Современные проблемы некоммутативной геометрии и топологии

Actual problems of noncommutative geometry and topology

В. М. Мануйлов, А. С. Мищенко, Е. В. Троицкий
тел. +7(495)9393798,   e-mail: asmish@mech.math.msu.su

Аннотация

В статье изложены основные результаты, полученные сотрудниками кафедры высшей геометрии и топологии в области некоммутативной геометрии за последние 10 лет.

В последние 3-4 десятилетия в топологии усиленно развивались направления, которые сейчас принято называть "некоммутативной геометрией". По сути дела, это название группирует круг задач и методов их решения, которые изначально базировались на довольно простой идее переформулирования топологических свойств пространств и отображений в терминах соответствующих алгебр непрерывных функций.

Хотя эта идея очень старая, восходит к ключевой теореме Гельфанда–Наймарка о взаимно однозначном соответствии между категорией компактных топологических пространств и категорией коммутативных C^*-алгебр, и разрабатывалась различными авторами как в коммутативном так и в некоммутативном случае, в более или менее явном виде эта идея была провозглашена в виде программы действий А. Конном в его книге "Некоммутативная геометрия" [1].

Несмотря на ее самоочевидность, идея рассматривать, наряду с коммутативными C^*-алгебрами (которые можно интерпретировать как алгебры функций на топологических пространствах максимальных идеалов), также и некоммутативные алгебры как функции на несуществующем "некоммутативном" пространстве оказалась настолько плодотворной, что позволила соединить воедино многообразие понятий и методов из таких разделов, как топология, дифференциальная геометрия, функциональный анализ, теория представлений, асимптотические методы в анализе, и взаимно обогатить их новыми теоремами и свойствами.

Одна из классических задач гладкой топологии, заключающаяся в описании топологических и гомотопических свойств характеристических классов гладких и кусочно-линейных многообразий, за это время приобрела практически завершенный вид исключительно благодаря тому, что к ней были применены разнообразные методы функционального анализа. И, наоборот, попытки осмыслить и решить классические топологические задачи привели к обогащению методов функционального анализа. Как это типично происходит, решение одних частных задач привело к открытию новых горизонтов в развитии математических методов и открытию новых свойств классических математических объектов.

В Московском университете исследования по некоммутативной геометрии интенсивно проводились преимущественно в следующих направлениях:
— Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий;
— Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха;
— Теория индекса и псевдодифференциальные операторы;
— Теория C^*-алгебр и гильбертовых модулей;
— Неклассические представления дискретных групп;

— Характеристические классы в некоммутативной геометрии.

Исследования в области некоммутативной геометрии в Московской топологической школе получили международное признание. За последние 10 лет по указанной тематике московскими специалистами было опубликовано более 100 работ в российских и зарубежных журналах, среди которых ряд монографий ([2], [3], [4]).

Сигнатура и формула Хирцебруха

Локальная комбинаторная формула Хирцебруха

В 1998–2001 годах А. С. Мищенко предпринял программу построения локальной комбинаторной формулы Хирцебруха с коэффициентами в произвольном векторном расслоении. Идея такого построения была сформулирована в работе М. Громова [5] и восходит к конструкции алгебраических комплексов Пуанкаре и так называемой симметрической сигнатуры, рассмотренных в работах [6] и [7]. А. С. Мищенко в [8] построил новую алгебраическую категорию, называемую *почти алгебраическими комплексами Пуанкаре*. Показано, что у каждого компактного замкнутого комбинаторного многообразия существует такое достаточно мелкое симплициальное разбиение, которое естественным образом порождает почти алгебраический комплекс Пуанкаре, сигнатура которого служит левой частью формулы Хирцебруха.

Сигнатура топологических многообразий

Теория алгебраических комплексов Пуанкаре оказалась удобным инструментом для описания сигнатуры многообразия в случае непрерывных семейств локальных систем коэффициентов, поскольку, в отличие от групп (ко)гомологий, группы (ко)цепей не меняют своей размерности при переходе от одной локальной системы коэффициентов к другой. В связи с предложенным М. Громовым [5] новым методом доказательства топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина гладких многообразий естественно построить такую схему вычисления сигнатуры гладкого компактного топологического многообразия, которая бы распространялась на непрерывные семейства локальных систем коэффициентов.

А. С. Мищенко совместно с П. С. Поповым в [9, 10] построил теорию невырожденных квадратичных форм на некоторой естественной категории абстрактных бесконечномерных линейных пространств, у которой имеется гомотопический инвариант, совпадающий с сигнатурой для конечномерных пространств. Построенная теория дает возможность при вычислении сигнатур использовать для топологических многообразий вместо индефинитных представлений фундаментальных групп непрерывные семейства характеров фундаментальной группы.

Открытые многообразия с собственным действием группы

Неодносвязные компактные многообразия с точки зрения некоммутативной геометрии естественно интерпретируются как открытые некомпактные многообразия со свободным действием фундаментальной группы. Такое представление естественно обобщается на случай открытых многообразий с собственным действием дискретной группы, т.е. таким действием, у которого любая изотропная подгруппа конечна, а фактор пространство действия группы компактно. Оказывается, что метод построения некоммутативной сигнатуры при помощи алгебраических комплексов Пуанкаре пригоден в этой новой ситуации над полем рациональных чисел. Такая конструкция позволяет сравнить теорию индекса собственных действий, развитую А. Конном, П. Баумом и Н. Хигсоном ([11]) и теорию комбинаторной сигнатуры собственных действий.

Сигнатура транзитивных алгеброидов Ли

Сигнатурные инварианты оказываются полезными при рассмотрении более широкого класса систем коэффициентов на многообразиях. Одним из таких классов являются алгеброиды Ли, для которых можно строить когомологии, двойственность Пуанкаре и, следовательно, сигнатуру и формулы типа Хирцебруха. А. С. Мищенко совместно с Я. Кубарским было предпринято исследование ([12], [13]) так называемых транзитивных алгеброидов Ли и установлен ([13]) способ вычисления сигнатуры транзитивного алгеброида Ли в терминах когомологий многообразия с коэффициентами в плоском расслоении $\mathbf{H}^*(\mathbf{g})$ когомологий присоединенного расслоения со слоем, изоморфным конечномерной алгебре Ли $\mathbf{g}$: $\mathrm{sign}\mathbf{H}(L) = \mathrm{sign}E_2$ для члена E_2 спектральной последовательности Серра-Хохшильда $E_2^{p,q} = \mathbf{H}^p_{\nabla^q}\left(M; \mathbf{H}^q\left(\mathbf{g}\right)\right)$.

Классифицирующее пространство для почти плоских расслоений

Используя естественную конструкцию Ханке и Шика ([14]), А. С. Мищенко и Н. Телеман представили ([15],[16]) простое описание почти плоских расслоений в смысле Конна, Громова и Московичи ([17]). Каждое почти плоское расслоение может быть интерпретировано при помощи плоских расслоений для подходящим образом измененных структурных групп. В частности, получено естественное объяснение того, что всякое почти плоское расслоение приходит из классифицирующего пространства фундаментальной группы.

Теория гильбертовых C^*-модулей

Теория индекса эллиптических операторов над C^*-алгебрами [18, 19, 20] потребовала развить абстрактную теоретико-функциональную теорию гильбертовых C^*-модулей и фредгольмовых операторов в этих модулях. Наиболее существенное отличие от классического случая заключается в том, что операторы в гильбертовых C^*-модулях как правило не имеют ограниченных сопряженных, что сильно усложнило анализ их свойств.

В работе [21] было построено относительное аналитическое кручение на уровне не l_2-когомологий, т.е. групповых алгебр фон Неймана, а на уровне групповых C^*-алгебр. В частности, показано, что в случае алгебр фон Неймана относительное аналитическое кручение равно разности между аналитическим кручением многообразия и комбинаторным кручением.

Главным алгебро-топологическим инструментом, связывающим геометрию и топологию неодносвязных многообразий с теорией банаховых алгебр, является K-теория $K^*(X; A)$ “с коэффициентами в C^*-алгебре A”, прежде всего, при A равной алгебре функций на топологическом пространстве (многообразии или классифицирующем пространстве фундаментальной группы) или равной групповой $C*$-алгебре (приведенной или полной) фундаментальной группы. При использовании K-теории с коэффициентами в C^*-алгебре очень важно иметь удобное описание ее в терминах аналитически определенных представляющих пространств.

Стягиваемые группы обратимых операторов

В связи с тем, что не всякий ограниченный оператор в стандартном модуле $l_2(A)$ допускает сопряженный, возникают, соответственно, две общих линейных группы (GL и GL^*) и два варианта представляющих пространств. Важно понять, стягиваемы ли эти группы и совпадают ли соответствующие K-теории. Положительный ответ на этот вопрос даст большую техническую свободу, а отрицательный может привести к определению новых инвариантов.

Следует отметить, что большинство вопросов в этой сложной теме оставалось нерешенными с 1982 г. Е. В. Троицкому удалось получить ряд важных продвижений в их решении. Получено новое простое доказательство теоремы Кунца и Хигсона о стягиваемости группы обратимых операторов, допускающих сопряженный, для C^*-алгебр со строго положительным элементом. Доказана стягиваемость полной группы обратимых операторов в некоторых частных случаях, например, для подалгебр алгебры компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве и для алгебр функций на конечномерных многообразиях. Доказана стягиваемость полной общей линейной группы стандартного гильбертова модуля и для общей коммутативной сигма-унитальной алгебры.

В классической работе Диксмье и Дуади в свое время была доказана стягиваемость группы унитарных операторов в гильбертовом пространстве в сильной топологии. В случае C^*-алгебр Е. В. Троицким [22] доказаны различные варианты обобщения этой теоремы на случай общей и полной общей линейной группы стандартного гильбертова модуля.

Для гильбертовых модулей над C^*-алгебрами Е. В. Троицким и П. С. Поповым была исследована проблема почти ортодополняемости функционалов свободным подмодулем, которая тесно связана со стягиваемостью полной линейной группы. Свойство почти ортодополняемости функционалов было рассмотрено для стандартного модуля $l_2(A)$ над алгебрами с единицей, в этом случае оно является обобщением определения бесконечной размерности на некоммутативный случай.

Доказана эквивалентность двух определений свойства почти ортодополняемости в общем некоммутативном случае. Получены критерии выполнения этого свойства для алгебр фон Неймана, выраженные в терминах существования частичных изометрий, у которых коядро строго включает образ. Дано доказательство стабильности класса алгебр с этом свойством относительно тензорного произведения на матричные алгебры. Приведены примеры алгебр, обладающих и не обладающих этим свойством, и контрпримеры, показывающие отличие рассмотренного свойства от других определений размерности или ранга для C^*-алгебр [23].

Условные ожидания на C^*-алгебрах

В. М. Мануйловым, Е. В. Троицким и М. Франком [24] были изучены условные ожидания на C^*-алгебрах, возникающие из действия дискретных групп. Рассмотрен ряд новых примеров действий групп, показывающих, в каких случаях условные ожидания корректно определены. Доказан ряд утверждений о конечности индекса таких условных ожиданий. Показано, что в случае конечности индекса условное ожидание определяет гильбертов модуль с внутренним произведением, принимающим значения в алгебре инвариантных функций. Найдены достаточные условия, при которых этот гильбертов модуль рефлексивен. В частности это так, если все орбиты конечны и ограничены в совокупности некоторым числом n, и точки, орбита которых меньше n, изолированы. Условие изолированности таких точек оказалось излишним и было снято В. В. Серегиным [25]. Обратные утверждения при разумных ограничениях получены Е. В. Троицким в [26].

При изучении инвариантов, связанных с действием групп на многообразиях, в том числе, таких как числа Лефшеца C^*-комплексов, естественно рассматривать топологизированные (следом и другими способами) K-группы и распространить доказанные Е. В. Троицким ранее теоремы на этот случай.

В этом русле А. А. Павлову [27, 28] удалось определить новые инварианты и исследовать их свойства. Построен функтор N_0 на категории алгебр фон Неймана как некоторый (более естественный в W^*-случае) аналог K-теории. Изучена его связь с операторной K-теорией. Кроме того, исследованы свойства N-групп W^*-алгебр.

Также отметим, что группы $N_0(A)$ как расширения $\mathbf{C}\otimes K_0(A)$-групп естественно возникают при рассмотрении произвольных унитарных эндоморфизмов W^*-эллиптических комплексов. При этом оказывается возможным определить (обобщенные) числа Лефшеца для таких эндоморфизмов со значениями в группе $N_0(A)$. Кроме того, удалось построить обобщенный характер Чженя как отображение из $N_0(A)$ в банаховы циклические гомологии (четной градуировки) W^*-алгебры A, который является продолжением классического характера Чженя с $K_0(A)$ в некотором естественном смысле.

Нетеровость фредгольмовых операторов

В работе [29] М. Атья и Г. Сегал рассмотрели семейства фредгольмовых операторов, параметризованных точками компактного пространства K, которые непрерывны в топологии, более слабой, чем равномерная топология, т.е. топологии нормы в пространстве ограниченных операторов $B(H)$ банахова пространства H.

В связи с этим представляется интересным установить, описывают ли условия, характеризующие семейства фредгольмовых операторов из статьи [29], такие семейства, которые формируют фредгольмов оператор над C^*-алгеброй $\mathcal{A} = C(K)$ непрерывных функций на пространстве K.

Имеется два аналога классических компактных операторов для случая C^*-модулей: компактные операторы, допускающие сопряженные, и *все* компактные операторы, т.е. не обязательно допускающие сопряженные операторы.

Классические фредгольмовы операторы — это те, которые обратимы с точностью до компактного слагаемого. При построении понятия фредгольмовых операторов в гильбертовом C^*-модуле в работе [19] был использован первый аналог: фредгольмов оператор определялся как ограниченный оператор, обратимый с точностью до слагаемого, являющегося компактным оператором, допускающим сопряженный оператор.

Компактные операторы, допускающие сопряженные, образуют идеал только в алгебре ограниченных операторов, допускающих сопряженные, но могут не образовывать идеал в алгебре *всех* ограниченных операторов. В работе М. Атья и Г. Сегала ([29]) обосновывается необходимость изучения ограниченных операторов над алгеброй непрерывных функций, которые могут не иметь ограниченного сопряженного оператора.

Этот вопрос наконец получил полное решение в совместной работе А. С. Мищенко и А. А. Ирматова [30] при помощи развития более общей версии фредгольмовых операторов над C^*-алгебрами. Такие операторы определяются как ограниченные операторы, обратимые по модулю идеала *всех* компактных операторов. Главное свойство этого нового класса заключается в том, что такие фредгольмовы операторы все еще допускают (нетерово) разложение в прямую сумму изоморфизма и конечно порожденного оператора.

Такое разложение позволяет построить корректно определенный гомотопический инвариант типа индекса фредгольмова оператора, т.е. позволяет доказать, что индекс фредгольмова оператора как элемента соответствующий K-группы не зависит от выбора (нетерова) разложения.

Специальный случай фредгольмовых операторов (в смысле работы [19]) над коммутативной C^*-алгеброй $C(K)$ непрерывных функций на компактном топологическом пространстве K был также рассмотрен в работе [29]. Это следует из того факта, что семейство компактных операторов, непрерывное в равномерной топологии образует компактный оператор над алгеброй $C(K)$, который допускает сопряженный оператор.

В дополнение строится новая топология IM на пространстве компактных операторов гильбертова пространства таким образом, что непрерывные в топологии IM семейства компактных операторов порождают идеал *всех* компактных операторов над алгеброй $C(K)$.

Теория асимптотических представлений

Асимптотические представления и почти представления

Очень плодотворной для некомпактных групп оказалась идея рассмотрения вместо представлений некоторых более общие отображения в алгебру операторов, которые, с одной стороны, увеличивают свободу маневра, а, с другой, сохраняют основные черты представлений, необходимых для применения их в топологических задачах. Источником такого сорта идей послужили, в частности, чисто физические соображения, которые заключаются в том, что любая наблюдаемая симметрия явления, а вместе с ней и некоторый закон сохранения, в действительности проявляется неточно. Поэтому естественно возникает вопрос распознавания по неточной симметрии истинной симметрии.

Эта задача известна еще со времен Халмоша и его задачи о паре почти коммутирующих унитарных операторов. Как показал Войкулеску, существует последовательность почти коммутирующих пар унитарных операторов со стремящимся к нулю коммутатором (так называемая пара Войкулеску), которые нельзя сколь угодно близко аппроксимировать последовательностью пар коммутирующих операторов.

Другой вариант обобщения представлений на случай неточных соотношений дает понятие квазипредставлений, в которых предполагается равномерная оценка норм соотношений в группе. В этом случае, как показал А. И. Штерн, ситуация прямо противоположная, что позволило создать стройную теорию квазипредставлений и квазихарактеров.

В статье [31] найдена связь между асимптотическими представлениями дискретной группы и фредгольмовыми представлениями этой группы. Для этого построена новая C^*-алгебра, обслуживающая асимптотические представления дискретных групп и C^*-алгебр с конечным числом порождающих элементов, и найден способ ее вложения в алгебру Калкина такой, что индуцированный этим вложением гомоморфизм K_1-групп является изоморфизмом. Благодаря наличию такого вложения асимптотические представления пропускаются через представления в алгебру Калкина. Как следствие, показано, что векторные расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$, которые могут быть получены с помощью асимптотических представлений дискретной группы π, могут быть также получены с помощью представлений группы $\pi \times \mathbf{Z}$ в алгебру Калкина. Найдено также обобщение понятия фредгольмова представления и показано, что асимптотические представления можно рассматривать как асимптотические фредгольмовы представления. В [32] показано, что для найденной группы Γ естественное отображение из группы асимптотических представлений в группу $K_0(B\Gamma)$ является тривиальным с точностью до кручения, в то время как аналогичное отображение из группы фредгольмовых представлений накрывает свободную образующую $K_0(B\Gamma)$. При исследовании обнаруженного примера удалось сформулировать новое свойство конечно порожденных групп, связанное с почти представлениями: группа называется асимптотически устойчивой, если любое достаточно точное ее почти представление может быть включено в асимптотическое представление. Доказано, что, наряду с группами, очевидно обладающими этим свойством (свободными, абелевыми), этим свойством обладают также фундаментальные группы ориентированных поверхностей.

В. М. Мануйловым совместно с Ю Чао [33] исследованы свойства почти представлений групп со свойством (T) Каждана. В предположении, что группа удовлетворяет свойству Жука (это свойство является лишь немного более сильным, чем свойство (T)), для любого ϵ-почти представления π малая окрестность единицы отделена от остального спектра $\pi(x)$ на величину $C(\epsilon)$, которая легко вычисляется и в пределе $\epsilon \to 0$ дает C.

Асимптотические представления и расширения C^*-алгебр

Основным инструментом для классификации расширений C^*-алгебр служит конструкция Конна–Хигсона, позволяющая сопоставлять расширениям асимптотические гомоморфизмы C^*-алгебр. В ряде частных случаев эта конструкция устанавливает изоморфизм между классами эквивалентности расширений и элементами E-теории. Однако в общем случае E-теория имеет естественную структуру абелевой группы, а расширения - лишь полугруппы, и до сих пор неизвестно, когда классы эквивалентности расширений также образуют группу. При классификации расширений C^*-алгебр с точностью до стабильной унитарной эквивалентности известны примеры (Дж. Андерсон, С. Вассерманн, Э. Кирхберг, У. Хаагеруп) необратимых расширений, что усложняет задачу классификации. Цикл работ В. М. Мануйлова и К. Томсена [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42] посвящен этой проблеме.

В статье [36] было предложено классифицировать расширения с точностью до асимптотической стабильной эквивалентности и было показано, что многие из необратимых расширений становятся обратимыми для этой новой эквивалентности. В частности, было показано, что для C^*-алгебр, являющихся надстройками, стабильная унитарная эквивалентность совпадает с гомотопической эквивалентностью, и классы этой эквивалентности образуют группу. Для общих C^*-алгебр в [38] установлено, что группа классов асимптотической стабильной эквивалентности обратимых расширений совпадает с группой асимптотических гомоморфизмов, допускающих специальное продолжение.

Естественность гомотопической классификации расширений C^*-алгебр мотивировала исследования функтора гомотопических классов расширений. Наиболее важными представлялись два вопроса: как связаны между собой расширения и асимптотические гомоморфизмы (т.е. насколько информативна конструкция Конна–Хигсона) и существуют ли гомотопически необратимые расширения. При ответе на первый вопрос [39] было обнаружено, что расширениям соответствуют так называемые трансляционно инвариантные асимптотические гомоморфизмы, т.е. асимптотические гомоморфизмы $(\varphi_t)_{t\in\mathbf{R}} : C_0(\mathbf{R}; A) \to B$, удовлетворяющие условию $\varphi_{t+s}(f) = \varphi_t(\alpha_s(f))$, где $f \in C_0(\mathbf{R}; A)$ — непрерывная функция со значениями в C^*-алгебре A, а $\alpha_s(f)(x) = f(x+s)$. При этом было замечено [43], что все известные примеры асимптотических гомоморфизмов обладают свойством трансляционной инвариантности и именно это свойство лежит в основе альтернативного доказательства Хигсона теоремы об индексе.

Для ответа на второй вопрос В. М. Мануйлов и К. Томсен модифицировали [41] известный пример С. Вассерманна необратимого расширения C^*-алгебры, связанной с группой, обладающей свойством (T) Каждана. С помощью инварианта Басби расширений C^*-алгебр было построено препятствие к гомотопической обратимости расширений как элемент K_0-группы некоторой специальной C^*-алгебры и было показано, что если в примере Вассерманна рассматривать представления группы с учетом кратностей, то при быстрорастущих кратностях указанное препятствие отлично от нуля.

Для изучения вопроса о необратимости расширений было определено и исследовано новое тензорное произведение C^*-алгебр, т.е. новая норма на тензорных произведениях C*-алгебр, естественно ведущая себя по отношению к асимптотическим гомоморфизмам. Было показано, что эта норма действительно отличается как от минимальной, так и от максимальной тензорных норм. Отличие этой нормы от факторной тензорной нормы в ряде примеров доказывает необратимость соответестующих расширений [40].

В [44] исследован вопрос об устойчивости асимптотических гомоморфизмов в алгебру Калкина. Оказалось, что все они гомотопины настоящим гомоморфизмам. Это удивительно, так как для асимптотических гомоморфизмов в другие C^*-алгебры ситуация противоположна. Благодаря этому наблюдению удалось доказать [37], что E-теория Конна–Хигсона является частным случаем KK-теории Каспарова. Именно, для C^*-алгебр A и B имеет место изоморфизм $E(A, B) = KK(A, Q(B))$, где $Q(B)$ — обобщенная алгебра Калкина алгебры B.

В статье [42] построена (полу)группа относительных расширений для C^*-алгебры и ее подалгебры. Новизна функтора относительных расширений в том, что вместо идеала рассматривается произвольная подалгебра. Тем не менее, для функтора относительных расширений существует классическая шестичленная точная последовательность (как в K-теории). Получено описание функтора относительных расширений в терминах, аналогичных теории Брауна-Дугласа-Филлмора, т.е. как функтора K-гомологий для C^*-алгебры и ее подалгебры. По аналогии с теорией Брауна-Дугласа-Филлмора оказывается возможным исследовать относительную задачу аппроксимации нескольких существенно нормальных операторов нормальными.

Построение и исследование асимптотических представлений C^*-алгебр затруднено тем, что в этом случае отсутствуют топологические (гомотопические) инварианты. Тем не менее, и в этом случае иногда удается отличить "настоящие" асимптотические представления от возмущений настоящих представлений. Это связано со свойством точности C^*-алгебр. В. М. Мануйлову [45] впервые удалось построить асимптотическое представление редуцированной групповой C^*-алгебры свободной группы, которое не является возмущением настоящих представлений. Его конструкция является комбинацией семейств представлений, построенных

Хаагерупом–Торбьернсеном и Кунцем. Она позволяет вычислить асимптотическую тензорную норму в ряде интересных случаев, а также демонстрирует разницу между свободными группами и группами со свойством (T) Каждана.

Эквивариантные аспекты некоммутативной геометрии

Одним из важнейших элементов классической теории индекса эллиптических операторов, еще не включенным в теорию C^*-индекса, оставалась теория индекса эквивариантных семейств. Е. В. Троицким эта проблема была решена в важнейшем случае: доказана теорема об индексе для эллиптических операторов, действующих в сечениях расслоений со слоем проективный модуль над C^*-алгеброй, в ситуации, когда компактная группа Ли действует не только в тотальном пространстве, но и на самой алгебре скаляров, коммутируя с символом ("дважды эквивариантная" C^*-теорема об индексе). Как приложение, получена эквивариантная теорема об индексе для семейств в случае прямого произведения базы на пространство параметров [46].

Дальнейшее развитие этого направления привело Е. В. Троицкого и В. Нистора к исследованию семейств эллиптических операторов, инвариантных относительно действия расслоения компактных групп Ли. Была построена соответствующая теория индекса в [47, 48].

Идея рассмотрения комплексных действий группы привело к изучению так называемых чисел Рейдемайстера (или Нильсена), как числа классов сопряженности элементов группы, скрученных некоторым автоморфизмом $\varphi : \pi \to \pi$. По аналогии с классической теоремой Бернсайда Е. В. Троицкий совместно с А. Фельштыном установил, что это число равно числу неподвижных точек отображения $\varphi^* : \hat{\pi} \to \hat{\pi}$ пространства классов эквивалентных неприводимых представлений группы π в случае групп типа I [49]. В дальнейшем удалось получить близкие результаты для почти полициклических групп [50]. Ряд важных смежных результатов получен в [51, 52]. В [53] в русле этого подхода была доказана некоммутативная версия теоремы Рисса-Маркова-Какутани, примененная для получения слабого варианта отождествления, но зато верного для всех дискретных групп.

А. В. Ершовым [54] была развита теория расслоений со слоем, равным матричной алгебре, их гомотопическая классификация, конструкция представляющих пространств, с применением к мультипликативной теории одномерных расслоений.

Список литературы

[1] *Connes A.* Noncommutative Geometry. — Academic Press, 1994.

[2] *Mishchenko A. S., Luke G.* Vector Bundles and Their Applications. — Dordrrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[3] *Мануйлов В. М., Троицкий Е. В.* C^*-гильбертовы модули. — Москва: Факториал пресс, 2001.

[4] *Соловьев Ю. П., Троицкий Е. В.* C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии. — Москва: Факториал Пресс, 1996.

[5] *Gromov M.* Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures // Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. II (New Brunswick, NJ, 1993). — Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1996. — Vol. 132 of *Progr. Math.* — Pp. 1–213.

[6] *Мищенко А. С.* Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. 1. Рациональные инварианты // *Известия АН СССР, Сер.матем.* — 1970. — Т. 34, № 3. — С. 501–514.

[7] *Мищенко А. С., Соловьев Ю. П.* Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха // *Математический сборник, Новая серия.* — 1980. — Т. 111, № 2. — С. 209–226.

[8] *Мищенко А. С.* Локальная комбинаторная формула Хирцебруха // *Труды МИАН.* — 1999. — Т. 224. — С. 249–263.

[9] *Mishchenko A. S., Popov P. S.* On construction of signature of quadratic forms on infinite dimensional abstaract spaces // *Georgian Math. J.* — 2002. — Vol. 9, no. 4. — Pp. 773–783.

[10] *Mishchenko A. S., Popov P. S.* Poincare duality and signature for topological manifolds // *Topology and its Applications.* — 2008. — Vol. 155. — Pp. 2041–2047.

[11] *Baum P., Connes A., Higson N.* Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras // *Contemp. Math.* — 1994. — Vol. 167. — Pp. 241–291.

[12] *Кубарски Я., Мищенко А. С.* Алгеброиды Ли: спектральные последовательности и сигнатура // *Математический сборник.* — 2003. — Т. 194, № 7. — С. 127–154.

[13] *Kubarski J., Mishchenko A.* Algebraic aspects of the hirzebruch signature operator and applications to transitive lie algebroids // *Submitted to the Russian Journal of Mathematical Physics.* — 2008. — P. 34.

[14] *Hanke B., Schick T.* Enlargeability and index theory // *J. Differential Geom.* — 2006. — Vol. 74, no. 2. — Pp. 293–320.

[15] *Mishchenko A. S., Teleman N.* Almost flat bundles and almost flat structures // *Topological methods in nonlinear analysis.* — 2005. — Vol. 26. — Pp. 75–87.

[16] *Мищенко А. С., Телеман Н.* Классифицирующее пространство для почти плоских расслоений // *Труды семинара по векторному и тензорному анализу.* — 2005. — Т. 26. — С. 250–268.

[17] *Connes A., Gromov M., Moscovici H.* Conjecture de Novikov et fibrés presque plats // *C. R. Acad. Sci. Paris, série I.* — 1990. — Vol. 310. — Pp. 273 – 277.

[18] *Мищенко А. С.* Теория эллиптических операторов над C^*-алгебрами // *Доклады АН СССР.* — 1978. — Т. 239, № 6. — С. 1289–1291.

[19] *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Индекс эллиптических операторов над C^*-алгебрами // *Известия АН СССР, Сер.матем.* — 1979. — Т. 43, № 4. — С. 831–859.

[20] *Мищенко А. С.* Представления компактных групп в гильбертовых модулях над C^*–алгебрами // *Труды МИАН СССР.* — 1984. — Т. 166. — С. 161–176.

[21] *Carey A. L., Mathai V., Mishchenko A. S.* On analytic torsion over C^*-algebras // Nielsen theory and Reidemeister torsion (Warsaw, 1996). — Warsaw: Polish Acad. Sci., 1999. — Vol. 49 of *Banach Center Publ.* — Pp. 43–67.

[22] *Троицкий Е. В.* Функционалы на $l_2(A)$ и теоремы типа Кюйпера и Диксмье-Дуади для C^*-гильбертовых модулей // *Труды МИРАН им. В.А.Стеклова.* — 1999. — Т. 225. — С. 362–380.

[23] *Попов П. С.* Топологический критерий почти ортодополняемости любого функционала на $l_2(C(X))$ // *Матем. заметки.* — 1999. — Т. 65, № 4. — С. 636–640.

[24] *Frank M., Manuilov V. M., Troitsky E. V.* On conditional expectations arising from group actions // *Zeitschr. Anal. Anwendungen.* — 1997. — Vol. 16. — Pp. 831–850.

[25] *Серегин В. В.* Рефлексивность C^*-гильбертовых модулей, полученных из действий групп // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика.* — 2003. — № 1. — С. 40–45, 72.

[26] *Troitsky E. V.* Discrete group actions and corresponding modules // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2003. — Vol. 131. — Pp. 3411–3422.

[27] *Павлов А. А.* Функтор N_0 над категоией алгебр фон Неймана и его связь с операторной K-теорией // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика.* — 2000. — no. 4. — Pp. 55–58, 73.

[28] *Павлов А. А.* Нормированные группы и их применение в некоммутативной дифференциальной геометрии // *Записки научных семинаров ПОМИ.* — 2000. — Vol. 266, no. Теор. представ., дин. сист., комбин. и алгоритм. методы 5. — Pp. 234–244, 340.

[29] *Atiyah M., Segal G.* Twisted K-theory // *Ukr. Mat. Visn.* — 2004. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 287–330.

[30] *Irmatov A. A., Mishchenko A. S.* On compact and Fredholm operators over C^*-algebras and a new topology in the space of compact operators // *Journal of K-theory.* — 2008. — Vol. 2. — Pp. 329–351. — arXiv:math.KT 0504548 v1 27 Apr 2005.

[31] *Мануйлов В. М., Мищенко А. С.* Asymptotic and Fredholm representations of discrete groups // *Mat. Sb.* — 1998. — Vol. 189, no. 10. — Pp. 53–74.

[32] *Мануйлов В. М.* Почти представления и асимптотические представления дискретных групп // *Изв. РАН, сер. матем.* — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 159–178.

[33] *Мануйлов В. М., Чао Ю.* О почти представлениях групп со свойством T // *Матем. заметки.* — 2008. — Vol. 84, no. 2. — Pp. 219–230.

[34] *Manuilov V. M., Thomsen K.* Quasidiagonal extensions and sequentially trivial asymptotic homomorphisms // *Adv. Math.* — 2000. — Vol. 154, no. 2. — Pp. 258–279.

[35] *Мануйлов В. М., Томсен К.* Асимптотически расщепимые расширения и E-теория // *Алгебра и анализ.* — 2000. — Т. 12, № 5. — С. 142–157.

[36] *Manuilov V., Thomsen K.* The Connes-Higson construction is an isomorphism // *J. Funct. Anal.* — 2004. — Vol. 213, no. 1. — Pp. 154–175.

[37] *Manuilov V., Thomsen K.* E-theory is a special case of KK-theory // *Proc. London Math. Soc. (3).* — 2004. — Vol. 88, no. 2. — Pp. 455–478.

[38] *Manuilov V., Thomsen K.* Semi-invertible extensions and asymptotic homomorphisms // *K-Theory.* — 2004. — Vol. 32, no. 2. — Pp. 101–138.

[39] *Manuilov V., Thomsen K.* Extensions of C^*-algebras and translation invariant asymptotic homomorphisms // *Math. Scand.* — 2007. — Vol. 100, no. 1. — Pp. 131–160.

[40] *Manuilov V., Thomsen K.* On the asymptotic tensor C^*-norm // *Arch. Math. (Basel).* — 2006. — Vol. 86, no. 2. — Pp. 138–144.

[41] *Manuilov V., Thomsen K.* On the lack of inverses to C^*-extensions related to property T groups // *Canad. Math. Bull.* — 2007. — Vol. 50, no. 2. — Pp. 268–283.

[42] *Manuilov V. M., Thomsen K.* Relative K-homology and normal operators // *J. Operator Theory.* — в печати.

[43] *Manuilov V.* Translation invariant asymptotic homomorphisms: equivalence of two approaches in index theory // *J. Operator Theory.* — 2006. — Vol. 55, no. 2. — Pp. 339–347.

[44] *Manuilov V. M.* Asymptotic homomorphisms into the Calkin algebra // *J. Reine Angew. Math.* — 2003. — Vol. 557. — Pp. 159–172.

[45] *Manuilov V. M.* Asymptotic representations of the reduced C^*-algebra of a free group: an example // *Bull. London Math. Soc.* — 2008. — Vol. 40. — Pp. 838—-844.

[46] *Troitsky E. V.* "Twice" equivariant C^*-index theorem and the index theorem for families // *Acta. Appl. Math.* — 2001. — Vol. 68. — Pp. 39–70.

[47] *Nistor V., Troitsky E.* An index for gauge-invariant operators and the Dixmier-Douady invariant // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 2004. — Vol. 356, no. 1. — Pp. 185–218.

[48] *Nistor V., Troitsky E.* The Thom isomorphism in gauge-equivariant K-theory // C^*-algebras and elliptic theory. — Basel: Birkhäuser, 2006. — Trends Math. — Pp. 213–245.

[49] *Fel′shtyn A., Troitsky E.* A twisted Burnside theorem for countable groups and Reidemeister numbers // Noncommutative geometry and number theory. — Wiesbaden: Vieweg, 2006. — Aspects Math., E37. — Pp. 141–154.

[50] *Fel′shtyn A., Troitsky E.* Twisted Burnside-Frobenius theory for discrete groups // *J. Reine Angew. Math.* — 2007. — Vol. 613. — Pp. 193–210.

[51] *Fel′shtyn A., Troitsky E., Vershik A.* Twisted Burnside theorem for type II_1 groups: an example // *Math. Res. Lett.* — 2006. — Vol. 13, no. 5-6. — Pp. 719–728.

[52] *Fel′shtyn A., Leonov Y., Troitsky E.* Twisted conjugacy classes in saturated weakly branch groups // *Geom. Dedicata.* — 2008. — Vol. 134. — Pp. 61–73.

[53] *Троицкий Е.* Некоммутативная теорема Рисса и теорема типа Бернсайда о скрученной сопряженности // *Функцион. анализ и его прилож.* — 2006. — Т. 40, № 2. — С. 44–54.

[54] *Ершов А. В.* О гомотопических свойствах расслоений со структурной группой автоморфизмов матричной алгебры // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика.* — 1999. — N. 6. — С. 56–60.