{\mathbf{sign}}{\longrightarrow} & \mathbf{K}_p(\mathcal{A}) \\ \cup & & \cup \\ {}_f\Omega_n^G & \stackrel{\mathbf{sign}}{\longrightarrow} & \mathbf{K}(\mathcal{A}) \end{array}$$

Пусть BG обозначает классифицирующее пространство, т.е. комплекс Эйленберга-Маклейна $BG = \mathbf{K}(G,1)$. Каждое многообразие M со свободным действием группы G порождает такое непрерывное отображение

$$\varphi_M : M/G \longrightarrow BG$$

, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{\widetilde{\varphi}_M}{\longrightarrow} & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ M/G & \stackrel{\varphi_M}{\longrightarrow} & BG \end{array}$$

коммутативна. Тогда следующие группы бордизмов

$${}_f\Omega_n^G \approx \Omega_n^G(BG)$$

изоморфны, т.е. сигнатура задает отображение из классических бордизмов классифицирующего пространства

$$\Omega_n^G(BG) \stackrel{\mathbf{sign}}{\longrightarrow} \mathbf{K}(\mathcal{A}),$$

и поэтому выражается в терминах характеристических классов в виде известной формулы Хирцебруха.

2.5 Формула Хирцебруха

Эта формула гласит, что для компактного ориентируемого многообразия M

$$\mathbf{sign}\, M = \langle L(M), [M] \rangle,$$

где $L(M)$ есть характеристический класс Хирцебруха, выражаемый через классы Понтрягина. Если же M есть многообразие со свободным кокомпактным действием группы G, то имеет место похожая формула:

$$\mathbf{sign}\, M = \langle L(M/G)\mathbf{ch}_{\mathcal{A}}(\xi_{\mathcal{A}}), [M/G] \rangle \in \mathbf{K}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{Q},$$

где $\mathcal{A} = C^*[G]$ есть групповая C^*–алгебра группы G.

2.6 Классифицирующее пространство для собственного действия

Теорема 7 (П.Баум, А.Кон, Н.Хигсон) *Для собственного действия группы G существует универсальное пространство $_pEG$ с собственным действием* *группы G такое, что для любого пространства X с собственным действием группы G имеется эквивариантное непрерывное отображение*

$$f : X \to BG$$

с точностью до эквивариантной гомотопии.

Это значит, что

$${}_p\Omega_n^G \approx {}_p\Omega_n^G({}_pEG).$$

Каждое многообразие M с собственным действием группы G порождает стратифицированное многообразие с особенностями $M' = M/G$. Другими словами имеется естественное отображение

$${}_p\Omega_n^G \xrightarrow{/} {}_s\Omega_n({}_pEG/G).$$

2.7 Конструкция Коннера–Флойда неподвижных точек

Чтобы прояснить понятие бордизмов для стратифицированных многообразий можно применить так называемую конструкцию Коннера–Флойда неподвижных точек для многообразий с собственным действием. В работах ([?], [?]) определяется категория изотропных подгрупп

$$\mathcal{H}(M) \stackrel{def}{=} \{H_x : x \in M, \quad H_x \neq \{1\}\}.$$

Обозначим через $\{H\}$ множество всех подгрупп, сопряженных подгруппе $H \subset G$. Пусть $\mathfrak{F}$ обозначает множество подгрупп, инвариантных относительно сопряжения и содержащих все подгруппы. Рассмотрим множество $\max\{\mathfrak{F}\}$ максимальных элементов в $\mathfrak{F}$. Полагаем $\mathfrak{H}_0 \stackrel{def}{=} \max\{\mathcal{H}(M)\}$, $\mathfrak{H}'_0 \stackrel{def}{=} \mathcal{H}(M) \setminus \mathfrak{H}_0$, а также $\mathfrak{H}_k \stackrel{def}{=} \max\{\mathfrak{H}'_{k-1}\}$, $\mathfrak{H}'_k \stackrel{def}{=} \mathfrak{H}'_{k-1} \setminus \mathfrak{H}'_{k-1}$. Все семейства в убывающей последовательности

$$\mathfrak{H}_0 \succ \mathfrak{H}_1 \succ \mathfrak{H}_2 \succ \cdots \succ \mathfrak{H}_k \succ \dots$$

инвариантны относительно сопряжения.

Множество стационарных точек $M^{\mathfrak{H}_0}$ является подмногообразием (возможно различной размерности на своих компонентах связности), инвариантное по отношению к действию группы G. Рассмотрим трубчатую инвариантную окрестность $U_0 \supset M^{\mathfrak{H}_0}$, диффеоморфную тотальному пространству эквивариантного нормального векторного расслоения ξ_0 с базой $M^{\mathfrak{H}_0}$, $\dim \xi_0 + \dim M^{\mathfrak{H}_0} = \dim M = n$.

Следовательно мы получаем точную последовательность эквивариантных бордизмов:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & {}_n\Omega_G(\mathfrak{H}'_0) & \xrightarrow{inclusion} & {}_n\Omega_G(\mathfrak{H}_0 \sqcup \mathfrak{H}'_0) & \xrightarrow{fixedpoint} & & \\
\xrightarrow{fixedpoint} & {}_n\Omega_G^v(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}'_0) & \xrightarrow{\partial} & {}_{n-1}\Omega_G(\mathfrak{H}'_0) & \longrightarrow \cdots & &
\end{array}$$

И, аналогично, для любого числа k тоже имеется точная последовательность:

$$\cdots \longrightarrow \quad {}_n\Omega_G(\mathfrak{H}'_k) \quad \xrightarrow{inclusion} \quad {}_n\Omega_G(\mathfrak{H}'_{k-1}) \quad \xrightarrow{fixedpoint}$$
$$\xrightarrow{fixedpoint} \quad {}_n\Omega^v_G(\mathfrak{H}_k, \mathfrak{H}'_k) \quad \xrightarrow{\partial} \quad {}_{n-1}\Omega_G(\mathfrak{H}'_k) \quad \longrightarrow \cdots$$

3 Open problems

- Сравнить индекс сигнатурного дифференциального оператора на многообразии с собственным действием с некоммутативной сигнатурой на многообразии.
- Найти формулу типа Хирцебруха для выражения некоммутативной сигнатуры на многообразиях с собственным действием.
- Вычислить некоммутативную сигнатуру многообразия с собственным действием в терминах неподвижных точек.
- Сравнить двойственность Пуанкаре для многообразий с собственным действием и для фактор-пространства как многообразия с особенностями, используя, на пример когомологии пересечения Горески–Макферсона.
- Сравнить фундаментальную группу фактор-пространства с группой собственного действия на многообразии.

4 Благодарности

Результаты частично поддержаны грантом РФФИ No 05-01-00923-a, грантом Президента Российской Федерации поддержки научных школ No NSh-1562.2008.1 и проектом No. RNP.2.1.1.5055